Prof. Dr. Jürgen Roth

Grundvorstellungen

zur Differenzial- und Integralrechnung

Grundvorstellungen

zur Differenzial- und Integralrechnung

1 Grundvorstellungen

2 Ableitungsbegriff

- Ableitung als Tangentensteigung
- Ableitung als lokale Änderungsrate
- Ableitung als lokale lineare Approximation

3 Integralbegriff

- Rekonstruktion der Gesamteffekts
- Mittelung
- Orientierter Flächeninhalt

Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Grundvorstellungen
zur Differenzial- und Integralrechnung

Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Definition der Begriffe

Grundvorstellungen

- Tragfähige mentale Modelle für einen Begriff oder ein Verfahren

Grundwissen

- Für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffsdefinitionen, Formeln, Sätze, …)
- Sollten auswendig gewusst werden

Grundfertigkeiten

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgeben)

Kernpunkte des Grundvorstellungskonzepts

vom Hofe, R.; Hattermann, M. (2014): Zugänge zu negativen Zahlen. mathematik lehren 183, S. 2-7

- **Grundvorstellungen**
  - repräsentieren abstrakte Begriffe auf einer anschaulichen Ebene
  - stellen Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungszusammenhängen her
- **Zwei Typen von Grundvorstellungen**
  - **Primäre Grundvorstellungen**
    - haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
  - **Sekundäre Grundvorstellungen**
    - werden zunehmend mit mathematischen Darstellungsmitteln (Zahlenstrahl, Koordinatensystem, Graph, …) repräsentiert

Grundverständnis

Grundverständnis

- … ist Ausbildung von Grundvorstellungen und deren Vernetzung
- … eines mathematischen Inhalts kann mit drei Dimensionen umfassend beschrieben werden.
  - **Sinnkonstituierung** durch Anknüpfung an bekannte Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen
  - **Aufbau visueller Repräsentationen**, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen
  - **Fähigkeit zur Anwendung des Inhalts auf die Wirklichkeit** durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur

Grundvorstellungen
zur Differenzial- und Integralrechnung

1 Grundvorstellungen

2 Ableitungsbegriff

- Ableitung als Tangentensteigung
- Ableitung als lokale Änderungsrate
- Ableitung als lokale lineare Approximation

3 Integralbegriff

- Rekonstruktion der Gesamteffekts
- Mittelung
- Orientierter Flächeninhalt

Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Tangentensteigung

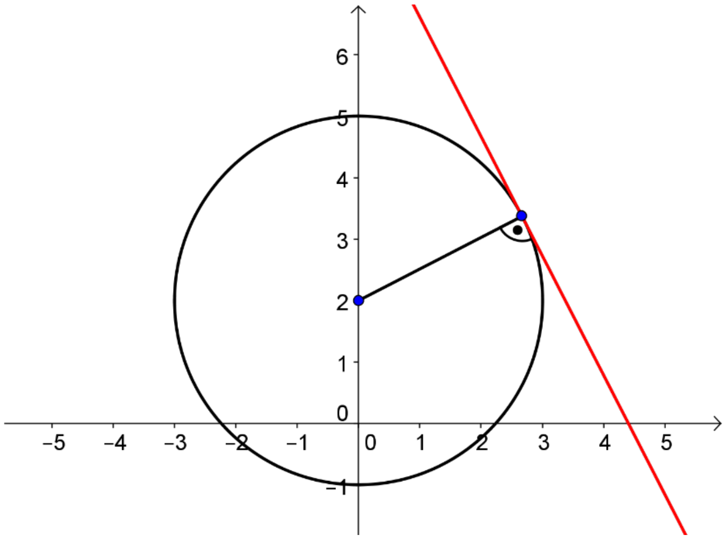
Klassischer Zugang

- **1. Schritt:**
  Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P
- **2. Schritt:**
  Tangente als Grenzlage von Sekanten
- **3. Schritt:**
  Berechnung der Tangenten-steigung als Grenzwert

