



Jürgen Roth

Computer im Mathematikunterricht

Warum? – Wie? – Wo?



Hans-Joachim Vollrath Jürgen Roth

Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe

2. Auflage

Mathematik
Primarstufe und
Sekundarstufe I+II

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

2012

Jürgen Roth
Evelyn Süß-Stepancik
Heike Wiesner *Hrsg.*

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Lernpfade als Weg zum Ziel

November 2014



Springer Spektrum

Computer im Mathematikunterricht

- 1 Warum?** – Computer als Medium und Werkzeug
 - 1.1 Ziele am Beispiel
 - 1.2 Computerwerkzeuge und deren Auswahl
- 2 Wie?** – Organisation der Arbeit am Computer
 - 2.1 Sozialform, Selbsttätigkeit, Lernumgebung, ...
 - 2.2 Lernpfade
- 3 Wo?** – Computer beim
 - 3.1 Erarbeiten von Begriffen
 - 3.2 Erarbeiten von Sachverhalten / Verfahren
 - 3.3 Problemlösen / Modellieren
 - 3.4 Üben mit automatisierten Rückmeldungen

Computer im Mathematikunterricht

1 **Warum?** – Computer als Medium und Werkzeug

1.1 Ziele am Beispiel

1.2 Computerwerkzeuge und deren Auswahl

2 **Wie?** – Organisation der Arbeit am Computer

2.1 Sozialform, Selbsttätigkeit, Lernumgebung, ...

2.2 Lernpfade

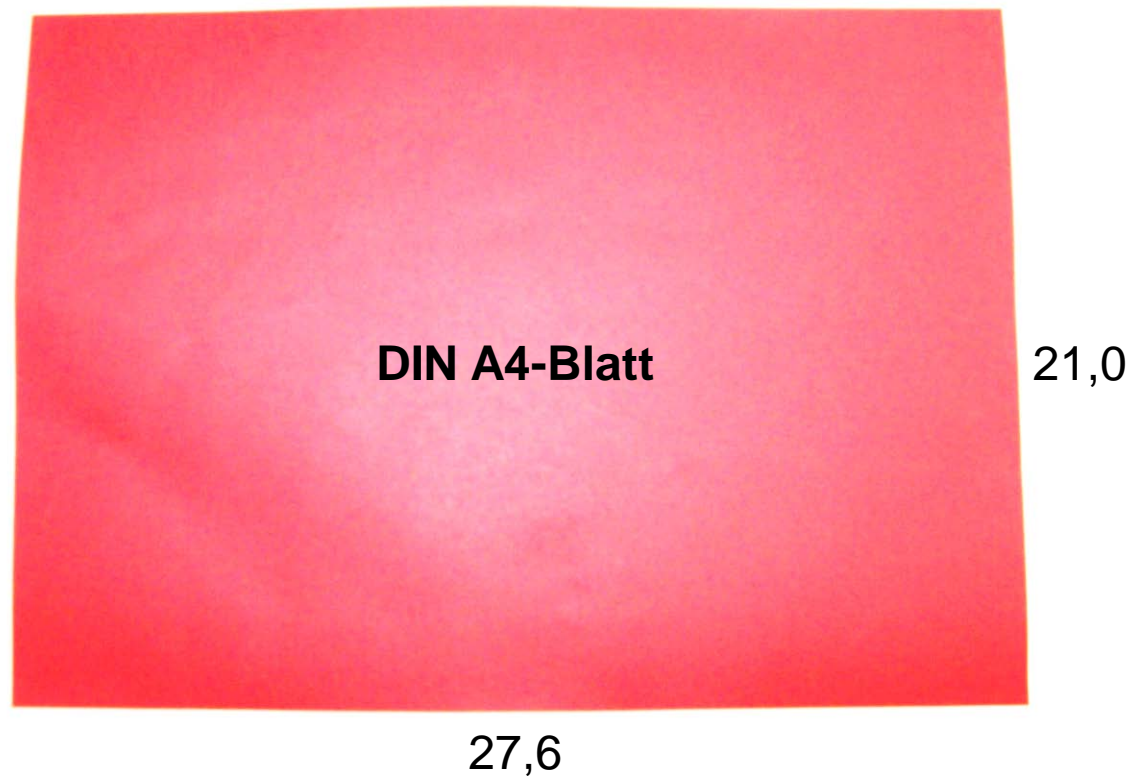
3 **Wo?** – Computer beim

3.1 Erarbeiten von Begriffen

3.2 Erarbeiten von Sachverhalten / Verfahren

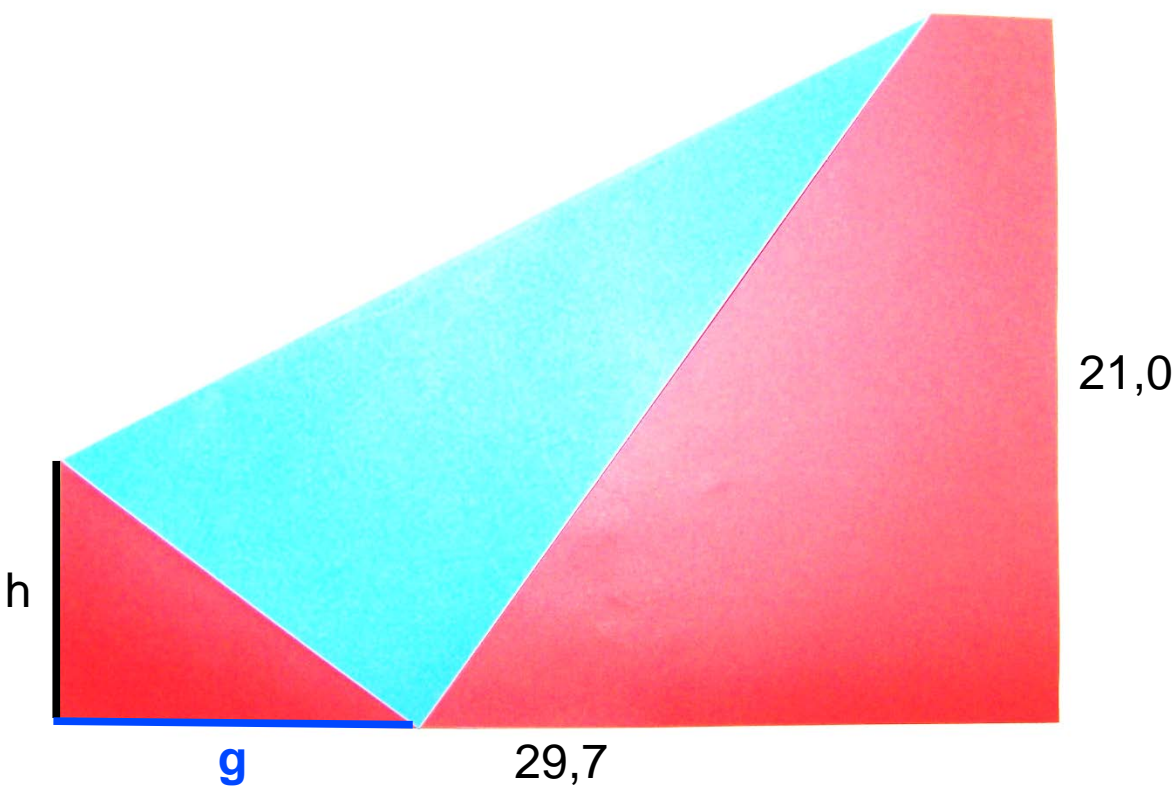
3.3 Problemlösen / Modellieren

3.4 Üben mit automatisierten Rückmeldungen





Dreieck mit maximalem Flächeninhalt falten



Wann wird A maximal?

gesucht:

$$A(h) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Nebenbedingung:

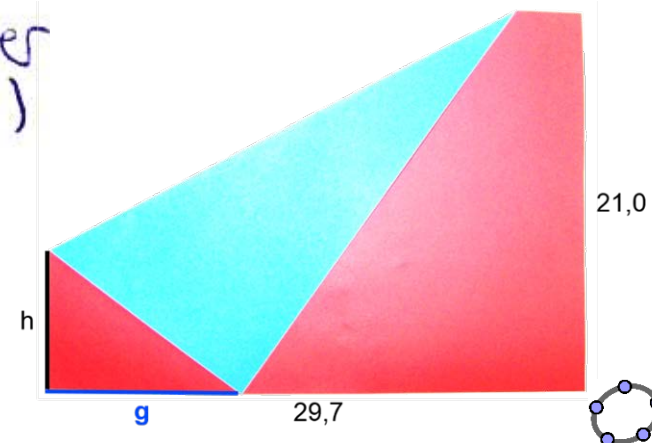
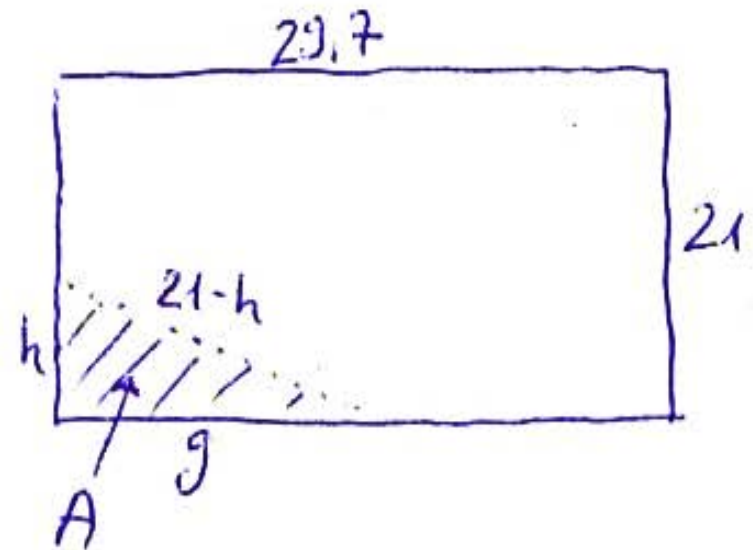
$$h^2 + g^2 = (21-h)^2$$

