

Verständnisorientierung
in der Analytischen Geometrie

Jürgen Roth

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

14.11.2026 Digitale mathematische Werkzeuge 2027, Karlsruhe



Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Verständnisorientierung
in der Analytischen Geometrie

1. Vektorbegriff – Schülerschwierigkeiten und Zugang über n-Tupel
2. Geometrische Deutung von Vektoren
3. Geraden- und Ebenengleichungen

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

juergen-roth.de

RPTU

1

Vektorbegriff
Schülerschwierigkeiten und Zugang über n-Tupel

Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff

Einige typische Schülerschwierigkeiten

- Schwierigkeit mit Pfeilklassen
- Algebraische Auffassung von Vektoren fehlt („Vektor“ → „Schalter wird auf Geometrie gestellt“)
- Deutung von Zahlenpaaren/-tripeln als Pfeile
- Schwierigkeiten mit dem Nullvektor
- Lernen ohne die Entwicklung von (Grund-)Vorstellungen
- Vektorformeln aufstellen
- „Ortsvektor“ als Problemfall



Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16-19

Schwierigkeit: Pfeilklassen

Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Alexandra (A)
Einen Pfeil in einem Raum.

Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile."
Was sagst du dazu?



A: Stimmt nicht.

I: Warum?

A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.

I: Was ist für dich ein Vektor?

A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.

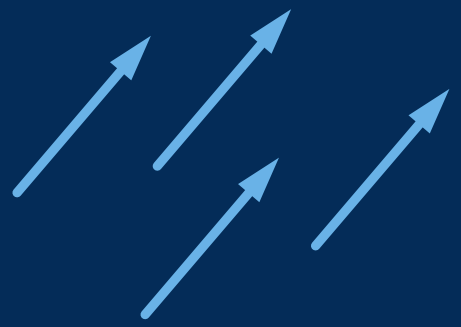
I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?

A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Pfeilklassen

Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile."
Was sagst du dazu?



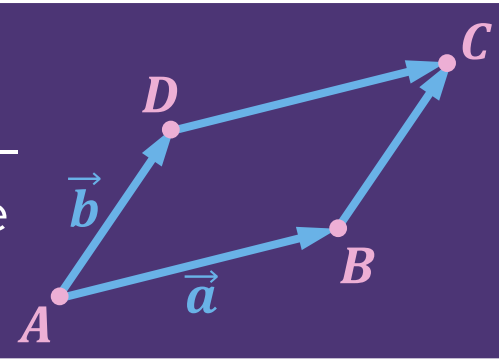
Richard (R)
Diese vier Vektoren kann man aneinanderreihen und kommt dann auf einen Vektor, einen Gesamtvektor.

I: Bitte zeichne das auf.

R: [Fertigt eine Zeichnung an]



Aufgabe: Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A, B und D. Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts C.



A: Ich würde Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ so lange verschieben, bis ich zum Punkt B komme, und dann habe ich den Vektor $\overrightarrow{BC}$ ... Das ist eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$, nur von einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.

I: Kann man behaupten: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$?

A: Nein, weil $\overrightarrow{BC}$ geht von einem anderen Punkt als $\vec{b}$ aus.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Algebraische Auffassung von Vektoren

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

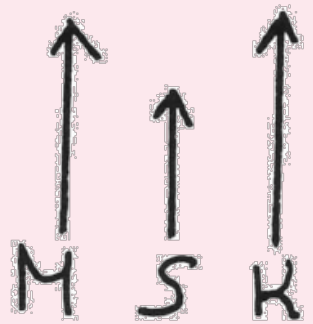
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

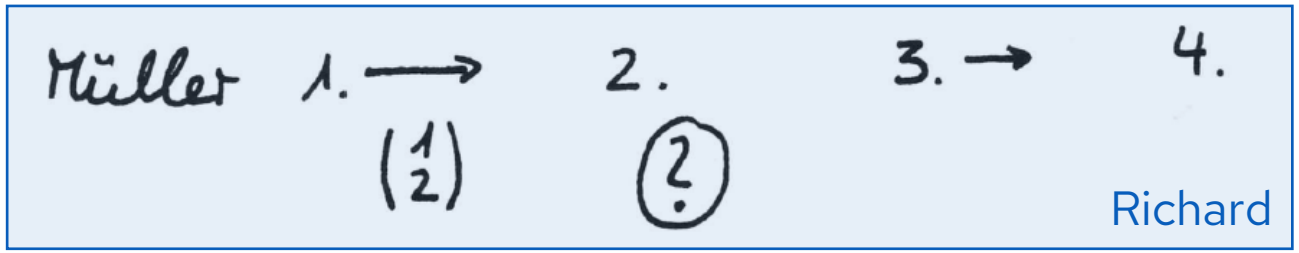
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

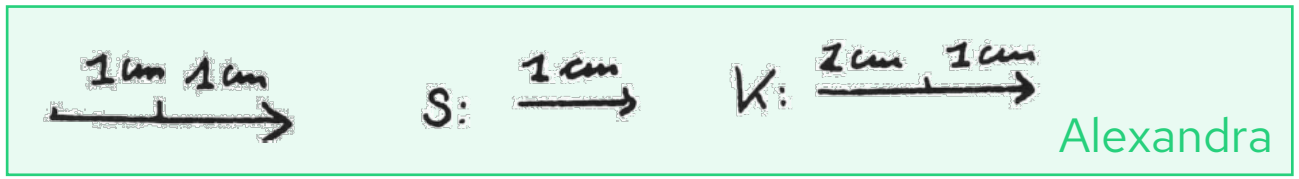
Schülerlösungen

Sandra





Richard



Alexandra

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Algebraische Auffassung von Vektoren

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

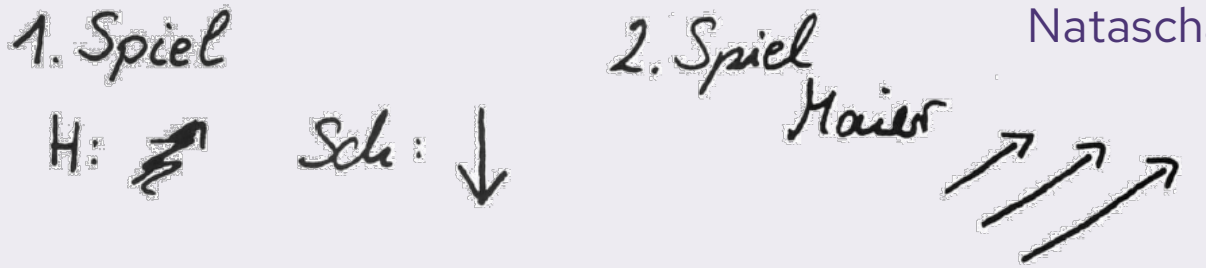
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

4. Spiel: Kaiser (4)

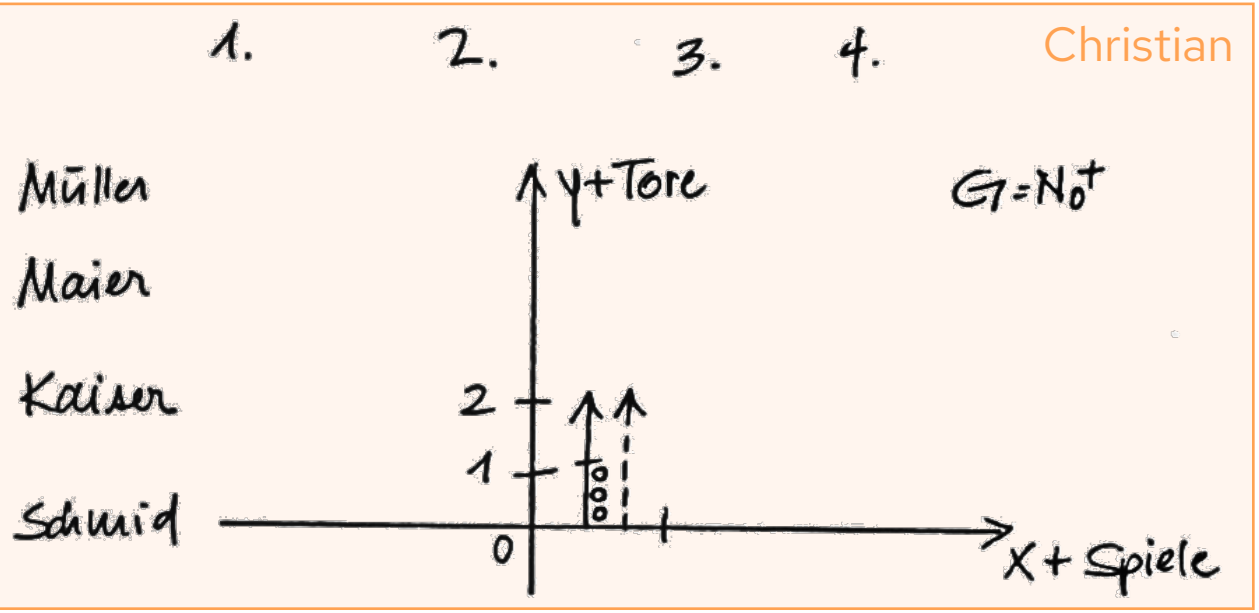
Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Schülerlösungen

Natascha



Christian



Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

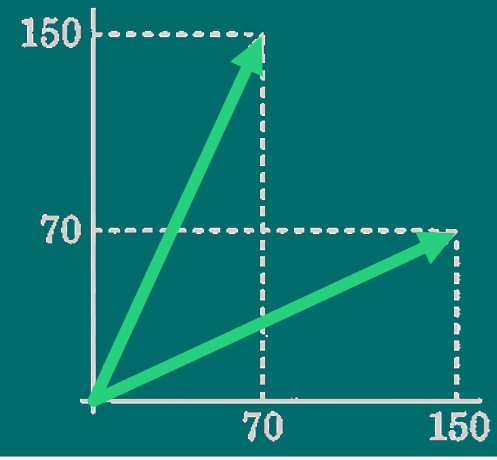
Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Michaela
Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.