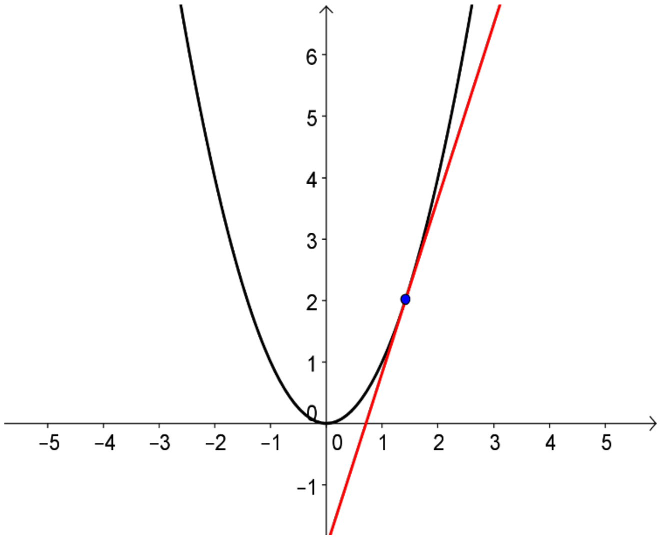
Problembereiche

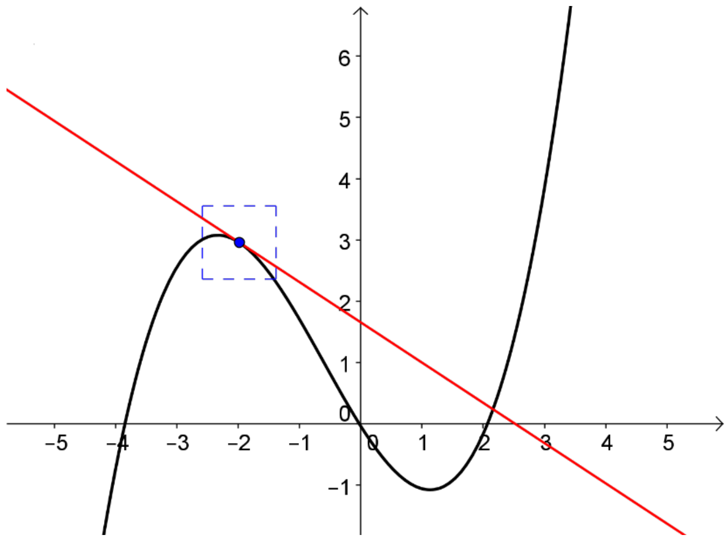
- **1. Schritt:**
  Paradigmenwechsel vom geo-metrischen zum analytischen Tangentenbegriff
- **2. Schritt:**
  Liegt quer zur Schmieg-vorstellung der Tangente
- **3. Schritt:**
  Gibt es überhaupt einen Grenzfall von Sekanten? Eine Gerade durch *einen* Punkt ist gar nicht eindeutig festgelegt.

Was ist eine Tangente?



Geometrische Sichtweise:
Tangente als globale Stützgerade

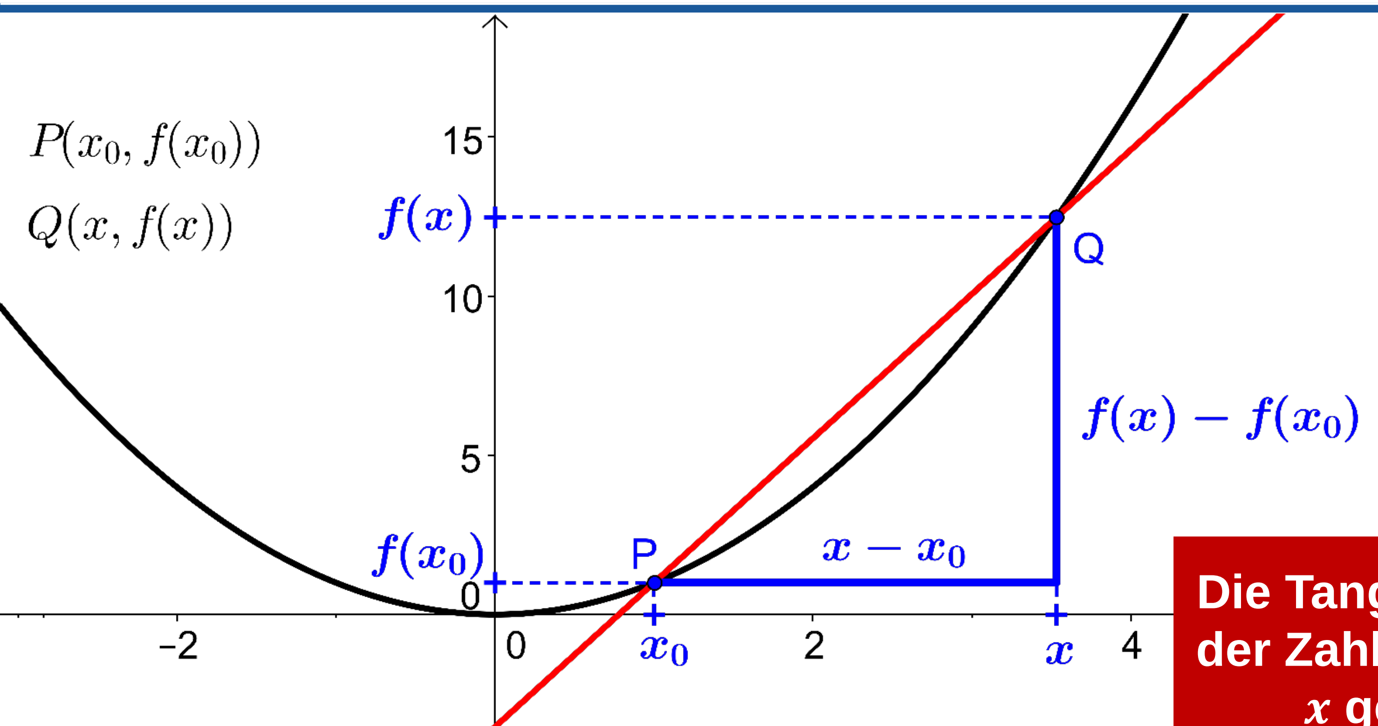




Analytische Sichtweise:
Tangente als lokale Schmieggerade

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Tangente als Grenzlage von Sekanten



Sekantensteigung:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangentensteigung:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Die Tangentensteigung kommt der Zahl 2 beliebig nahe, wenn x gegen $x_0 = 1$ strebt.