$$g = \sqrt{(21-h)^2 - h^2}$$

(neg. Lösung hier
nicht relevant)

$$g = \sqrt{21^2 - 42h} = \sqrt{441 - 42h}$$

$$\Rightarrow A(h) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{441 - 42h}$$



notwendige Bedingung:

$$A'(h) = 0$$

$$A'(h) = \frac{1}{2} \sqrt{441 - 42h} + \frac{1}{2} h (-42) \frac{1}{2\sqrt{441 - 42h}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{441 - 42h} - \frac{21h}{2\sqrt{441 - 42h}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{441 - 42h} = \frac{21h}{2\sqrt{441 - 42h}} \quad | \cdot 2\sqrt{441 - 42h}$$

$$441 - 42h = 21h$$

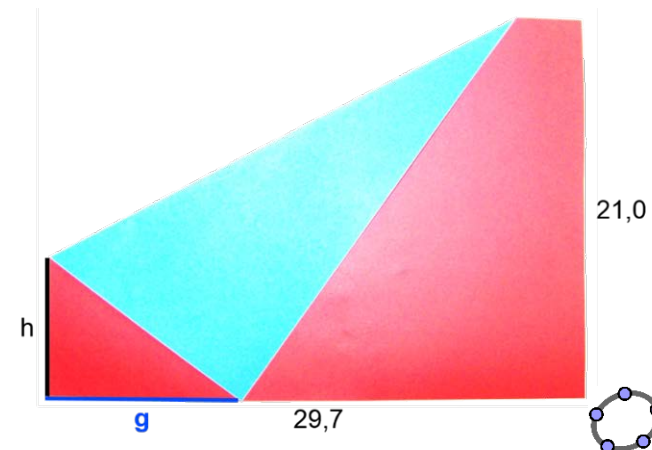
$$441 = 63h$$

$$h = 7$$

hinreichende Bedingung:

$$A'(6) \approx 2,29 > 0 \quad \text{und} \quad A'(8) \approx -3,07 < 0$$

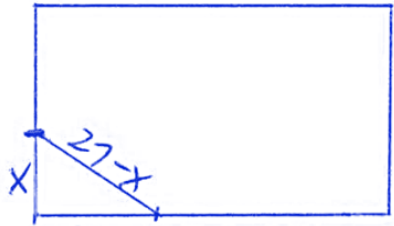
\Rightarrow Damit hat das Dreieck bei $h=7$ (cm) den größten Flächeninhalt.



The screenshot shows a mathematical software interface with a toolbar at the top containing symbols for equals, approximate, check, powers, parentheses, cursor, assignment, approximation, derivative, function, and trash. Below the toolbar is a list of steps:

- 1 Breite(x):=sqrt((21-x)^2-x^2)
○ → Breite(x) := $\sqrt{21} \sqrt{-2x + 21}$
- 2 Flächeninhalt(x):=1/2*x*Breite(x)
● → Flächeninhalt(x) := $\frac{1}{2} \sqrt{21} x \sqrt{-2x + 21}$
- 3 1 / 2 sqrt(21) x sqrt(-2 x + 21)
○ Ableitung: $\frac{1}{2} \sqrt{21} \sqrt{-2x + 21} - \frac{1}{2} \sqrt{21} \cdot \frac{x}{\sqrt{-2x + 21}}$
- 4 1 / 2 sqrt(21) sqrt(-2 x + 21) - 1 / 2 sqrt(21) x / sqrt(-2 x + 21)=0
○ → $\sqrt{-2x + 21} \cdot \frac{3\sqrt{21}x - 21\sqrt{21}}{4x - 42} = 0$
- 5 sqrt(-2 x + 21) (3sqrt(21) x - 21sqrt(21)) / (4x - 42) = 0
○ Löse: $\{x = 7\}$





$$\rightarrow \sqrt{(27-x)^2 - x^2} \quad (\text{Pythagoras})$$

$$= \sqrt{447 - 42x}$$

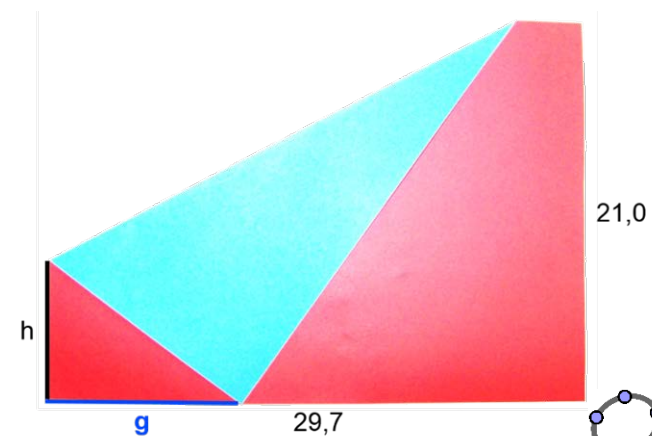
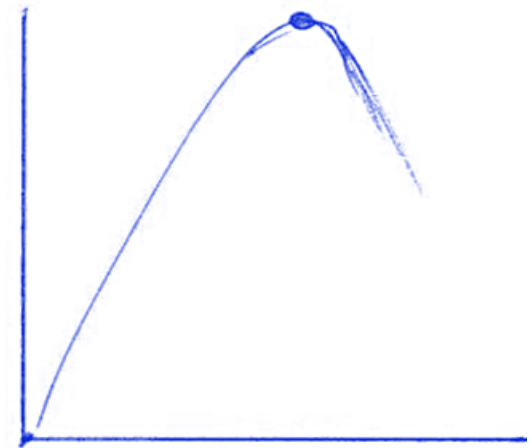
Also ist der Flächeninhalt $f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{447 - 42x}$

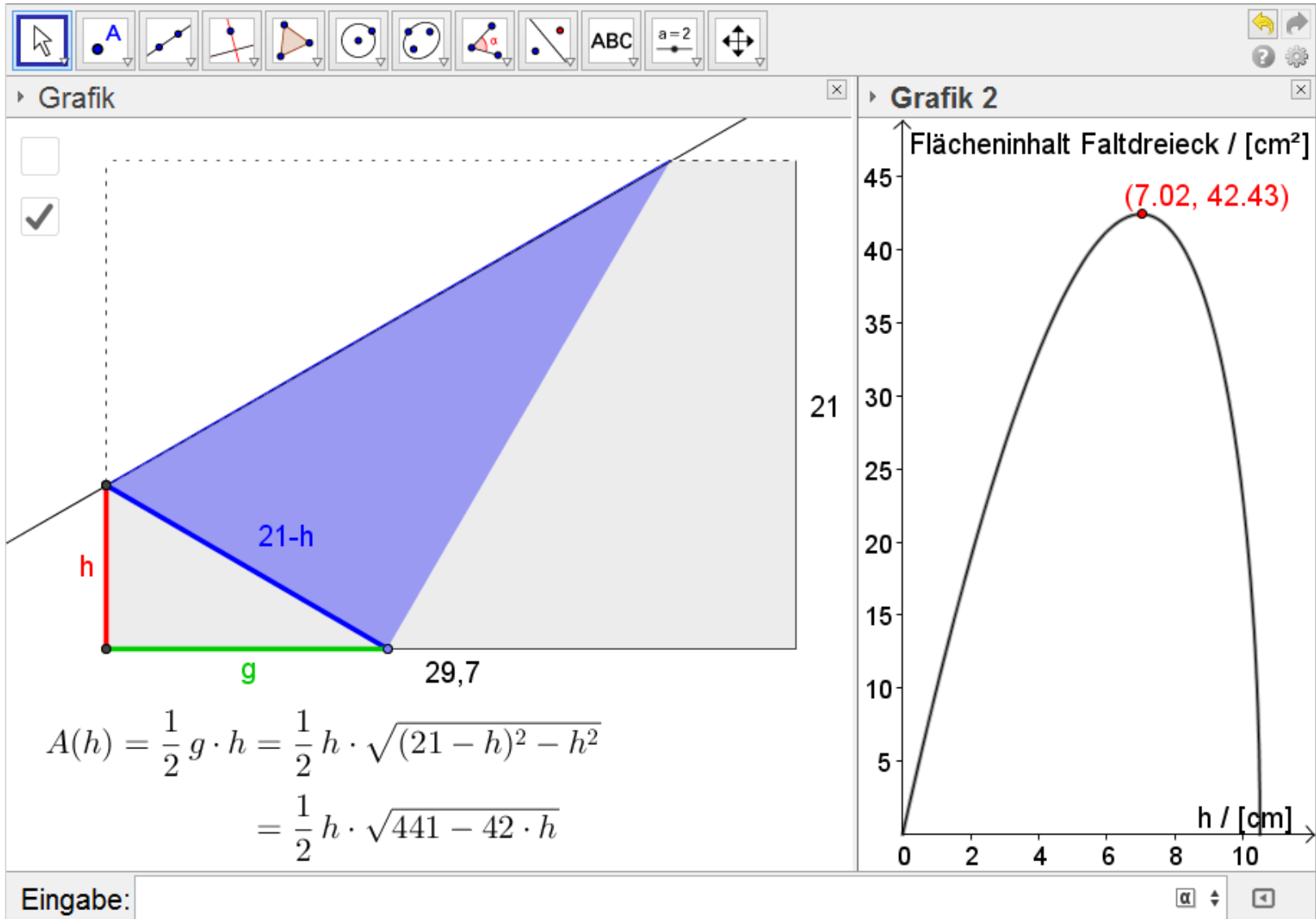
Wo ist $f(x)$ maximal?