I: Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}150\\70\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}70\\150\end{pmatrix}$ gleich oder verschieden?

A: [Fertigt eine Zeichnung an.]



I: Du erkennst die Ungleichheit dieser Vektoren aufgrund einer Zeichnung. Kannst du das auch ohne Zeichnung begründen?

A: Nein!

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. Mathematik lehren, 133, 16–19

Schwierigkeit:
Deutung von Zahlenpaaren als Pfeile

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zahlenpaare können …

- in der Regel als Punkte gedeutet werden.
- häufig nicht als Pfeile gedeutet werden.

Interviewer (I)

Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Christian

So wie es da steht mit dieser Spaltenform ist es ein Pfeil. Wenn (3|4) da stehen würde, wäre es ein Punkt.

Interviewer (I)

Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Natascha (N)

(3|4) sind die Koordinaten von einem Punkt im ebenen Koordinatensystem im Zweidimensionalen.

I: Kann dieses Zahlenpaar auch einen Pfeil darstellen?

N: Nein, da bräuchte ich noch ein zweites Koordinatenpaar, um den Pfeil darzustellen. Aber ich habe nur eines gegeben, also kann es nur einen Punkt darstellen.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Nullvektor

- Grenzfall eines Vektors
- Entarteter Pfeil der Länge Null (das ist aber ein Punkt)
- Weil Lernende Vektoren häufig mit Pfeilen identifizieren, ist der Nullvektor für sie kein Vektor.

Kathi (K): [Schreibt] $0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dann ist es ein Punkt.

I: Dann ist es ein Punkt?

K: Ja, der Nullpunkt.

I: Kann es auch ein Pfeil sein?

K: Nein!

I: Warum nicht?

K: Es ist kein Pfeil. Es steckt keine Verbindung drinnen.

I: Das wäre also ein Zahlenpaar, das man nicht als Pfeil interpretieren kann?

K: Ja.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Situation
Es geht um den Vektor $r \cdot \vec{a}$.

Interviewer (I): Und wenn $r = 0$?

Daniel (D): Dann gibt's den Vektor nicht.

Christoph (C): Es ist der Nullpunkt.

I: Es ist der Nullpunkt?

C: Ja.

D: ... Ja, er muss im Koordinatenursprung liegen. Ah nein, es ist ein Vektor! Richtig. D.h. es ist der Punkt, wo der Vektor $\vec{a}$ weggehen würde, also der Schaft ... Ja der kann auch irgendwo anders liegen, aber der Punkt muss da liegen [Er zeichnet ein Achsenkreuz und zeigt auf den Ursprung.]. Aber nein, der kann überall liegen. Denn wenn der Vektor überall liegen kann, kann der Punkt überall liegen.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Vektorformeln aufstellen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

Stelle eine Formel auf, für den Mittelpunkt $\overrightarrow{M}$ einer Strecke AB.

Schülerlösungen

Alle gingen von derselben Skizze aus.



Sie schrieben aber unterschiedliches auf:

Isabella: $\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}}{2}$

Florian: $\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

Martin: $\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{AB}}{2}$

Karin: $\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}}{2}$

Probleme

- Im Prinzip wird so gedacht: „Ich gehe von $\overrightarrow{A}$ aus, füge die Hälfte von $\overrightarrow{AB}$ dazu und komme zu $\overrightarrow{M}$."
- Wie kann der Gedankengang mit Hilfe der Vektorsymbolik notiert werden? $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Unverständnis des Vektorbegriffs
- „Typkontrolle" Pfeil ↔ Punkt fehlt.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

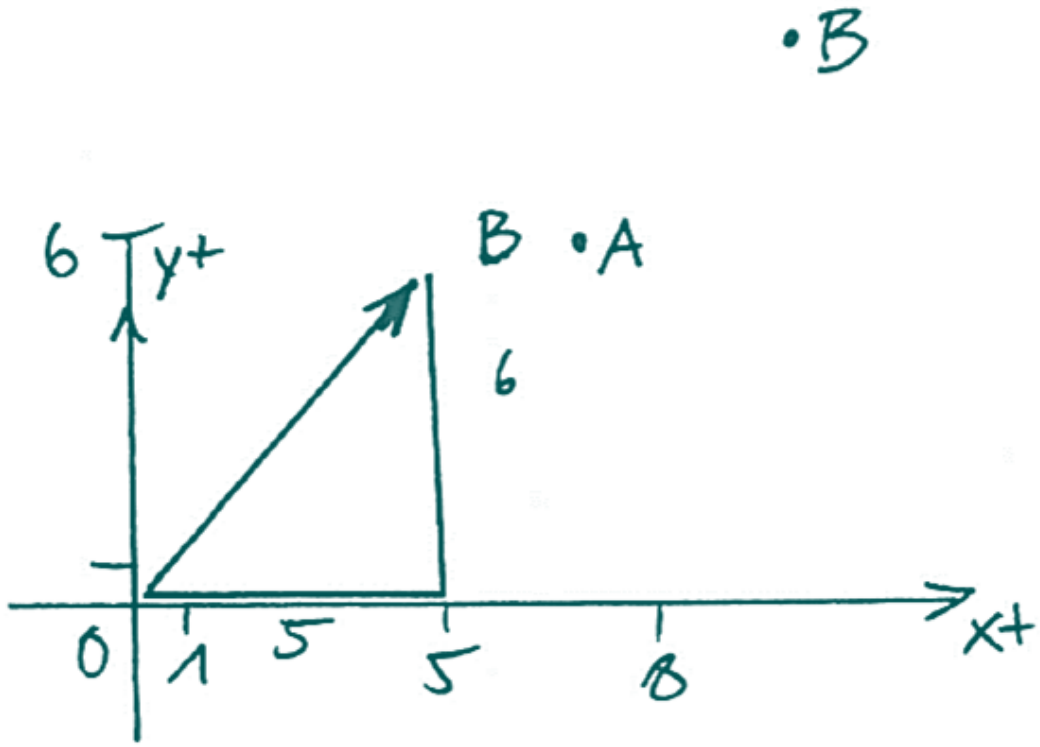
Schwierigkeit: „Ortsvektoren“

Aufgabe

Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und veranschauliche ihn an einer Skizze: $\vec{A} = (8|6)$, $\vec{B} = (13|12)$

Schülerlösung

- Christian rechnet richtig:
  $\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Er zeichnet die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ einigermaßen richtig in ein Koordinatensystem ein.
- Anschließend stellt er den Vektor $\overrightarrow{AB}$ aber als Ortspfeil dar.



Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Zugänge zum Vektorbegriff

Was ist ein Vektor?

Es gibt viele Antworten auf diese Frage.

Hochschulmathematik

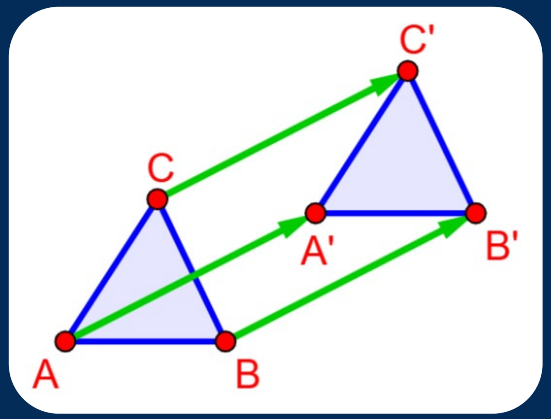
- **Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.**
- Axiomatischer Zugang über die Struktur



Schulmathematik

(1) **Ein Vektor ist eine Pfeilklasse.**

(2) **Ein Vektor ist eine Verschiebung**, also eine Änderung der Lage.