- **Beispiel:** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2$
  - $P(1,1); Q\big(x, f(x)\big)$
  - Sekantensteigung: $\dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x - 1} \overset{x \neq 1}{=} (x+1)$
  - Tangentensteigung: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$

Grundvorstellungen
zur Differenzial- und Integralrechnung

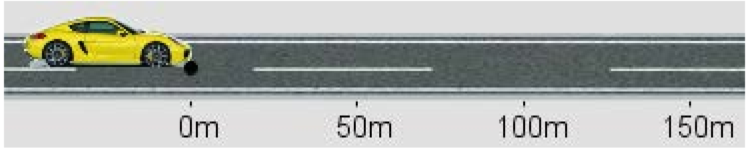
Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Lokale Änderungsrate

Kontext Geschwindigkeiten

- „Neulich bin ich mit dem Auto von Bielefeld nach Berlin gefahren und habe für $400\ \mathrm{km}$ genau 4 Stunden gebraucht.“
- „Dann warst du aber mit $100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nicht besonders schnell.“
- „Wie man‘s nimmt, manchmal bin ich über $150\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gefahren.“

Bewegungen



- Zeit $t \rightarrow$ zurückgelegter Weg x
- Die Weg-Zeit-Funktion ordnet jedem Zeitpunkt t den bis dahin zurückgelegten Weg x zu. $t \mapsto x(t)$

Anfahrvorgang (Beschleunigungsphase)

- $t \mapsto x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ mit konstanter Beschleunigung $a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
- $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$

Lokale Änderungsrate

http://www.walter-fendt.de/ph14d/beschleunigung.htm

- **Zurückgelegter Weg** (Anfahrvorgang mit konst. Beschleunigung $a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

$$x(t) = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$$

  - **Erste Sekunde: Zeitintervall $[\mathbf{0\,s}, \mathbf{1\,s}]$**

    $$x(1\,\mathrm{s}) - x(0\,\mathrm{s})$$
    $$= 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s})^2 - 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0\,\mathrm{s})^2$$
    $$= 1\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$$

  - **Zweite Sekunde: Zeitintervall $[\mathbf{1\,s}, \mathbf{2\,s}]$**

    $$x(2\,\mathrm{s}) - x(1\,\mathrm{s})$$
    $$= 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 - 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s})^2$$
    $$= 4\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$$

  - **Dritte Sekunde: Zeitintervall $[\mathbf{2\,s}, \mathbf{3\,s}]$**

    $$x(3\,\mathrm{s}) - x(2\,\mathrm{s})$$
    $$= 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (3\,\mathrm{s})^2 - 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2$$
    $$= 9\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$$

Absolute Änderung

Lokale Änderungsrate

$x(t) = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$

- **Zurückgelegter Weg**
  - **Zeitintervall** $[\mathbf{t_0}, \mathbf{t_1}] = [\mathbf{1\ s}, \mathbf{3\ s}]$
    $x(t_1) - x(t_0) = x(3\ \mathrm{s}) - x(1\ \mathrm{s}) = 8\ \mathrm{m}$

    Absolute Änderung
  - In den zwei Sekunden von $t_0 = 1\ \mathrm{s}$ bis $t_1 = 3\ \mathrm{s}$ werden $8\ \mathrm{m}$ zurückgelegt.
  - In dieser Zeit werden im Mittel
    $\frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{3^2\ \mathrm{m} - 1^2\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{s} - 1\ \mathrm{s}} = \frac{8\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{s}} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,
    also $4\ \mathrm{m}$ pro Sekunde zurückgelegt.

    relative Änderung = Änderungsrate
  - Die *mittlere Geschwindigkeit* (*Durchschnittsgeschwindigkeit*) im Zeitintervall $[\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1] = [1\ \mathrm{s}, 3\ \mathrm{s}]$ beträgt $4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
  - Bestimmen der mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t_1]$:
    - *Wegdifferenz* $x(t_1) - x(t_0)$ auf zugehörige *Zeitdifferenz* $t_1 - t_0$ beziehen:
    - Mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t_0, t_1]$: $\frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$

Lokale Änderungsrate

Momentangeschwindigkeit

- Je kleiner das Intervall $[t_0, t]$, je näher also t an $t_0 = 1$ heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit dem Wert $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Sie kommt ihm beliebig nahe.
- Näherung von der anderen Seite $(t < t_0)$ liefert:

$$\boxed{x(t) = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2}$$

Zeitintervall $[t, t_0]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{x(t_0)-x(t)}{t_0-t}$ im Zeitintervall $[t, t_0]$
$[0\ \mathrm{s}; 1\ \mathrm{s}]$	$\frac{1^2\ \mathrm{m} - 0^2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$[0{,}9\ \mathrm{s}; 1\ \mathrm{s}]$	$\frac{1^2\ \mathrm{m} - 0{,}9^2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s} - 0{,}9\ \mathrm{s}} = 1{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$[0{,}99\ \mathrm{s}; 1\ \mathrm{s}]$	$\frac{1^2\ \mathrm{m} - 0{,}99^2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s} - 0{,}99\ \mathrm{s}} = 1{,}99\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$[0{,}999\ \mathrm{s}; 1\ \mathrm{s}]$	$\frac{1^2\ \mathrm{m} - 0{,}999^2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s} - 0{,}999\ \mathrm{s}} = 1{,}999\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Lokale Änderungsrate

Momentangeschwindigkeit

- Je kleiner das Intervall $[t_0, t]$, je näher also t an $t_0 = 1$ heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit dem Wert $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
  Sie kommt ihm beliebig nahe.
- Jede andere Annäherung an den Zeitpunkt $t_0 = 1$ führt zur selben Momentangeschwindigkeit.