Der Graph zeigt, dass es nur ein Maximum gibt. Dieses liegt bei $x=7$.

Die Wertetabelle bestätigt dies.

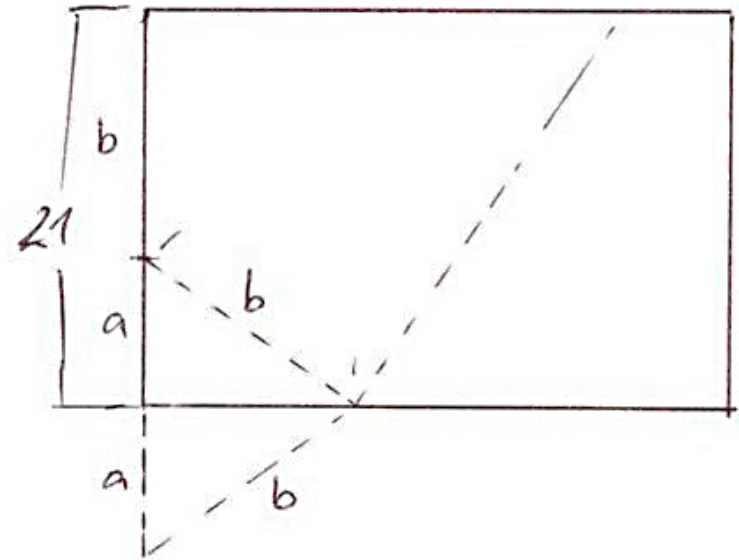
↳ Laut Graph:
* (im Fehler)



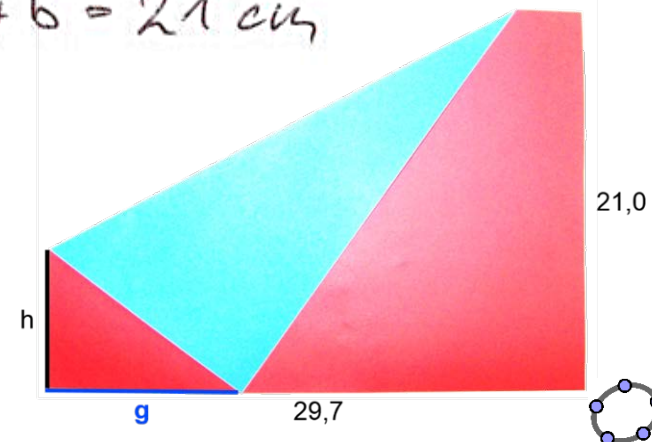


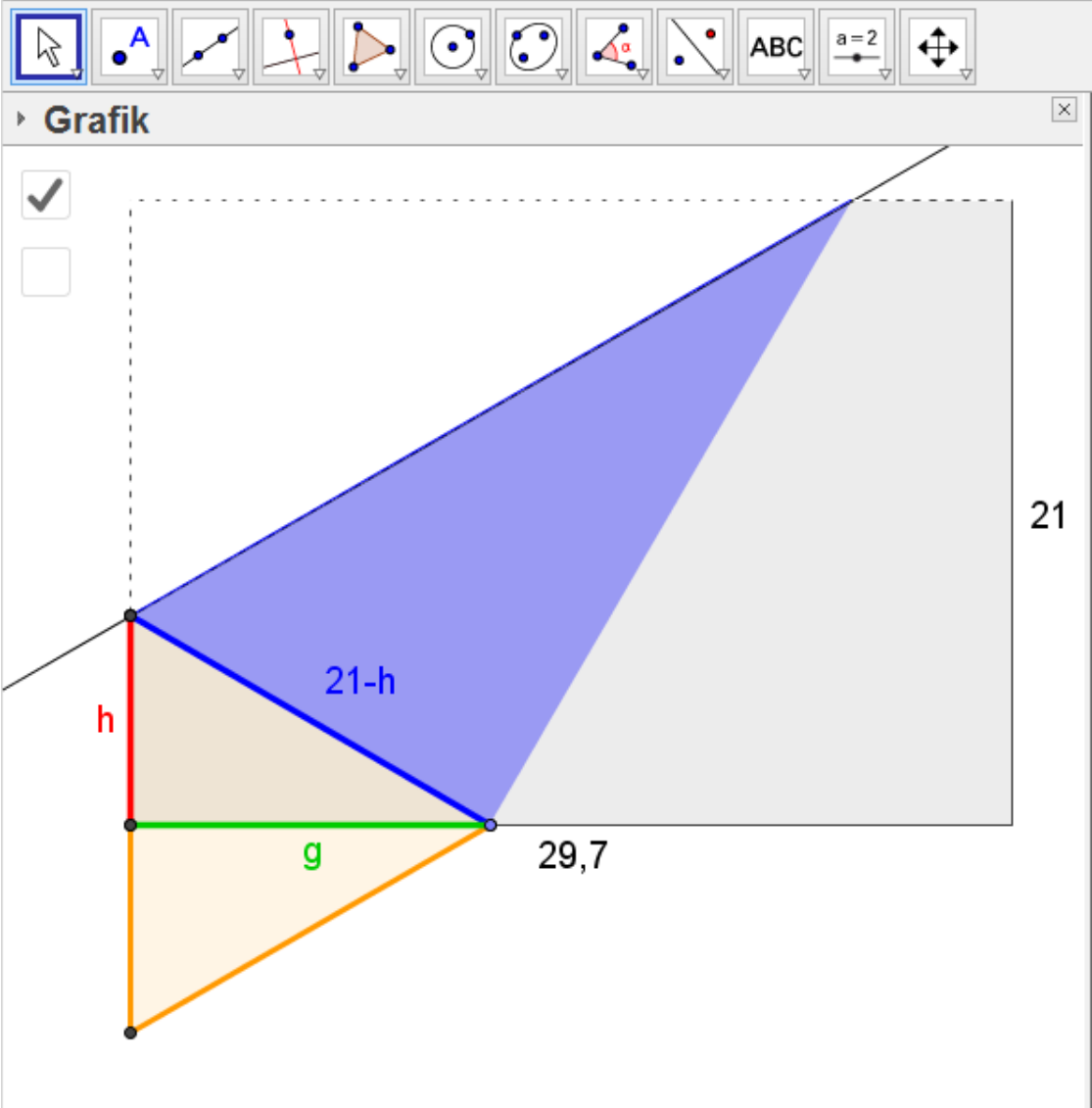
Durch das Spiegeln erhält man ein Dreieck, das immer 42 cm Umfang hat.

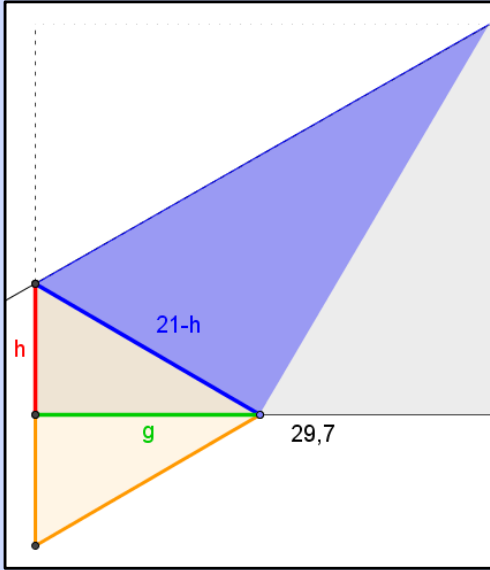
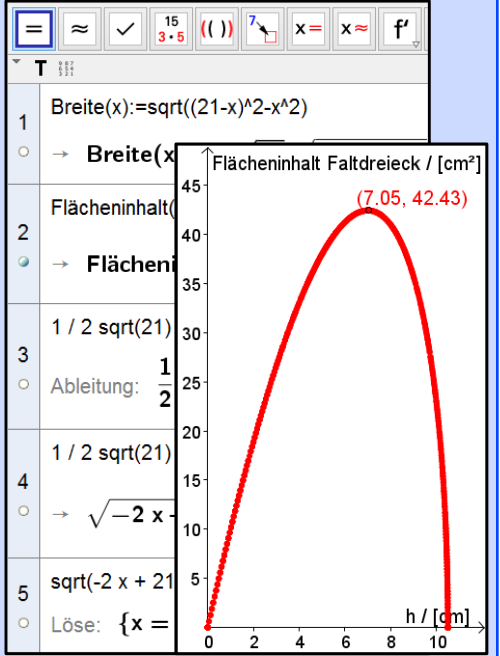
Bei gegebenem Umfang ist das gleichseitige Dreieck das Dreieck mit dem größten Flächeninhalt. Deshalb muss man das Blatt bei $a = 7$ cm knicken.