(3) **Ein Vektor ist ein n-Tupel.**

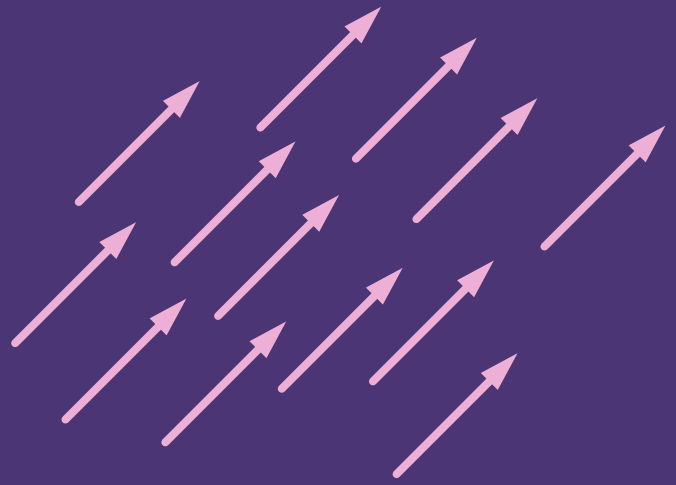
- Ein Vektor $\vec{v}$ ist als n-Tupel ein Element des $\mathbb{R}^n$.
- Er kann je nach Bedarf als Zeilenvektor $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ oder auch als Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ geschrieben werden.

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.





Probleme mit dem Pfeilklassenmodell

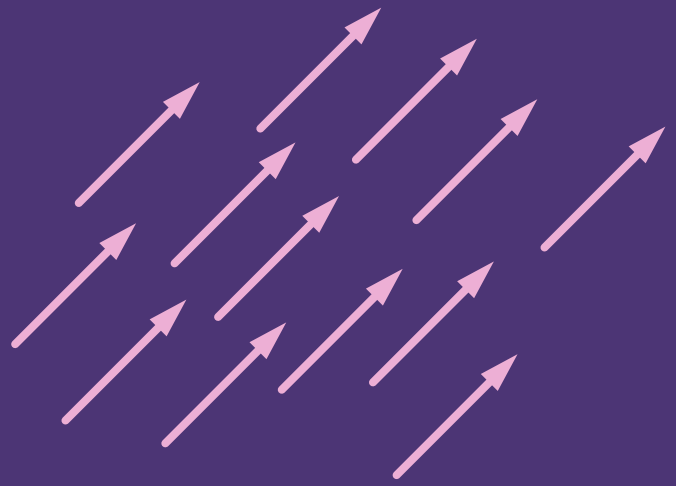
- Erfüllt Vektorraumaxiome, aber Probleme mit der Definition der Rechengesetze über Repräsentanten
- Einführung der Rechenoperationen und Beweise der Rechengesetzte kompliziert
  ⇒ Konsequente und saubere Anwendung des Pfeilklassenmodells findet oft nicht statt.
- Nur in der Schulmathematik etabliert.
- Passt nicht zur Denkweise in
  - Analytischer Geometrie
  - und Physik.

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

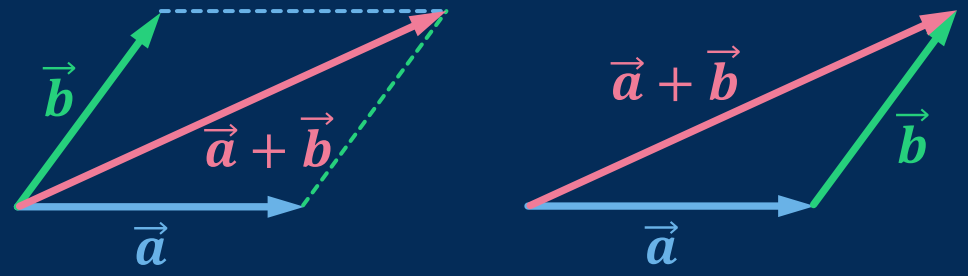
Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



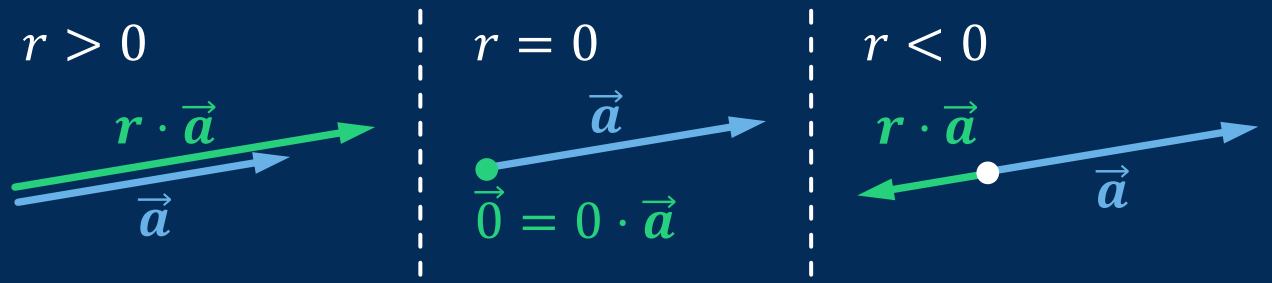
Bei jeder Definition muss die **Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten** gezeigt werden!

Rechenoperationen für Pfeilklassen

- ... sind über Repräsentanten definiert.
- **Addition:** Definition durch Repräsentanten



- **Vervielfachung:** Definition durch Repräsentanten

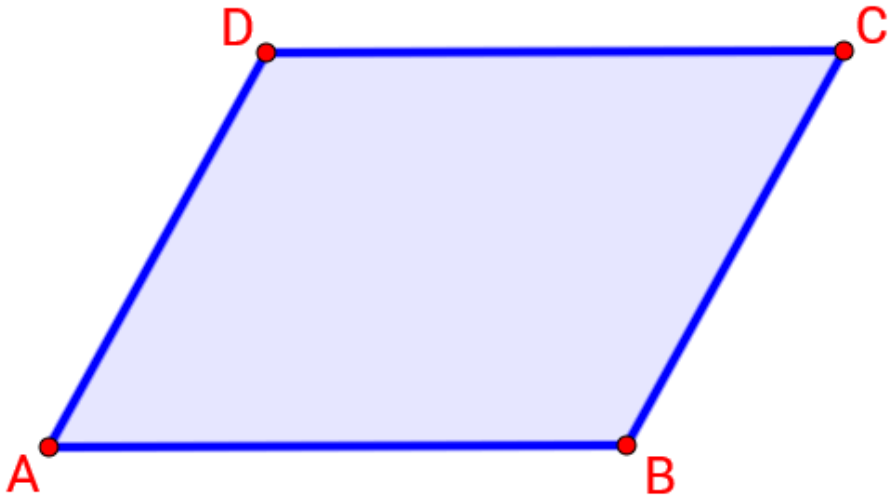


Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14 https://www.geogebra.org/m/p6btdgts

Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Analytischen Geometrie

Aufgabe

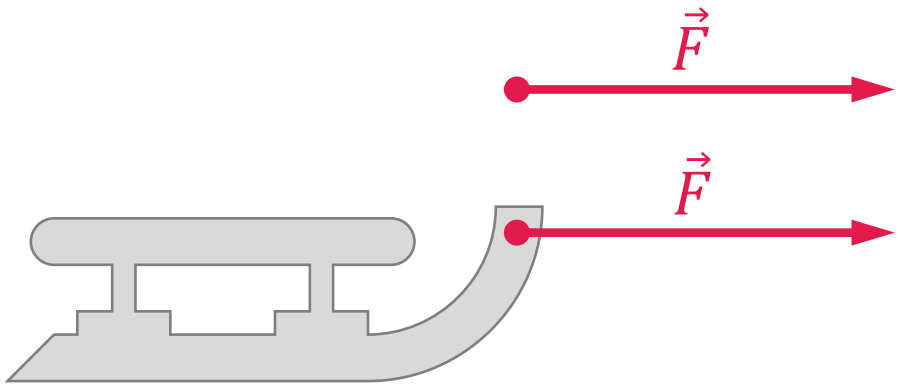
- Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A, B und D.
- Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts C.

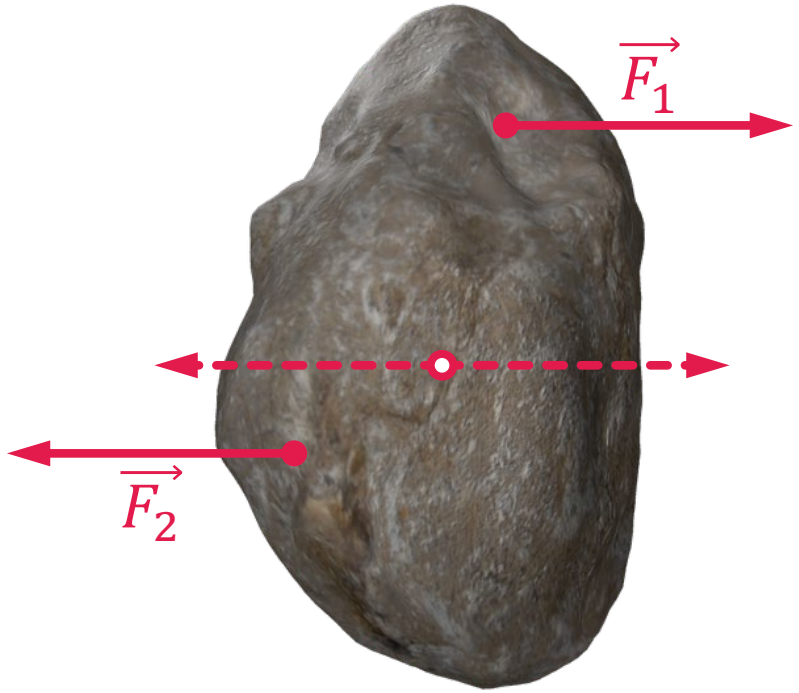


Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Physik

Wo greift die Zugkraft an?