Lokale Änderungsrate

- Ist t ein benachbarter Zeitpunkt von $t_0 = 1$, dann ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[1, t]$ der Wert:

$\boxed{x(t) = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2}$

$$\frac{x(t) - x(1\,\mathrm{s})}{t - 1\,\mathrm{s}} = \frac{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (t^2 - (1\,\mathrm{s})^2)}{t - 1\,\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(t + 1\,\mathrm{s}) \cdot (t - 1\,\mathrm{s})}{t - 1\,\mathrm{s}}$$

$$= 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (t + 1\,\mathrm{s}) = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s} + t)$$

- $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s} + t)$ kommt dem Wert $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beliebig nahe, wenn nur t genügend nahe bei $1\,\mathrm{s}$ liegt.
- Damit ist die *Momentangeschwindigkeit* zum Zeitpunkt $t_0 = 1\,\mathrm{s}$ bestimmt. Sie beträgt hier $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Lokale Änderungsrate

Vorteile

Der Zugang zum Ableitungsbegriff als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate hat den Vorteil, dass

- der kinematische Kontext an Alltagserfahrungen von Jugendlichen anknüpft. (Straßenverkehr, Computerspiele, Sport, …)
- bei geeigneter Betrachtung der zeitlichen Änderung von Geschwindigkeiten ein adäquates Verständnis des Begriffes der Momentanbeschleunigung aufgebaut werden kann.
- er weit über die Kinematik hinaus tragfähig ist:
  Egal wo ein Änderungsverhalten punktuell beschrieben werden soll, wird das Beispiel zum universellen Modell.

Zusammenfassung: Ableitung als lokale Änderungsrate

Syntaktische Darstellung	Inhaltliche Erläuterung
$f(x_0)$	Zum Zeitpunkt x_0 zurückgelegter Weg.
$f(x) - f(x_0)$	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg.
$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg bezogen auf die dafür benötigte Zeitspanne $x - x_0$ (Das ist die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[x_0, x]$.).
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0.

Zusammenfassung: Ableitung als lokale Änderungsrate

Beschrei-bungsebene	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
symbolisch	$f(x_0)$	$f(x) - f(x_0)$	$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
inhaltlich	**Bestand** zum Zeitpunkt x_0	***absoluter* Zuwachs** in der Zeit von x_0 bis x	***relativer* Zuwachs** im Zeitinter-vall $[x_0, x]$ (***mittlere* Änderungs-rate**)	momentane (***lokale***) **Änderungsrate** zum Zeitpunkt x_0
termino-logisch	Funktions-wert	Differenz der Funktions-werte	Differenzen-quotient	Ableitung

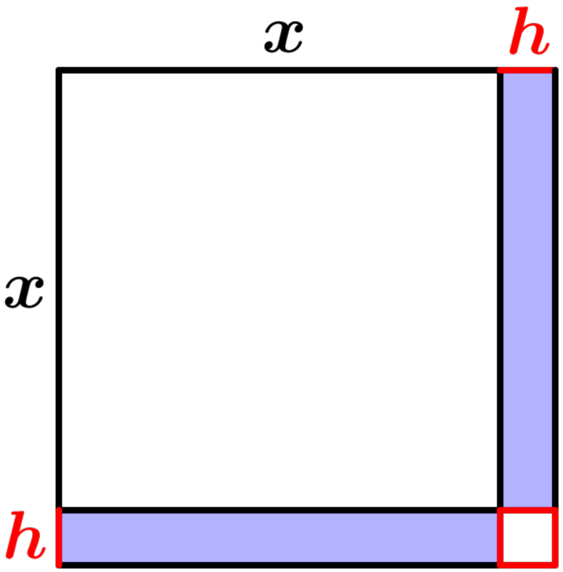
algebraisch → analytisch

Beispiel

- **Inhaltliches Verständnis von Ableitungsregeln**
  - „Die Ableitung von x^2 ist $2x$“ wird oft rein syntaktisch verstanden.
  - *Inhaltlich:* „Warum ist die lokale Änderungsrate des Flächeninhalts eines Quadrats der Kantenlänge x gleich seinem halben Umfang?“
  - *Absolute Änderung* des Flächeninhalts:

    Für kleine h im Wesentlichen die schattierten Rechtecke.
  - *Relative Änderung* des Flächeninhalts (*mittlere Änderungsrate*):

    Für kleine h im Wesentlichen gleich dem halben Umfang.
  - Näherung $\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \approx 2x$ ist beliebig gut, wenn h hinreichend klein ist.
  - Analog für inhaltliches Verstehen von „die Ableitung von x^3 ist $3x^2$“



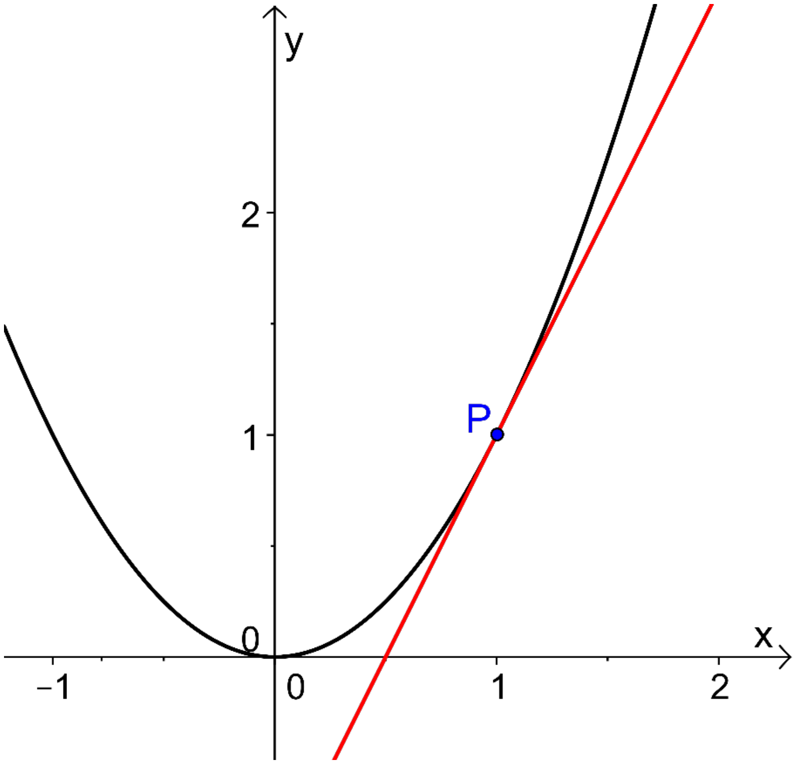
Grundvorstellungen
zur Differenzial- und Integralrechnung

Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

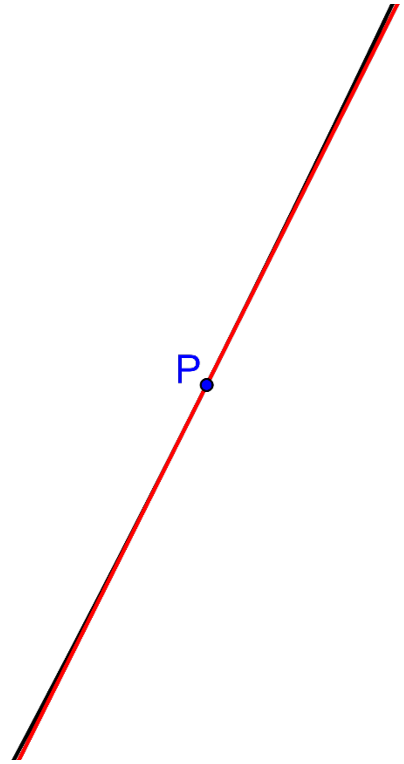
Grundverständnis

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

- **Parabel mit Tangente im Punkt $P(1,1)$**



- **Hineingezoomt**

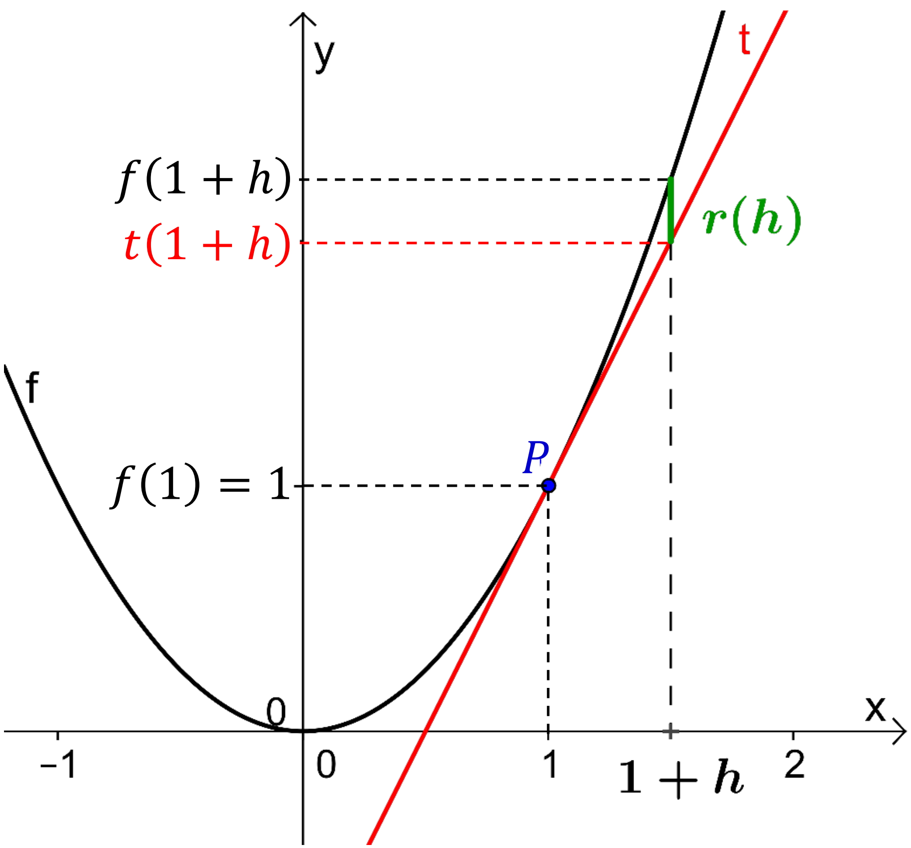


Grundverständnis

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

Schmiegeffekt der Tangente

- Unterschied der Parabel und der Tangente in der Nachbarschaft von $P(1,1)$?