$$a + b = 21 \text{ cm}$$



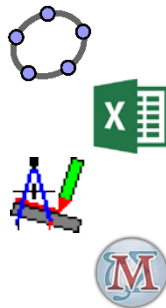


Zugang	Numerisch	Geometrisch	Algebraisch																														
Erster Schritt	Eingabe einzelner Werte	Konstruktion einer Konfiguration	Eingabe eines (Funktions-)Terms																														
Computerwerkzeug	Tabellenkalkulationsprogramm	Dynamisches Geometriesystem	Funktionsplotter Computeralgebrasystem																														
Ausgabe	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>h</td> <td>A(h)</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.5</td> <td>5.12</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1</td> <td>9.99</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>1.5</td> <td>14.58</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>2</td> <td>18.89</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>2.5</td> <td>22.91</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>3</td> <td>26.62</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>3.5</td> <td>30.01</td> </tr> </tbody> </table>		A	B	1	h	A(h)	2	0	0	3	0.5	5.12	4	1	9.99	5	1.5	14.58	6	2	18.89	7	2.5	22.91	8	3	26.62	9	3.5	30.01		
	A	B																															
1	h	A(h)																															
2	0	0																															
3	0.5	5.12																															
4	1	9.99																															
5	1.5	14.58																															
6	2	18.89																															
7	2.5	22.91																															
8	3	26.62																															
9	3.5	30.01																															

Medien: Mittler im Lernprozess + *können* kognitive Tätigkeiten unterstützen

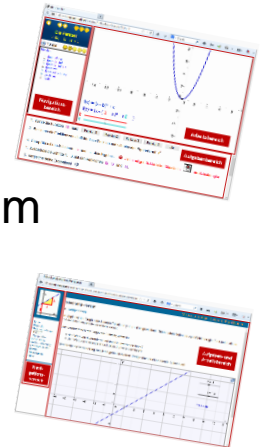
Computerwerkzeuge

- ▷ Flexibel einsetzbare Universalwerkzeuge
- ▷ Nutzer entscheidet, welche Funktion er wozu einsetzt.
- ▷ **Beispiele:** TKP, DGS, CAS, DMS



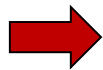
Lernumgebungen

- ▷ Verfolgen konkrete fachliche Ziele
- ▷ Kompetenzen in einem Bereich entwickeln
- ▷ **Beispiele:** Applets, interaktive Arbeitsblätter, Lernpfade



In Lernumgebungen eingebettete Computerwerkzeuge

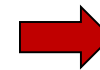
Nutzung durch Lernende



Einsicht in Konstruktion der LU



Umgestaltung durch Lehrende & Lernende



Neugestaltung durch Lehrende

▶ Experimentierumgebung

- ▷ Vermutungen
 - ▶ aufstellen
 - ▶ überprüfen / korrigieren
- ▷ Erkenntnisse gewinnen
- ▷ Zusammenhänge erfassen

▶ Kommunikationsmittel

- ▷ Darstellen / visualisieren
- ▷ Wesentliches fokussieren
- ▷ Repräsentationen vernetzen
- ▷ Dynamisieren
(Denkprozesse anstoßen / vermitteln)

▶ heuristisches Hilfsmittel

- ▷ Routinedenkprozesse auslagern
- ▷ Gedächtnis entlasten
- ▷ (Parameter) variieren
- ▷ Computer ↔ Nutzer interagieren
- ▷ Kontrollieren

▶ Modellierungswerkzeug

- ▷ komplexe Modelle manipulieren
- ▷ realistische Daten verarbeiten

**Auswahlkriterien für
Computerwerkzeuge?!**

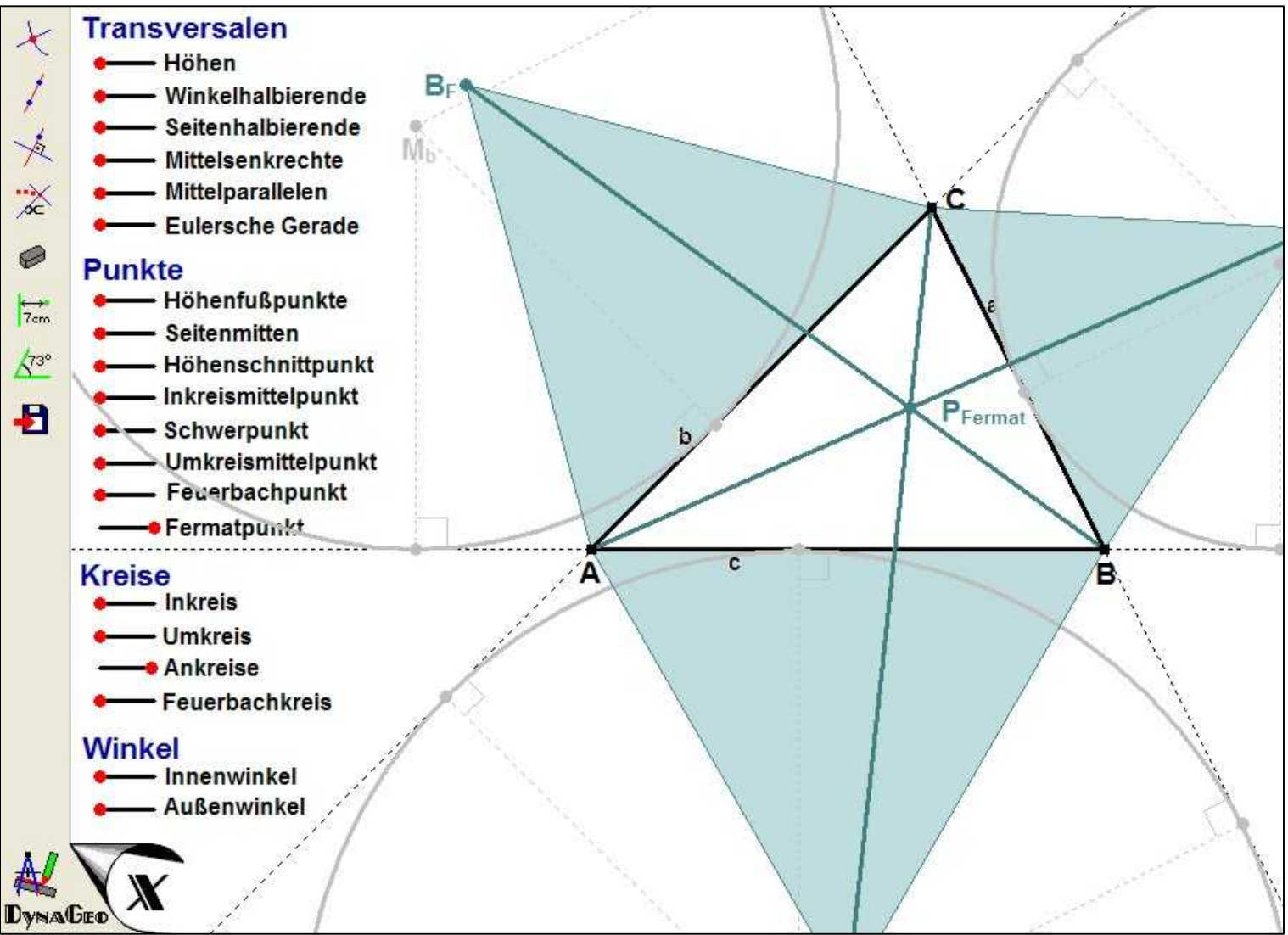
Computer im Mathematikunterricht

- 1 **Warum?** – Computer als Medium und Werkzeug
 - 1.1 Ziele am Beispiel
 - 1.2 Computerwerkzeuge und deren Auswahl
- 2 **Wie?** – Organisation der Arbeit am Computer
 - 2.1 Sozialform, Selbsttätigkeit, Lernumgebung, ...
 - 2.2 Lernpfade
- 3 **Wo?** – Computer beim
 - 3.1 Erarbeiten von Begriffen
 - 3.2 Erarbeiten von Sachverhalten / Verfahren
 - 3.3 Problemlösen / Modellieren
 - 3.4 Üben mit automatisierten Rückmeldungen



Grundsätzlich

- Zuerst Reflektieren, *danach* reflektierter Computereinsatz
- Werkzeugeinsatz soll zum Denken anregen