Kraftpfeile dürfen nicht beliebig verschoben werden!

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als n-Tupel einführen!

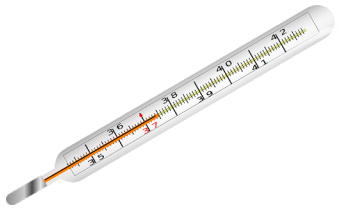
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

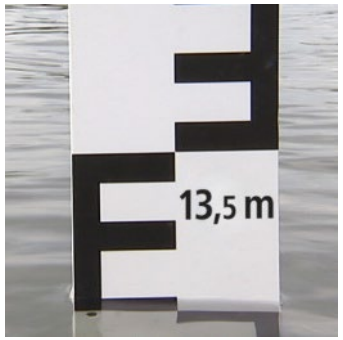


Idee: Sachverhalte mit Zahlen bzw. n-Tupeln darstellen

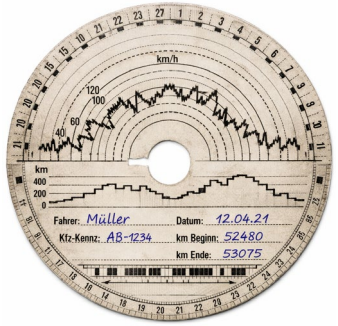
- **Beispiele für reelle Zahlen (1-Tupel)**
  Thermometer, Wasserstandsanzeiger, …
- **Beispiele für 2-Tupel**
  Stadtpläne, Schachbrett, Fahrtenschreiber, …
- **Beispiele für 3-Tupel**
  Stückzahlen in einem Lager, Testergebnisse, rgb-Farben, …

Wichtig:
Dieser Zugang zum Vektorbegriff ist bewusst rein arithmetisch und wird dringend empfohlen.









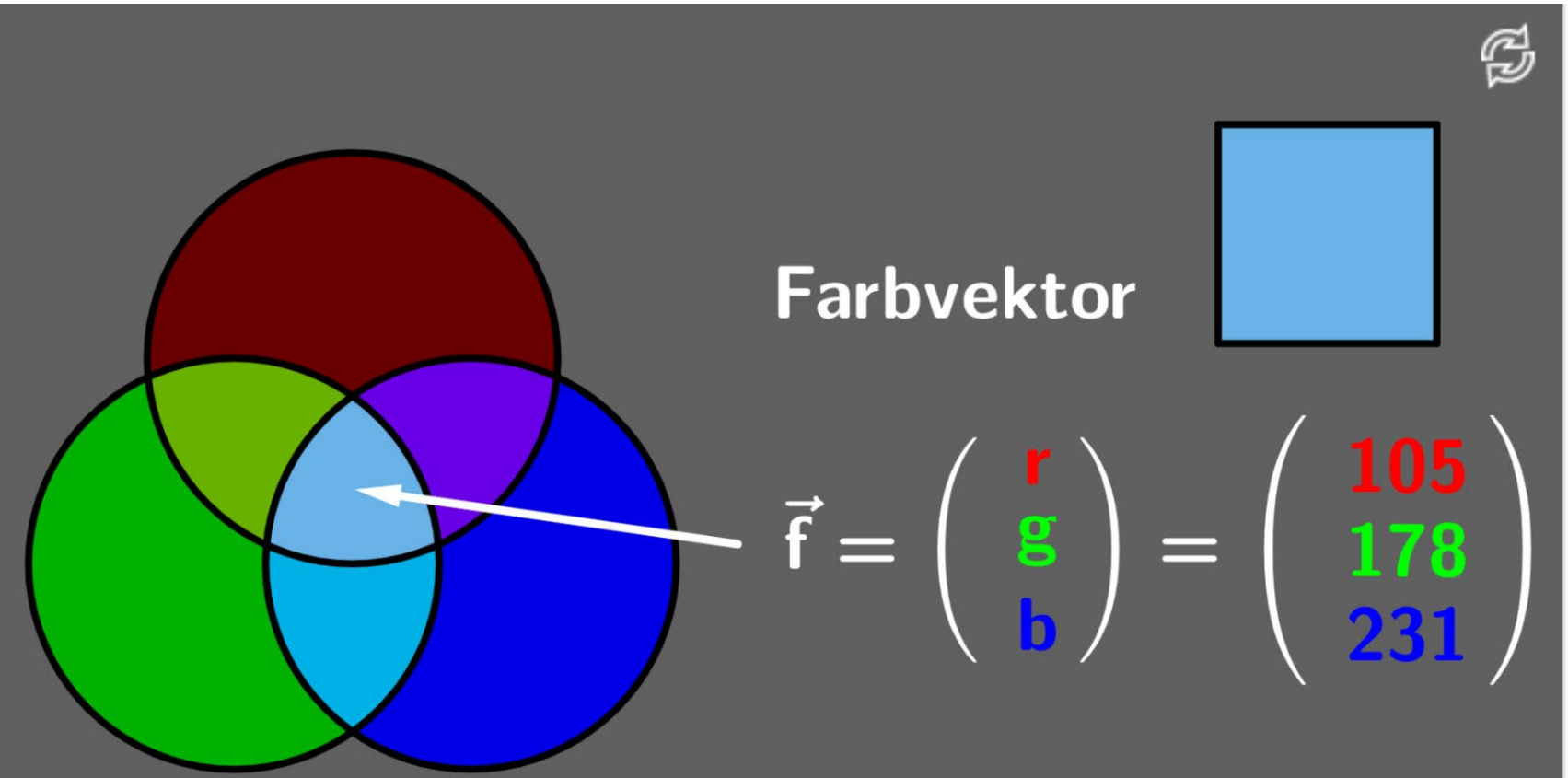
Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

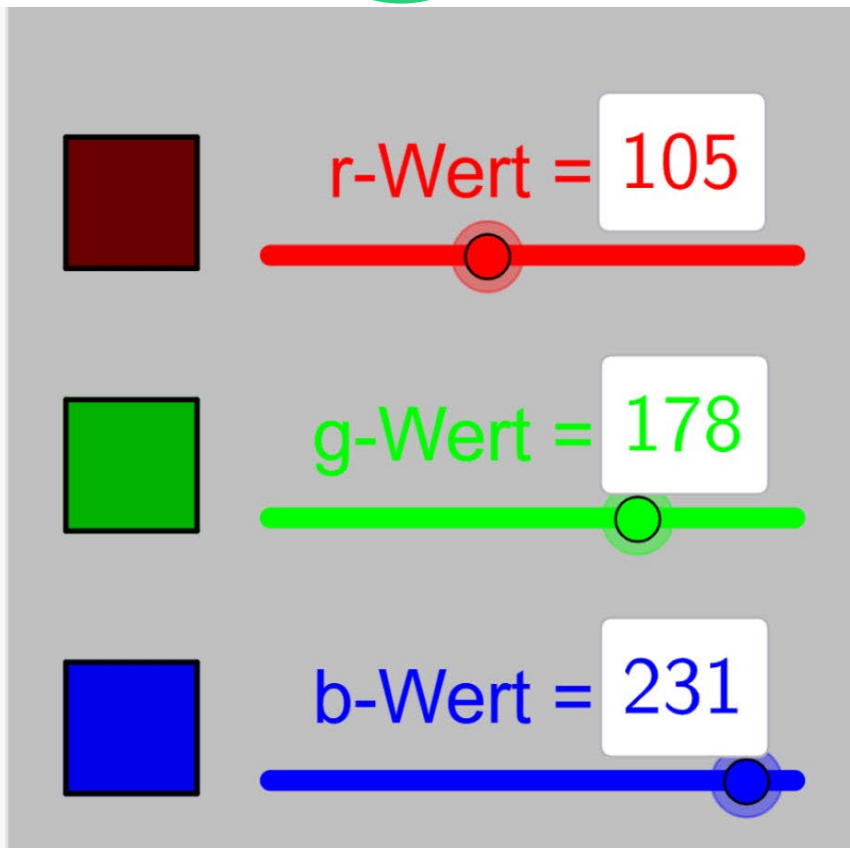
RPTU

Vektoren als n-Tupel einführen!

Verständnisanker: rgb-Farben

Verständnisanker: Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt.





Vektoren als n-Tupel einführen!

Situationen beschreiben, berechnen und lösen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Tests

Beate und Dora haben zwei Tests absolviert.
Bei jedem Test konnte man 20 Punkte erreichen.
Beate erhielt auf den ersten Test 15 Punkte
und auf den zweiten 18 Punkte. Dora erhielt
jedes Mal zwei Punkte weniger als Beate.

Gib ein Zahlenpaar an, das ...

- Beates Punktzahlen bei den beiden Tests angibt.
- Doras Punktzahl bei den beiden Tests angibt.
- die Punktzahlen der beiden Mädchen beim ersten Test angibt.
- Die Punktzahlen der beiden Mädchen beim zweiten Test angibt.