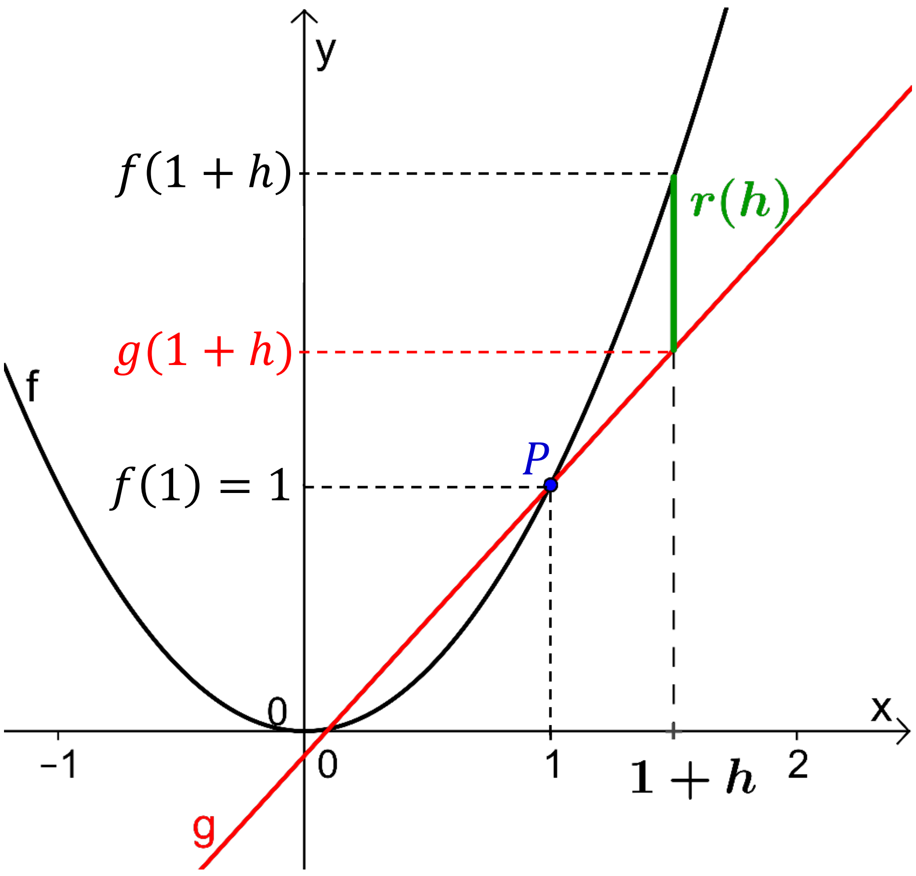


- Wie groß ist die Abweichung $\boldsymbol{r(h)}$?
- Funktionsgleichung: $f(x)=x^2$
- Tangentengleichung:
  $t(x)=f(x_0)+m\cdot(x-x_0)$
  $t(x)=2\cdot(x-1)+1$
- Abweichung
  $$\begin{aligned}\boldsymbol{r(h)} &= f(1+h)-t(1+h)\\ &= (1+h)^2-(2h+1)\\ &= 1+2h+h^2-2h-1\\ &= h^2 \qquad (*)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{r(h)=h^2}$
$\rightarrow \mathbf{0}$ **für** $\boldsymbol{h\rightarrow 0}$

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

Schmiegeffekt anderer Geraden durch $P(1,1)$



- Wie groß ist die Abweichung $r(h)$?
- Funktionsgleichung: $f(x) = x^2$
- Geradengleichung:
  $g(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) \qquad m \neq 2$
  $g(x) = m \cdot (x-1) + 1 \qquad m \neq 2$
- Abweichung
  $$\begin{aligned} r(h) &= f(1+h) - g(1+h) \\ &= (1+h)^2 - (mh+1) \\ &= 1 + 2h + h^2 - mh - 1 \\ &= h^2 + (2-m) \cdot h \qquad (**) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r(h) = h^2 + (2-m) \cdot h}$$
$$\rightarrow \mathbf{0} \text{ für } \boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Grundverständnis: Schmiegeffekt

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

Absolute Abweichung

- Tangente in P

  $\boldsymbol{r(h)} = h^2$ (*)

  $r(h) \to 0$ für $h \to 0$

- Andere Gerade durch P

  $\boldsymbol{r(h)} = h^2 + (2-m) \cdot h$ (**)

  $r(h) \to 0$ für $h \to 0$

Relative Abweichung

- Tangente in P

  $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} = h \to 0$ für $h \to 0$

- Andere Gerade durch P

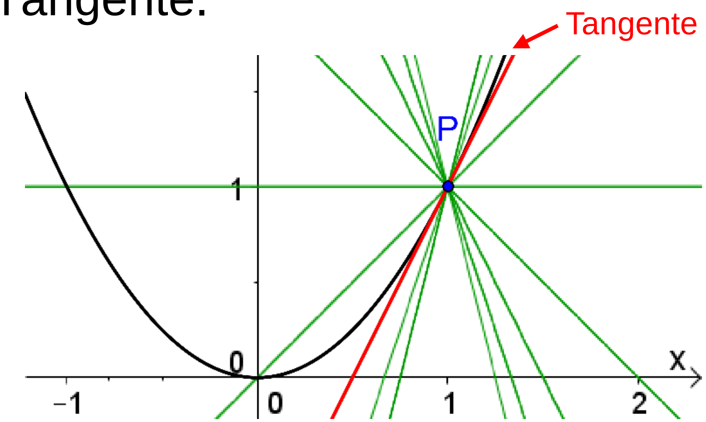
  $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} = h + (2-m)$ mit $m \neq 2$

  $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} \to 2 - m \neq 0$ für $h \to 0$

- Offensichtlich ist die Bedingung

  $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$

  ein analytischer Ausdruck für die Schmiegeigenschaft der Tangente.



- Die verschärfte Restbedingung

  $$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

  (gegenüber $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$)

  charakterisiert die Tangente als bestapproximierende Gerade.