▶ **Konfiguration vollständig vorgeben**

- ▶ Fokussierungshilfen für alle wesentlichen Aspekte
(z. B. Farbgebung, Linienstärken, Mitführung von Messwerten u. ä.)
- ▶ Elemente können evtl. ein- & ausgeblendet werden
- ▶ Variationsmöglichkeiten evtl. bewusst eingeschränkt

▶ **Veränderbare (Teil-)Konfiguration vorgegeben**

- ▶ kann / muss ergänzt oder verändert werden
- ▶ nur einzelne Fokussierungshilfen vorhanden

▶ **Leere, unstrukturierte Datei**

- ▶ Computerwerkzeug wird selbstständig und ohne Vorgaben benutzt

Computerwerk- zeug ohne Vor- strukturierung

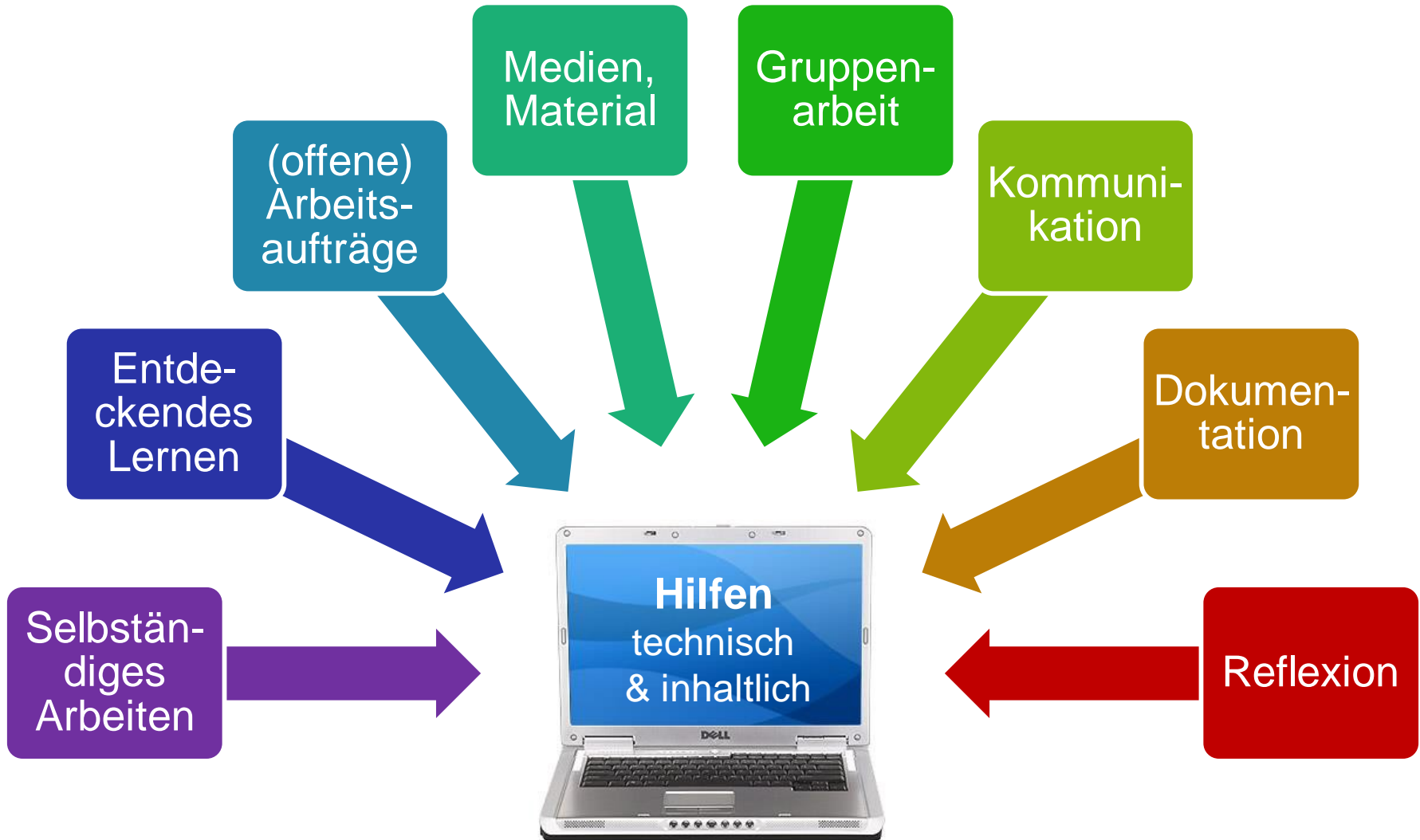
- Konfigurationen produzieren
 - u.U. mathematikfreie „Produktschulung“
- Beispiel: Kittel (2006)

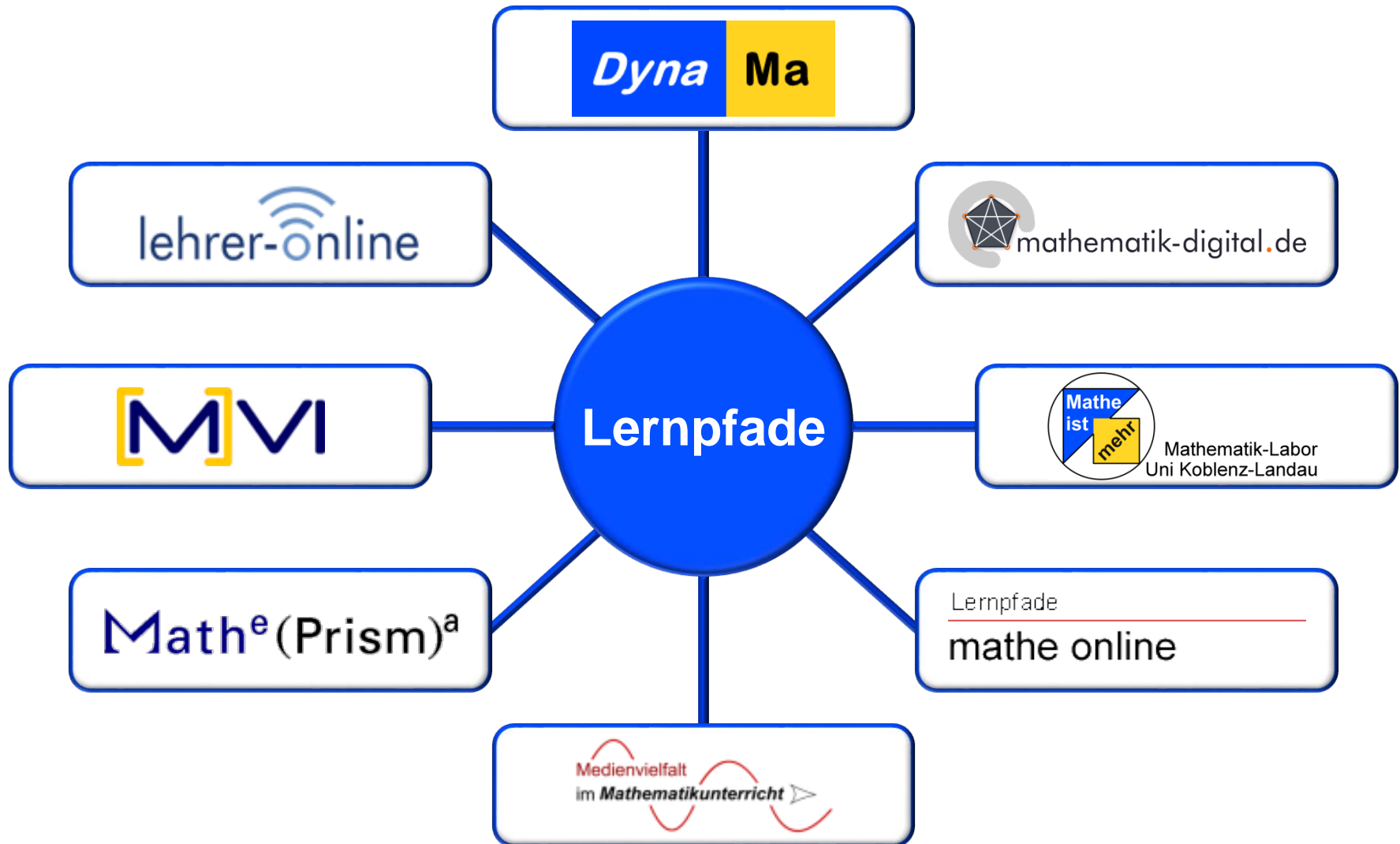
Vorgefertigte Konfiguration (interaktives Arbeitsblatt)

- Arbeiten mit/an Konfigurationen
 - Experimentierumgebung
- Beispiel: Elschenbroich/Seebach (1999)

Lernpfad

- Aufgabentexte, Bilder, Hyperlinks, DMS
 - Schülerselbsttätigkeit / eig. Arbeitstempo
 - Partnerdiskussionen / Dokumentation
- Beispiel: Roth (2012, 2014)





AK GeoGebra

www.juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/parabel/3-f.html

Die Parabel
3. $f(x) = (x - b)^2 + c$

10 min

Titelblatt

1. $f(x) = x^2 + c$
2. $f(x) = (x - b)^2$
3. $f(x) = (x - b)^2 + c$
4. $f(x) = ax^2$
5. $f(x) = a(x - b)^2 + c$
6. zeichnen
7. Tests

Navigationsbereich

$f(x) = (x - b)^2 + c$
 $f(x) = (x - (0)) ^2 + (0)$

Arbeitsbereich

1. Wähle die Funktion **f1** aus:
2. Bestimme die Funktionsvorschrift für diese Funktion und schreibe das Ergebnis auf.
3. Überprüfe mit den Schiebern **b** und **c** dein Ergebnis. **Ziehe mit gedrückter linker Maustaste** **am Schieberegler.**
4. Wiederhole die Schritte 1. - 3. mit den Funktionen **f2**, **f3** und **f4**.
5. Vergleiche deine Ergebnisse!