$\begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 15-2 \\ 18-2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 15 \\ 15-2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 18 \\ 18-2 \end{pmatrix}$

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Situationen beschreiben, berechnen und lösen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Produktionskosten

Eine Firma erzeugt drei Waren. Die Stückpreise der Waren sind 115 €, 135 € und 140 €.

Im Lager befinden sich von diesen Waren 728, 644 bzw. 840 Stück, bestellt wurden 411, 433 bzw. 596 Stück. Es fallen Produktionskosten von 65 €, 70 € bzw. 72 € pro Stück an.

Stückpreise:	$\begin{pmatrix} 115€ \\ 135€ \\ 140€ \end{pmatrix}$
Lagerbestand:	$\begin{pmatrix} 728 \\ 644 \\ 840 \end{pmatrix}$
Bestellzahlen:	$\begin{pmatrix} 411 \\ 433 \\ 596 \end{pmatrix}$
Produktionskosten:	$\begin{pmatrix} 65€ \\ 70€ \\ 72€ \end{pmatrix}$

a) **B**eschreibe die Stückpreise, den Lagerbestand, die Bestellzahlen und die Produktionskosten jeweils durch ein Zahlentripel.

b) **D**ie Produktionskosten steigen um 5 € pro Stück. Deshalb erhöht die Firma die Stückpreise ebenfalls um 5 € pro Stück. Dadurch sinken die Bestellungen für die erste Ware um 56 Stück, für die zweite Ware um 112 Stück und für die dritte Ware um 134 Stück. Um weitere Kosten zu sparen, wird der Lagerbestand um ein Viertel gesenkt. Wie lauten jetzt die Zahlentripel?

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Situationen beschreiben, berechnen und lösen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Warenlager

Eine Firma verkauft zwei Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. Der Vektor $\vec{A} = (a_1|a_2)$ gibt die Stückzahlen der beiden Waren im ersten Lager, der Vektor $\vec{B} = (b_1|b_2)$ die Stückzahlen der beiden Waren im zweiten Lager an. Der Vektor $\vec{C}$ gebe die Stückzahlen der beiden Waren in beiden Lagern zusammen an.

a) Drücke $\vec{C}$ durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aus.

b) Was gibt der Vektor $\vec{B} - \vec{A}$ an?

c) Was sagt die Gleichung $\vec{B} = 2 \cdot \vec{A}$ aus?

d) Drücke in diesem Fall $\vec{C}$ durch $\vec{A}$ aus.

Rabatte

Die Verkaufspreise (in Euro) von vier Waren werden durch den Vektor $\vec{V} = (v_1|v_2|v_3|v_a)$ angegeben. Bei Großabnahme erhält man 35 % Rabatt. Es sei $\vec{V'}$ der Vektor der Preise bei Großabnahme und $\vec{R}$ der Vektor der Rabatte.

a) Welche Beziehung besteht zwischen $\vec{R}$ und $\vec{V}$?

b) Welche Beziehung besteht zwischen $\vec{V'}$ und $\vec{V}$?



Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Situationen beschreiben, berechnen und lösen

Zimmerpreise

Ein Hotel hat 25 Zimmer. Der Vektor $\vec{P} \in \mathbb{R}^{25}$ gibt die Zimmerpreise an, der Vektor $\vec{B} \in \mathbb{R}^{25}$ gibt an, wie oft jedes Zimmer im laufenden Monat belegt war.

a) Drücke die Gesamteinnahmen $\vec{G}$ des Hotels im laufenden Monat durch $\vec{P}$ und $\vec{B}$ aus.

b) Im nächsten Monat werden die Zimmerpreise um 5% erhöht. Drücke wiederum $\vec{G}$ durch $\vec{P}$ und $\vec{B}$ aus.

Firmenbestellung

Eine Firma bestellt 100 Waren. Die Stückzahlen der bestellten Waren seien $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$, die Preise der Waren seien $p_1, p_2, \ldots, p_{100}$.

a) Schreibe einen Stückzahlvektor $\vec{S}$ und einen Preisvektor $\vec{P}$ auf.

b) Was bedeutet $\vec{S} \cdot \vec{P}$?



Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Komponentenweise Erklärung von Rechenoperationen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Addition, Subtraktion, Vervielfachung

- Komponentenweise erklärt
  - $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$
  - $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ \vdots \\ r \cdot a_n \end{pmatrix}$
- Formeln von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ übertragen
  - $b = 1{,}2 \cdot n$
  - $\vec{b} = 1{,}2 \cdot \vec{n}$

Die Erkenntnis, dass Addition, Subtraktion und Vervielfachung von Vektoren komponentenweise erklärbar ist, wird anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug erarbeitet (vgl. Folien 27-30.) .

Skalarprodukt

Am Beispiel (Stückpreis, Stückzahl) einführen.
(Vgl. Abschnitt 5: Skalarprodukt)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_2 \cdot b_2$$

Arithmetischen Zugang als Übergang zu linearen Gleichungssystemen (LGS) nutzen!

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. JMD 1, 171–187.

Vektoren als n-Tupel einführen!

Rechengesetze (→ Vektorraum-Axiome) erarbeiten

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rechengesetze für n-Tupel (Vektoren)

Vektorraum-Axiome

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — Kommutativität der Vektoraddition
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ — Assoziativität der Vektoraddition
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ — Existenz eines Nullvektors $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ — Existenz eines Gegenvektors* zu jedem Vektor

  $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ ist der Gegenvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- $(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$ — Assoziativität der Vervielfachung eines Vektors
- $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ — 1. Distributivgesetz
- $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$ — 2. Distributivgesetz
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ — Neutrales Element bzgl. der Vervielfachung

Rechengesetze bzw. **Vektorraum-Axiome** werden anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug erarbeitet. (Vgl. Folien 27-30)



Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

*Gegenvektor = inverses Element bzgl. +

RPTU

2 Geometrische Deutung von Vektoren

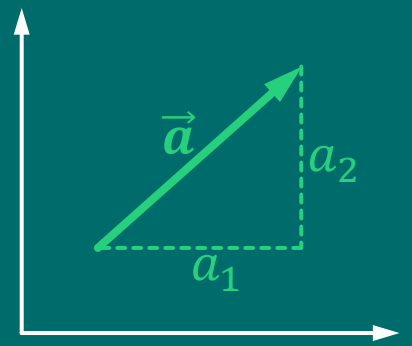
Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, …)

2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

Was ist ein Pfeil?
Ein Pfeil ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entsprechen unendlich viele Pfeile in der Ebene, die alle gleich lang und (abgesehen von den Nullpfeilen) gleich gerichtet und gleich orientiert sind. Die Komponenten können als Änderungen in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse gedeutet werden.

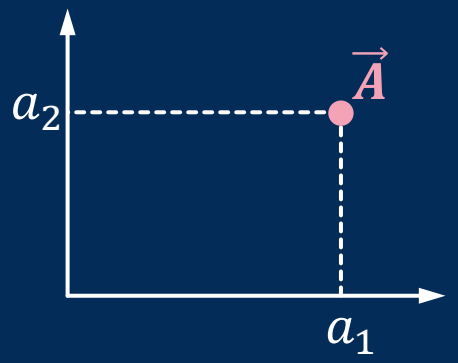
Umgekehrt entspricht jedoch jedem Pfeil in der Ebene genau ein Zahlenpaar.



Änderung

Was ist ein Punkt?
Ein Punkt ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entspricht genau ein Punkt in der Ebene und umgekehrt.

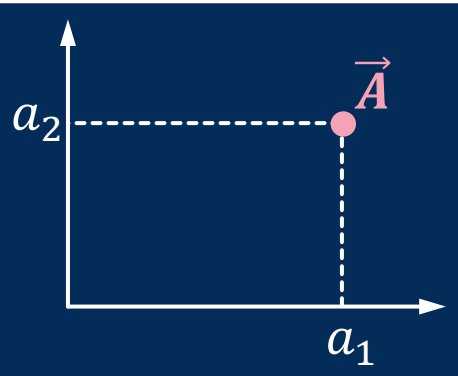


Zustand

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. *JMD, 1*(3), 171–187.

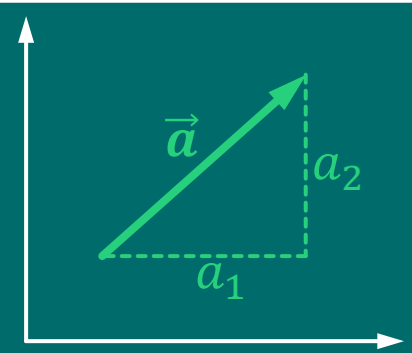
Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, ...)

2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten



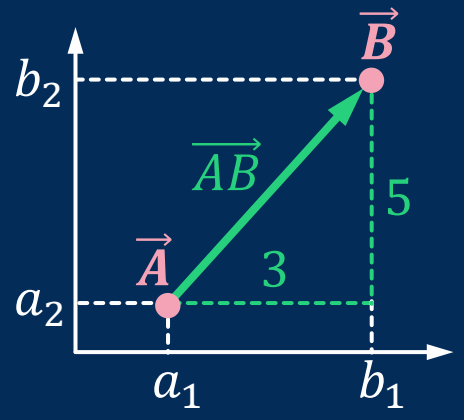
Zustand

Zahlenpaar $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
als **Punkt** in der Ebene.