Zusammenfassung: Ableitung als lokale Linearisierung

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

Ableitung als lokale lineare Approximation

- Der Graph von f lässt sich in der Nähe von x_0 durch die Tangente in x_0 so annähern, dass der Fehler $r(h)$ der Approximation besonders gut, nämlich schneller als h, gegen null geht:

$$f(x_0+h)$$
$$= t(x_0+h) + r(h)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h)$$

mit $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$

Tangentengleichung
$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Anwendungen der lokalen Linearisierung

- Numerische Näherungen
- Fehlerrechnung
- Taylor-Abschätzung
- Leibniz‘sche Differenziale
- Newton-Verfahren
- Beweis von Ableitungsregeln
- Verallgemeinerungsfähigkeit auf höhere Dimensionen

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

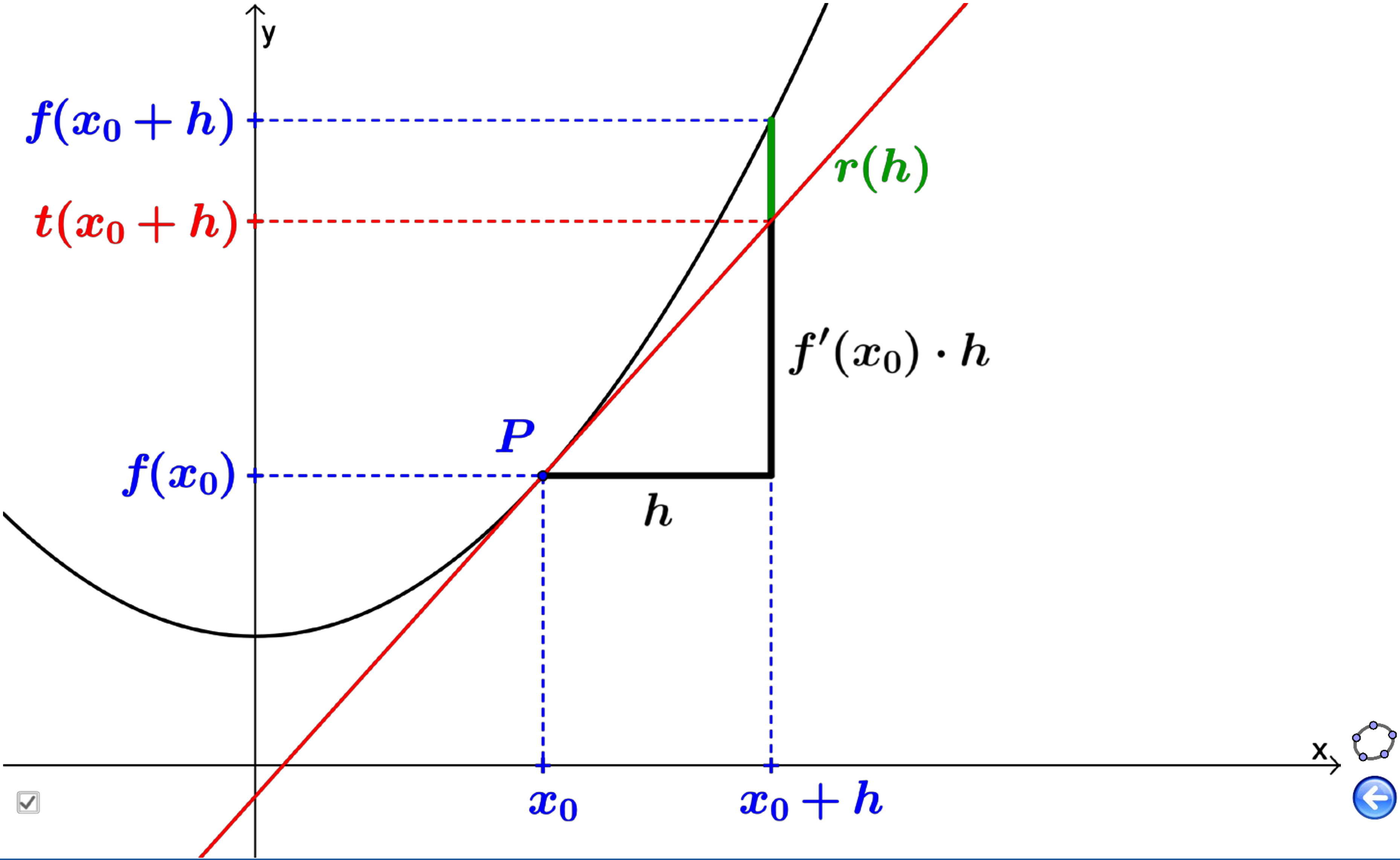
Zusammenfassung: Ableitung als lokale Linearisierung

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

Werte der Funktion nahe x_0	*werden genähert durch*	**Werte** der Tangente nahe x_0	**Fehler** der Näherung	**Güte** der Näherung für $h \to 0$
$f(x_0+h)$	$\approx$	$t(x_0+h)$ $= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$	$r(h) = f(x_0+h) - t(x_0+h)$ $= f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$	$\frac{r(h)}{h} \to 0$
Zuwächse der Funktion nahe x_0	*werden genähert durch*	**Zuwächse** der Tangente nahe x_0	**Fehler** der Näherung	**Güte** der Näherung für $h \to 0$
$f(x_0+h) - f(x_0)$	$\approx$	$f'(x_0) \cdot h$	$r(h)$	$\frac{r(h)}{h} \to 0$
(Differenz Δy)		(Differenzial dy)		

Zusammenfassung: Ableitung als lokale Linearisierung

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91



Analytische Definitionen der Ableitung

Danckwerts/Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

Definition über die lokale Änderungsrate

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar,

wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Er heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Definition über die lokale Approximation

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar,

wenn es eine Gerade t_{x_0} durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ gibt, so dass der Approximationsfehler

$$r(h) \coloneqq f(x_0 + h) - t_{x_0}(x_0 + h)$$

$(x_0 + h \in \mathbb{D})$ der Bedingung

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

genügt. Die Steigung von t_{x_0} heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Exkurs: Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an G_f