Aufgabenbereich



Mikro-Lernpfad: Lineare Funktionen

rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/ler

Mikro-Lernpfad: Lineare Funktionen

Gleichung - Graph

- Kompetenzen

Im Applet ist der Graph einer linearen Funktion $f: y = k \cdot x + d$ eingezeichnet. Rechts oben findest du zwei Schieberegler für k und d , die du mit der linken Maustaste verändern kannst.

Wie verändert sich der Graph der Funktion, wenn du

- den Wert von d veränderst und dabei k unverändert lässt?
- den Wert von k veränderst und dabei d unverändert lässt?

Beschreibe die Veränderung möglichst genau in Worten. Fertige dazu auch passende Skizzen an!

Aufgaben- und Arbeitsbereich

Navigationbereich

- Home
- Übersicht
- Gleichung - Graph
- k und d**
- Spurpunkte
- Konstruktion
- Graph - Gleichung
- Teste dich selbst!
- Beweis
- Präsentation
- Links



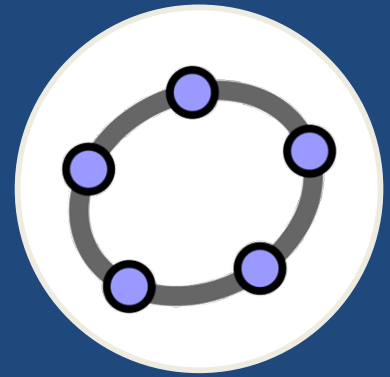
Kopf-
mathematik



Gegen-
ständliche
Modelle /
Bilder



Papier
und
Bleistift



Computer-
werkzeug

Medieneinsatz zieladäquat

(Computer-) Medien

Station „Jakobsstab & Co.“ – Teil 1
Aufgabe 3: Der zweite Strahlensatz

Simulation 2: Zweiter Strahlensatz
 Startet Simulation 2. Variiert zunächst nichts in der Simulation!
 Die Figur, die die Simulation zeigt (zwei Strahlen, die von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten werden), nennt man **Strahlensatzfigur**.

3.1 Macht euch klar, wo sich in der Figur zwei ähnliche Dreiecke befinden. Notiert in Form einer Gleichung, welche Strecken im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Orientiert euch dabei an euren Überlegungen zu Aufgabe 2.4. Bezeichnet die Strecken mit Hilfe ihrer Anfangs- und Endpunkte, z. B. \overline{AB} . Verwendet bei eurer Verhältnisgleichung die Streckenfarben in der Simulation.

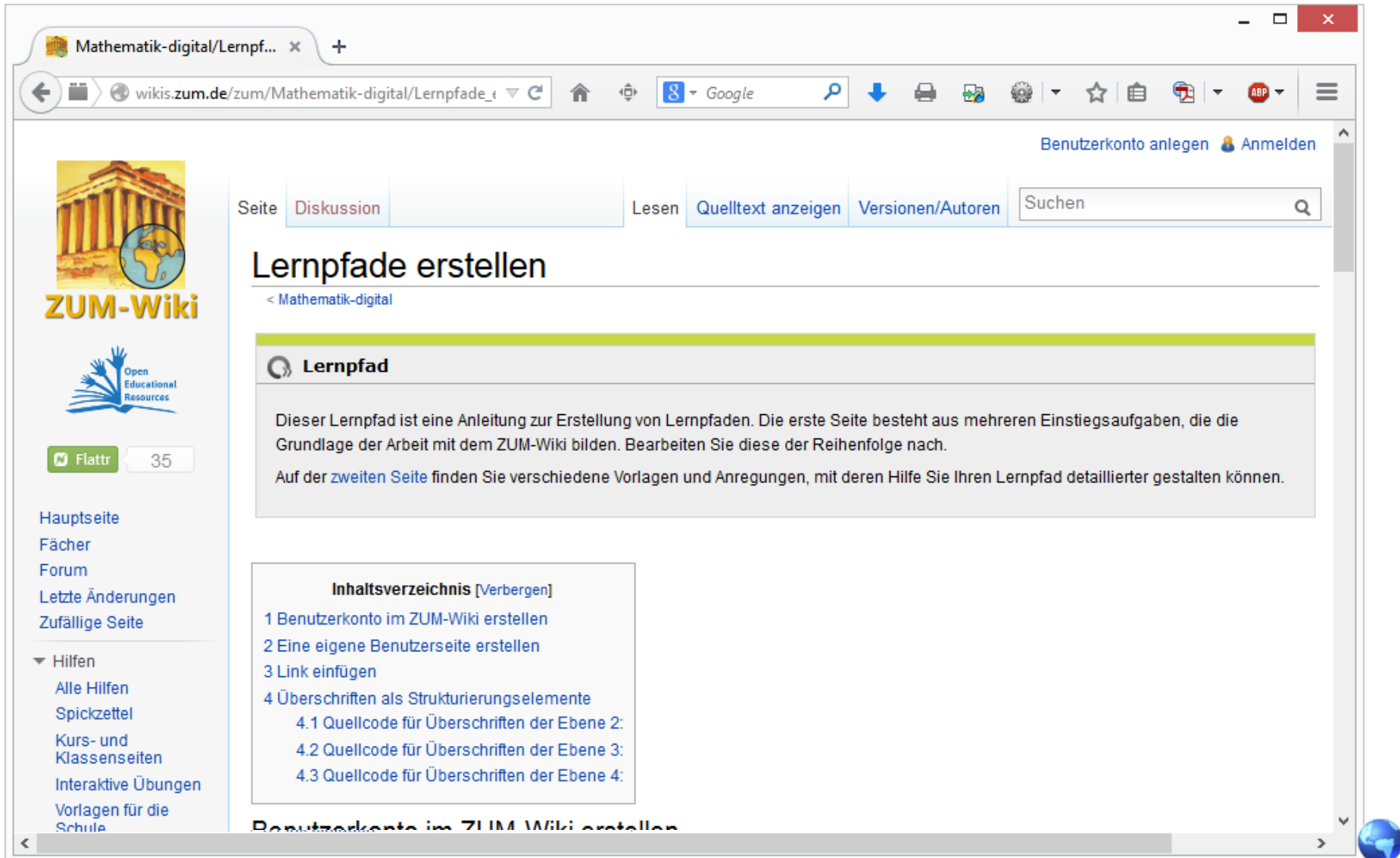
Diese Gleichung wird „Zweiter Strahlensatz“ genannt.

3.2 Formuliert die Aussage des zweiten Strahlensatzes hier in Worten.

Im Folgenden sollt ihr ermitteln, unter welchen Voraussetzungen der zweite Strahlensatz gilt.

3.3 Variiert nun den vertikalen Winkel zwischen den beiden Geraden (links). Hierbei wird der Winkel zwischen den Geraden durch B' und C' sowie durch B und C verändert. Notiert auch hier die Verhältnisgleichung für die Strecken 1 und 2 in der Simulation.

Papier-arbeitsblatt







The screenshot shows a web browser window with the address bar containing 'wikis.zum.de/zum/Mathematik-digital/Lernpfade_erstellen'. The page title is 'Lernpfade erstellen' and it is part of the 'Mathematik-digital' category. The page content includes a navigation menu with 'Diskussion', 'Lesen', 'Quelltext anzeigen', and 'Versionen/Autoren'. A search box is present with the text 'Suchen'. The main heading is 'Lernpfad' with a circular icon. Below it, there is a paragraph explaining that this learning path is a guide for creating learning paths, starting with introductory tasks. A second paragraph mentions that the second page contains templates and suggestions. On the left side, there is a sidebar with the ZUM-Wiki logo, 'Open Educational Resources' logo, a Flattr button with the number 35, and a list of navigation links: 'Hauptseite', 'Fächer', 'Forum', 'Letzte Änderungen', 'Zufällige Seite', and a 'Hilfen' section with links for 'Alle Hilfen', 'Spickzettel', 'Kurs- und Klassenseiten', 'Interaktive Übungen', and 'Vorlagen für die Schule'. At the bottom, an 'Inhaltsverzeichnis [Verbergen]' section lists the following items:

- 1 Benutzerkonto im ZUM-Wiki erstellen
- 2 Eine eigene Benutzerseite erstellen
- 3 Link einfügen
- 4 Überschriften als Strukturierungselemente
 - 4.1 Quellcode für Überschriften der Ebene 2:
 - 4.2 Quellcode für Überschriften der Ebene 3:
 - 4.3 Quellcode für Überschriften der Ebene 4:

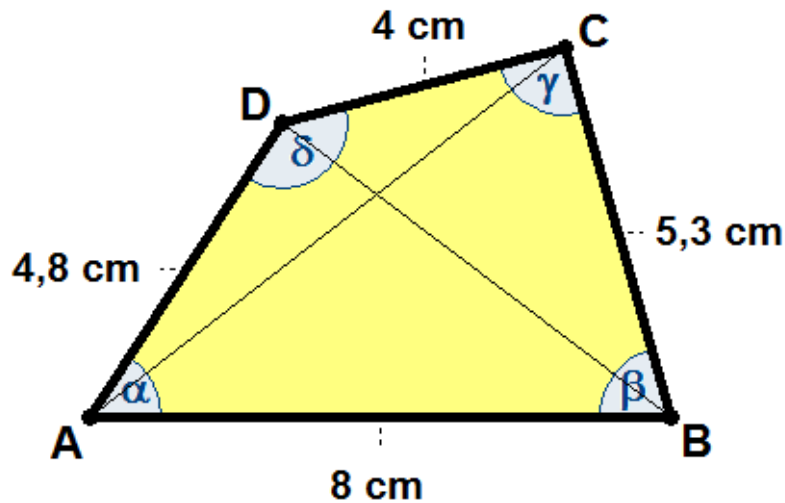
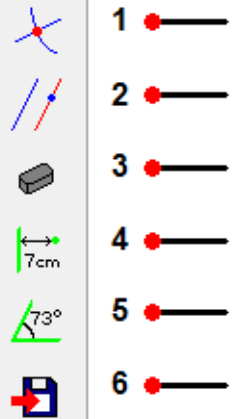
The bottom of the page shows the beginning of the first section: 'Benutzerkonto im ZUM-Wiki erstellen'.

Computer im Mathematikunterricht

- 1 **Warum?** – Computer als Medium und Werkzeug
 - 1.1 Ziele am Beispiel
 - 1.2 Computerwerkzeuge und deren Auswahl
- 2 **Wie?** – Organisation der Arbeit am Computer
 - 2.1 Sozialform, Selbsttätigkeit, Lernumgebung, ...
 - 2.2 Lernpfade
- 3 **Wo?** – Computer beim
 - 3.1 Erarbeiten von Begriffen 
 - 3.2 Erarbeiten von Sachverhalten / Verfahren 
 - 3.3 Problemlösen / Modellieren 
 - 3.4 Produktiv Üben
mit automatisierten Rückmeldungen 



Drachenviereck, Parallelogramm, Quadrat, Raute, Rechteck und Trapez




Ziel

Erarbeitung der Beziehungen zwischen den angegebenen Viereckstypen.

Nötiges Vorwissen

Die genannten Viereckstypen und deren Eigenschaften sollten bekannt sein.

Arbeitsaufträge

(1) Ziehen Sie den ersten Schieberegler  **langsam** nach rechts. Dadurch wird die Änderung eines Aspekts des dargestellten Vierecks erzwungen. Das kann z.B. eine Größe (Länge, Winkel) oder die Lage einer Strecke sein. **Beobachten Sie den Vorgang genau und beantworten Sie folgende Fragen schriftlich (!):**

a. Welche Änderung wurde

Hilfe zu den Icons:





3.1 Erarbeiten von Begriffen

<http://tube.geogebra.org/student/m27662>

Haus der Vierecke

Dieses Viereck ist ein
Rechteck
Parallelogramm
Trapez

Beispiel Nr. 2

zeige rechte Winkel zeige Symmetrieachsen

Beispiele Parallelogramm Beispiele Drachen
 Beispiele Rechteck Beispiele Trapez

Bewege die grünen Eckpunkte



▶ Aspekte der Gestaltung

▷ Unterstützung

- ▶ *Fokussierungshilfen*: Farben, Messwerte, Hilfslinien, ...
- ▶ *Schaltknöpfe*: Ein- und Ausblenden von Elementen / abrufbare Hilfen
- ▶ *Schieberegler*: Eindeutige Festlegung von Veränderungen

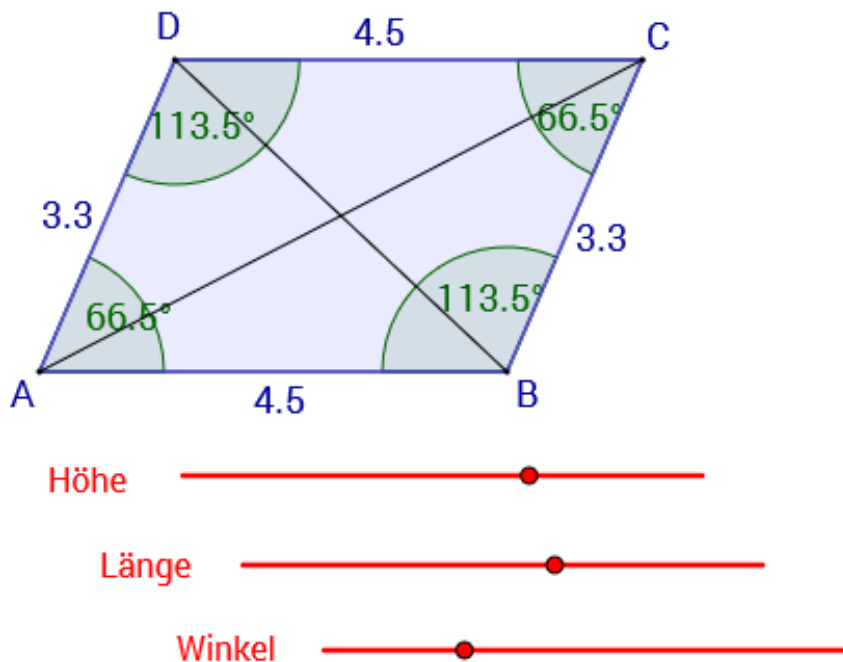
▷ Direktes Feedback

- ▶ Bildschirmausgabe
- ▶ Gezielte Rückmeldungen

▷ Höhere Schwierigkeit

- ▶ Fokussierungshilfen reduzieren

Verändere die Form des Parallelogramms und suche die besonderen Eigenschaften!



- Das Parallelogramm hat 4 gleich lange Seiten.
- Die Diagonalen halbieren einander.
- Gegenüberliegende Winkel ergänzen sich auf 180°.
- Nebeneinanderliegende Winkel sind supplementär.
- Benachbarte Winkel sind gleich groß.
- Benachbarte Seiten sind gleich lang.
- Die Diagonalen stehen normal aufeinander.
- Gleich lange Seiten sind parallel.

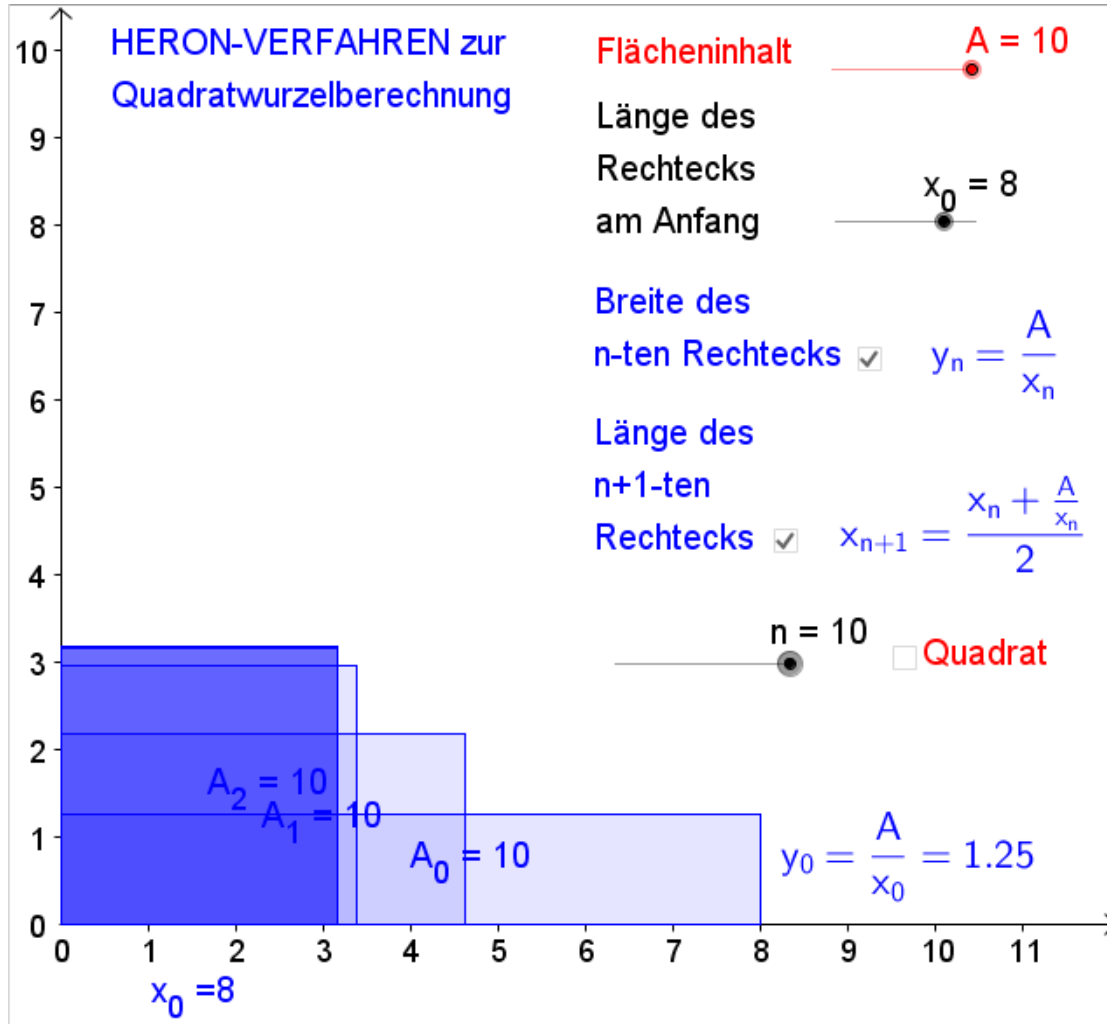
Du hast die Eigenschaften des Parallelogramms richtig erkannt!

—● Bewegung von C einschränken

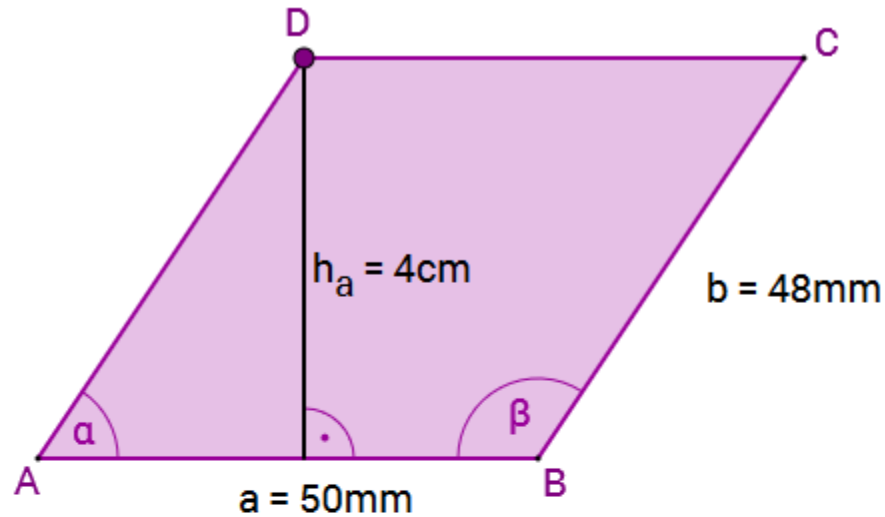
0 a = 6,2 16

Hinweise:

- Durch Ziehen am blauen Schieberegler a kannst du den Punkt C auf der Halbgeraden [BC bewegen.
- Durch Ziehen am Punkt C kannst du ihn auf dem blauen Kreisbogen bewegen.
- Erreicht C durch eine Verbindung dieser beiden Bewegungen jeden Punkt oberhalb von AB?



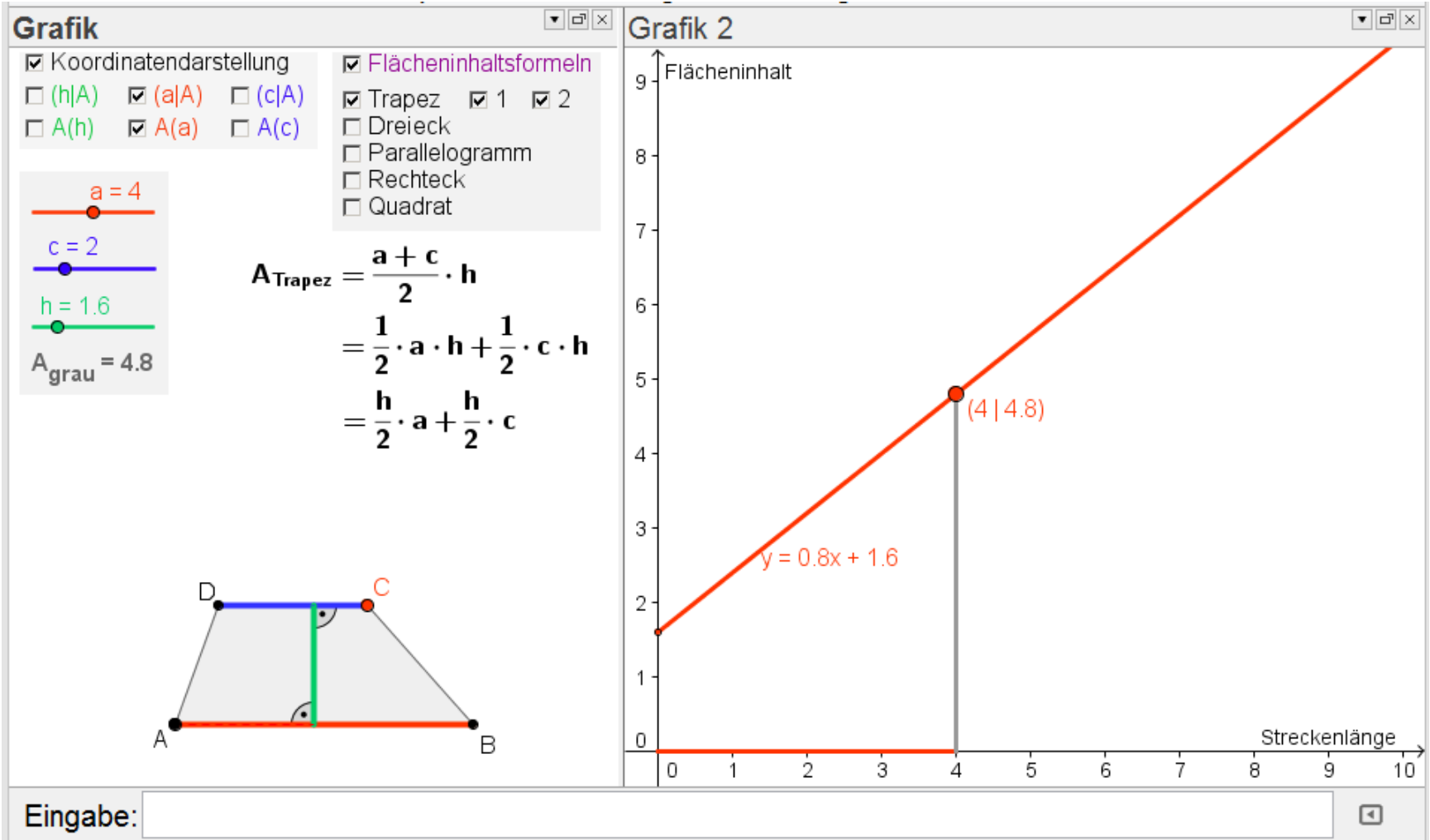
	A	B	C
1	n	x_n	$y_n = A/x_n$
2	0	8	1.25
3	1	4.625	2.1621621622
4	2	3.3935810811	2.9467396715
5	3	3.1701603763	3.1544145447
6	4	3.1622874605	3.1622678599
7	5	3.1622776602	3.1622776602
8	6	3.1622776602	3.1622776602
9	7	3.1622776602	3.1622776602
10	8	3.1622776602	3.1622776602
11	9	3.1622776602	3.1622776602
12	10	3.1622776602	3.1622776602
13			
14			
15			
16			



Bewege den Punkt D bis die Seite $b = 6,4$ cm lang ist!

Berechne die Fläche!

A = cm²



Computer im Mathematikunterricht

- 1 Warum?** – Computer als Medium und Werkzeug
 - 1.1 Ziele am Beispiel
 - 1.2 Computerwerkzeuge und deren Auswahl
- 2 Wie?** – Organisation der Arbeit am Computer
 - 2.1 Sozialform, Selbsttätigkeit, Lernumgebung, ...
 - 2.2 Lernpfade
- 3 Wo?** – Computer beim
 - 3.1 Erarbeiten von Begriffen
 - 3.2 Erarbeiten von Sachverhalten / Verfahren
 - 3.3 Problemlösen / Modellieren
 - 3.4 Üben mit automatisierten Rückmeldungen

► Quellen für Applets und Lernpfade

 realmath.de

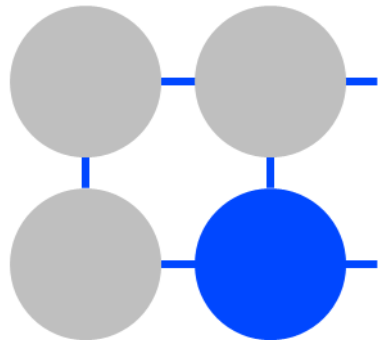
 tube.geogebra.org

 juergen-roth.de/dynama/

 juergen-roth.de/dynageo/

 lernpfade.mathematikunterricht.net

 roth.tel



**Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit**
roth.tel