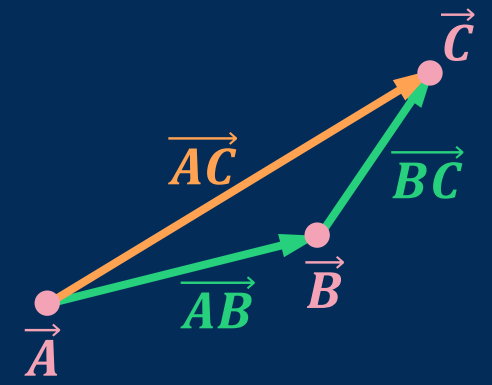
Änderung

Zahlenpaar $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
als **Pfeil** in der Ebene.



Pfeil $\overrightarrow{AB}$ gegeben durch Anfangs- und Endpunkt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \vec{B} - \vec{A}$$
$$\Rightarrow \vec{A} + \overrightarrow{AB} = \vec{B}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= (\vec{B} - \vec{A}) + (\vec{C} - \vec{B})$$
$$= \vec{C} - \vec{A}$$
$$= \overrightarrow{AC}$$

Grundvorstellungen zur Addition

Grundvorstellungen (GV) zur Addition

- Vom Hofe und Roth (2023) beschreiben vier Grundvorstellungen zur Addition.
- Zwei davon bewähren sich im Rahmen von Zahlbereichserweiterungen um inhaltlich-anschauliches Verständnis aufzubauen.

GV „Hinzufügen“

Anna hat 2 €, ihre Eltern geben ihr 3 € dazu.
Wie viel Euro hat Anna insgesamt?

- Die Ausgangssituation ist ein Zustand, dann erfolgt eine Änderung, das Ergebnis ist wieder ein Zustand.
- Folgende Gleichung beschreibt diese GV plakativ:
  Zustand + **Änderung** = **Zustand**

GV „Zusammenfassen von Änderungen“

Tobias bekommt von Onkel Jürgen 2 € und von Tante Susanne 3 €. Wie viel Euro hat er insgesamt bekommen?

- Hier werden zwei Änderungen zu einer Gesamtänderung zusammengefasst.
- Folgende Gleichung beschreibt diese GV plakativ:
  Änderung + **Änderung** = **Gesamtänderung**

vom Hofe, R. & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. Mathematik lehren, 236, 2-7

Grundvorstellungen zur Addition

Geometrische Darstellungen

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

https://www.geogebra.org/m/kpww4bah

Grundvorstellung (GV) „Hinzufügen“

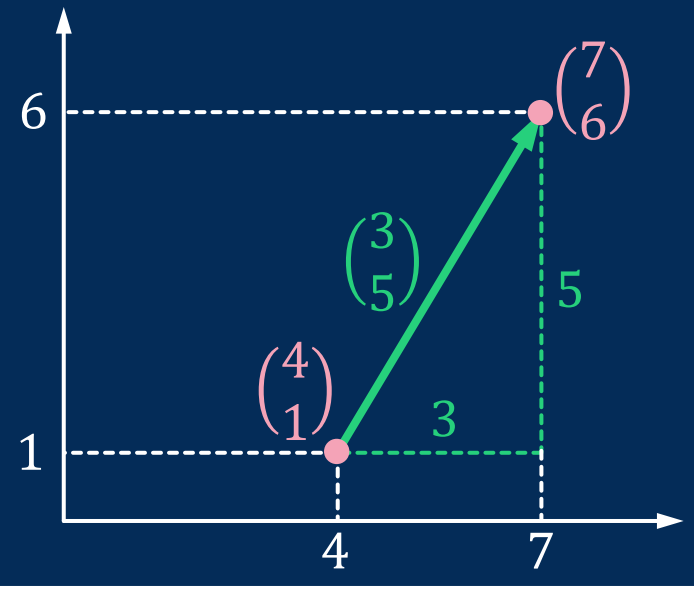
Zustand + Änderung = Zustand

Punkt-Pfeil-Darstellung:

- Reelle Zahlen → Zahlengerade



- Vektoren (n-Tupel) → Koordinatensystem

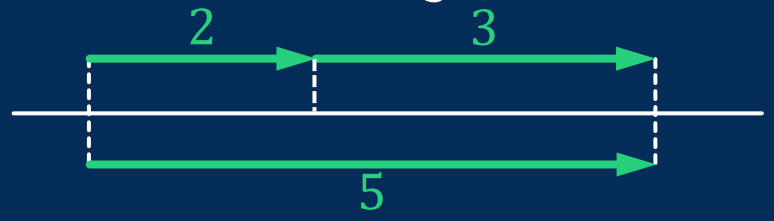


GV „Zusammenfassen von Änderungen“

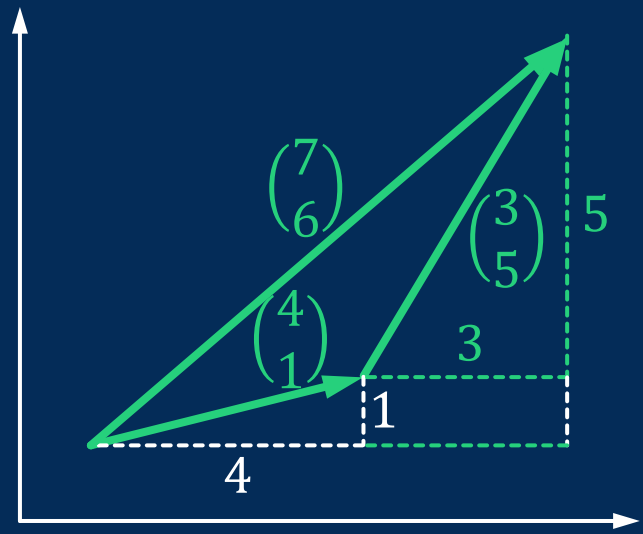
Änderung + Änderung = Gesamtänderung

Pfeil-Darstellung:

- Reelle Zahlen → Zahlengerade



- Vektoren (n-Tupel) → Koordinatensystem



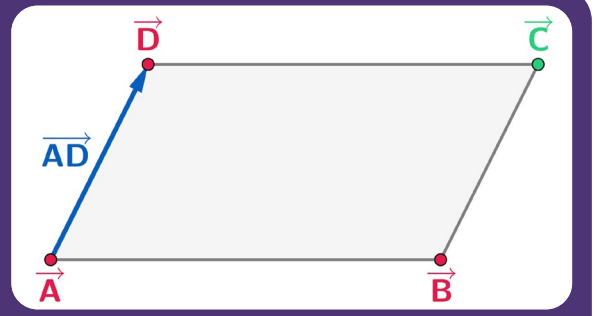
Schreibweisen für Vektoren

Aufgabe: Aus den bekannten Koordinaten der Eckpunkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{D}$ eines Parallelogramms sollen die Koordinaten des Eckpunkts $\boldsymbol{C}$ bestimmt werden.

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

MaTeGnu

$$\vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \vec{B} + (\vec{D} - \vec{A})$$
$$= \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$$

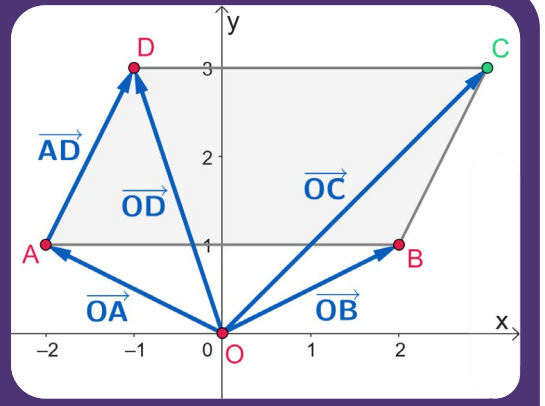


Vektor als n-Tupel
(Zustand **und** Änderung)