- **Berechnung der Tangentengleichung**
  - Funktionsgleichung einer Geraden: $y = m \cdot x + t$
  - m ist die Steigung der Geraden. Für eine Tangente, die sich im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an G_f anschmiegt, gilt: $m = f'(x_0)$
  - Da die Tangente durch $P(x_0, f(x_0))$ verläuft, erfüllen dessen Koordinaten die Funktionsgleichung. Es gilt also: $f(x_0) = m \cdot x_0 + t$
- **Im Beispiel: $f(x) = x^2$**
  - Mit $f'(x) = 2x$ folgt: $m = 2 \cdot x_0$
  - Mit $P(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0^2)$ ergibt sich: $x_0^2 = 2x_0 \cdot x_0 + t$
    $\Rightarrow t = -x_0^2$
  - Damit ergibt sich die Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ zu: $y = 2x_0 \cdot x - x_0^2$

Grundvorstellungen
zur Differenzial- und Integralrechnung

1 Grundvorstellungen

2 Ableitungsbegriff
- Ableitung als Tangentensteigung
- Ableitung als lokale Änderungsrate
- Ableitung als lokale lineare Approximation

3 Integralbegriff
- Rekonstruktion der Gesamteffekts
- Mittelung
- Orientierter Flächeninhalt

Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

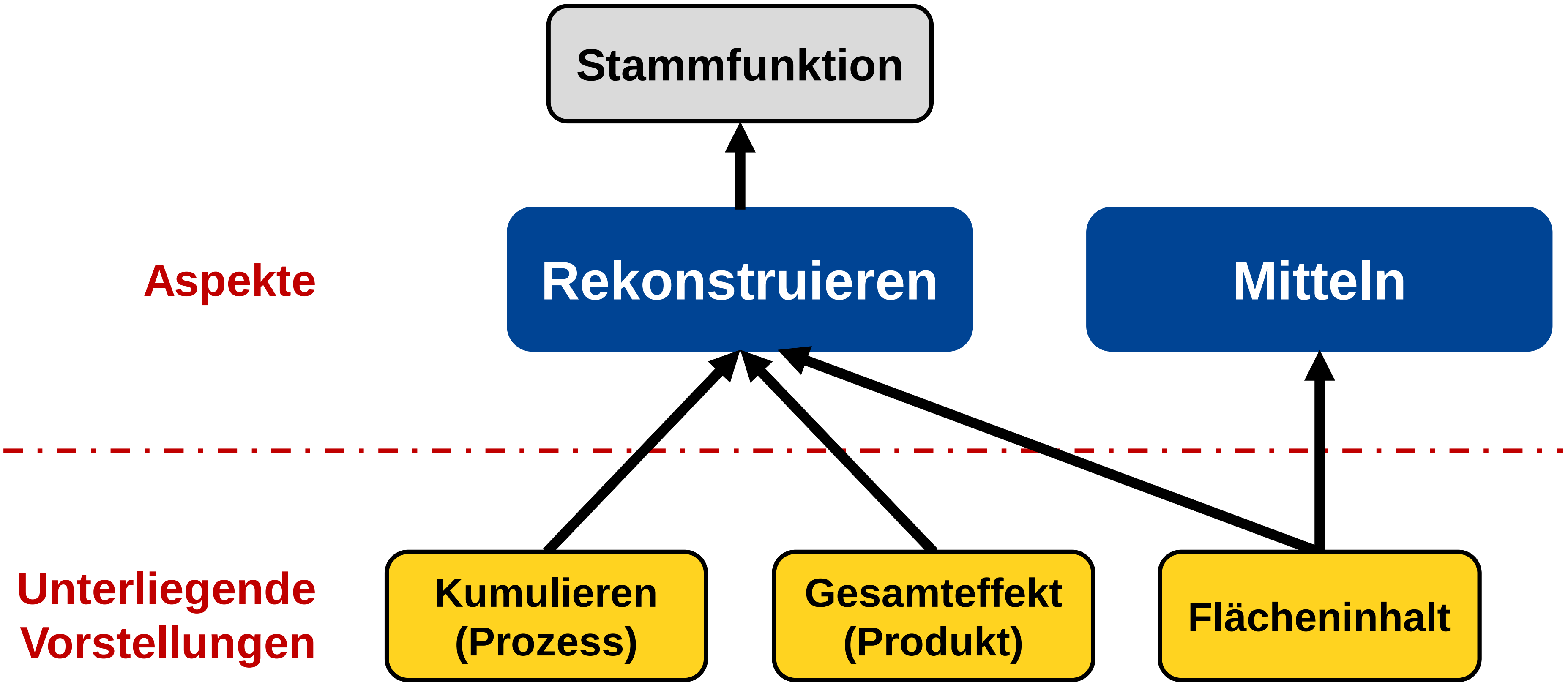
UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Differenzieren und Integrieren sind Umkehroperationen

$$g \xrightarrow[\text{Differenzieren}]{\text{Übergang zur lokalen Änderungsrate}} g' \xrightarrow[\text{Integrieren („Rekonstruieren“)}]{\text{Übergang zur Integralfunktion}} I_a = g$$

$$f \xrightarrow[\text{Integrieren („Rekonstruieren“)}]{\text{Übergang zur Integralfunktion}} I_a \xrightarrow[\text{Differenzieren}]{\text{Übergang zur lokalen Änderungsrate}} I_a' = f$$

Integralbegriff: Inhaltliche Aspekte und Vorstellungen



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

www.dms.uni-landau.de