Schulbücher

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$$

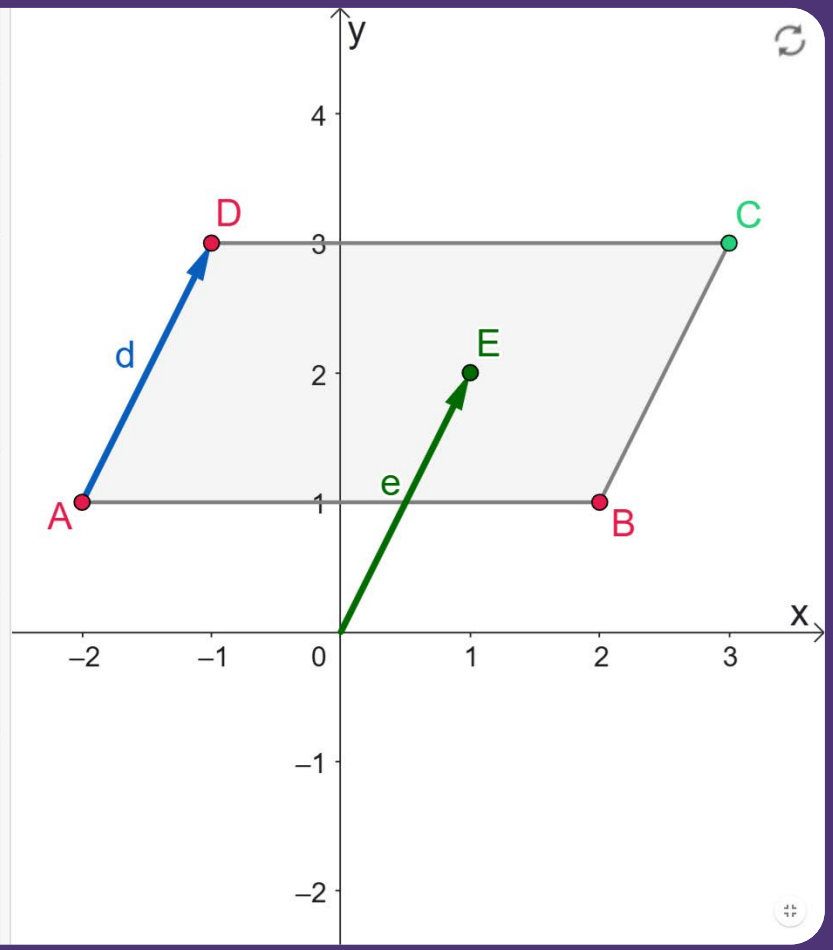
$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \vec{b} + (\vec{d} - \vec{a})$$



Vektor als Pfeilklasse
(**Nur** Änderung)

GeoGebra

A = (-2, 1)	
B = (2, 1)	
D = (-1, 3)	
d = Vektor(A, D)	$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
C = B + d	= (3, 3)
E = D − A	= (1, 2)
e = D − A	$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



3 Geraden- und Ebenengleichungen

Schwierigkeit:
Fehlende (Grund-)Vorstellungen

Situation
Viele Lernende benutzen Vektoren, ohne zu verstehen, was sie tun.

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?

Florian (F):
Ich glaube, das hat etwas mit diesem großen $\vec{X}$ zu tun. $\vec{X}$ ist gleich irgendein Punkt $\vec{A}$ plus t mal $\overrightarrow{AB}$.
[Er schreibt:] $\vec{X} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

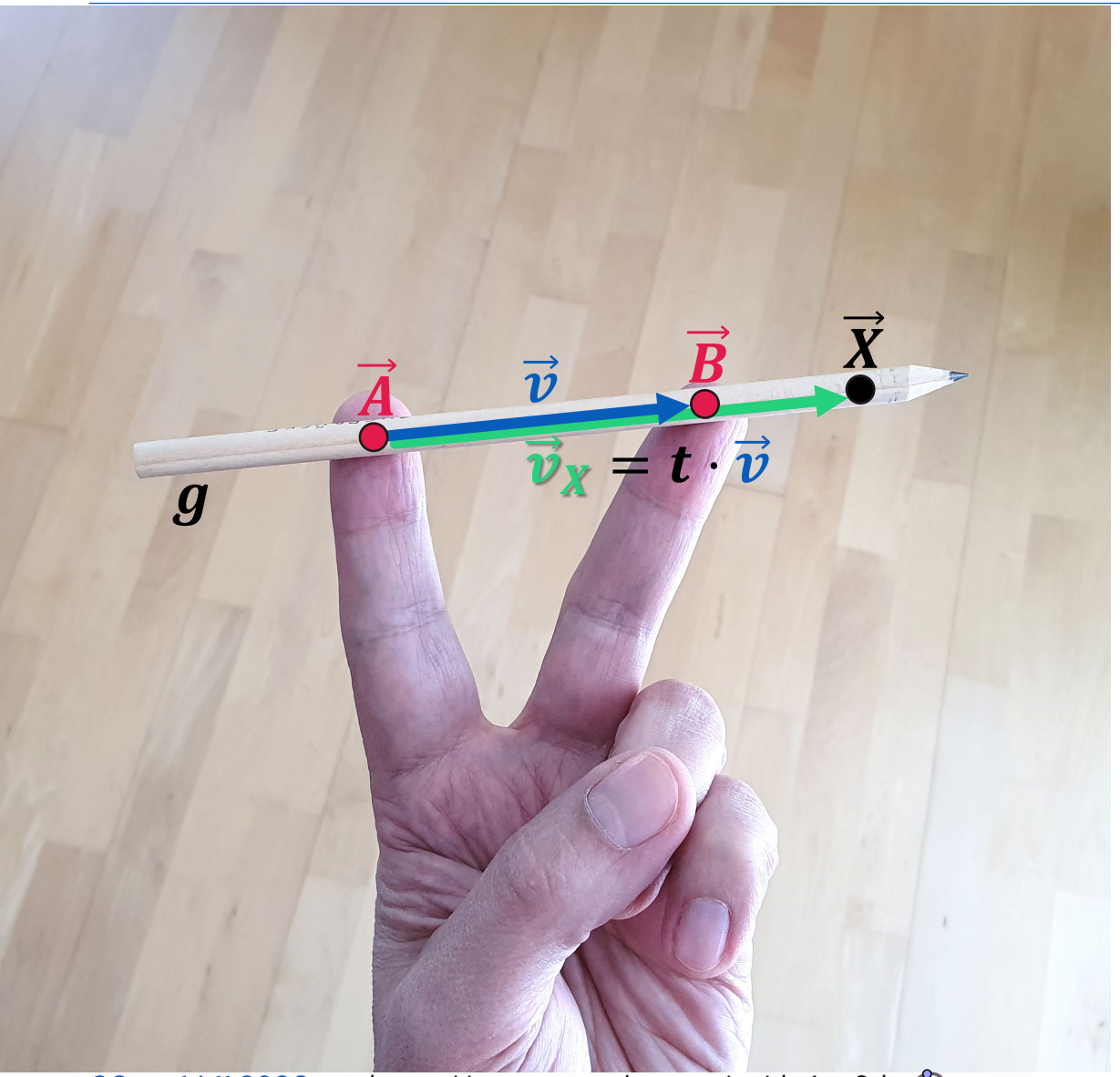
F: Für t kann man auch Lambda schreiben.

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

F: Weiß ich nicht!

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Geradengleichung: Parameterform



Bemerkung

- Eine Gerade g ist eindeutig festgelegt über
  - zwei verschiedene Punkte $\vec{A}$, $\vec{B}$ bzw.
  - einen Anfangspunkt $\vec{A}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
- Für jeden Punkt $\vec{X}$ der Gerade g gibt es eine reelle Zahl t, so dass gilt:

$$\vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

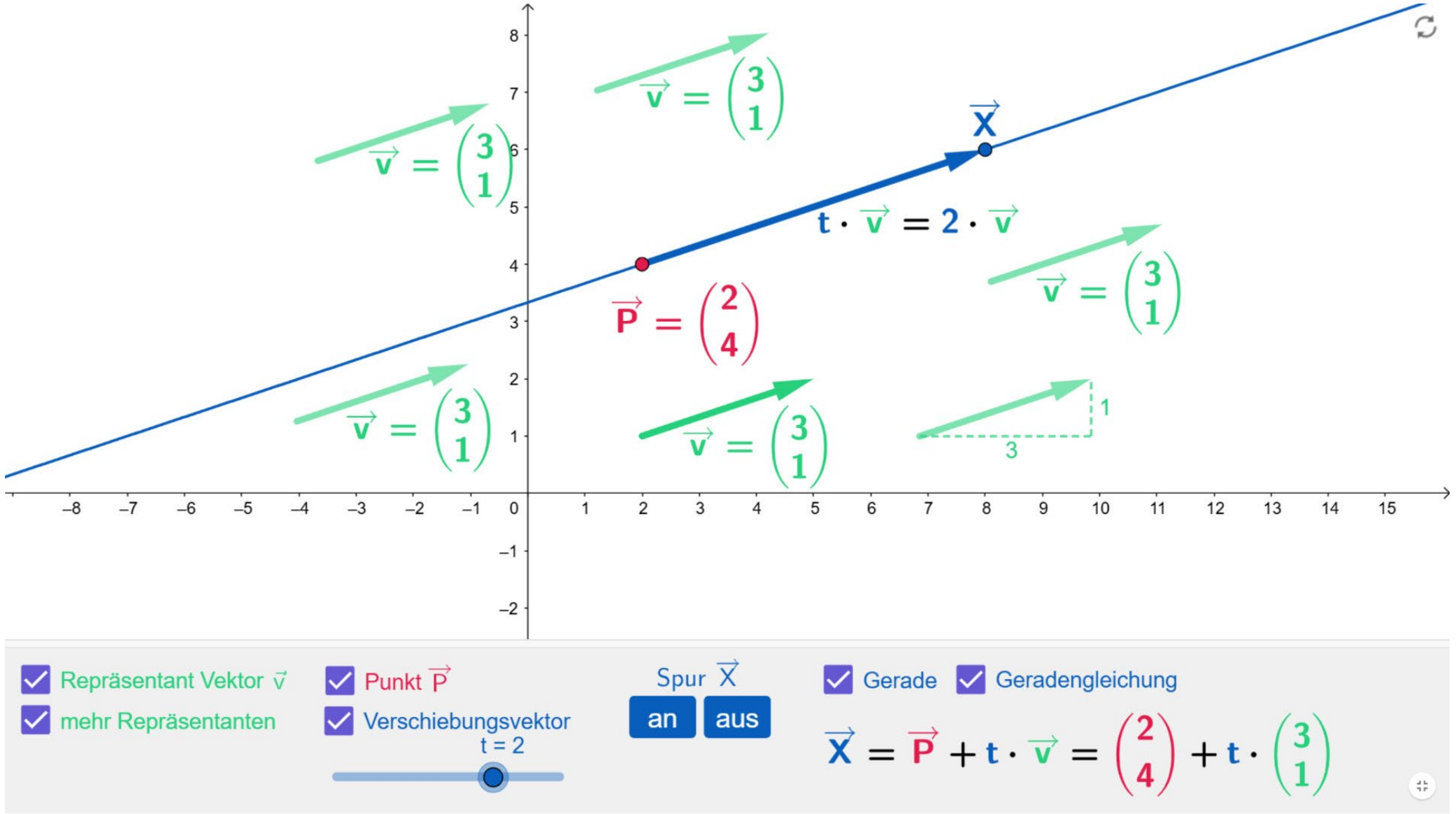
Geradengleichung: Parameterform

Eine Gerade g ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als

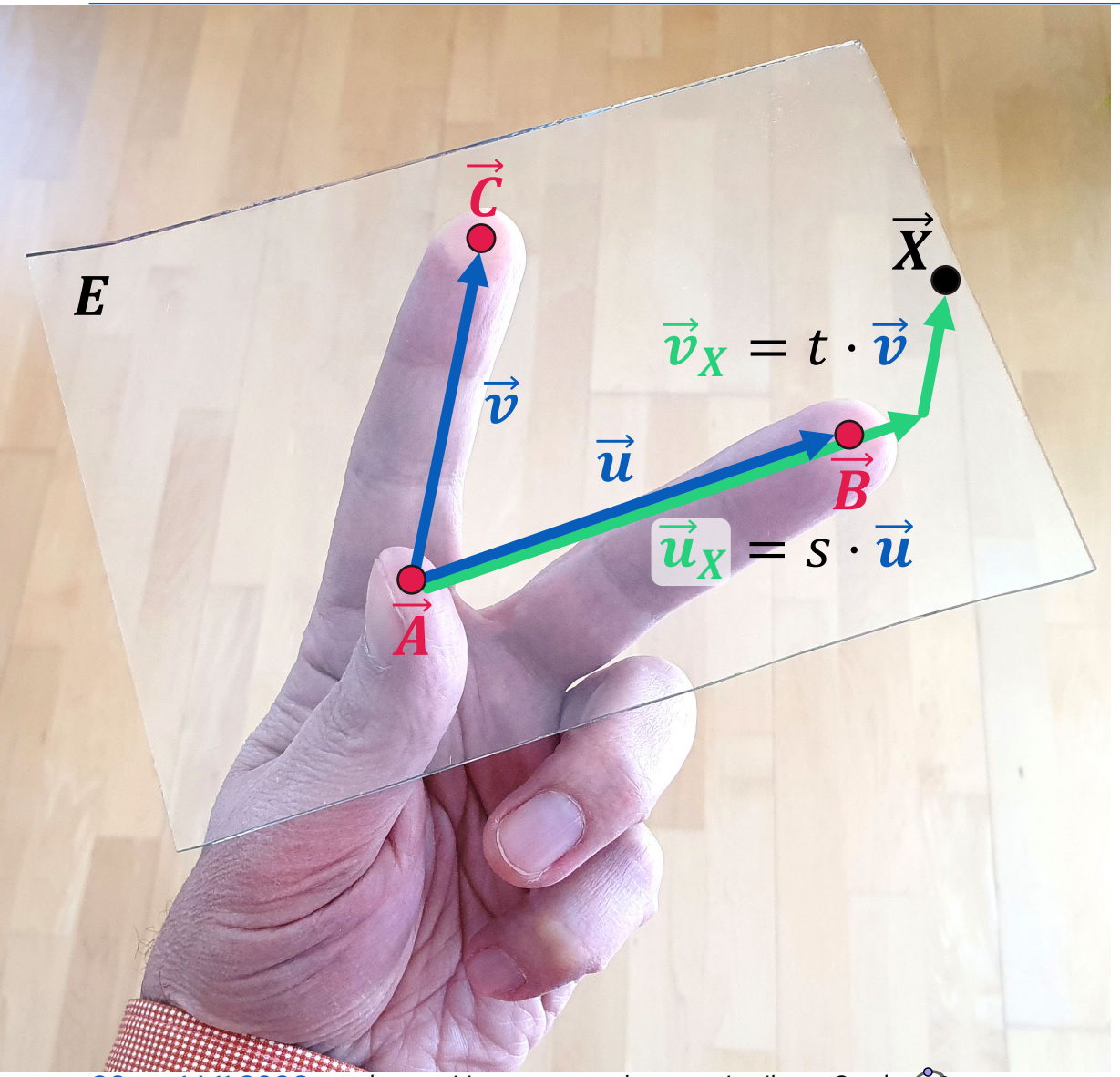
$$g = \{\vec{X} \mid \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz $g: \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}.$

(Grund-)Vorstellungen zu Geraden



Ebenengleichung: Parameterform



Bemerkung

- Eine Ebene E ist eindeutig festgelegt über
  - drei nicht kollineare Punkte $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ bzw.
  - einen Anfangspunkt $\vec{A}$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
- Für jeden Punkt $\vec{X}$ der Ebene E gibt es zwei reelle Zahlen s und t, so dass gilt:

$$\vec{X} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Ebenengleichung: Parameterform

Eine Ebene E ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als:

$$E = \{\vec{X} \mid \vec{X} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ s,t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz

$$E\colon \vec{X} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ s,t \in \mathbb{R}.$$

Ebenengleichung: Koordinatenform

Beispiel: $x + 2y + 3z = 6 \quad (*)$

Vermutung: Die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ der Gleichung $x + 2y + 3z = 6$ ist eine Ebene.

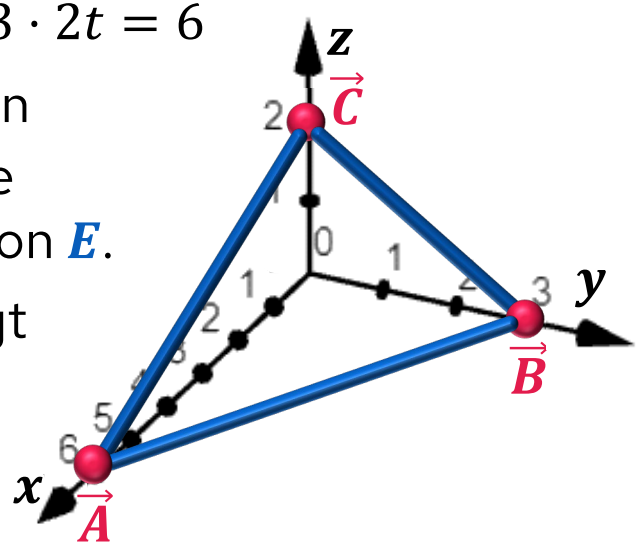
Vorgehen

- Setzt man $y = z = 0$ dann ergibt sich $x = 6$.
- Daraus ergibt sich der Punkt $\vec{A} = (6|0|0)$, den man als Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der x-Achse deuten kann.
- $x = z = 0$ liefert $y = 3$. $\vec{B} = (0|3|0)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der y-Achse.
- $x = y = 0$ liefert $z = 2$. $\vec{C} = (0|0|2)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der z-Achse.
- $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ heißen **Spurpunkte** und man kann vermuten, dass die von ihnen bestimmte Ebene die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ ist.

- Zu zeigen: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist der Punkt $\vec{X} = \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$ Lösung der Gleichung $(*)$.
- Einsetzen der Punktkoordinaten liefert:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6s - 6t \\ 3s \\ 2t \end{pmatrix}$$

- Einsetzen in die Gleichung $(*)$ ergibt: $(6 - 6s - 6t) + 2 \cdot 3s + 3 \cdot 2t = 6$
- Also ist $\vec{X} \in \boldsymbol{E}$ und die von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ aufgespannte Ebene eine Teilmenge von $\boldsymbol{E}$.
- Durch Nachrechnen zeigt man, dass jede weitere Lösung von $(*)$ wieder in der von den Spurpunkten aufgespannten Ebene liegt.





Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Verständnisorientierung
in der Analytischen Geometrie

1. Vektorbegriff – Schülerschwierigkeiten und Zugang über n-Tupel
2. Geometrische Deutung von Vektoren
3. Geraden- und Ebenengleichungen

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

juergen-roth.de

RPTU

Kontakt



Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU