Lernen des Funktionsbegriffs

Grunderfahrungen vermitteln und (digitale) Aktivitäten gestalten

Prof. Dr. Jürgen Roth

18.02.2026 MINT-Tagung 2026, Hamburg

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Literatur und Unterrichtsmaterialien

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Roth, J. (2026). **Folien zu diesem Vortrag** (mit Links)
https://roth.tel/funktionen/folien

https://t1p.de/z8n5j
Passwort:
MINT-HH-2026

Roth, J. & Lichti, M. & (2021). **Funktionales Denken entwickeln und fördern.** Mathematik lehren, 226, 2-9

Roth, J.: **Publikationen zum Funktionalen Denken**
https://juergen-roth.de/publikationen/#publikationen-thematisch

Lichti, M. & Roth, J. (2025). **Funktionales Denken mit Simulationen fördern**, https://juergen-roth.de/funktionale-zusammenhaenge/

Roth, J.: **GeoGebraBuch Funktionen**
https://roth.tel/funktionen/

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

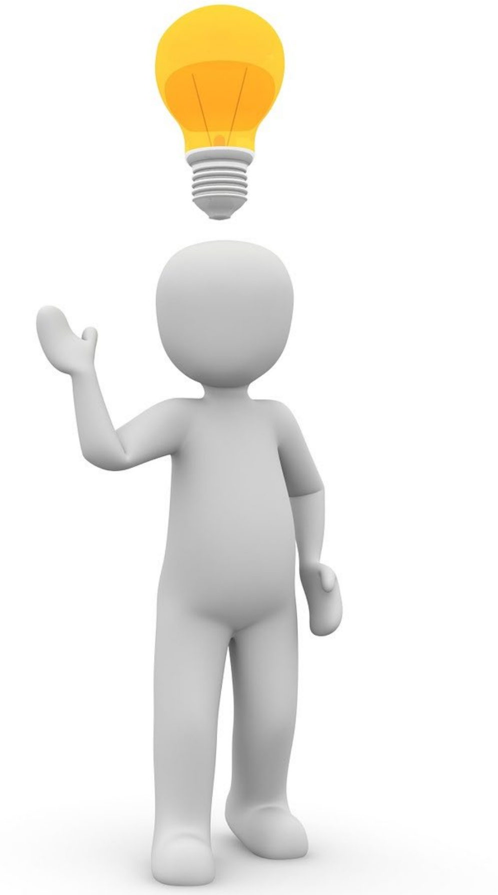
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lernen des Funktionsbegriffs

1. Grundvorstellungen und Darstellungsformen
2. Typische Fehler beim Arbeiten mit Funktionsgraphen
3. Grunderfahrungen vermitteln und (digitale) Aktivitäten gestalten

1 Grundvorstellungen und Darstellungsformen

Grundvorstellungen



Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
  haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
  werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

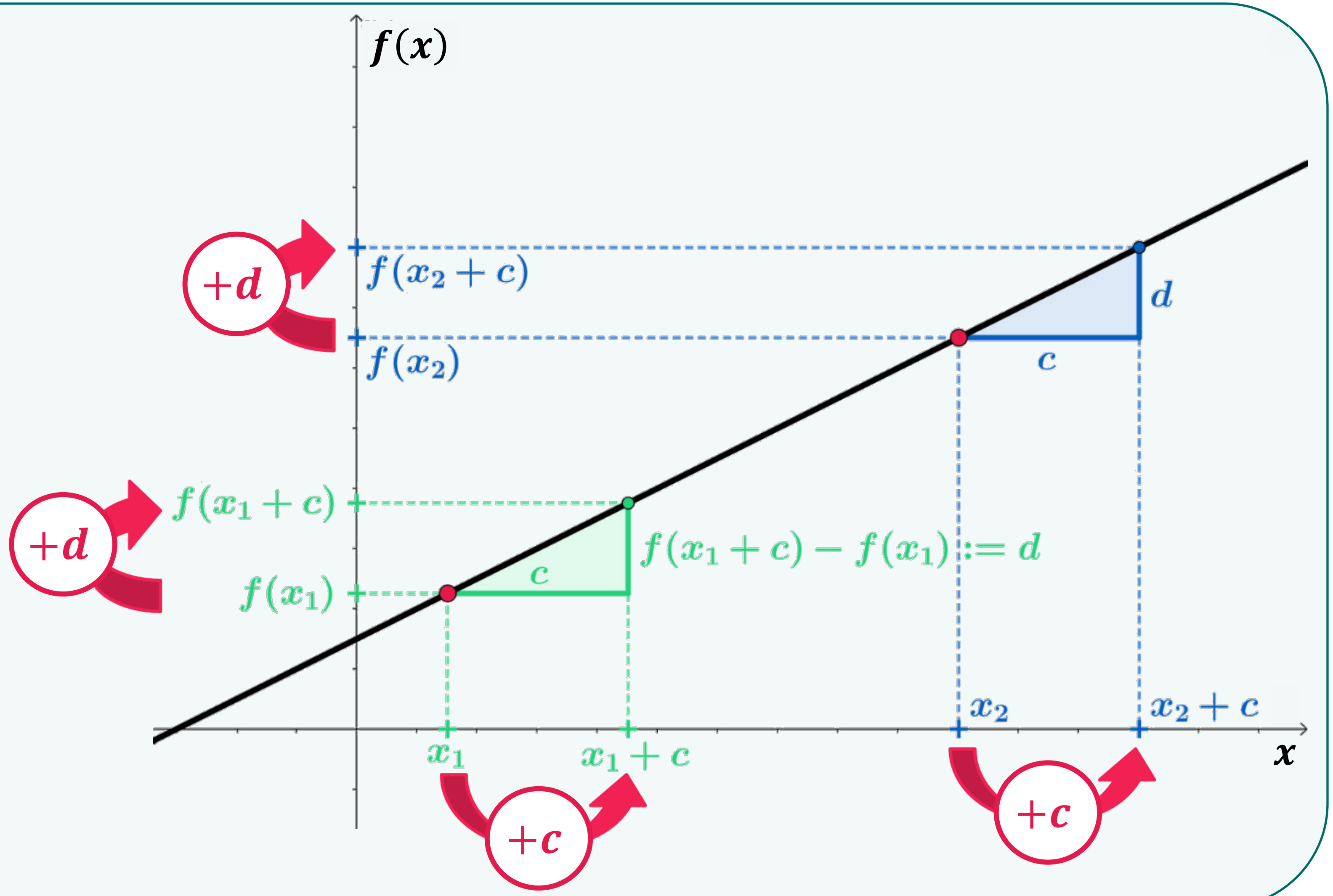
Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, S. 2-9

Primäre Grundvorstellungen

Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen
Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$x \mapsto f(x) = a \cdot x + b$

$$f(x+c)$$

$$= a \cdot (x+c) + b$$

$$\overset{DG}{\triangleq} a \cdot x + a \cdot c + b$$

$$\overset{KG}{\triangleq} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn
Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Verständnisanker

Verständnisanker
Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt.

Eine **Situation** eignet sich als Verständnisanker, wenn

- sie leicht durchschaut werden kann und
- alle für ein Verständnis wesentlichen Strukturelemente vorkommen und gedeutet werden können.

Ziel des Aufbaus eines Verständnisankers
Lernende können in neuen Situationen, in denen der mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel
Ein Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Funktionen ist der Zusammenhang zwischen dem Lebensalter und der Körpergröße eines Menschen.

Näheres zu diesem Verständnisanker:
Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

 Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren, 236*, 6-9.

Zusammenhang: Alter ↦ Körpergröße

	A	B
1	Alter in Jahren	Größe in cm
2	0	52
3	1	72
4	2	93
5	3	101
6	4	111
7	5	116
8	6	122
9		
10		
11		
12	10	146
13	11	152
14	12	157
15	13	162.5
16	14	169
17	15	173
18	16	178
19	17	181
20	18	183
21	19	183
22	20	183
23	21	183
24	22	183
25		

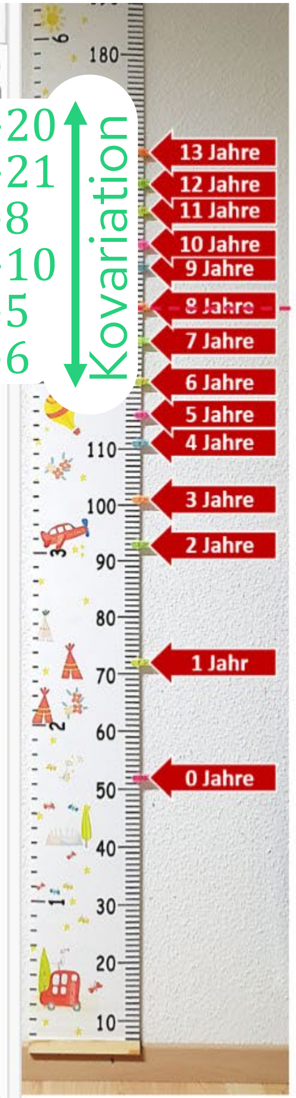
Variation

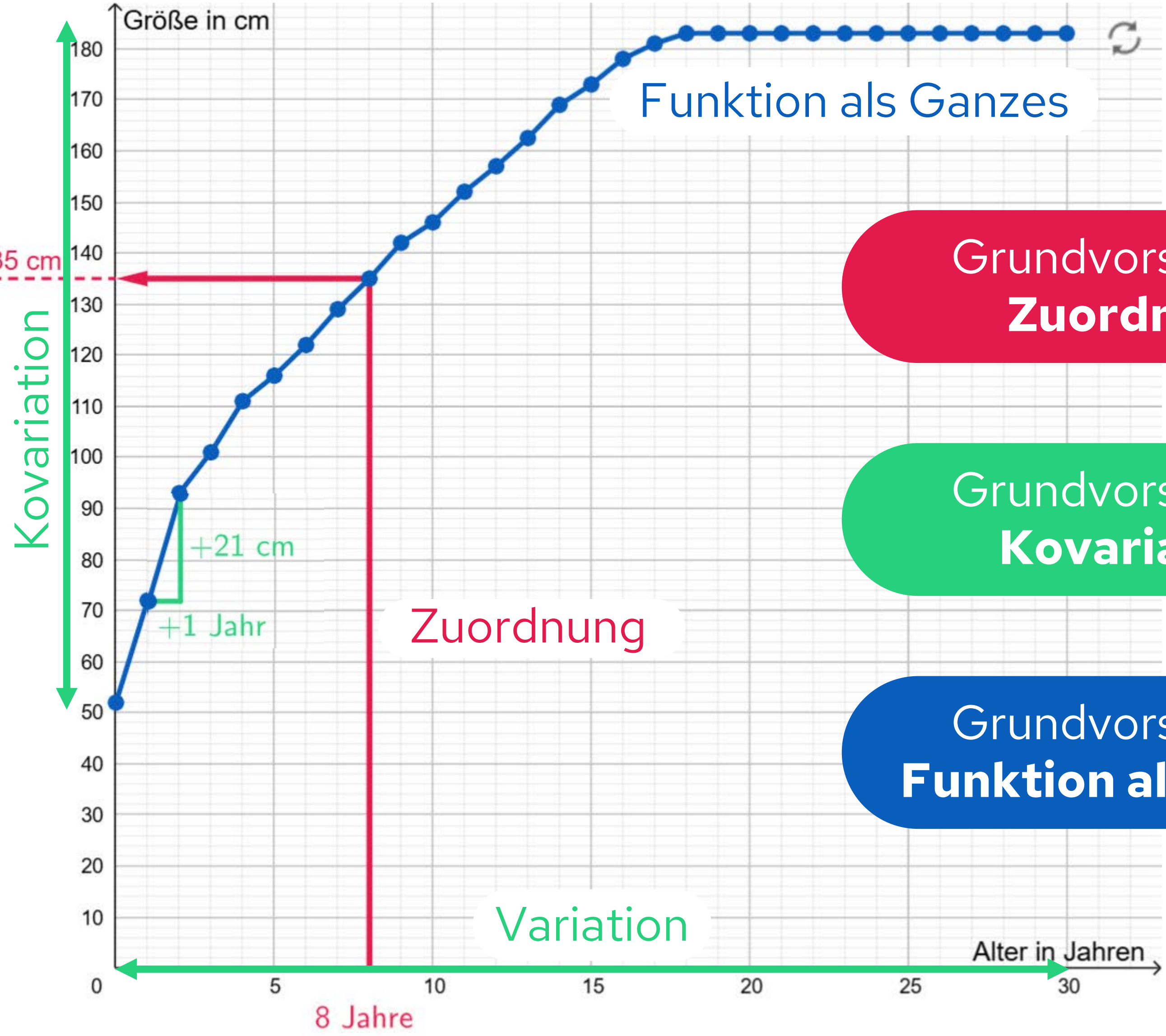
+1
+1
+1
+1
+1
+1

+20
+21
+8
+10
+5
+6

Kovariation

Zuordnung





Grundvorstellung Zuordnung

Grundvorstellung Kovariation

Grundvorstellung Funktion als Ganzes

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226, 2-9.*

https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

Ausbilden von Grundvorstellungen: Ziele

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentale Repräsentationen aufbauen

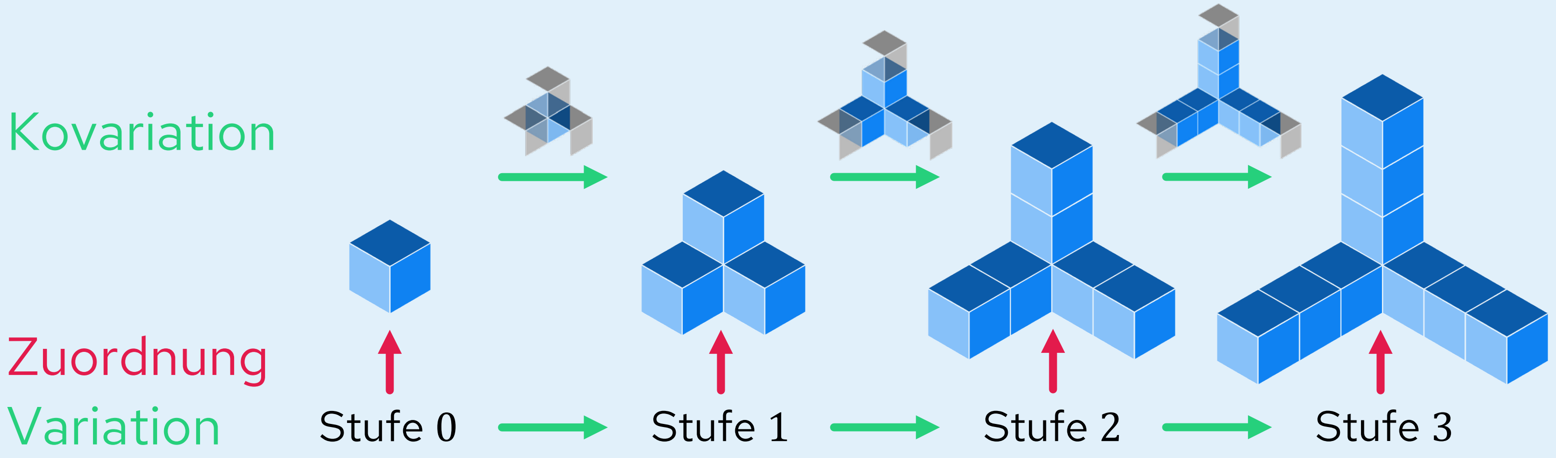
- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4-8

Grundvorstellungen zu Funktionen an Repräsentationen ausbilden



$$f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,$$
$$n \mapsto \underbrace{3n + 1}$$

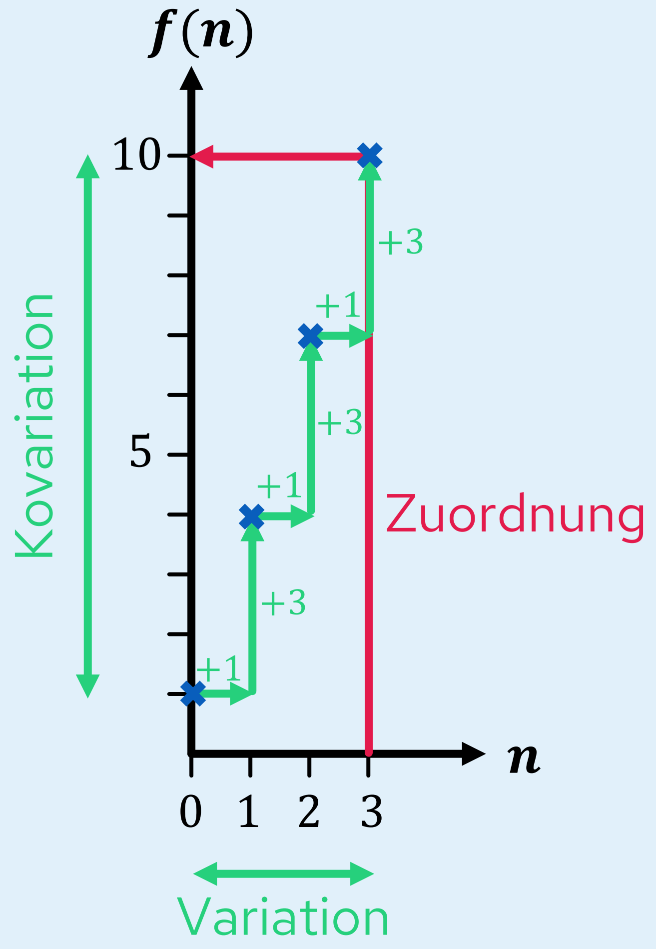
Zuordnung

n	$f(n)$
0	1
1	4
2	7
3	10

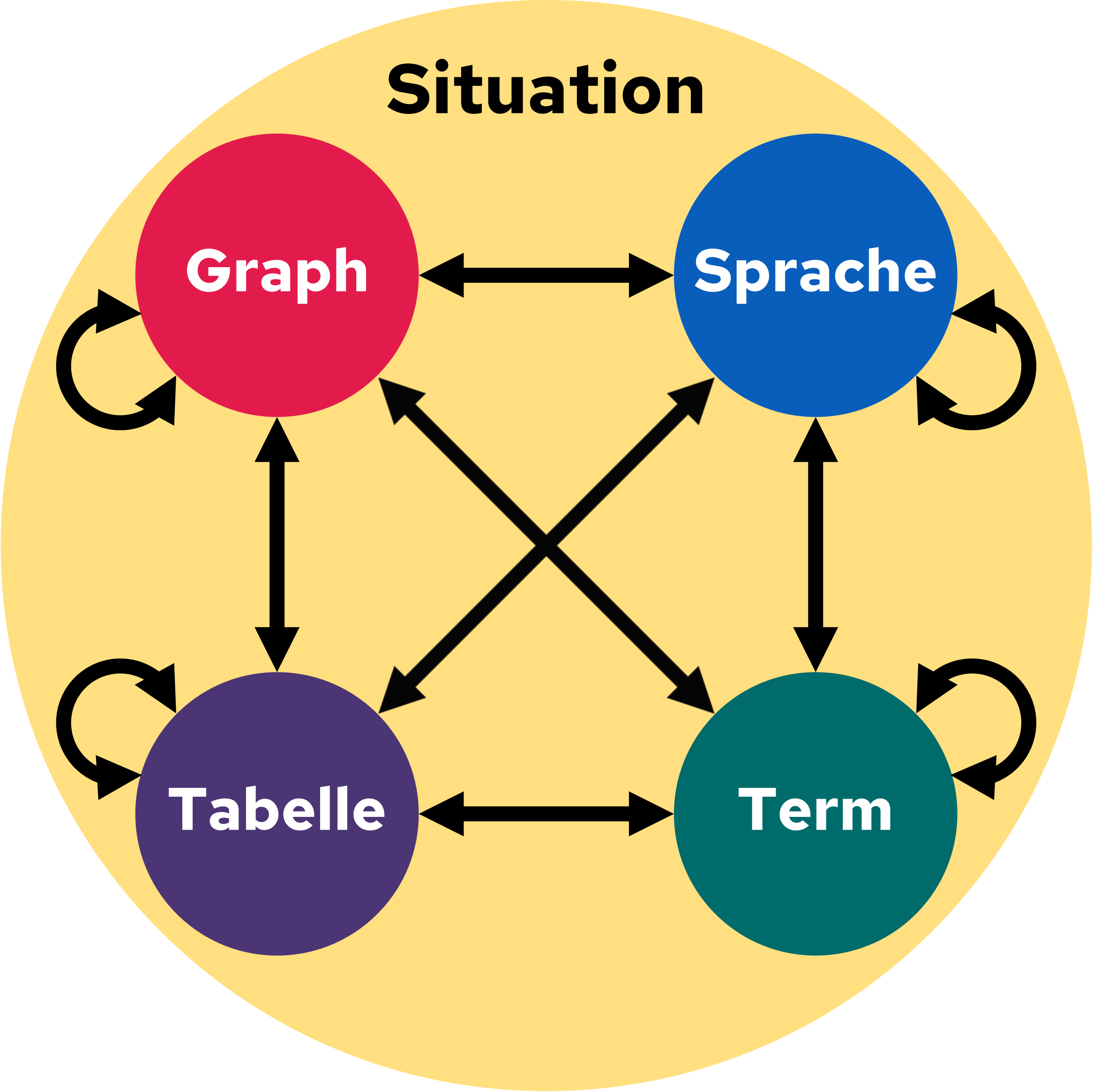
Variation: +1, +1, +1

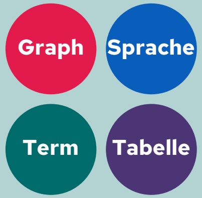
Kovariation: +3, +3, +3

Zuordnung

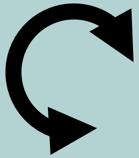


Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen





Darstellungsformen



Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten

Darstellungswechsel

 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

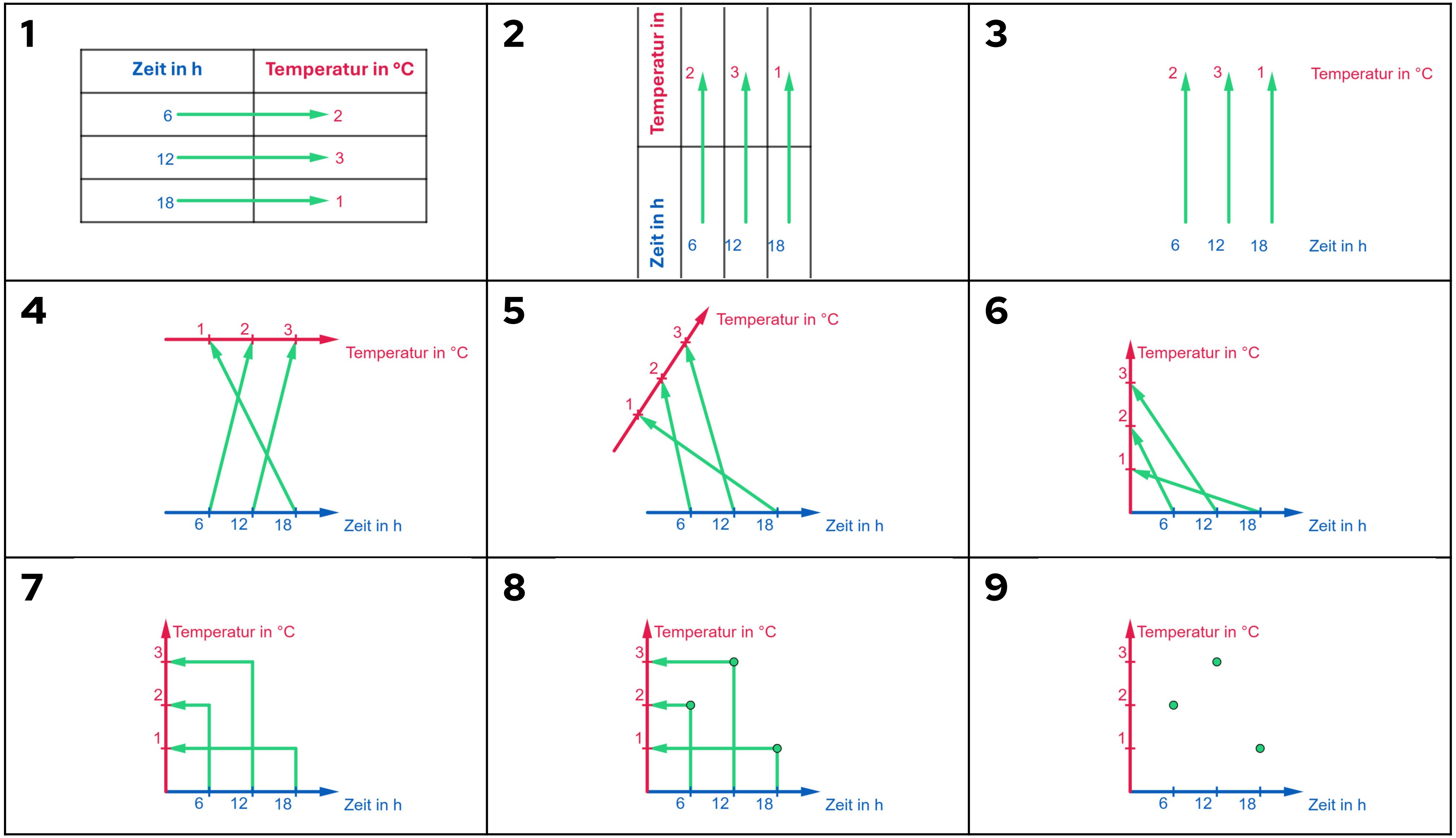
Grundvorstellung ↔ Darstellungsform

Grundvorstellung \ Darstellungsform	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	**Tätigkeit:** Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet. **Hauptzweck:** Markante Punkte erfassen	**Tätigkeit:** Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet. **Hauptzweck:** Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen	**Tätigkeit:** Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet. **Hauptzweck:** Bestimmen einzelner Werte	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen. **Hauptzweck:** Erfassen einzelner Werte
Kovariation	**Tätigkeit:** Unterteilung in Abschnitte mitunterschied-lichem Änderungsverhalten **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ erfassen	**Tätigkeit:** Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Sicht als Ganzes	**Tätigkeit:** Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes / in Teilen typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristischen Verlauf erfassen	**Tätigkeit:** Differenzen-, Pro-dukt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen. **Hauptzweck:** Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	**Tätigkeit:** Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristika quantitativ erfassen	**Tätigkeit:** Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus. **Hauptzweck:** Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

Verändert nach Hußmann, S. & Laakmann (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM (53)38*, S. 2-13

Darstellungsformen erfassen:
Das Beispiel Funktionsgraph

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Bemerkung

Das Applet zeigt, wie aus den Zuordnungen von Zeit und Temperatur, die oben links in der Tabelle dargestellt sind, der Funktionsgraph der Zeit-Temperatur-Funktion unten rechts entsteht.

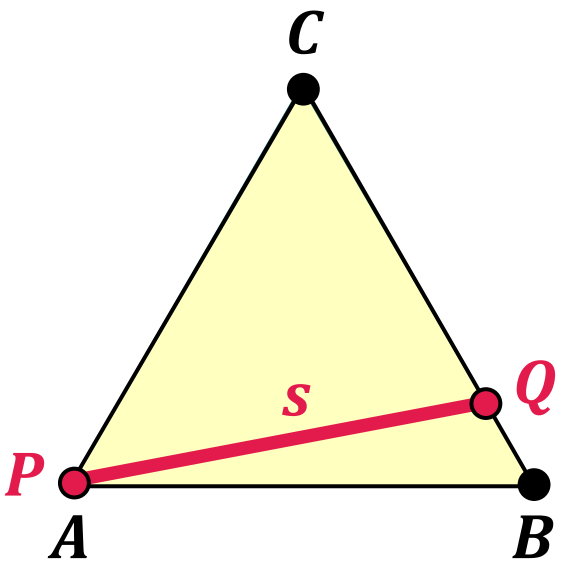
Dafür müssen die Elemente der beteiligten Mengen jeweils der Größe nach angeordnet werden können.

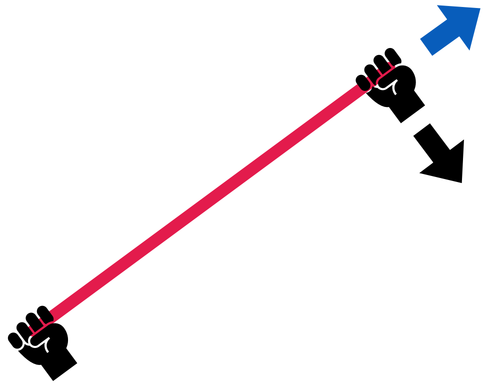
Grundvorstellung **Zuordnung**

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

https://www.geogebra.org/m/kknpe5u9

Beispiel: Dreieckssehne



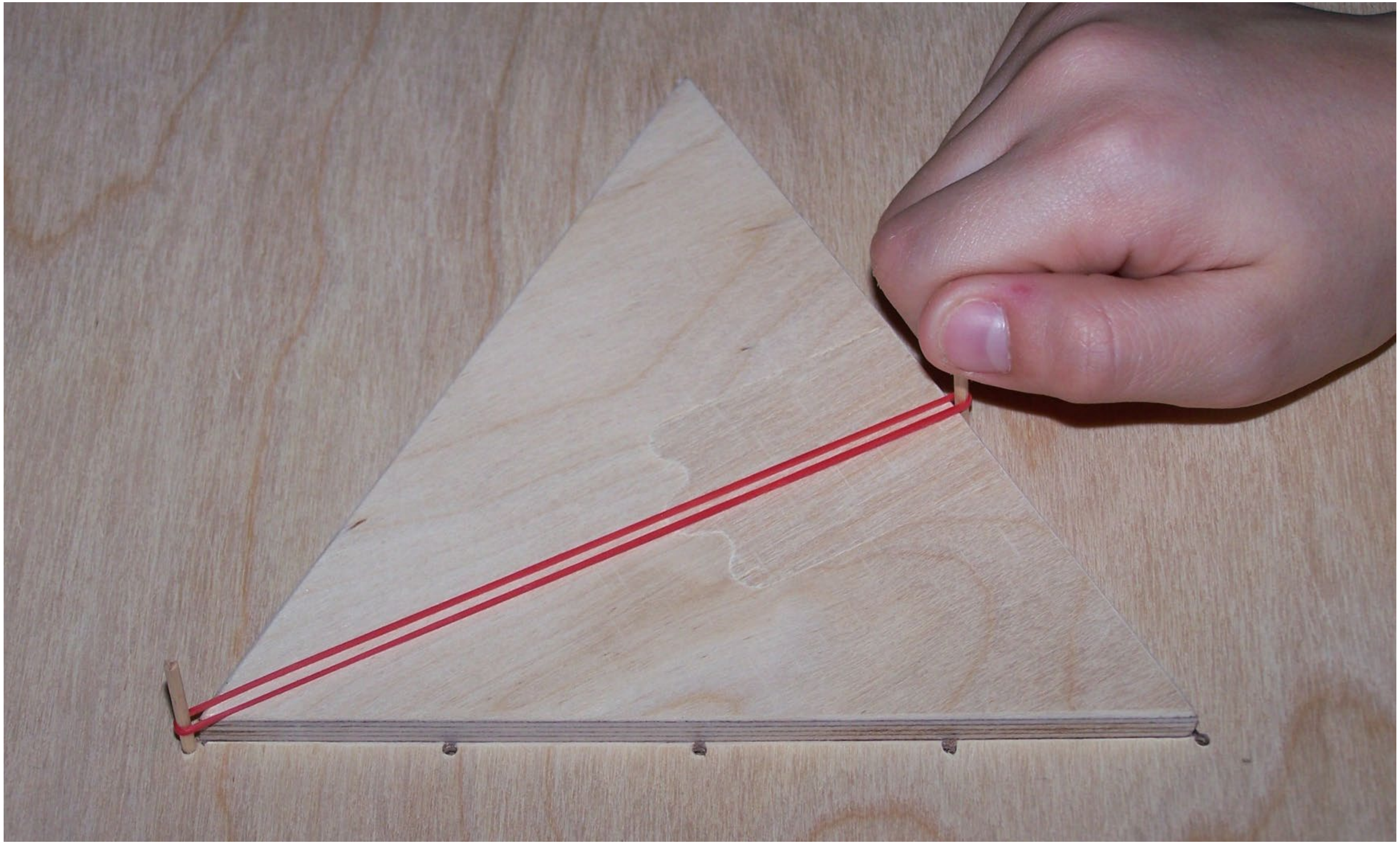


Gummibandmodell

Grundvorstellungen
- Zuordnung
- Änderungsverhalten (Kovariation)
- Sicht als Ganzes

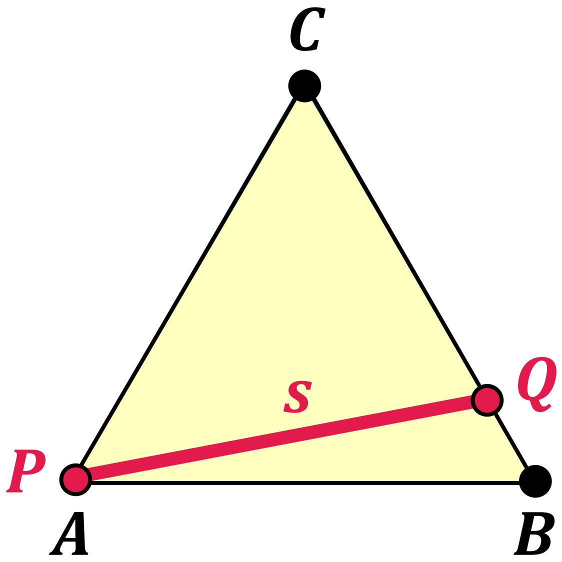
Roth, J. (2005). Kurvenerzeugende Sehnen. *Mathematik lehren, 130*, S. 8-10
https://www.geogebra.org/m/bwqweuqq
https://www.geogebra.org/m/wjgQ3PQB

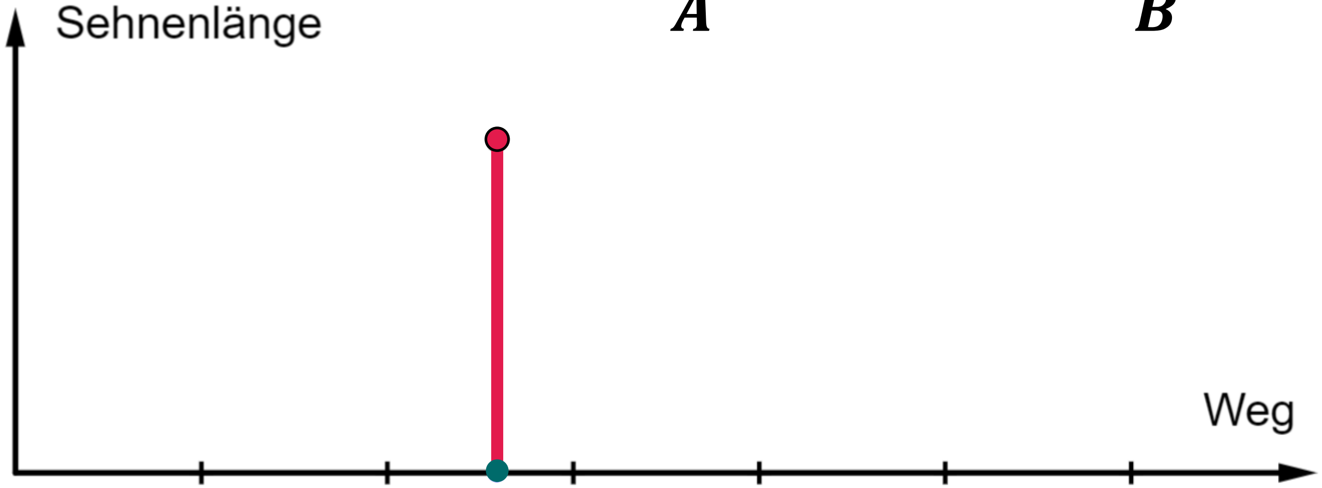
Holzmodell: Dreieckssehne



Arbeitsaufträge: Dreieckssehne

Gummibandmodell



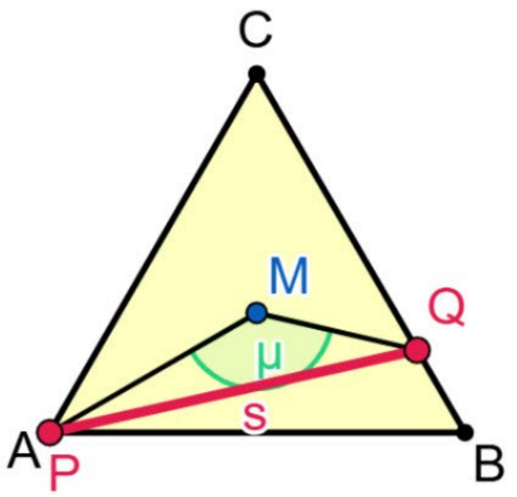


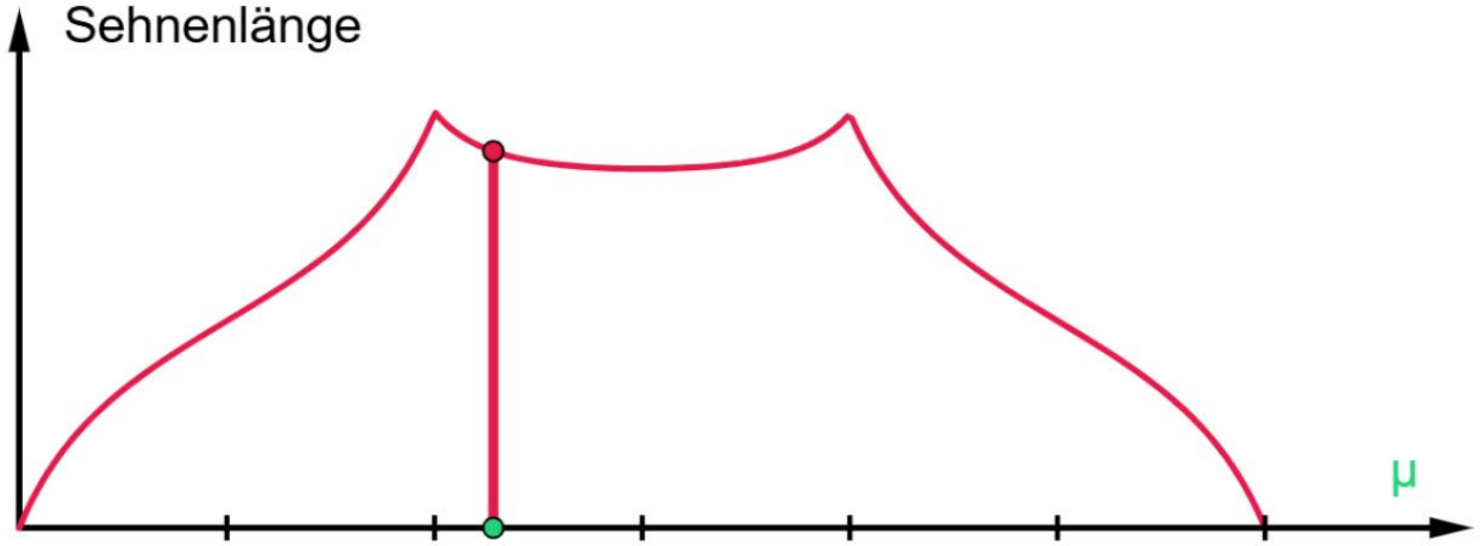
Aufgabe
Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Graphen der Zuordnung $x \mapsto s(x)$.

- Achten Sie dabei insbesondere auch auf das Änderungsverhalten.
- Diskutieren Sie alle Details des Verlaufs Ihres Graphen in der Gruppe.
- Interpretieren und erklären Sie Eigenschaften des Graphen anhand von Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks und umgekehrt.

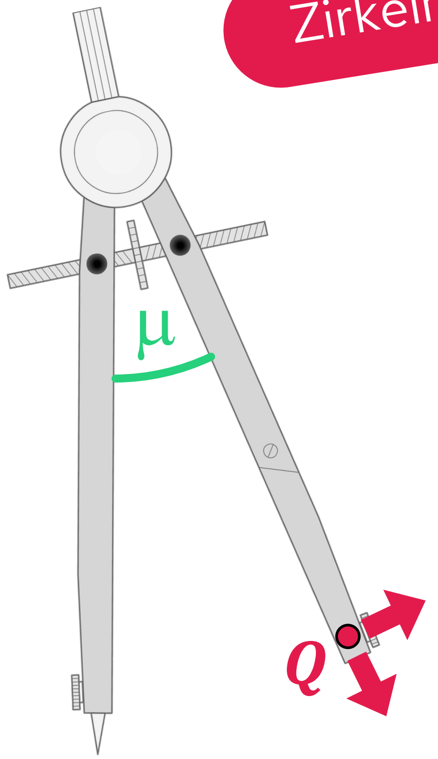
 https://www.geogebra.org/m/bwqweuqq https://www.geogebra.org/m/wjgQ3PQB

Dreieckssehne: Modellierung der Bewegung von Q eindeutig?





Zirkelmodell



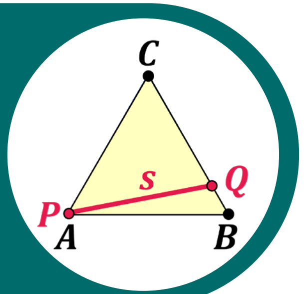
https://www.geogebra.org/m/bwqweuqq

https://www.geogebra.org/m/wjgQ3PQB

Einsatz von Werkzeugen

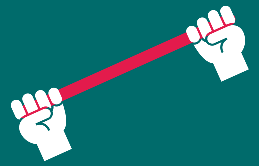
Bilder

- Denkprozesse anstoßen
- Ergebnisse zusammenfassen



Modelle

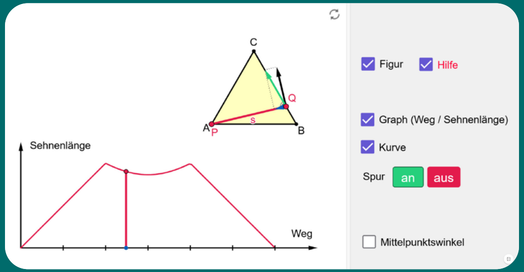
Verständnisgrundlagen anbieten



Grundsätzlich

- Werkzeuge dosiert einsetzen
- Einsatz von Werkzeugen soll zum Denken anregen

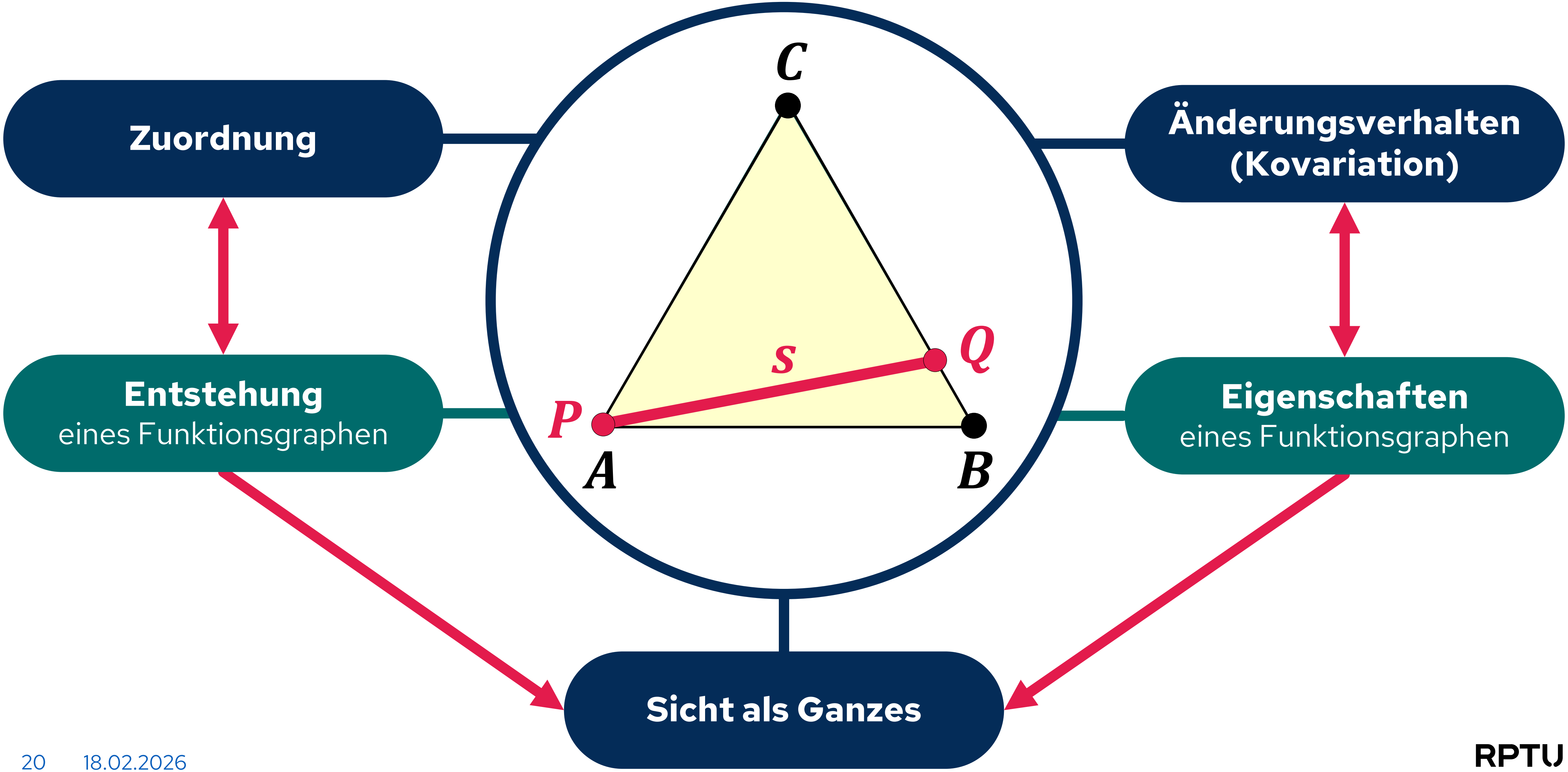
Digitale Werkzeuge



- **Kontrollinstanz**
  „Im Kopf" abgelaufene Denkvorgänge über-prüfen und hinterfragen
- **Kommunikationsmittel**
  - Aufmerksamkeit fokussieren
  - Änderungsverhalten durch „Vorführen" von Veränderungen veranschaulichen
- **„Denkzeug"**
  - Komplexität reduzieren
  - Gedächtnis entlasten
  - Konzentration auf Planung, Analyse und Argumentation

Roth, J. (2005). Figuren verändern – Funktionen verstehen. In G. Graumann (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 481-484). Franzbecker.

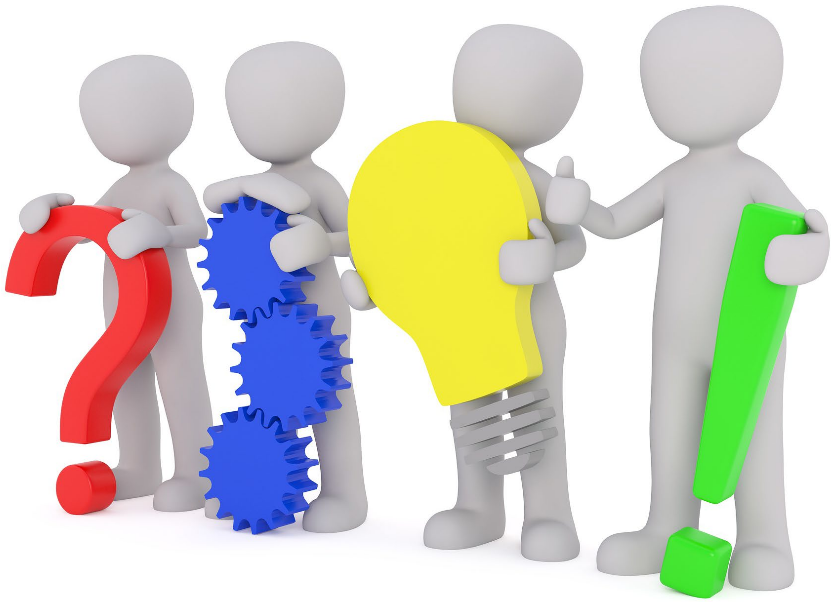
Figuren verändern – Funktionen verstehen



2 Typische Fehler beim Arbeiten mit Funktionsgraphen

Typische Fehler beim Arbeiten mit Funktionsgraphen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Lesen Sie den Text Hofmann & Roth (2021).

Fehlertyp 1
Datenpunkte einzeichnen und ablesen

Fehlertyp 2
Herstellen eines Bezugs zur Situation

Fehlertyp 3
„Graph als Bild"-Fehler

Fehlertyp 4
Verwechslung von Bestand und Änderung

Fehlertyp 5
Concept Image ↔ Concept Definition

Hofmann, R. & Roth, J. (2021). Lernfortschritte identifizieren – Typische Fehler im Umgang mit Funktionen. *Mathematik lehren, 226*, 15-19.

Fehlertyp 1: Datenpunkte einzeichnen und ablesen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Konstruktion

- Eindeutigkeit missachtet
- Trugschluss:
  Eindeutigkeit → Injektivität

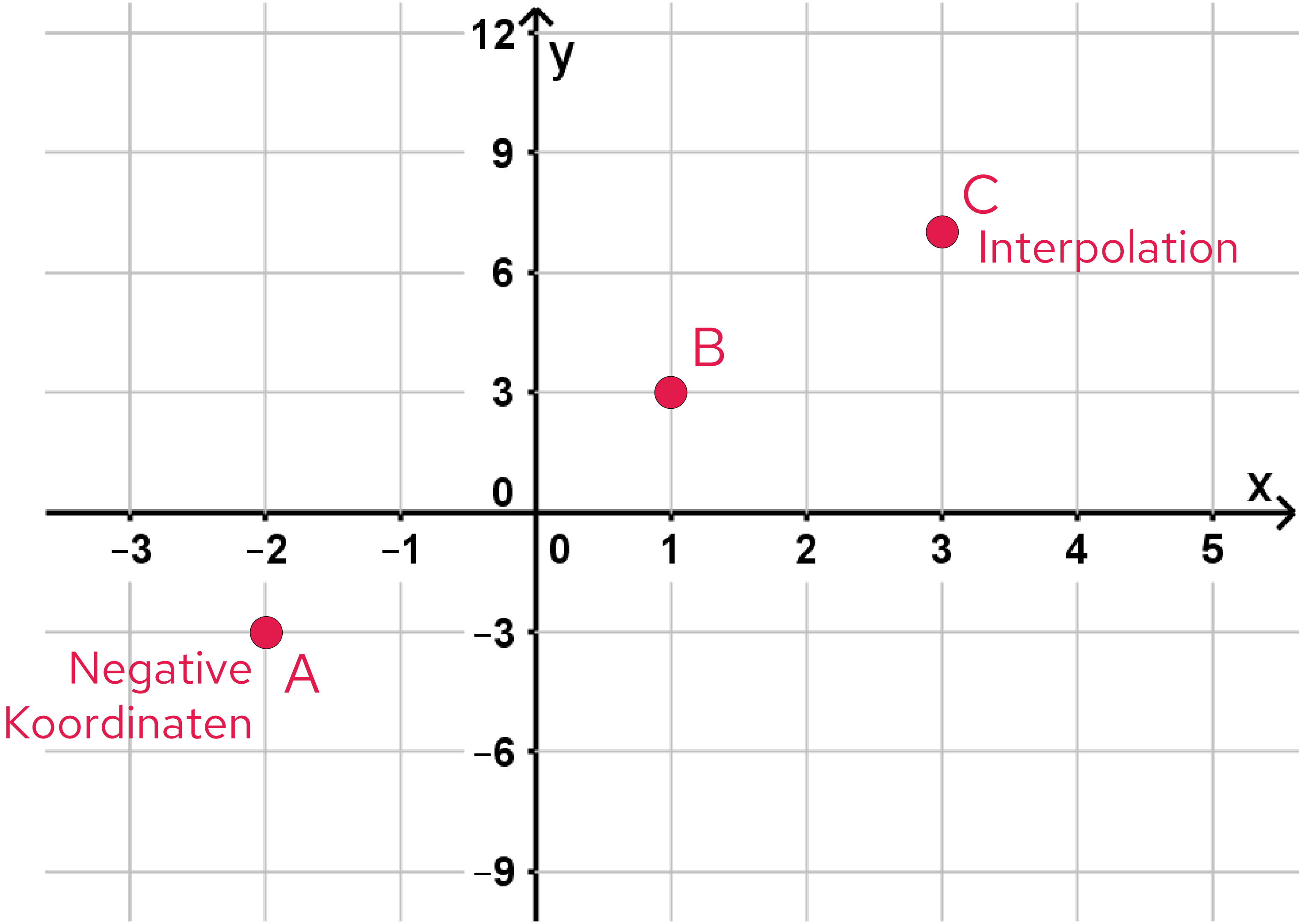
  Annahme: Da jedem x genau ein y zugeordnet wird, darf auch jedes y nur einmal vorkommen.

Konstruktion & Interpretation

- x- und y-Koordinate werden vertauscht
- Achsenskalierung wird missachtet
- Probleme
  - mit negativen Koordinaten
  - bei der Interpolation
  - beim Ablesen des x-Werts zu einem y-Wert
  - beim Bestimmen von Steigungen
  - beim Vergleich von Steigungen in verschiedenen Abschnitten oder Graphen
- **Annahme:** Sichtbarer Graph zeigt die gesamte Funktion (Probleme beim Treffen von Vorhersagen)

Fehlertyp 1: Datenpunkte einzeichnen und ablesen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Schwierigkeitsgrad?

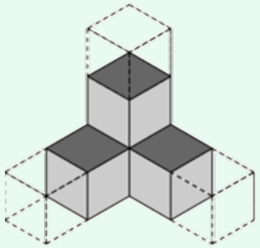
RPTU

Fehlertyp 2: Herstellen eines Bezugs zur Situation

Konstruktion

Unsicherheit,

- welche für die Situation markanten Punkte sich für die Konstruktion des Graphen nutzen lassen
- ob das Verbinden von Punkten in der Situation erlaubt bzw. sinnvoll ist



- wie Punkte ggf. verbunden werden müssen (Funktionstyp) → Oft wird fälschlich linear oder stückweise linear verbunden.
- Keine Änderung ↔ Funktionswert 0

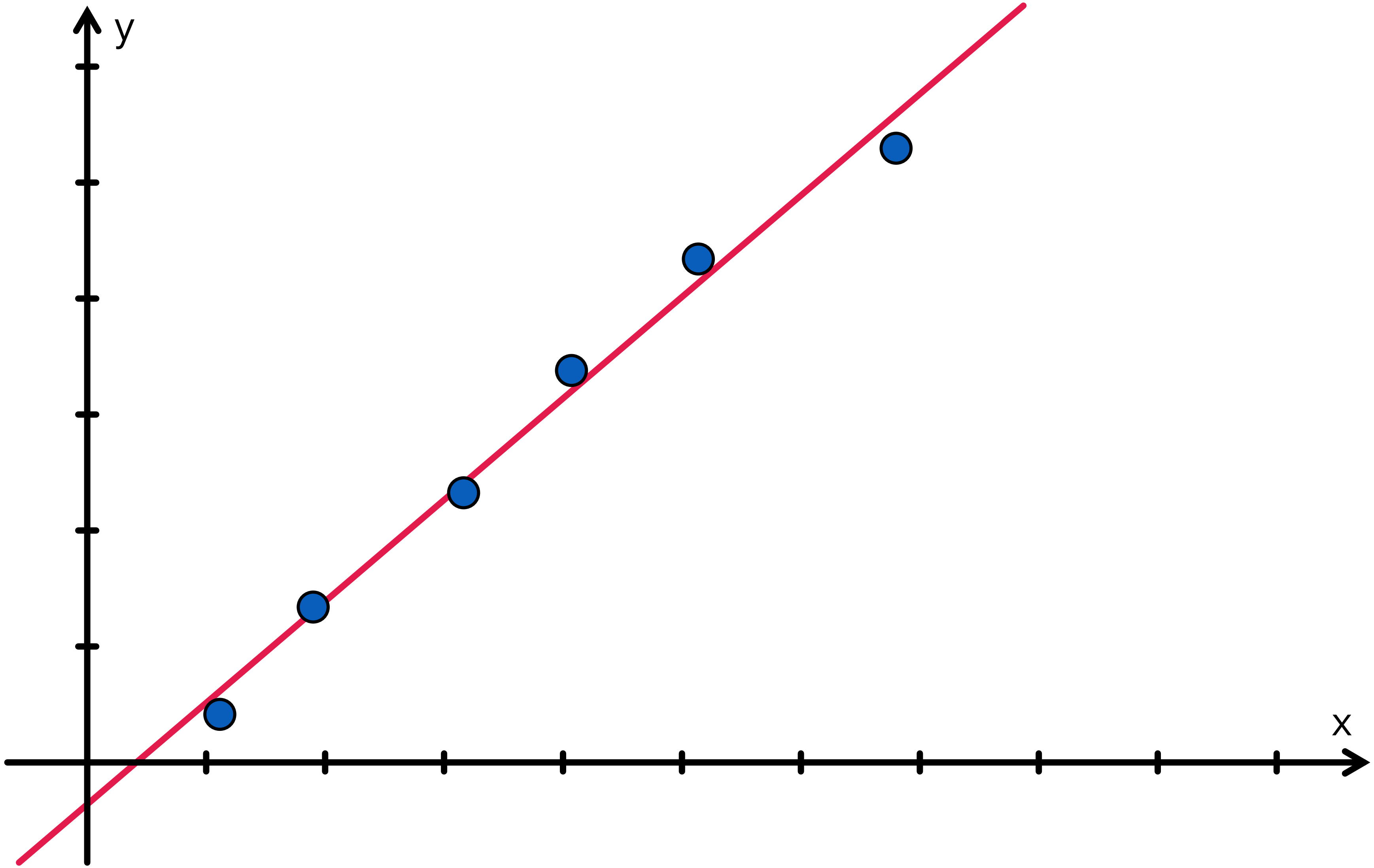
Interpretation

Unsicherheit, wie

- Punkte
- Achsenabschnitte
- Schnittpunkte von Graphen
- konstante Graphen-Abschnitte (Graph parallel zur x-Achse)
- Linien durch Punkte ((1) Funktionsgraph; (2) Interpolations- bzw. Ausgleichsgerade; (3) Visualisierung von Veränderungen)
- Steigungen von Graphen insgesamt / in Abschnitten
- verschiedene Graphen zu einer Situation im Vergleich

(bzgl. der Situation) zu interpretieren sind.

Fehlertyp 2: Herstellen eines Bezugs zur Situation

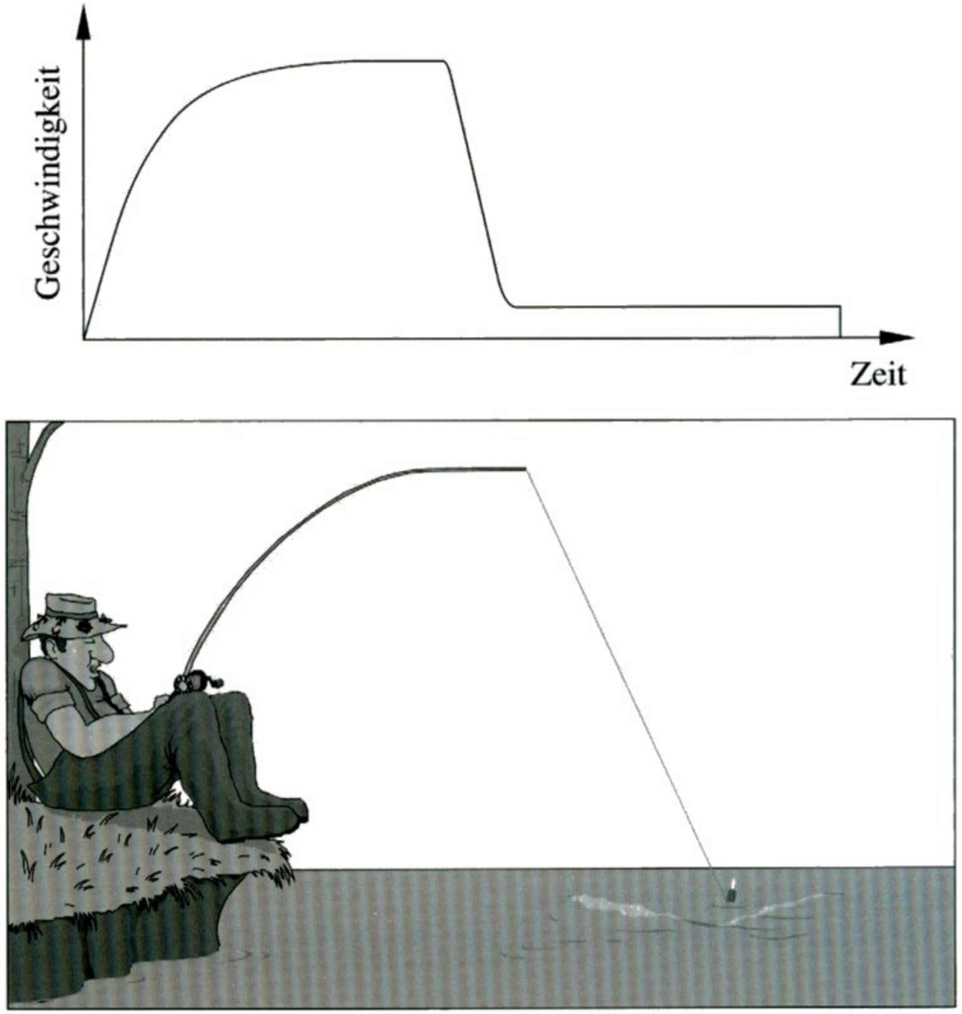


Fehlertyp 3: „Graph als Bild“-Fehler

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Konstruktion & Interpretation

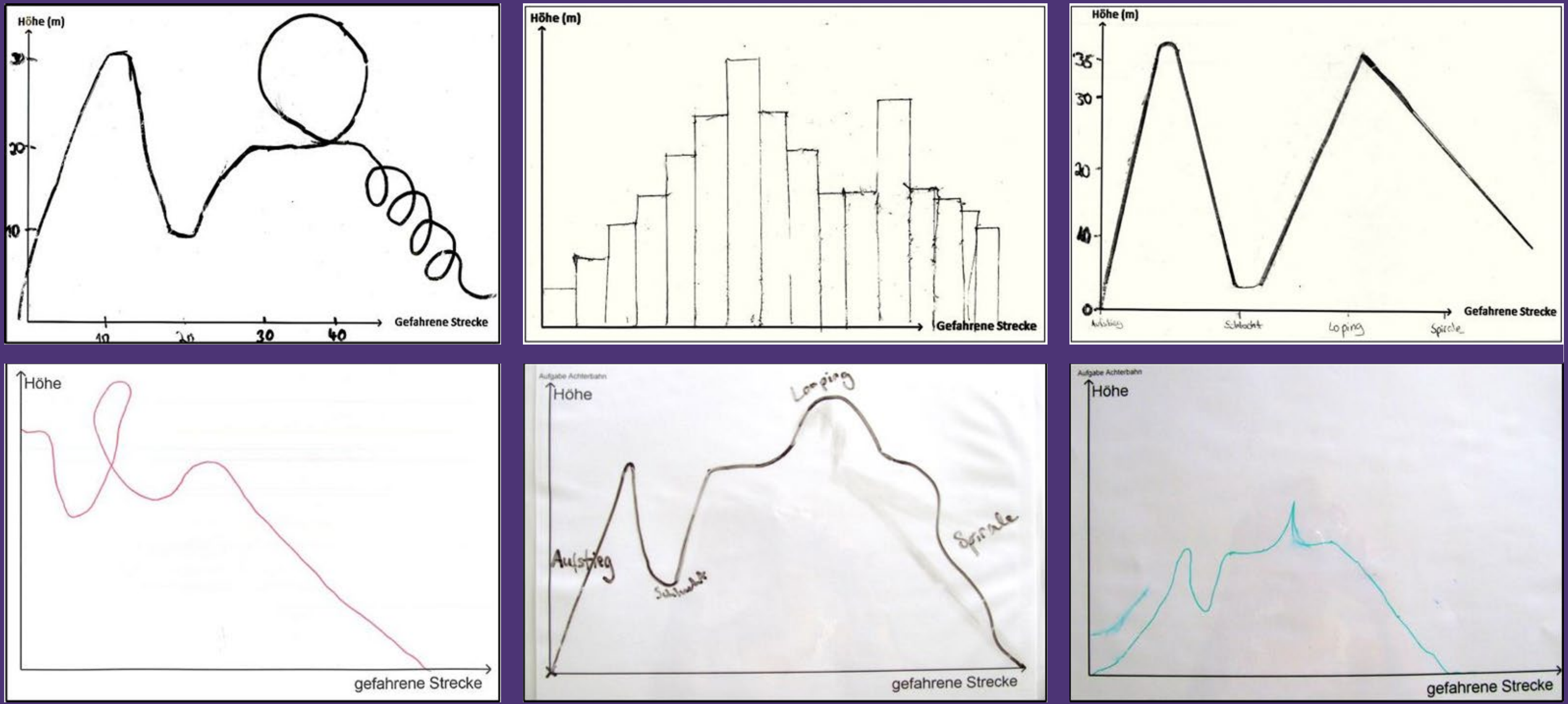
- Ein Graph wird nicht als Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs sondern als Abbild (Foto) der Realität interpretiert bzw. konstruiert.
- Tritt häufig auf, wenn die Funktion einen Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg oder Geschwindigkeit und Zeit darstellt.
- Der Funktionsgraph wird dann oft als zurückgelegte Strecke bzw. Strecken-verlauf interpretiert.



Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 175–193). Washington, DC: MAA.
Clement (1985). Misconceptions in graphing. Proceedings of the 9th PME, Noordwijkerhout, The Netherlands

Fehlertyp 3: „Graph als Bild“-Fehler

Achterbahnfahrt
Es ist ein Graph zu skizzieren, bei dem der auf der Achter-bahn gefahrenen Strecke die Höhe des Wagens über dem Boden zuge-ordnet wird.



Bei einer Achter-bahn folgen nach dem Aufstieg, eine „Schlucht“ (d.h. hier geht es erst steil nach unten und dann gleich wieder nach oben), ein „Looping“ und eine „Spirale abwärts“. Skizziert einen Graphen, in dem der auf der Achterbahn gefahrenen Strecke die Höhe des Wagens über dem Boden zugeordnet wird.

Hofmann, R. & Roth, J. (2021). Arbeiten mit Funktionsgraphen – Zur Diagnose von Fehlern und Fehlvorstellungen beim Funktionalen Denken. mathematica didactica, 44(1). DOI: 10.18716/ojs/md/2021.1165

Fehlertyp 4: Verwechslung von Bestand und Änderung

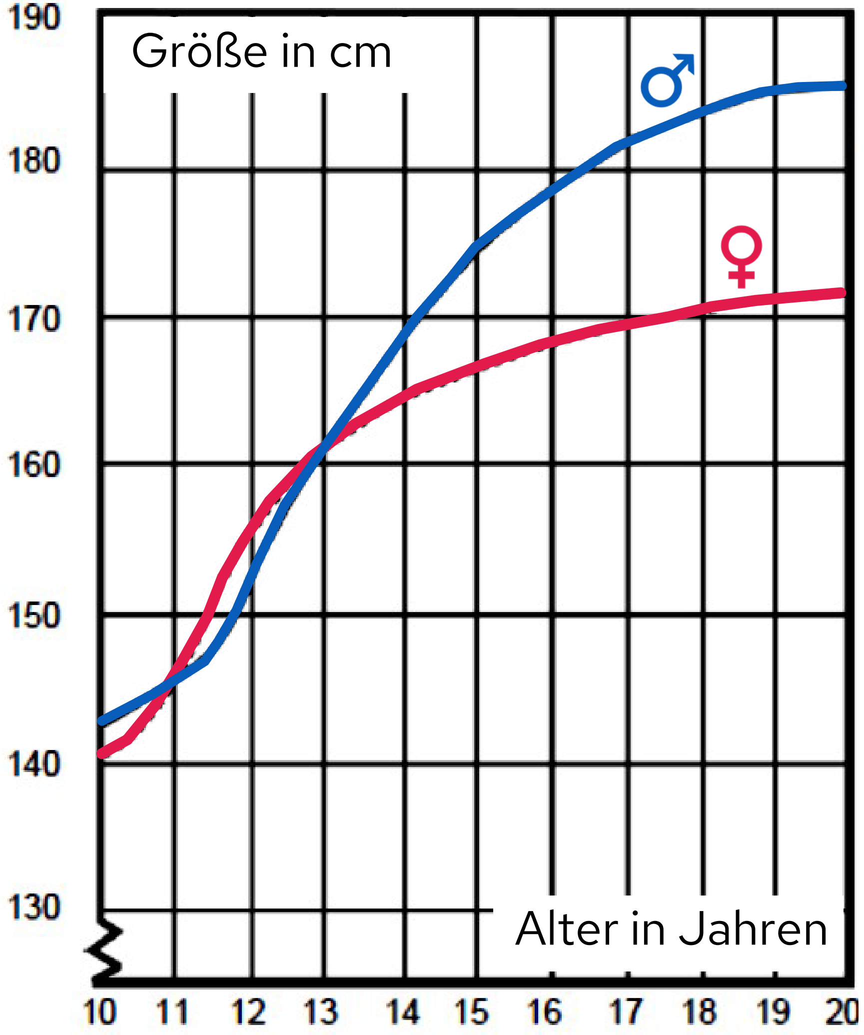
Verwechslung von Bestand und Änderung

Wenn nach der Änderung an einer bestimmten Stelle bzw. in einem bestimmten Bereich gefragt wird.

Statt der Änderung wird häufig der Bestand fokussiert.

Wenn mehrere Graphen oder verschiedene Teilbereiche eines Graphen miteinander verglichen werden und z. B. nach der größeren Änderung gefragt wird.

Beispiel: Durchschnittsgröße von Jugendlichen im Jahr 1998 in den Niederlanden

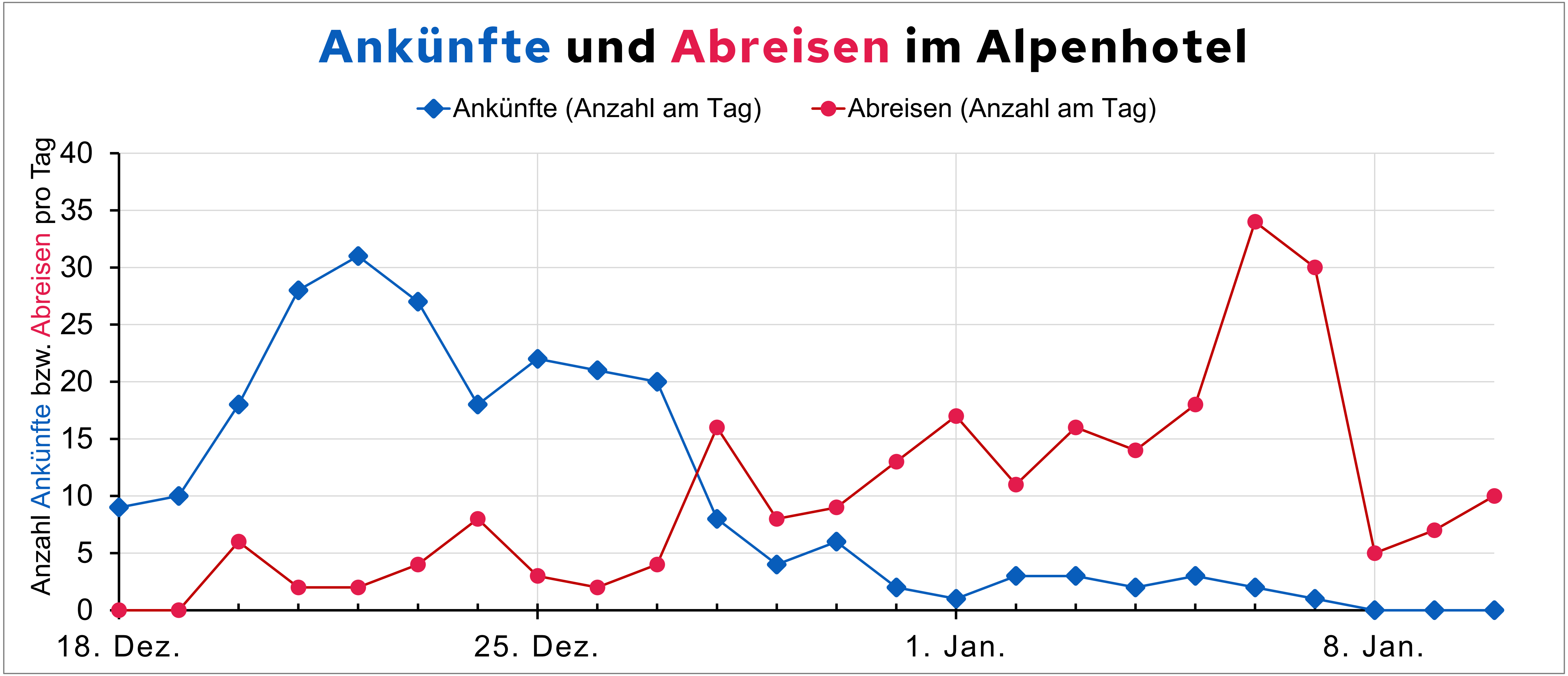


Vergleich innerhalb eines Graphen
Innerhalb welchen Jahres wachsen die Jungen am stärksten?

Vergleich zwischen zwei Graphen
Welche Jugendliche wachsen zwischen dem 10. und 11. Geburtstag stärker, männliche oder weibliche?

Bestand und Änderung

Wann waren die meisten Gäste im Hotel?



Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

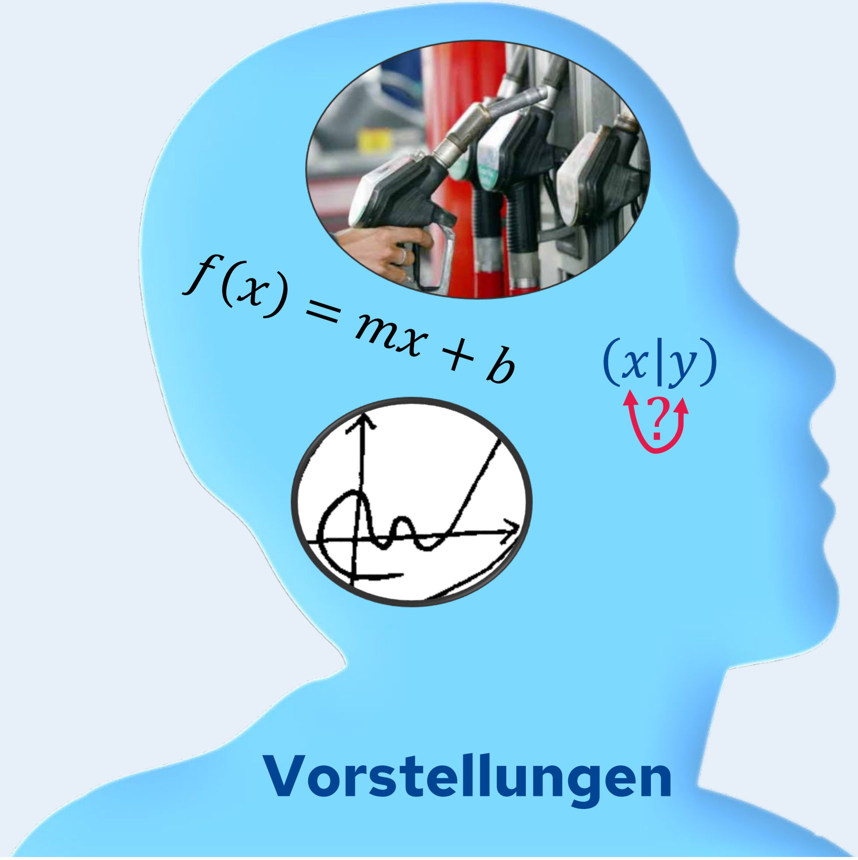
https://www.geogebra.org/m/eg5dwnjy

Fehlertyp 5:
Concept Image ↔ Concept Definition

Concept Image ↔ Concept Definition

Concept Image

Durch Erfahrungen entstandene mentale Bilder
die mit dem Konstrukt verbunden werden.



Vorstellungen

Concept Definition

Definition des Konstrukts, die
von der Person akzeptiert wurde.

Eine **Funktion**
ist eine Zuordnung
zwischen einer
Definitionsmenge $\mathbb{D}$
und einer (Ziel-)Menge $\mathbb{M}$,
die *jedem* Element aus $\mathbb{D}$
genau ein Element
aus $\mathbb{M}$ zuordnet.

konventionelle Definition

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education I (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.
Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169

Fehlertyp 5:
Concept Image ↔ Concept Definition

Concept Image & Concept Definition

existieren nebeneinander und sind oft miteinander vereinbar. Allerdings sind sie nicht immer gleichzusetzen und können sich gegenseitig stören.

- Graphen, die ungewohnt erscheinen, mit denen man noch keine Erfahrung gesammelt hat, passen z.B. nicht zu den mentalen Bildern und somit nicht ins **Concept Image**.
- Aus diesem Grund werden sie oft nicht als Funktionen angesehen, obwohl sie definitionsgemäß Funktionen sind und die Definition einer Funktion (**Concept Definition**) von dem/der Lernenden durchaus verinnerlicht wurde.

Konstruktion

Häufige Annahme von Schüler*innen:

- Graph beginnt immer im Ursprung

Interpretation & Konstruktion

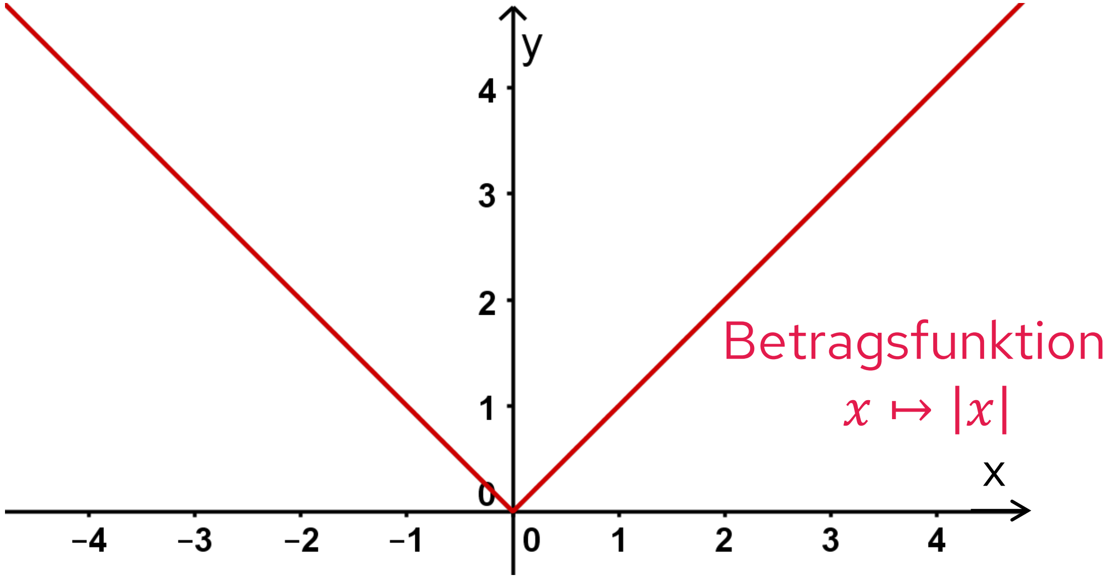
Häufige Annahmen von Schüler*innen:

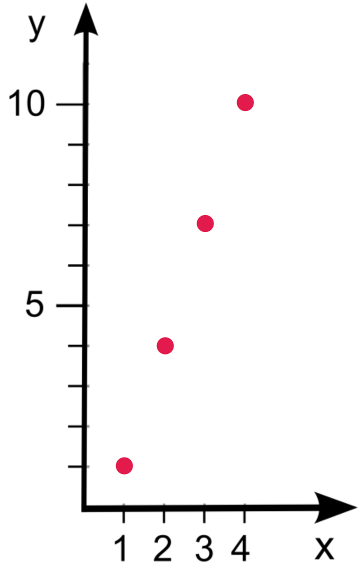
Keine „richtigen" Funktionen sind (wenn noch nicht im Unterricht thematisiert):

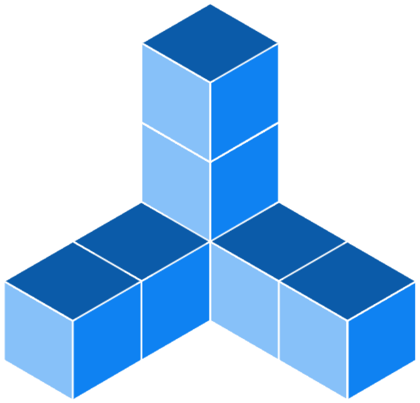
- Abschnittsweise definierte Funktionen
- Unstetige und diskrete Funktionen
- Konstante Funktionen

Tall, D.O.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169

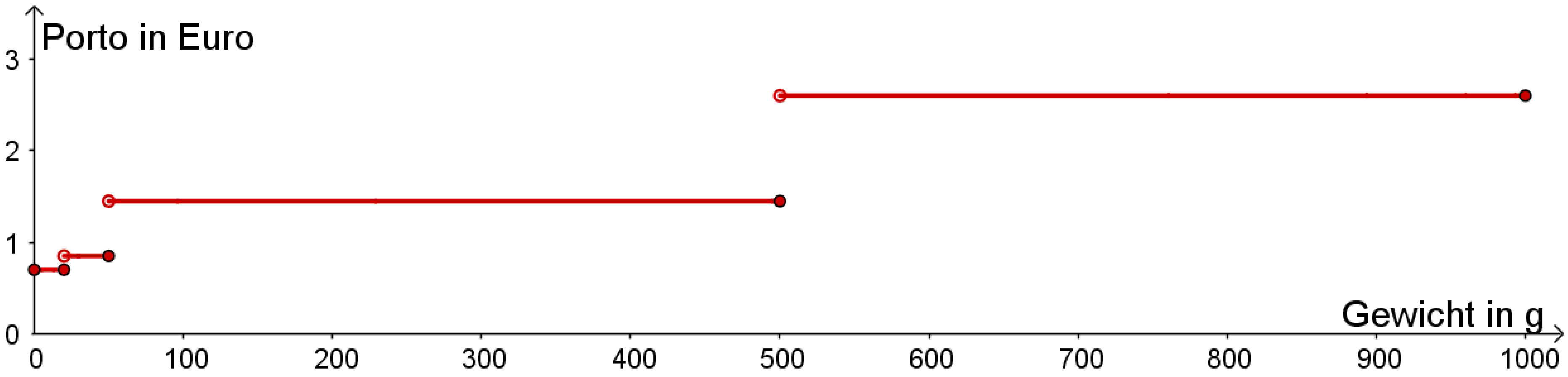
Fehlertyp 5:
Concept Image ↔ Concept Definition







Portofunktion



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Material

- Lernumgebung

Schülerebene

- Arbeitsauftrag
- Material
- Schülerdokumente

- Metaebene

vivian-training.de

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

3 Grunderfahrungen vermitteln & (digitale) Aktivitäten gestalten

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

RPTU
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Lernumgebungen

... regen Lernende zu Prozessen aktiver Wissenskonstruktion an

- durch Leitgedanken inhaltlich aufeinander bezogen
- hinreichend offen, um differenzierend zu wirken

... organisieren und regulieren den Lernprozess über ein Netzwerk von Aufgaben

- sinnvoll strukturiert bzgl. Inhalt und intendierten Lernprozessen
- enthalten Aufforderungen zur Dokumentation (Ergebnisse & Vorgehensweisen)

... bilden den Rahmen für selbstständiges Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden

... sind von einem unterrichtlichen Gesamtsetting gerahmt, in dem die Lernenden durch eine Lehrperson auf die Arbeit mit der Lernumgebung vorbereitet, wieder daraus abgeholt und insbesondere beim Systematisieren ihrer gewonnenen Erkenntnisse unterstützt werden

... umfassen geeignete Medien und Materialien für aktive und vielfältige Auseinandersetzung mit einem Phänomen

... fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus

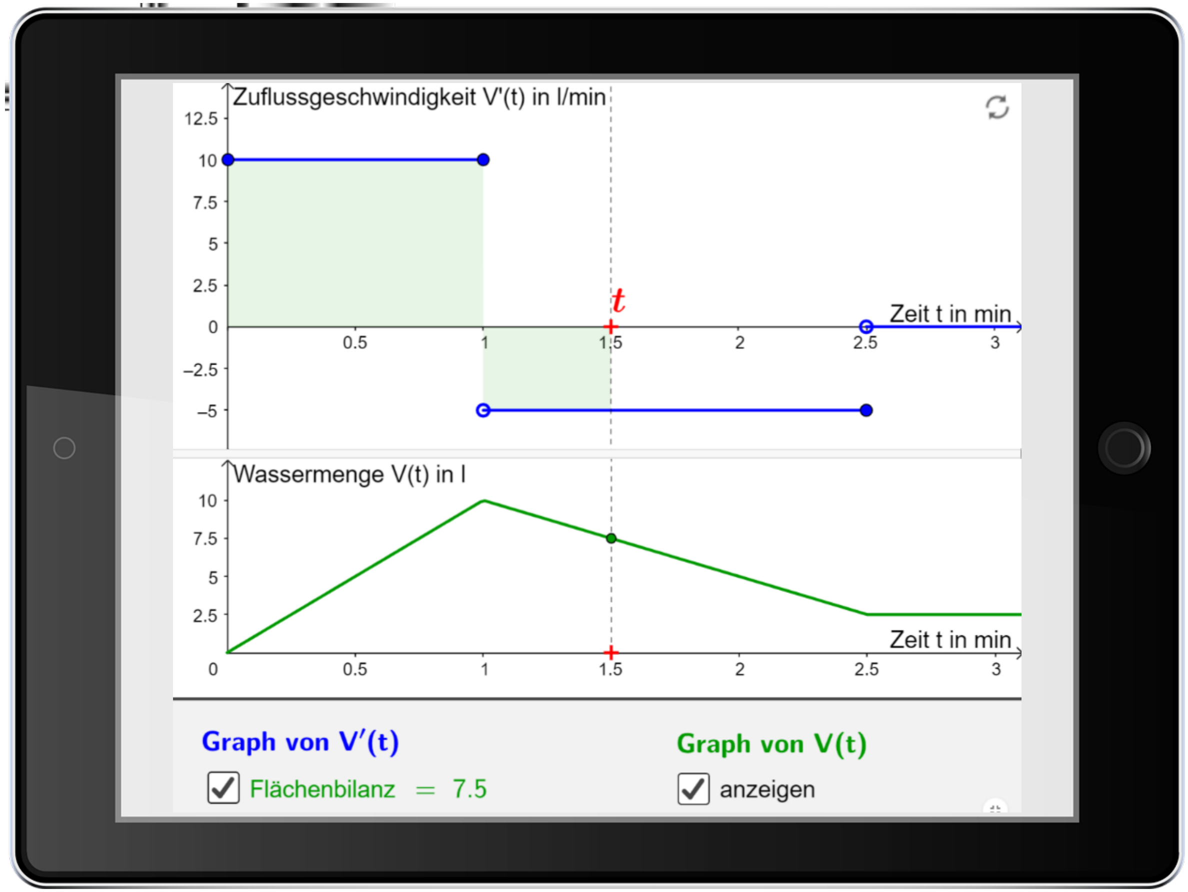
... bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen sowie die Möglichkeit der Ergebniskontrolle

Definition: Digitale Lernumgebung

Digitale Lernumgebungen

- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
  - von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
  - die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten,

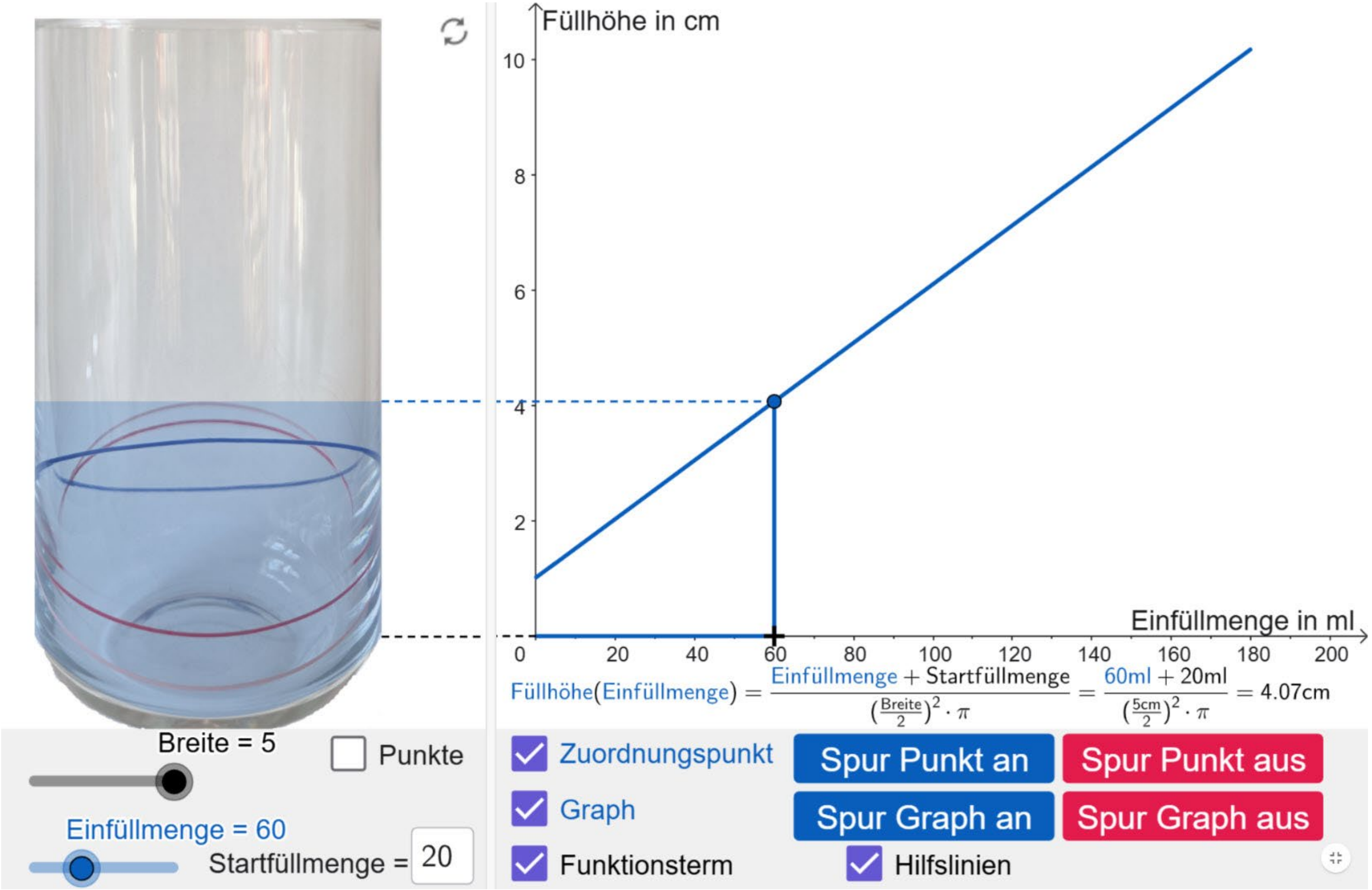
  digital angereichert wurde.



Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Darstellungen in Beziehung setzen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen




Prof. Dr. Jürgen Roth
Konstruktionsanleitung
GeoGebra-Applet „Glas füllen"

Inhaltsverzeichnis

1. Schritt: Einrichten der Ansicht ... 2
2. Schritt: Schieberegler ... 5
3. Schritt: Bild einbinden ... 8
4. Schritt: Rechteck konstruieren ... 9
5. Schritt: Graph erzeugen ... 11
6. Schritt: Verbindungslinien zwischen Grafik-Fenstern einzeichnen ... 13
7. Schritt: Eingabefeld ... 15
8. Schritt: Kontrollkästchen nutzen ... 16
9. Schritt: Schaltfläche und GGB-Skript ... 20
10. Schritt: Textfeld einfügen ... 24

Wichtige Hinweise zur Nutzung dieser Handreichung

Allgemeine Hinweise: Erstellen und Nutzen von GeoGebra-Applets

https://juergen-roth.de Landau, 2026 Seite 1 von 26

https://roth.tel/geogebra-applet

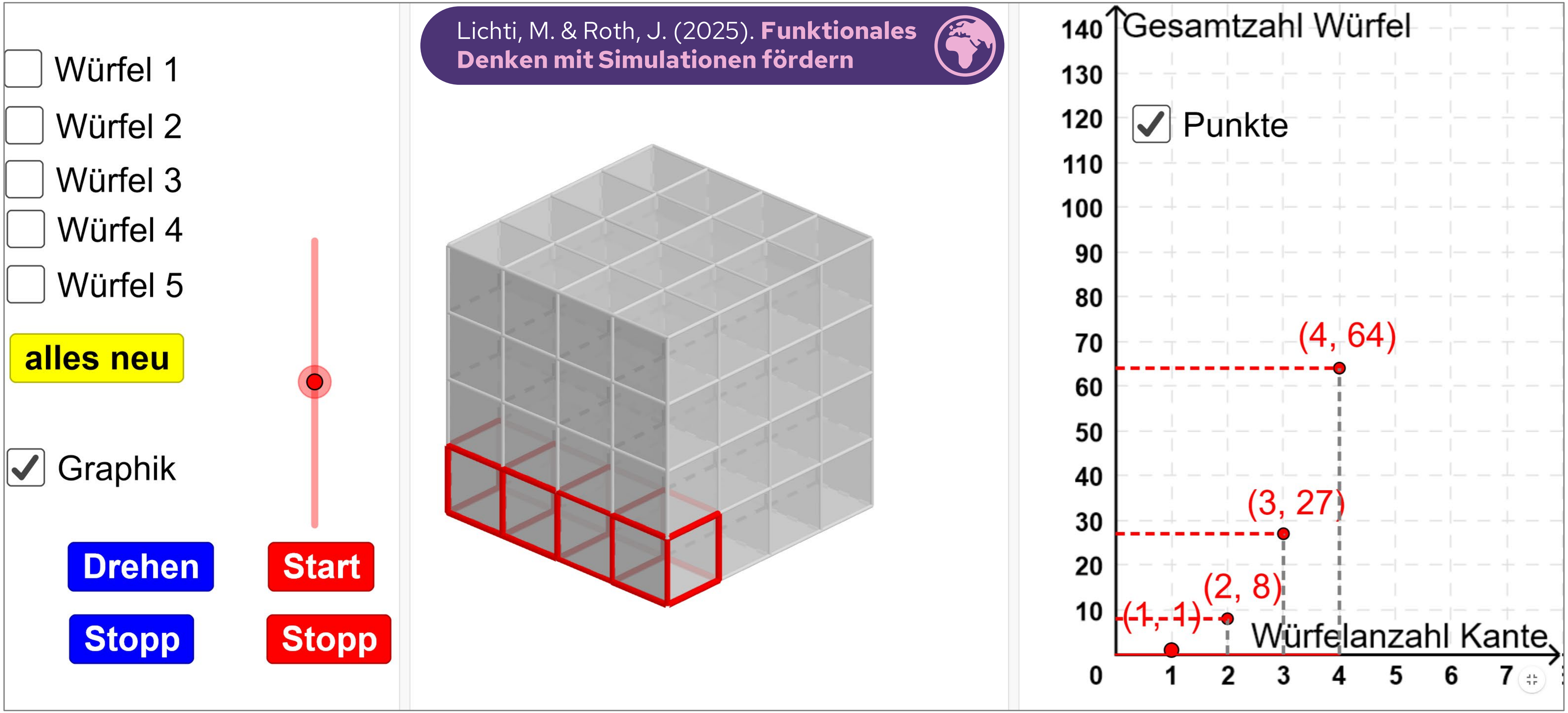
Lichti, Roth (2021). Der Einstieg in Funktionales Denken – Darstellungsform und passendes Medium. *Mathematik lehren, 226*, 10-14.
https://www.geogebra.org/m/rqgzqrm4

Grunderfahrungen und Aktivitäten

- **a** **Funktionales Denken mit Simulationen fördern** (7)
- **b** **Laborstationen zu Funktionen** mathematik-labor.de (7-10)
- **c** **Geschichten zu Graphen erzählen** (7-13)
- **d** **Graphen laufen** (7-13)
- **e** **Graphen zu Videos skizzieren** (7-13)
- **f** **Geradensalat, Punkteintopf** und **Umrechnungstabellen** (7/8)
- **g** **Mit Graphen Bilder malen** (7-10)
- **h** **Gerade gegeben → Koordinatenachsen ergänzen** (7/8)
- **i** **Graphen aus Zeitungen** (7-10)
- **j** **Dynagraph** (9/10)
- **k** **Funktionen mehrerer Veränderlicher** (10)
- **l** **Parameter und Funktionsgraphen** (9-11)
- **m** **Umkehrfunktionen** (9-11)

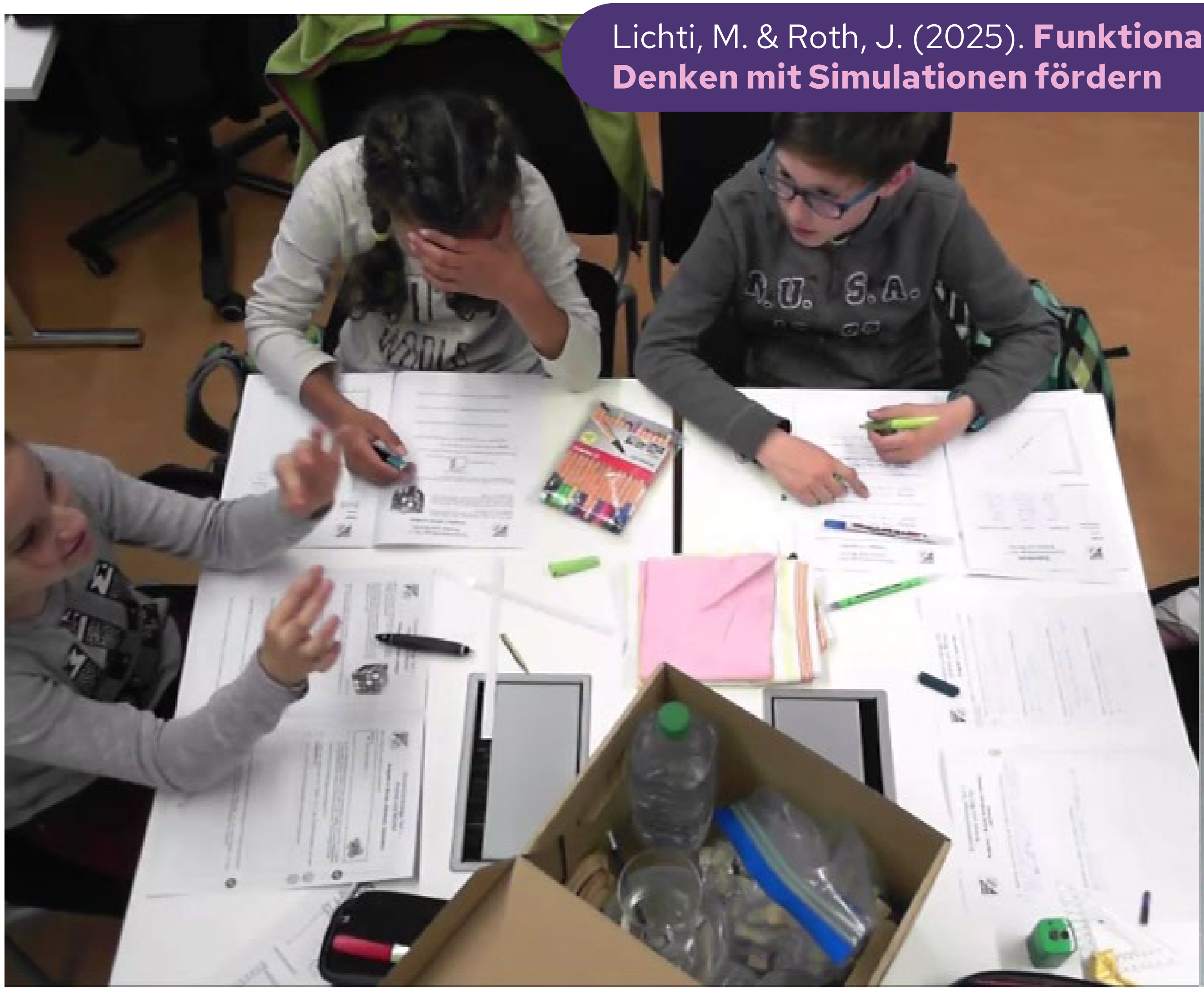
3a Funktionales Denken mit Simulationen fördern (7)

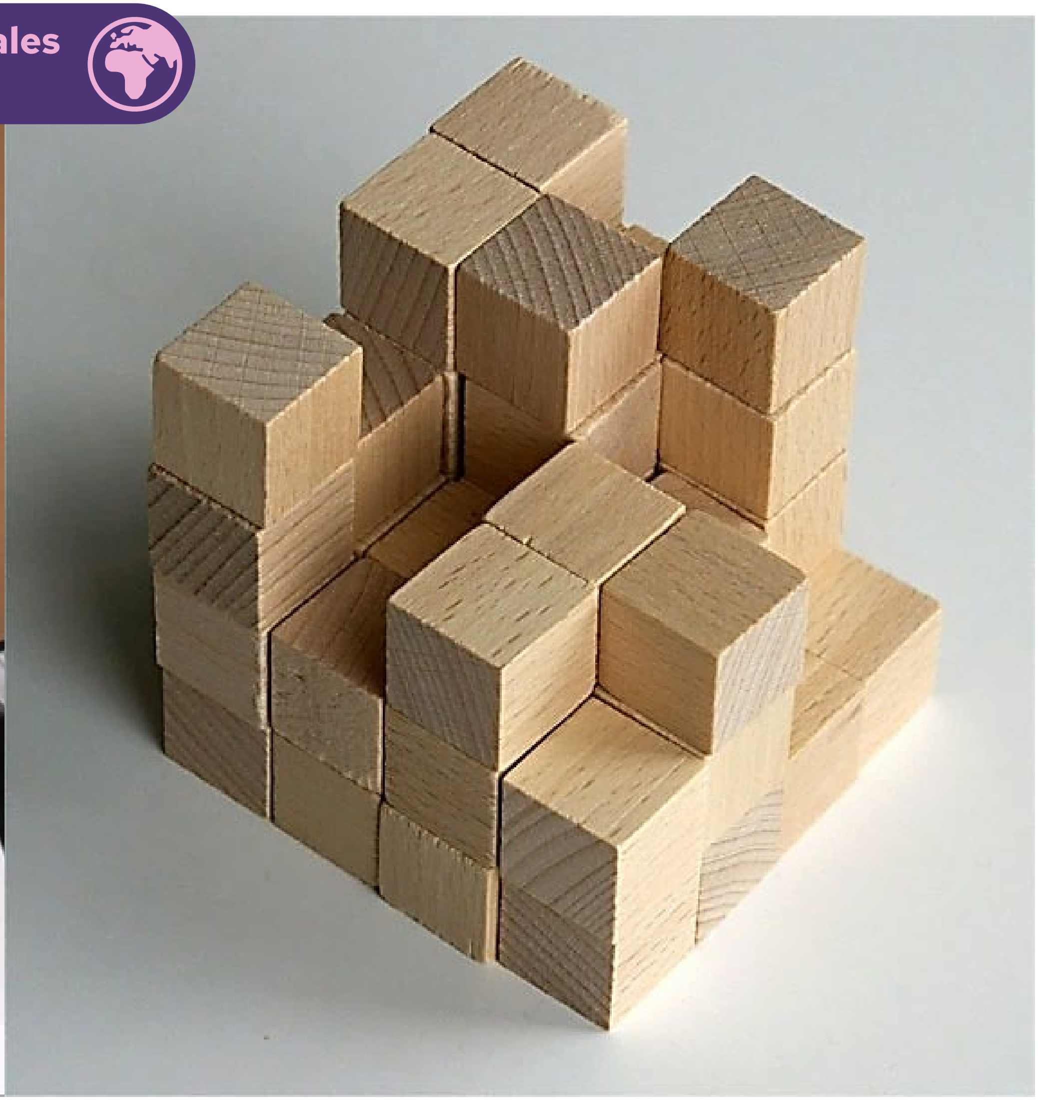
Würfelgebäude: Würfelzahl an einer Kante → Gesamtzahl benötigter Würfel



Würfelgebäude: Würfelanzahl an einer Kante → Gesamtanzahl benötigter Würfel

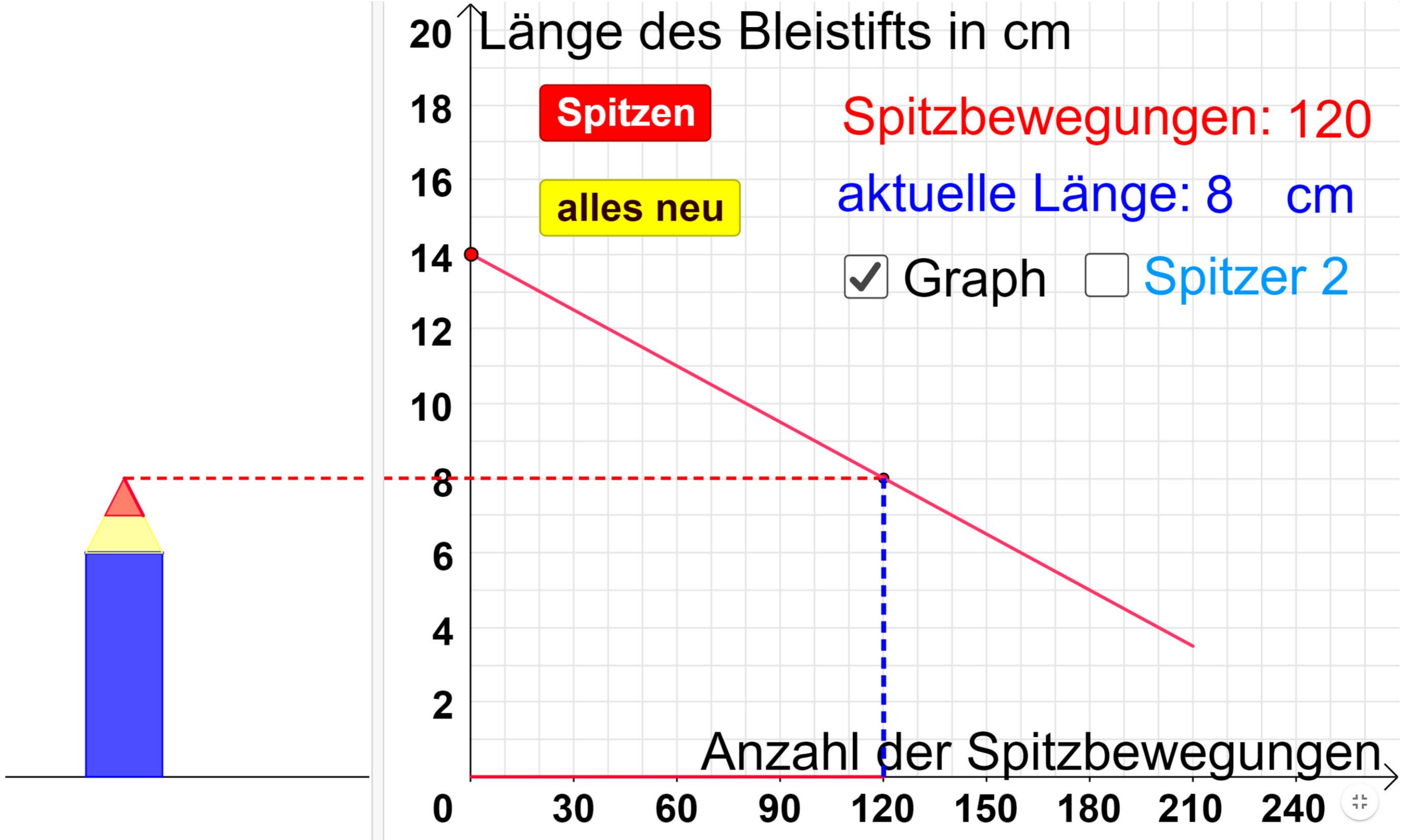
Lichti, M. & Roth, J. (2025). **Funktionales Denken mit Simulationen fördern**

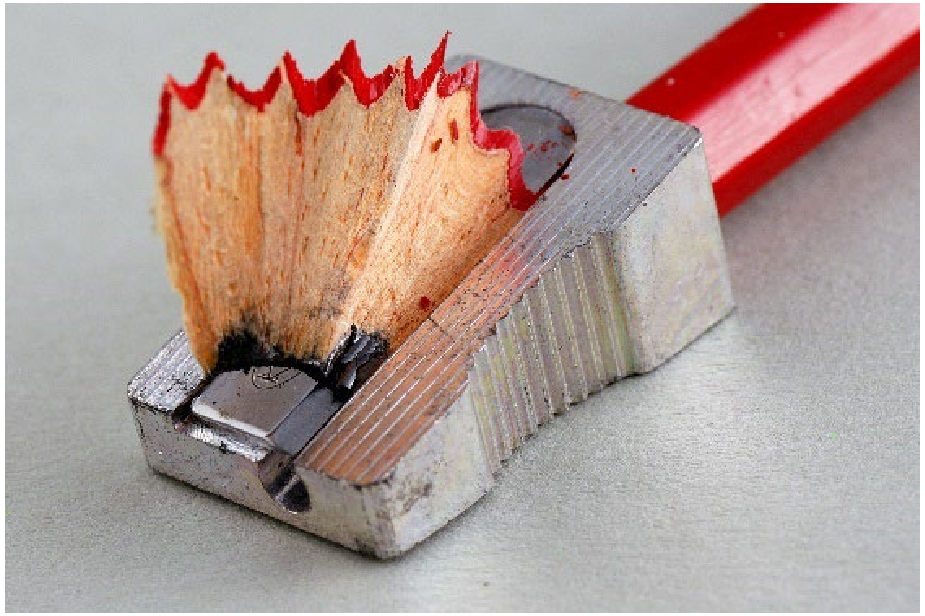




Spitzen:
Spitzbewegungen → Bleistiftlänge

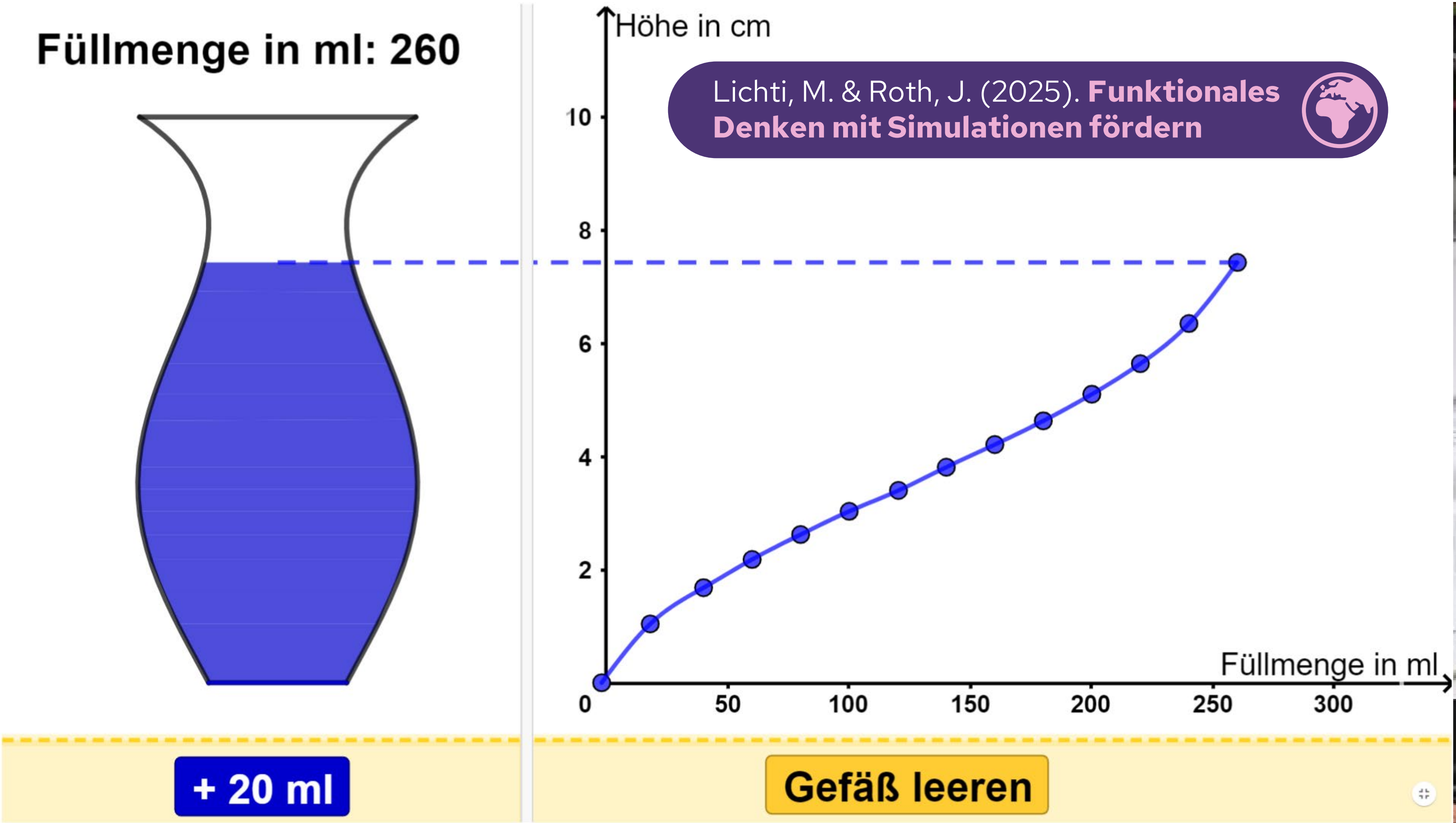
Lichti, M. & Roth, J. (2025). **Funktionales Denken mit Simulationen fördern**





 https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB

Gefäß: Füllmenge → Füllhöhe



Lichti, M. & Roth, J. (2025). **Funktionales Denken mit Simulationen fördern**

Grundvorstellung Kovariation

Digel, S. & Roth, J. (2021). [Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?!]() In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.

https://www.mathe-labor.de/stationen/baumhaus-2020/a/teil3/

Gefäß: Füllmenge → Füllhöhe

Grundvorstellung **Kovariation**

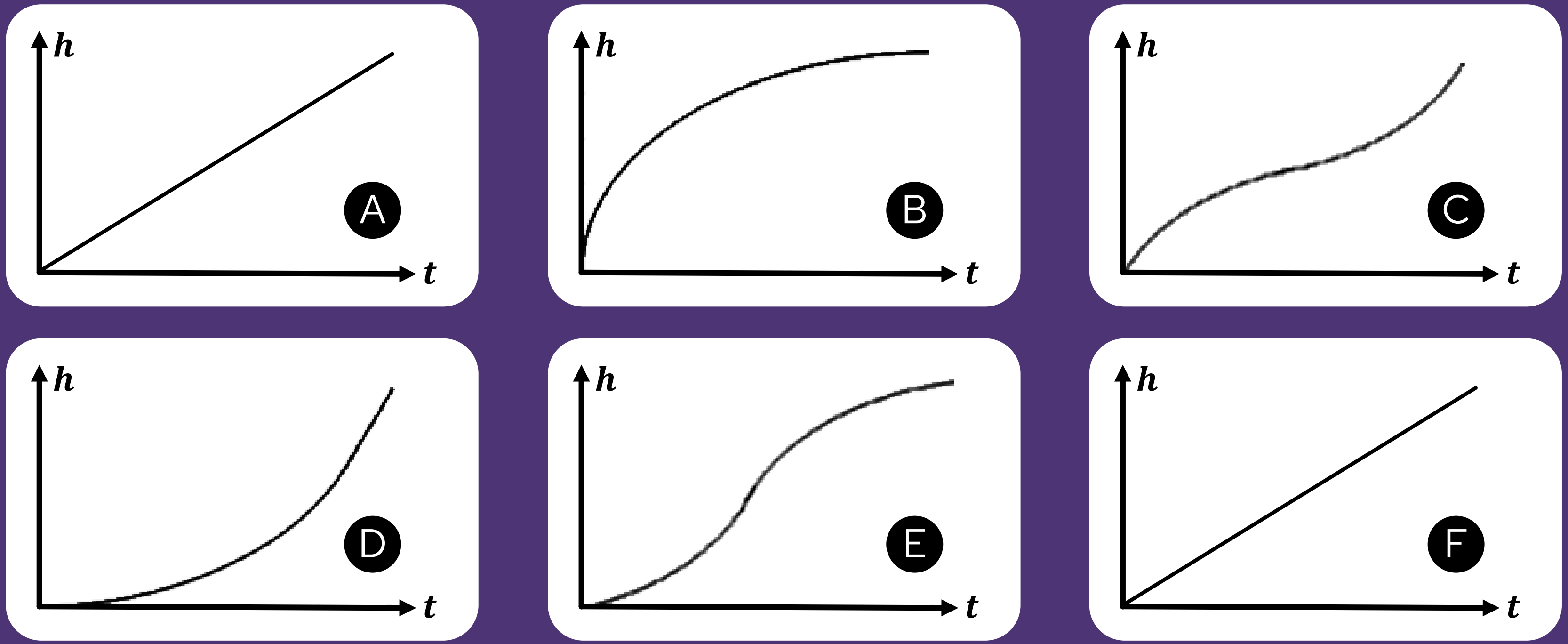
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Gefäße füllen

Verschiedene Gefäße mit den Nummern **1** bis **6** werden gleichmäßig (mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit) mit Wasser gefüllt.

Die Funktionsgraphen **A** bis **F** stellen jeweils den funktionalen Zusammenhang zwischen der Füllhöhe h eines Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit t dar.

Ordnen Sie den Gefäßen jeweils einen passenden Funktionsgraph zu und begründen Sie Ihre Auswahl.



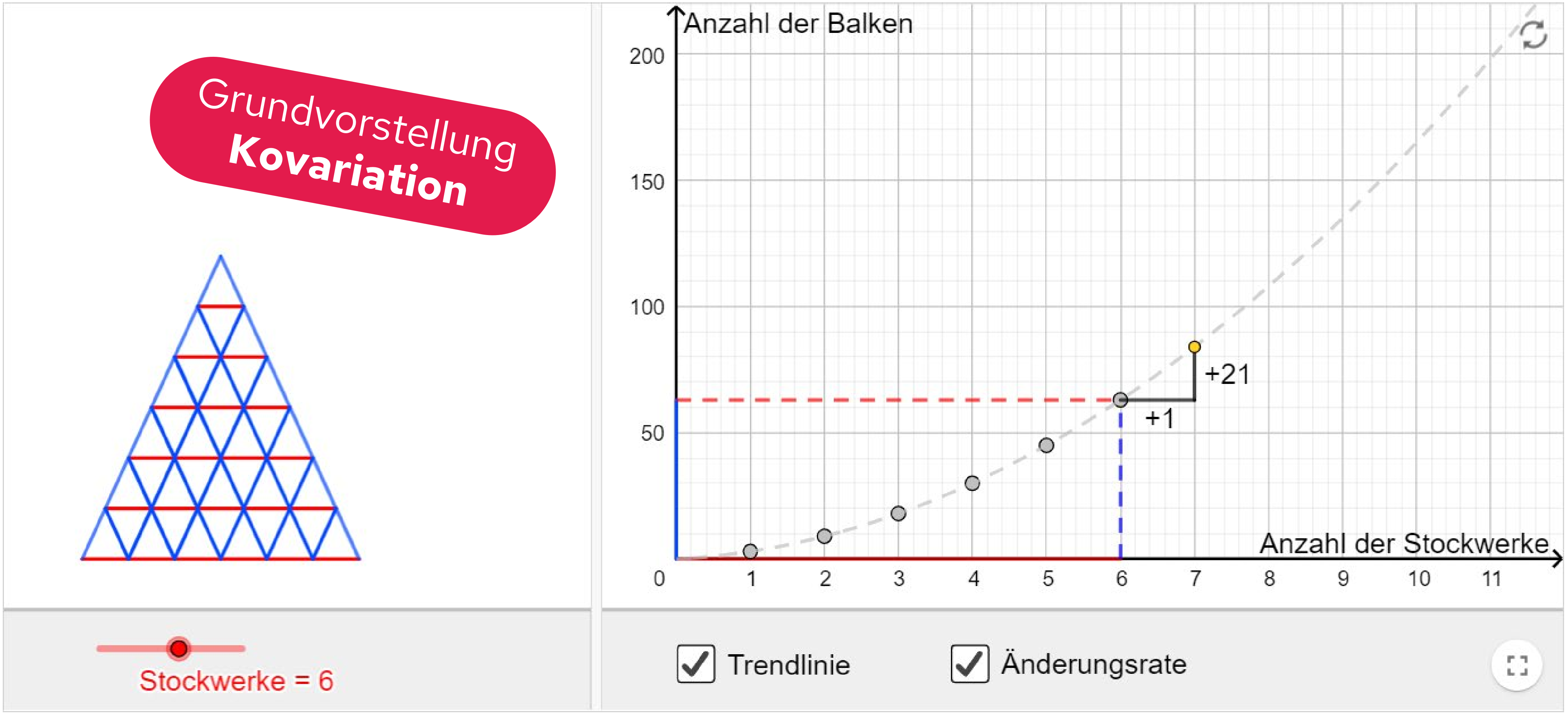
Kerze: Brenndauer → Länge

https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=40da6cdb-fa5e-42e1-9a07-ae0a00de8077 (Zeitraffer)
https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=9b04b701-a3dc-4ce0-a984-ae0a00dd6449 (Originallänge)

https://www.geogebra.org/m/we6ftunf#chapter/542845 https://www.geogebra.org/m/fyvuvfst

Kartenhaus:
Anzahl Stockwerke → Anzahl Balken

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Digel, S. & Roth, J. (2021). Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?!
In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.

https://www.geogebra.org/m/m6pmwsuc https://www.mathe-labor.de/stationen/baumhaus-2020/a/teil2/

RPTU

3b

Laborstationen zu Funktionen

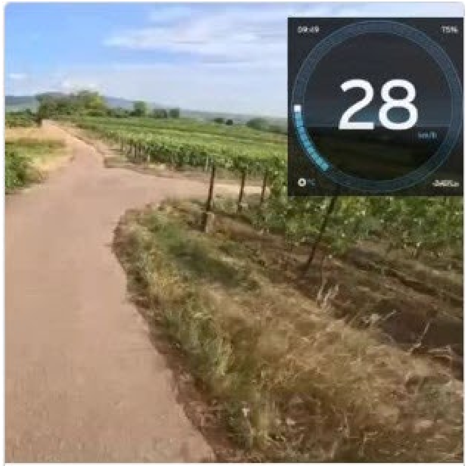
mathematik-labor.de (7-10)

Digitale Lernumgebungen
Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Mathe ist mehr

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“



Aktivurlaub
Funktionale Zusammenhänge

Ansehen

Das Baumhaus-Projekt
Funktionale Zusammenhänge

Ansehen

7. / 8. Klasse

Landauer Kerwe
Exponentialfunktionen

Ansehen

Olympia
Quadratische Funktionen

Ansehen

Mathepark
Trigonometrische Funktionen

Ansehen

9. / 10. Klasse

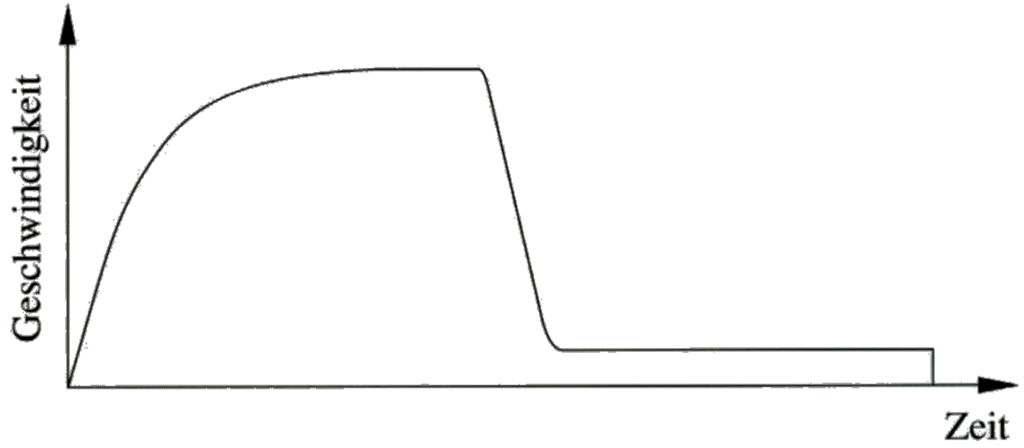
3c Geschichten zu Graphen erzählen (7-13)

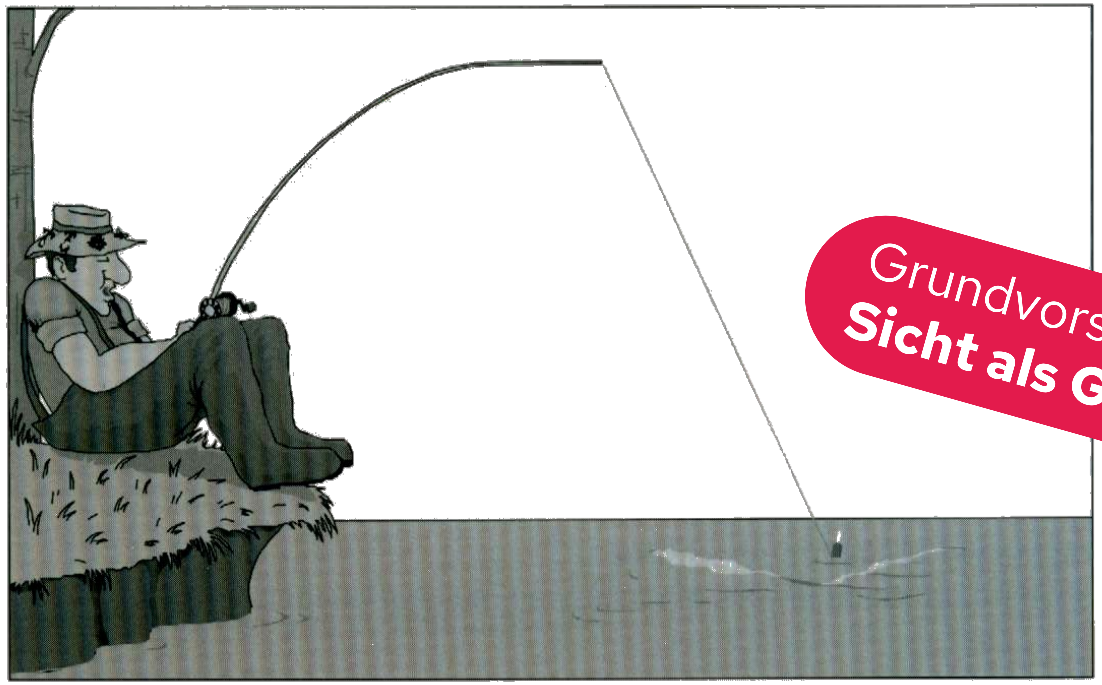
Welche Sportart?

Aufgabe

Welche Sportart passt am besten zu dem Graphen?

- Angeln
- Stabhochsprung
- 100-m-Lauf
- Fallschirmspringen
- Golf
- Speerwerfen
- Hochsprung
- Turmspringen
- Drag Racing 🌍
- Wasserski





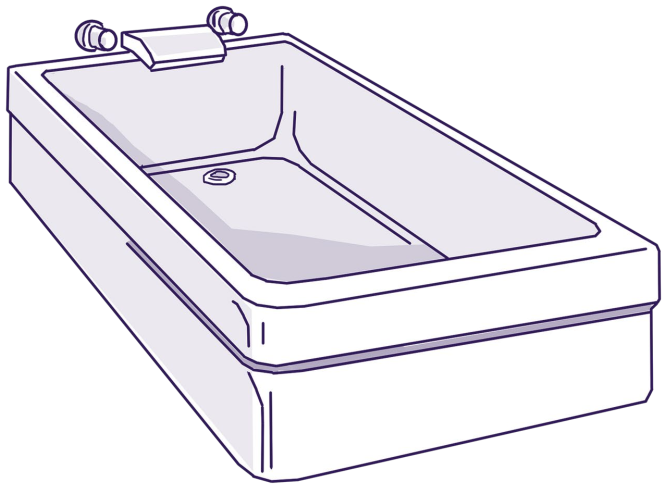
Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

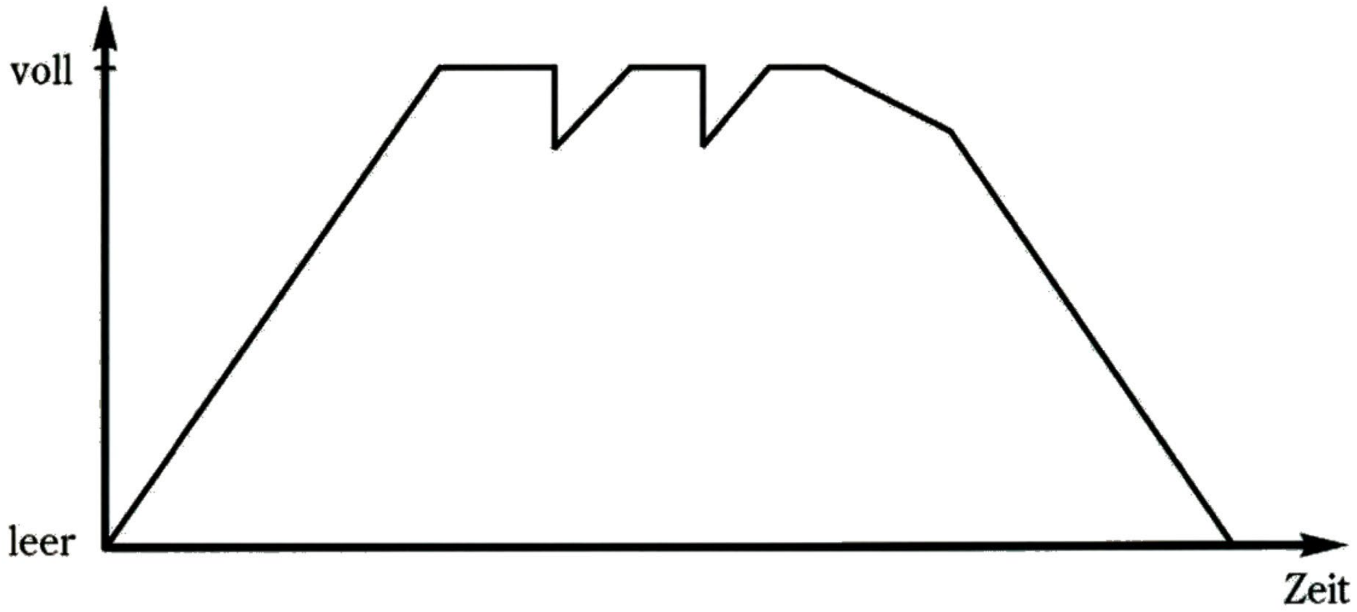
 Herget, Jahnke, Kroll (2001). Produktive Aufgaben für den MU in der Sek. I. Berlin: Cornelsen

Badewannengeschichte

Aufgabe

- Denkt euch eine Geschichte aus, die gut zum abgebildeten Funktionsgraph passt.
- Begründet, warum eure Geschichte zum Graph passt.





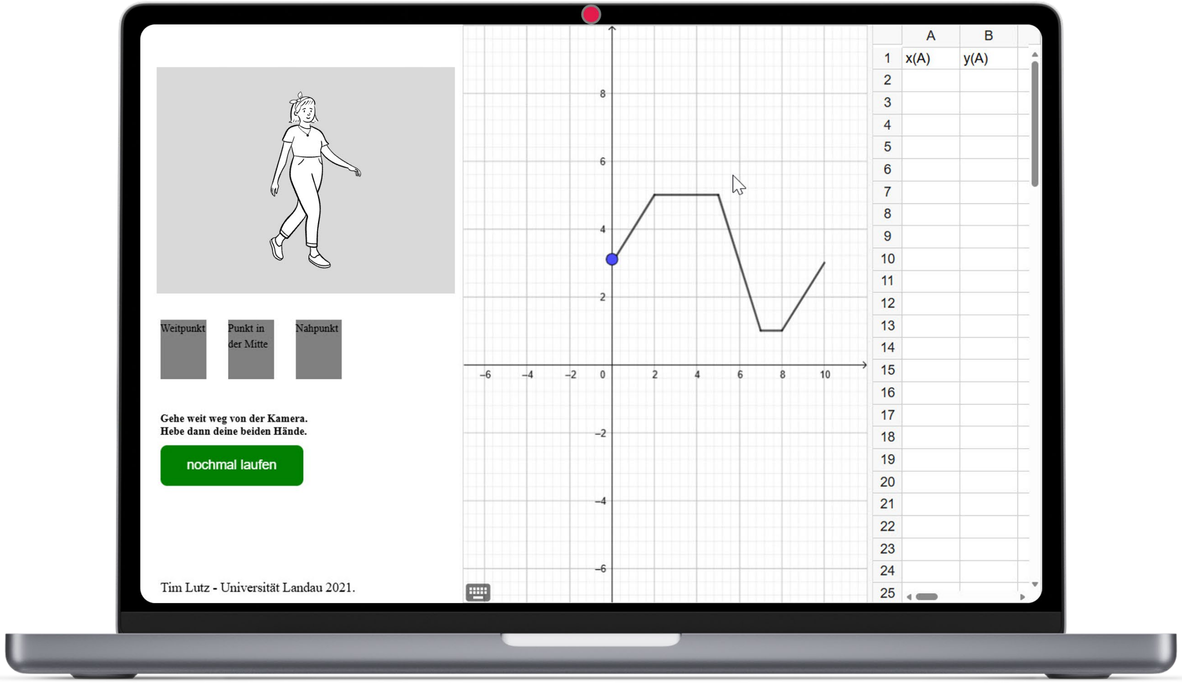
 Herget, Jahnke, Kroll (2001). *Produktive Aufgaben für den MU in der Sek. I*. Berlin: Cornelsen

3d

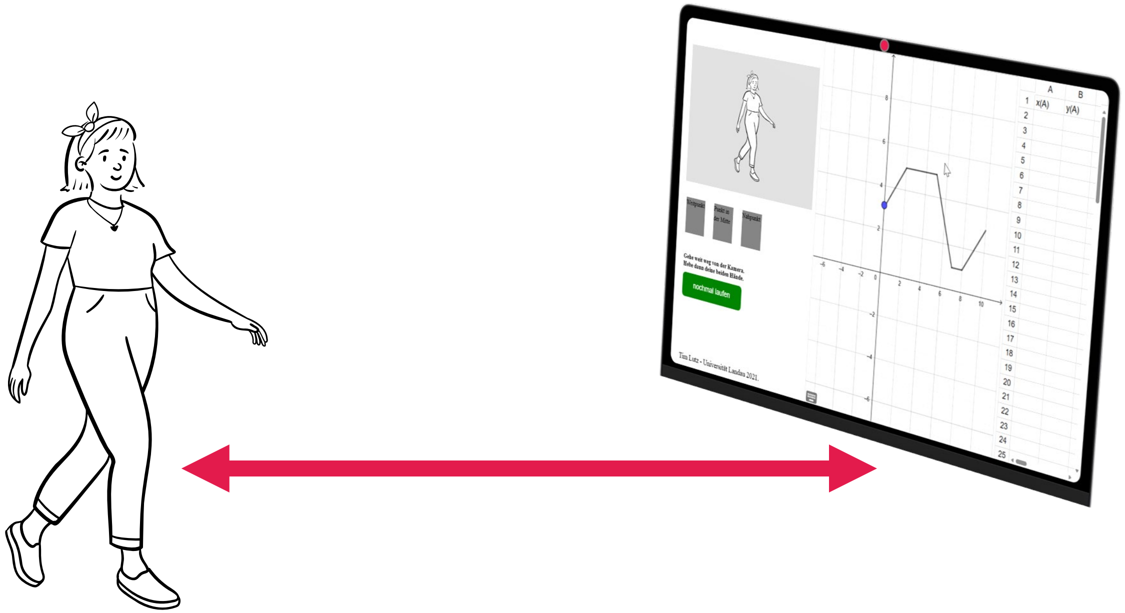
Graphen laufen (7-13)

Funktionsgraphen laufen

Webcam



https://tim-lutz.de/funktionenlaufen



Grundvorstellung **Kovariation**

Barzel (2009): Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe!
In: Leuders et al. (Hrsg.). *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, S. 6-17

3e Graphen zu Videos skizzieren (7-13)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU

Graphing Stories

Graph zur Geschichte skizzieren

1 Video ansehen

In diesem Video passiert einiges.

2 Zusammenhang skizzieren

3 Lösung ansehen

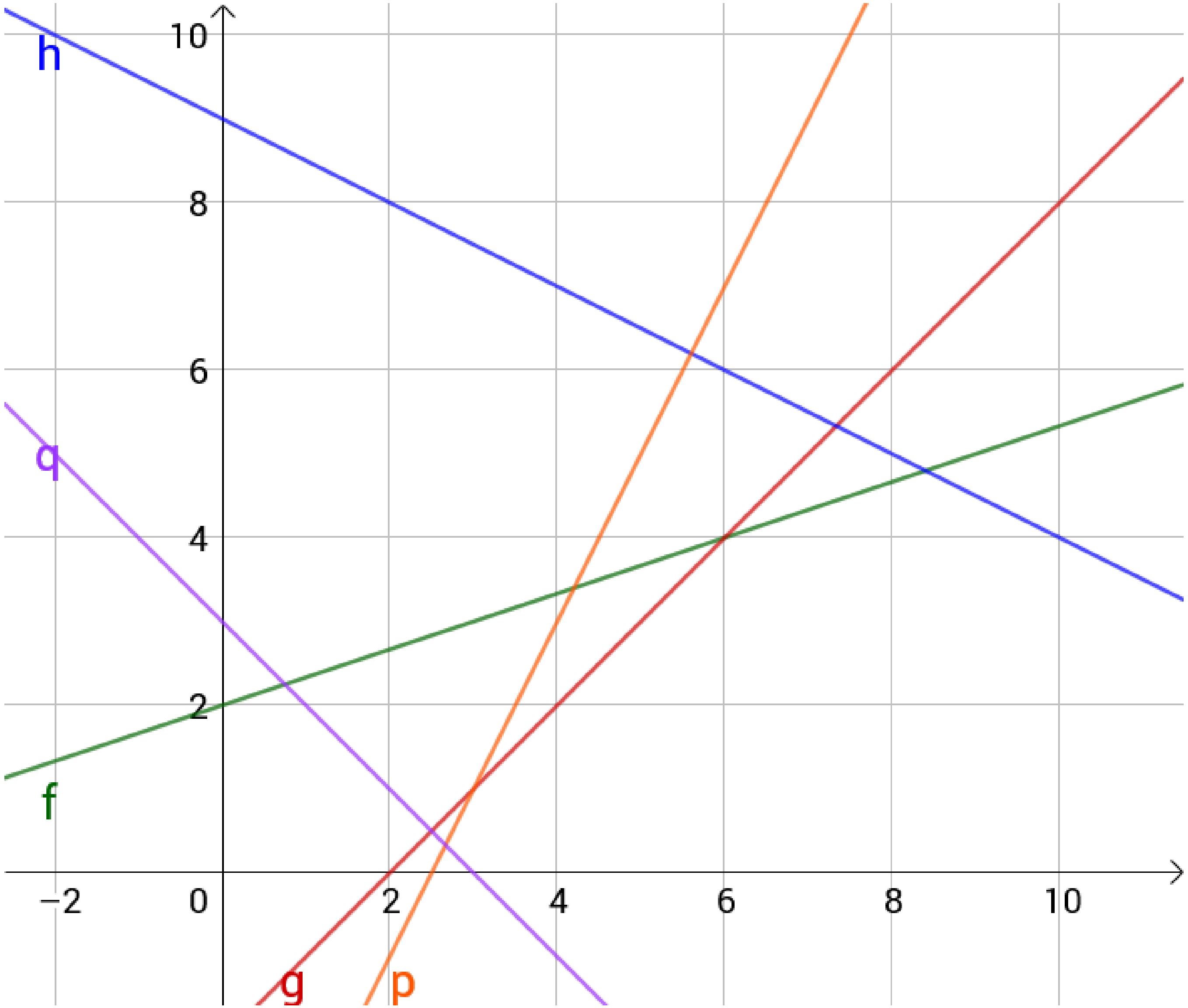
3f

Geradensalat, Punkteintopf und **Umrechnungstabellen** (7/8)

Geradensalat

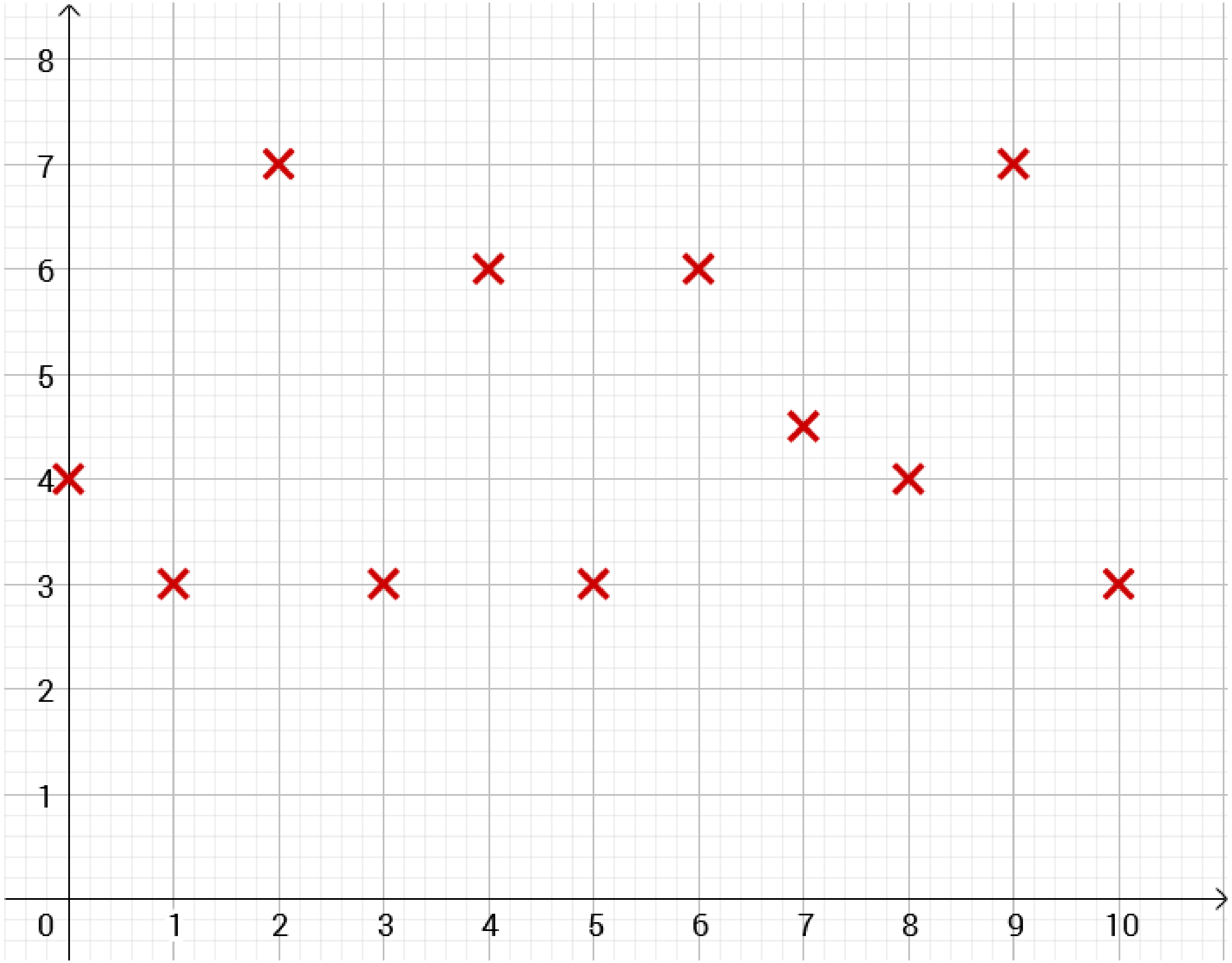
Aufgabe
Wie lauten die zugehörigen Funktionsgleichungen?

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes



Punkteintopf

Aufgabe
Versuche alle Punkte mit so wenig Geraden wie möglich treffen.



 https://www.geogebra.org/m/aB72hJgV

Umrechnungstabelle: Britische Pfund ↔ Euro

R TU P

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Pfund	Euro	Pfund	Euro	Euro	Pfund	Euro	Pfund
1	1,17	21	24,61	1	0,85	21	17,92
2	2,34	22	25,78	2	1,71	22	18,77
3	3,52	24	28,12	3	2,56	24	20,48
4	4,69	26	30,47	4	3,41	26	22,19
5	5,86	28	32,81	5	4,27	28	23,89
6	7,03	30	35,15	6	5,12	30	35,15
7	8,20	35	41,01	7	5,97	35	29,87
8	9,37	40	46,87	8	6,83	40	34,14
9	10,55	45	52,73	9	7,68	45	38,40
10	11,72	50	58,59	10	8,53	50	42,67
11	12,89	55	64,45	11	9,39	55	46,94
12	14,06	60	70,31	12	10,24	60	51,20
13	15,23	70	82,03	13	11,09	70	59,74
14	16,41	80	93,74	14	11,95	80	68,27
15	17,58	90	105,46	15	12,80	90	76,80
16	18,75	100	117,18	16	13,65	100	85,34
17	19,92	150	175,77	17	14,51	150	128,01
18	21,09	200	234,36	18	15,36	200	170,68
19	22,26	250	292,95	19	16,21	250	213,35
20	23,44	300	351,54	20	17,07	300	256,10

RPTU

3g

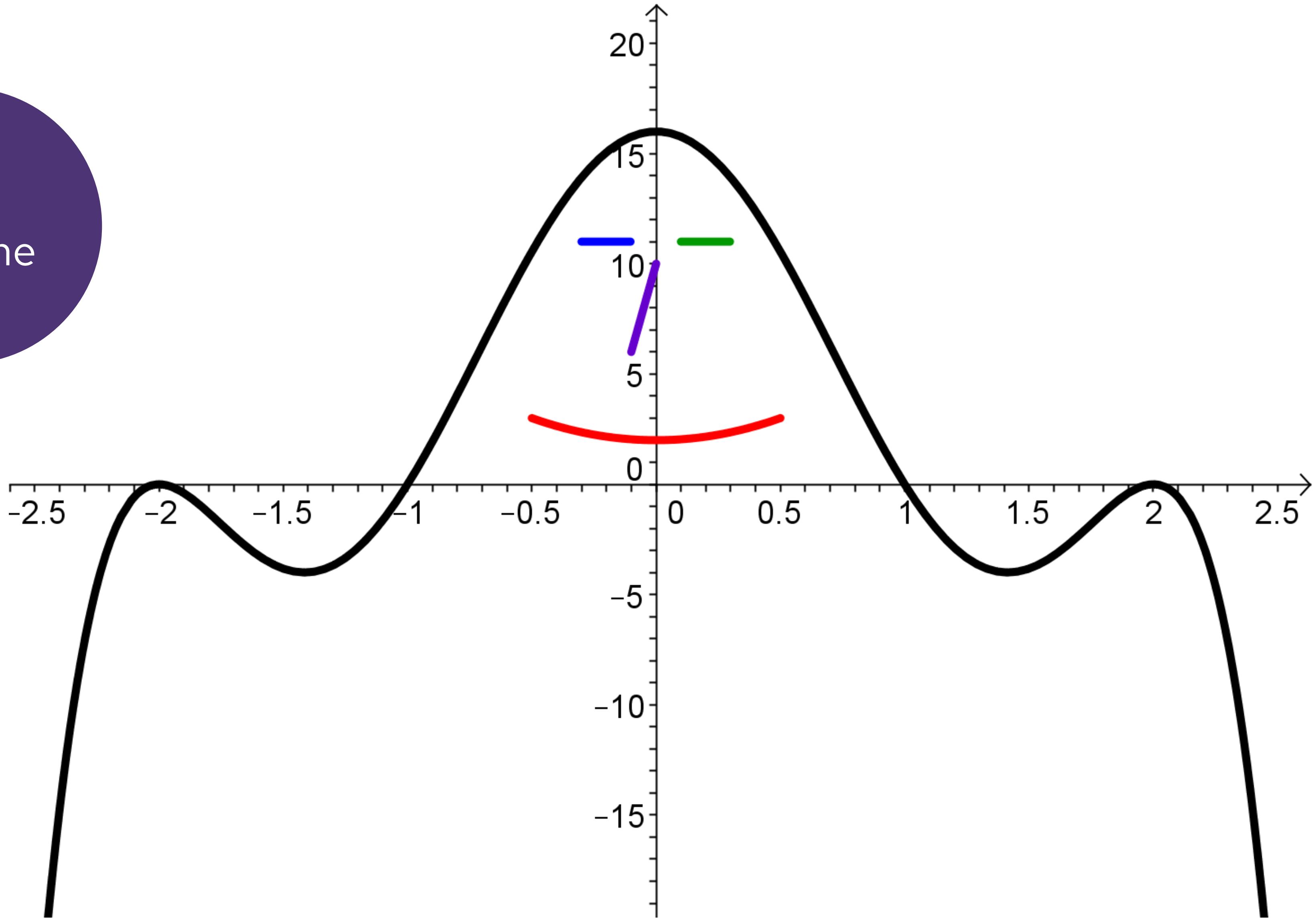
Mit Graphen Bilder malen (7-10)

Mit Graphen Bilder malen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe
Versuche das Gespenst nachzuzeichnen, indem du Funktionsterme in die Eingabezeile schreibst.

Grundvorstellung Sicht als Ganzes

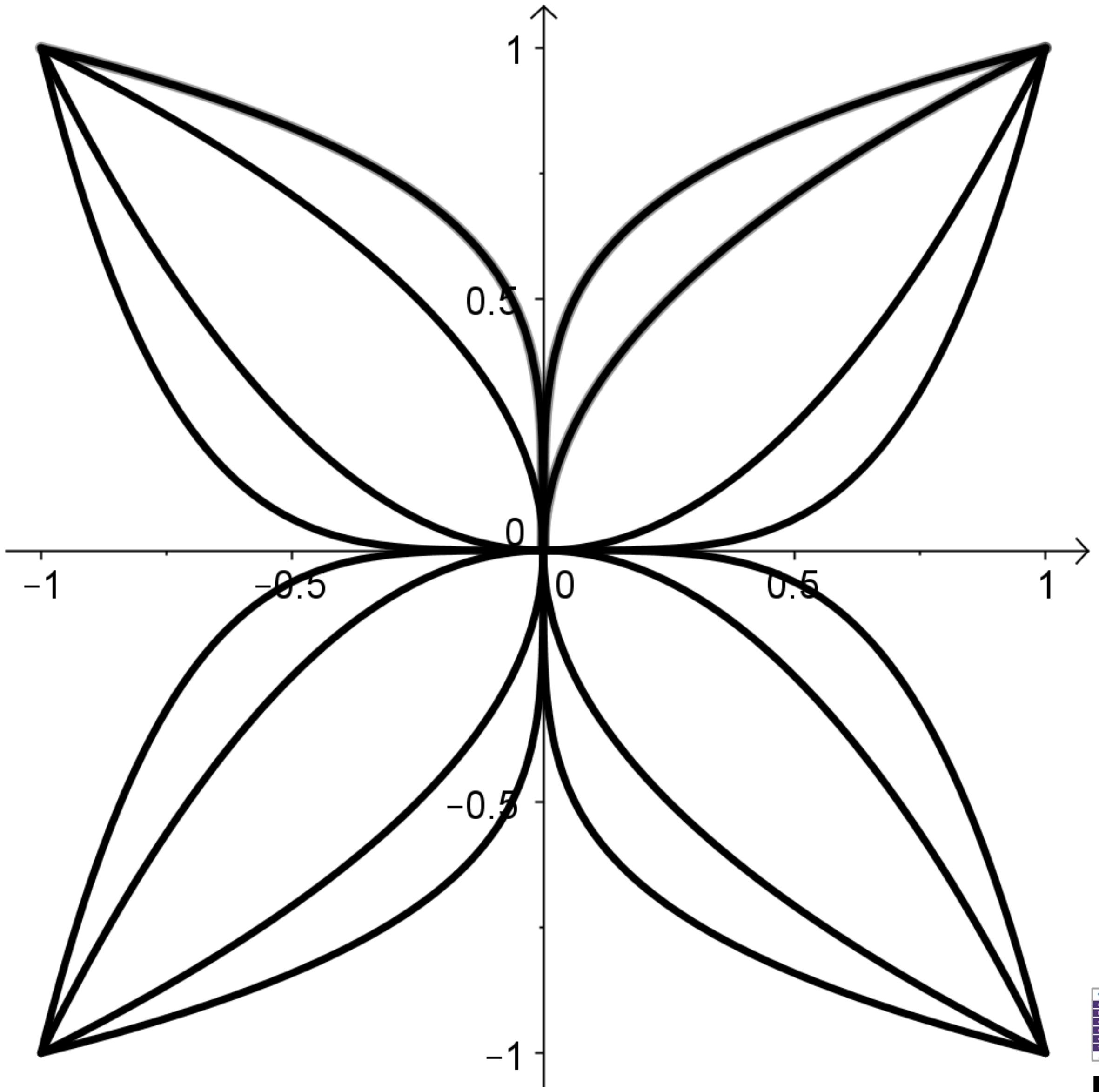


 https://www.geogebra.org/m/JGdMUD9b

Mit Graphen Bilder malen

Aufgabe
Versuche die Blüte nachzuzeichnen, indem du Funktionsterme in die Eingabezeile schreibst.

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes



 https://www.geogebra.org/m/syxurk8f

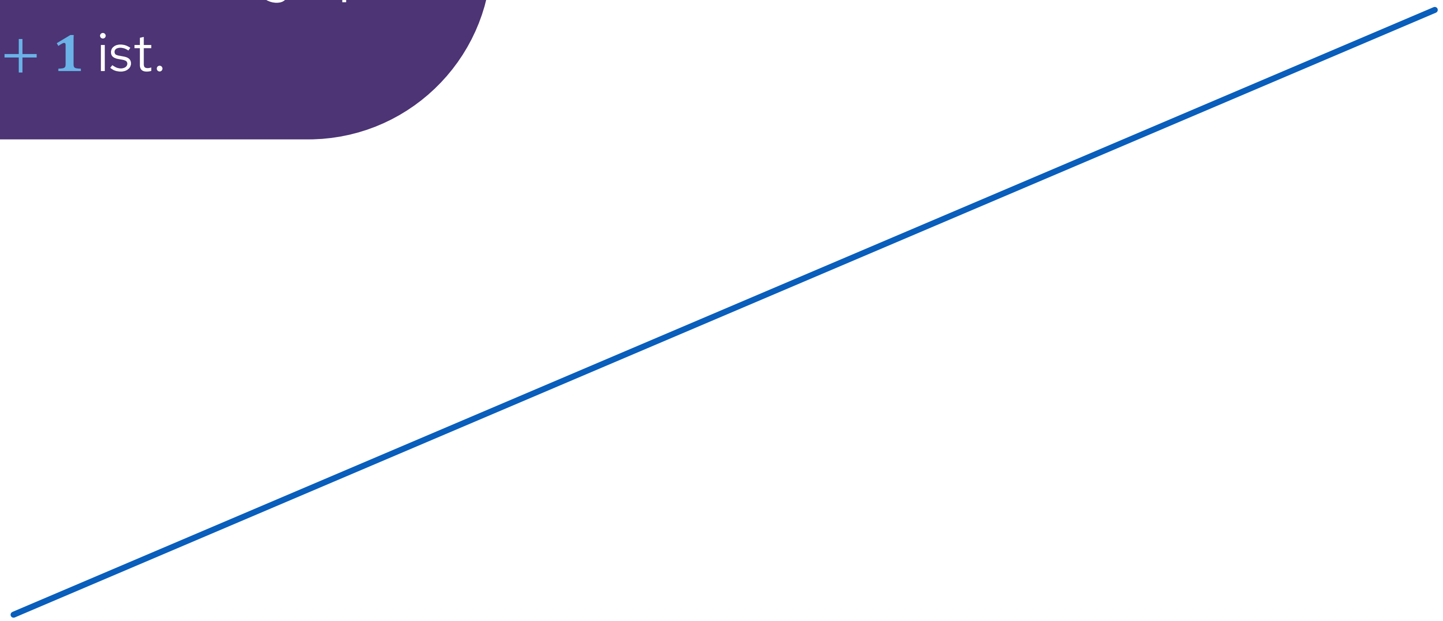
3h

Gerade gegeben → Koordinatenachsen ergänzen (7/8)

Koordinatenachsen ergänzen

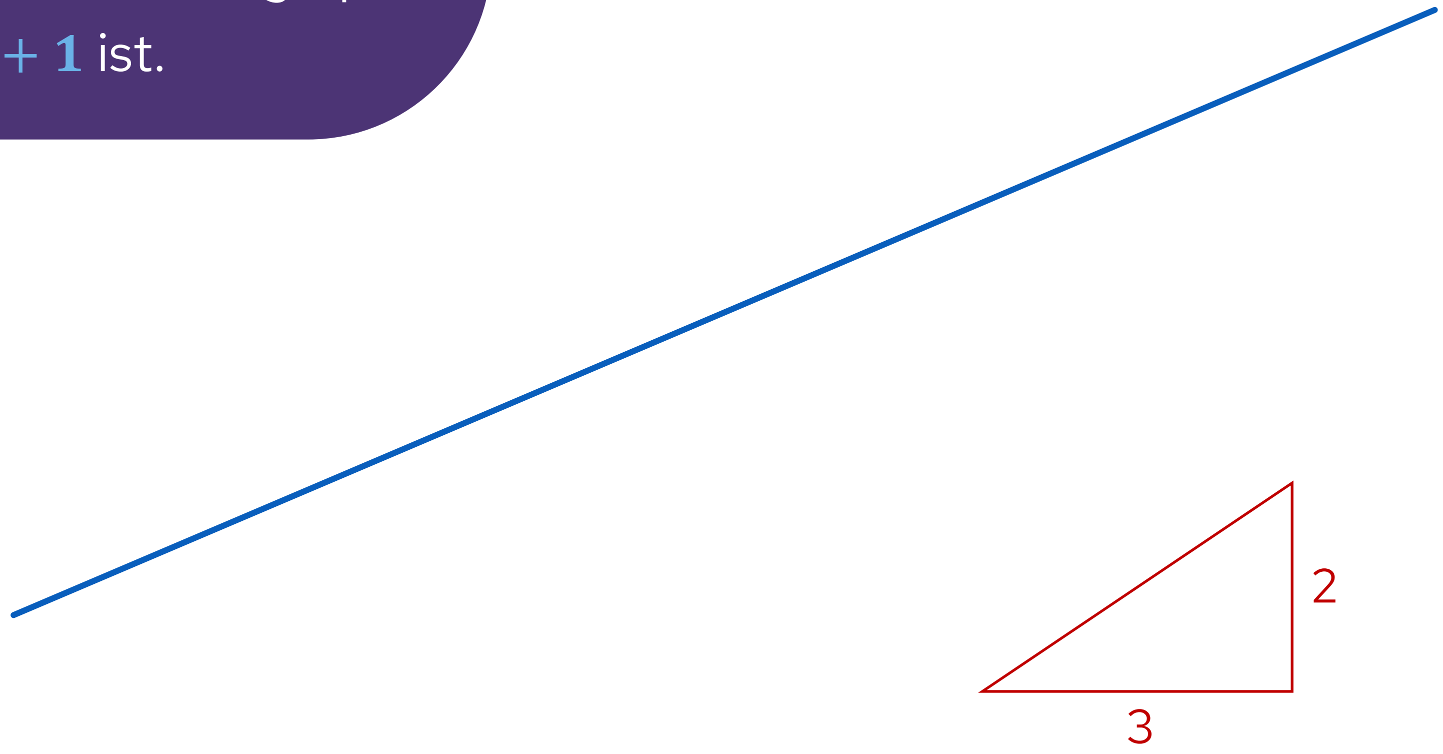
Aufgabe

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

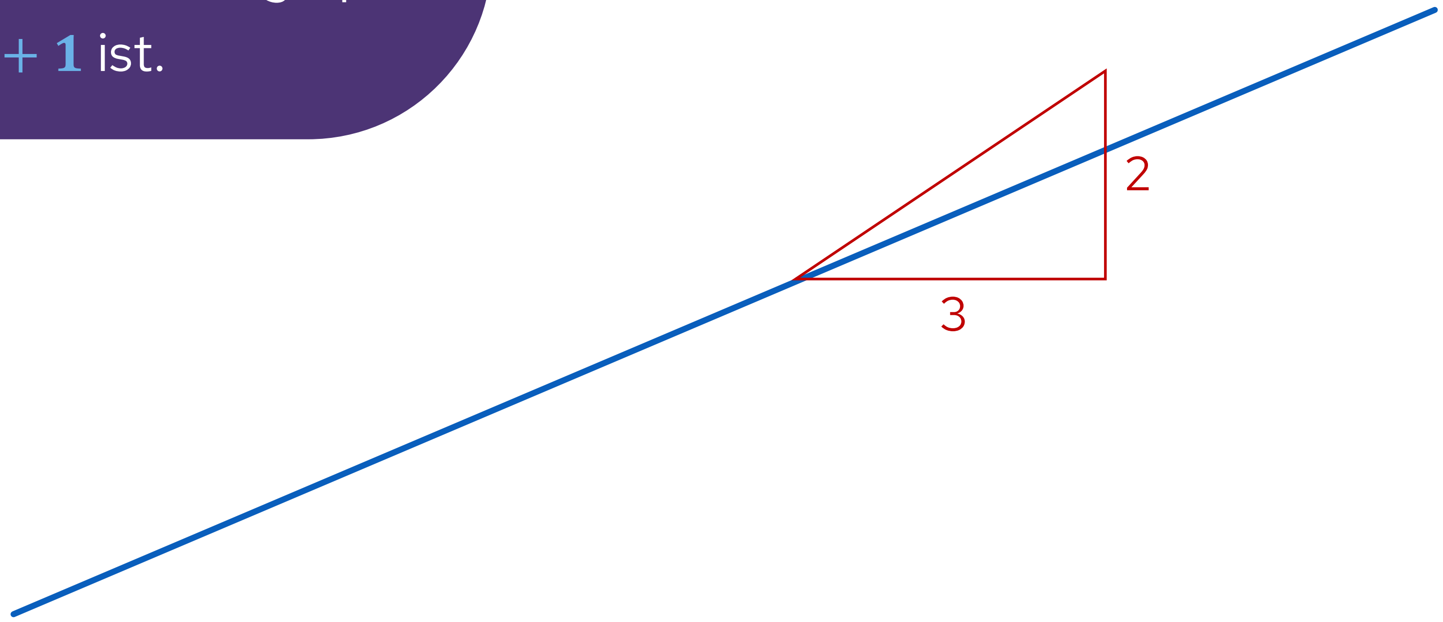
Aufgabe
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

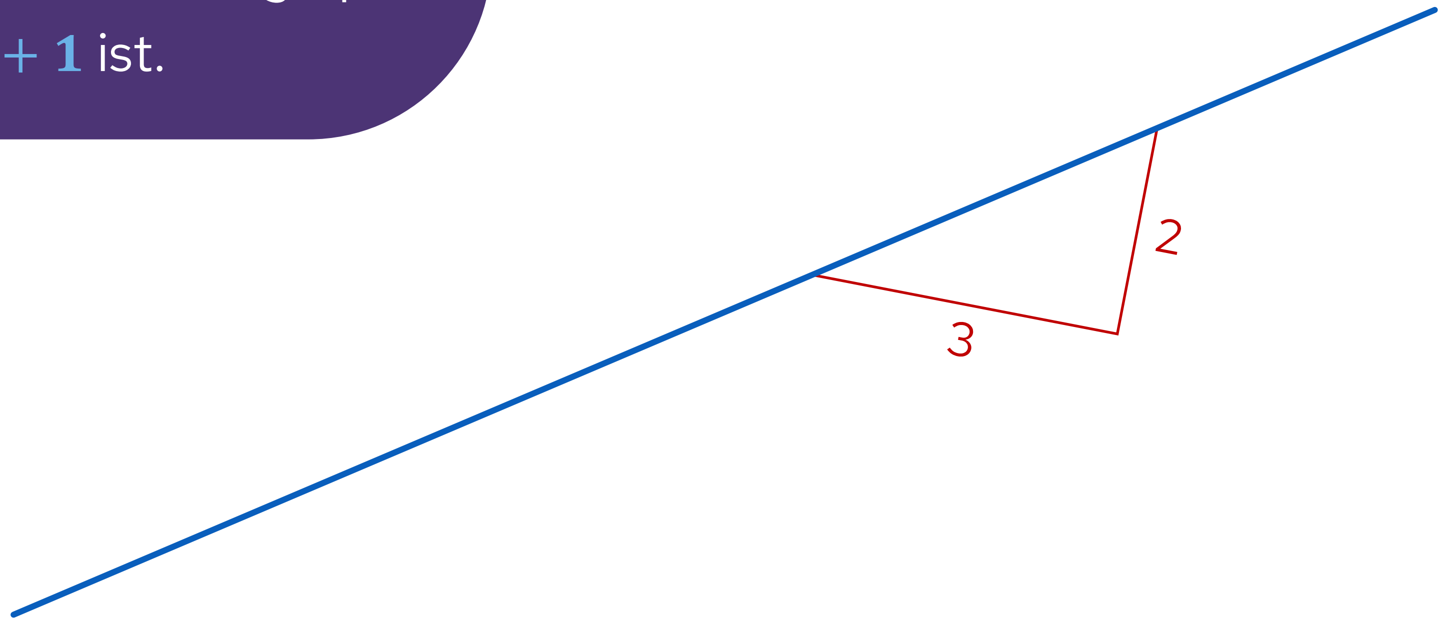
Aufgabe

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

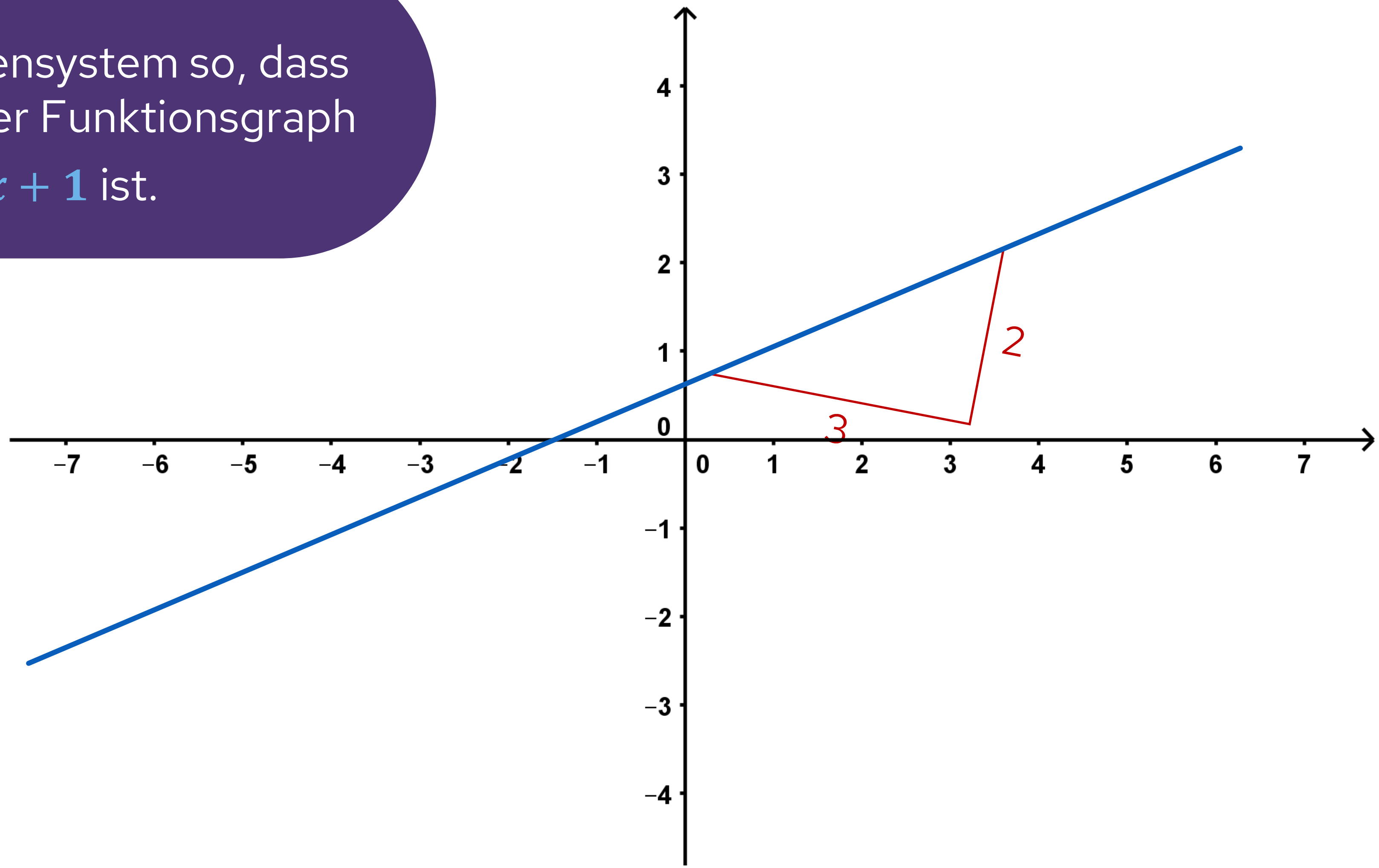
Aufgabe
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

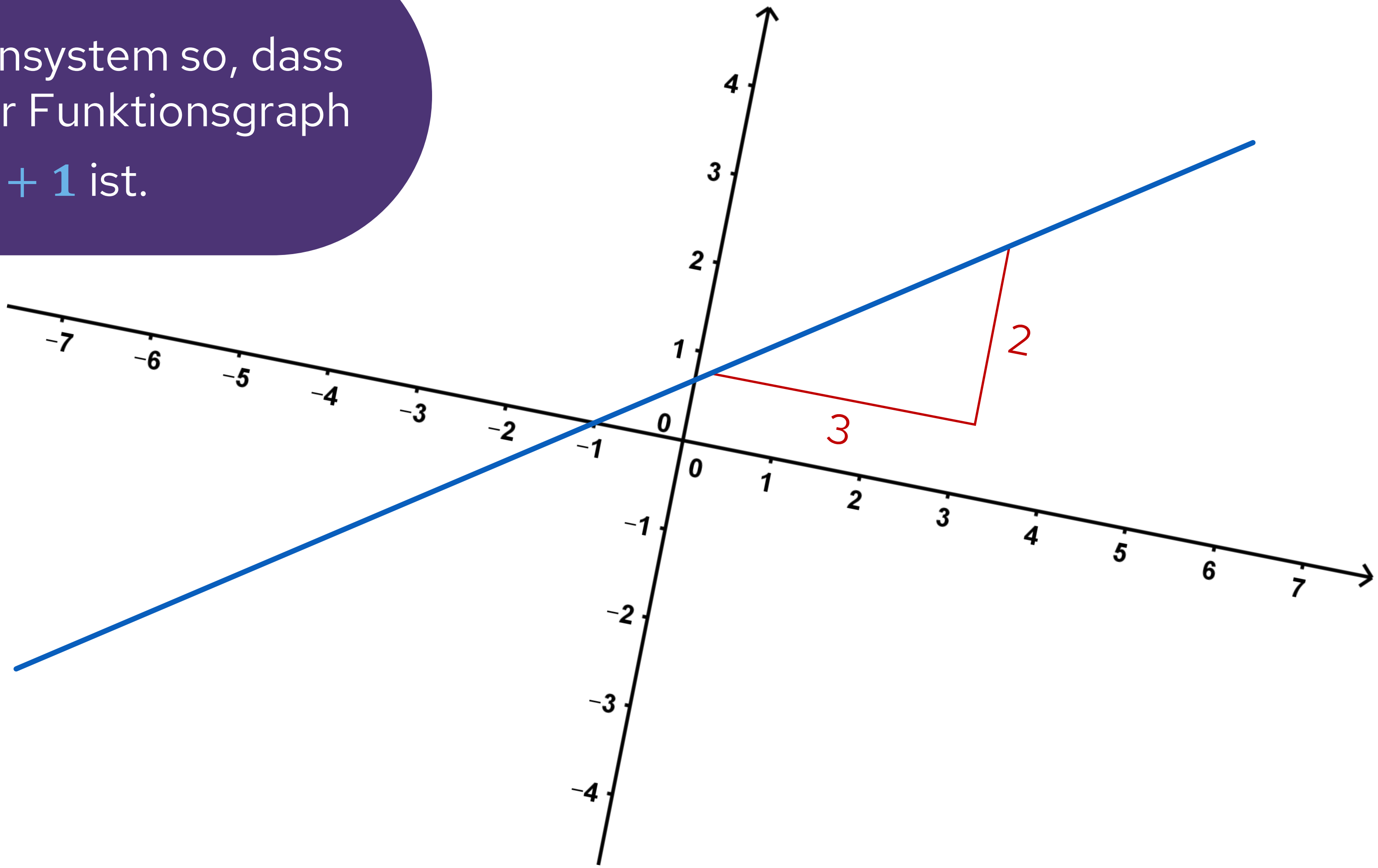
Aufgabe
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

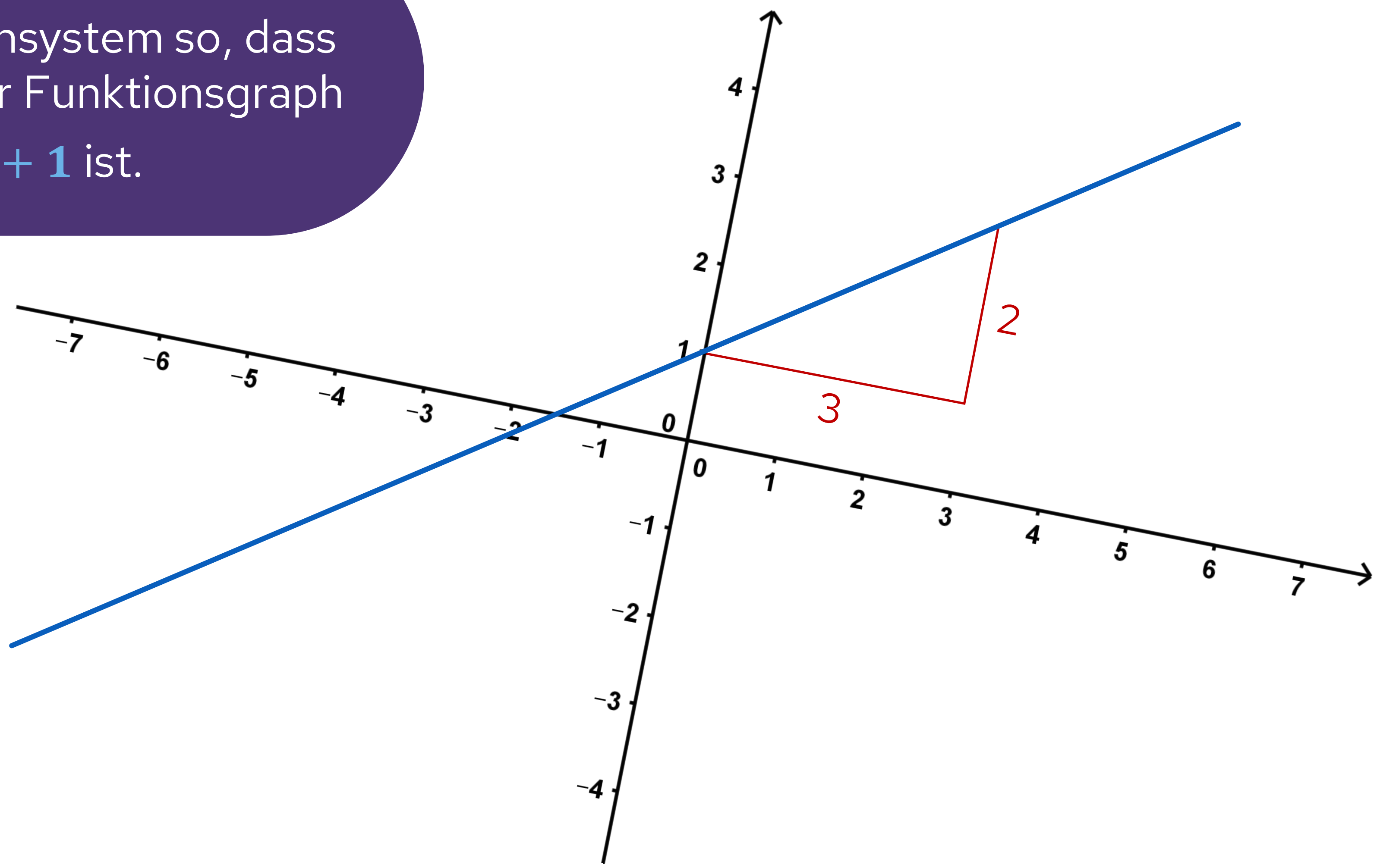
Aufgabe

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

Aufgabe
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.

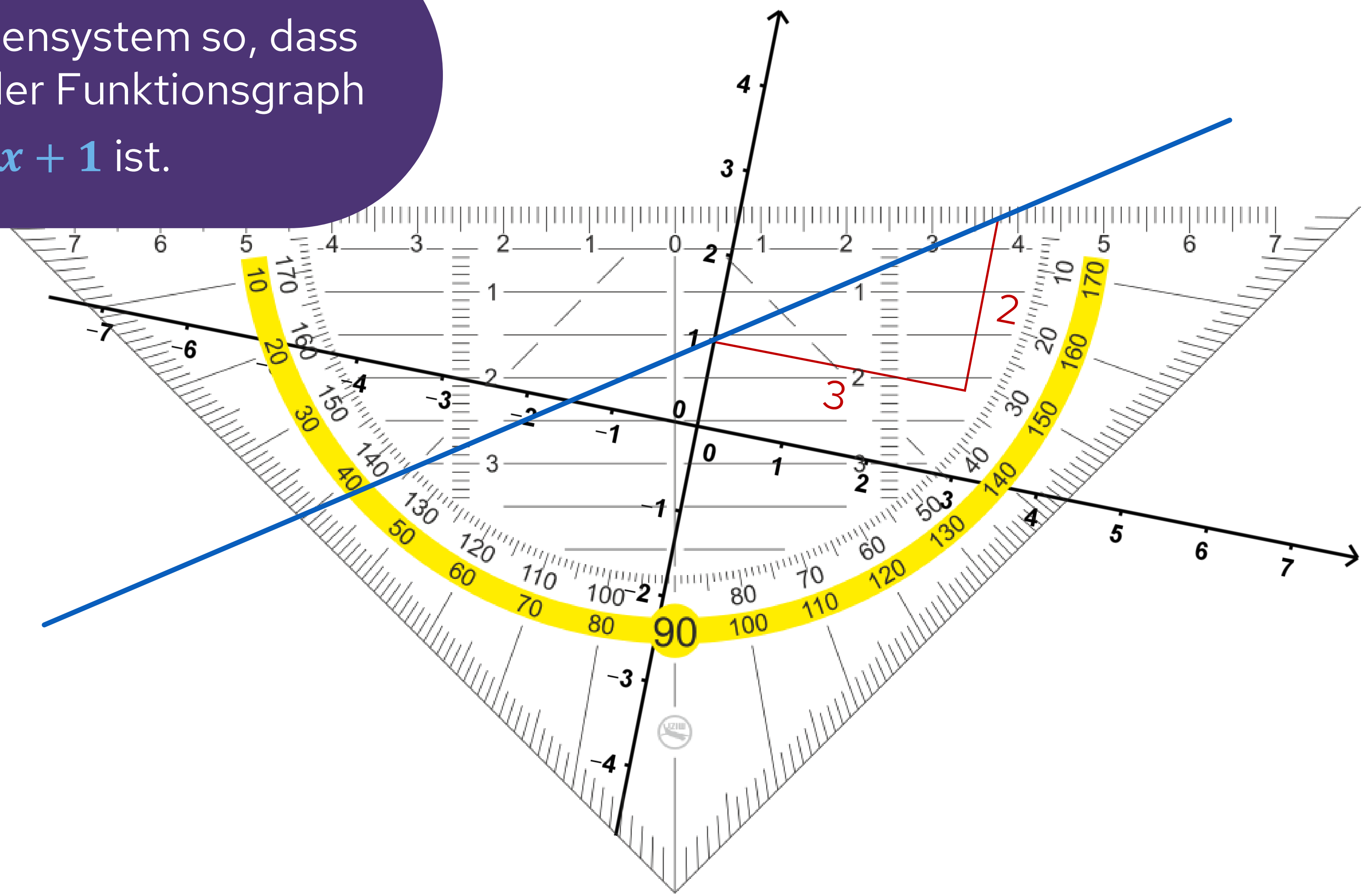


RPTU

Koordinatenachsen ergänzen

Aufgabe

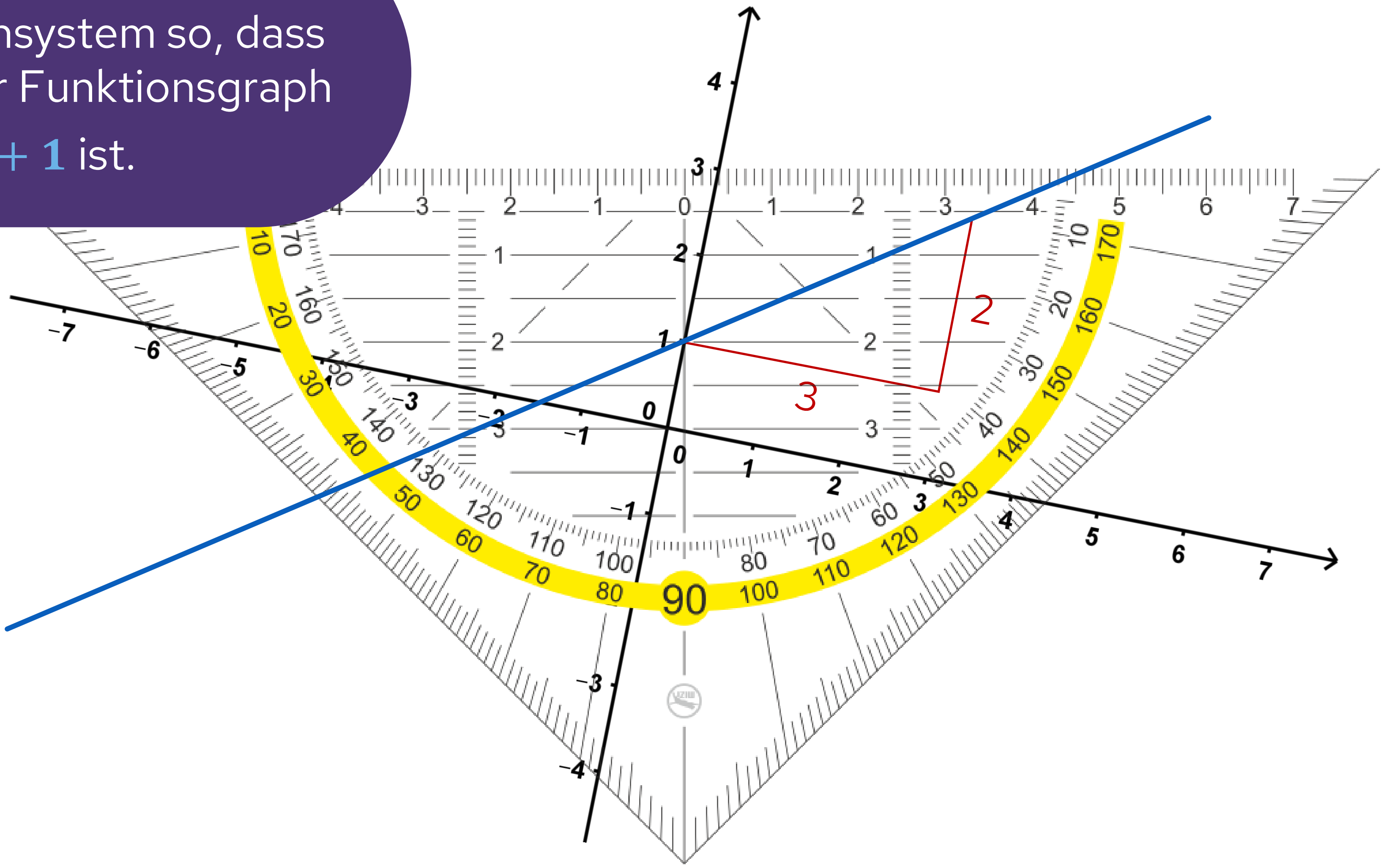
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

Aufgabe

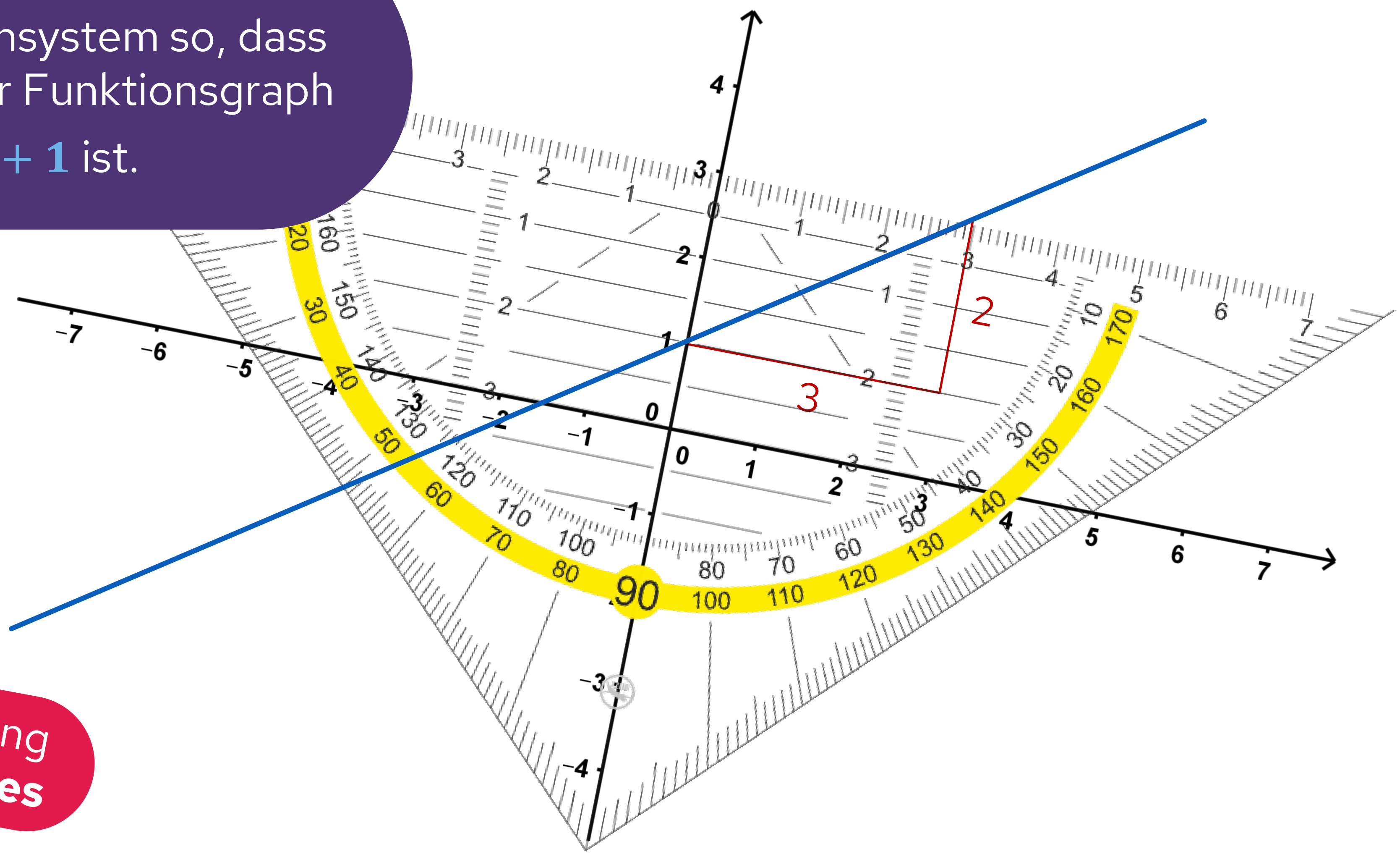
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

Aufgabe

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

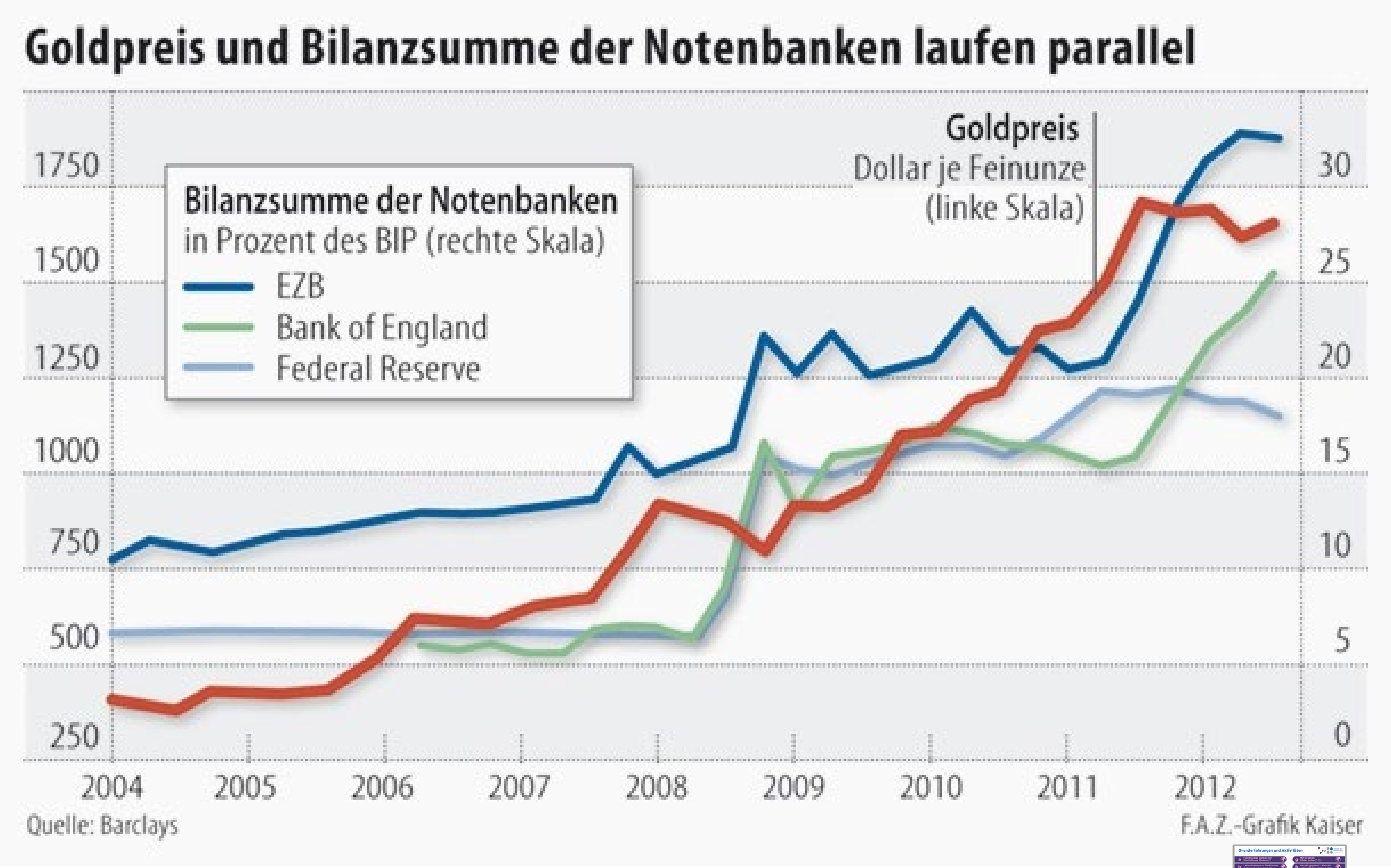
3i Graphen aus Zeitungen (7-10)

Goldpreis

Aufgabe

a) In welchem Jahr betrug der Goldpreis 750 Dollar je Feinunze?

b) Wie viele Jahre brauchte Gold ungefähr, um von 500 Dollar je Feinunze auf den dreifachen Wert zu steigen?



https://www.stiftungrechnen.de/wp-content/uploads/2021/03/13-05-29_Ergebnisbericht-Studie-Buergerkompetenz-Rechnen.pdf – Seite 20

https://www.faz.net/aktuell/finanzen/devisen-rohstoffe/edelmetalle-goldpreis-in-der-finanzkrise-verdoppelt-12001908.html

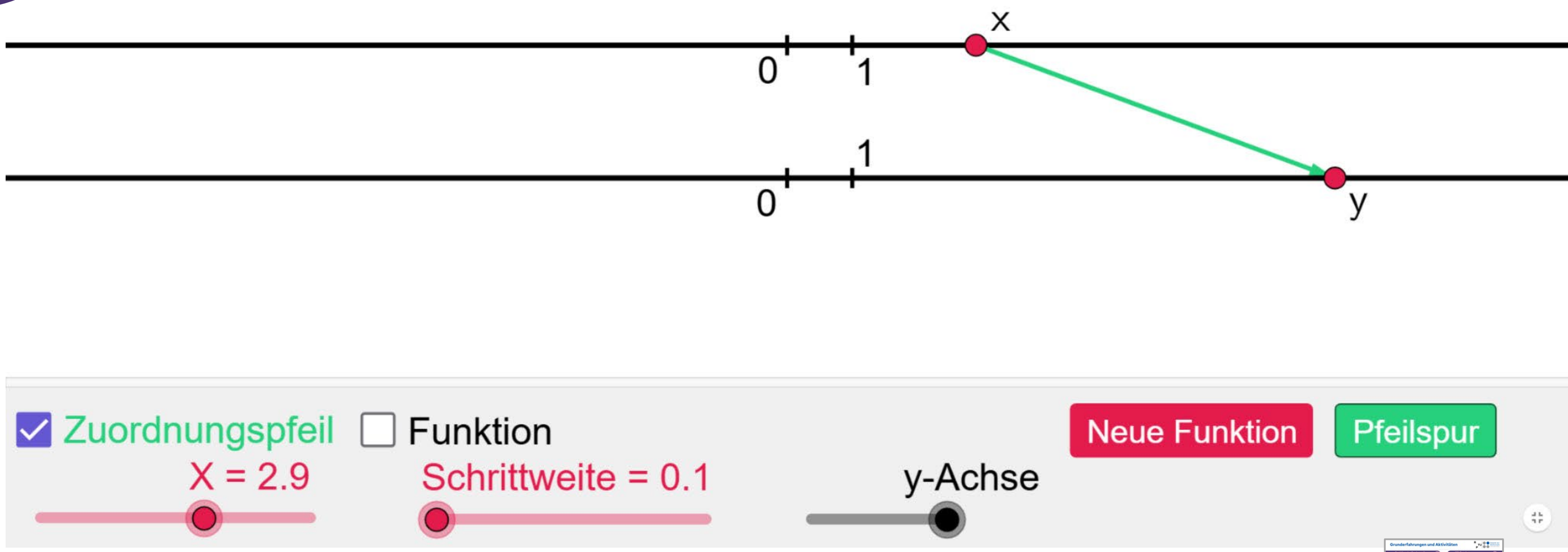
3j

Dynagraph (9/10)

Dynagraph und Funktionsgraph

Aufgabe
Finde den Funktionsterm zur dargestellten Zuordnung.

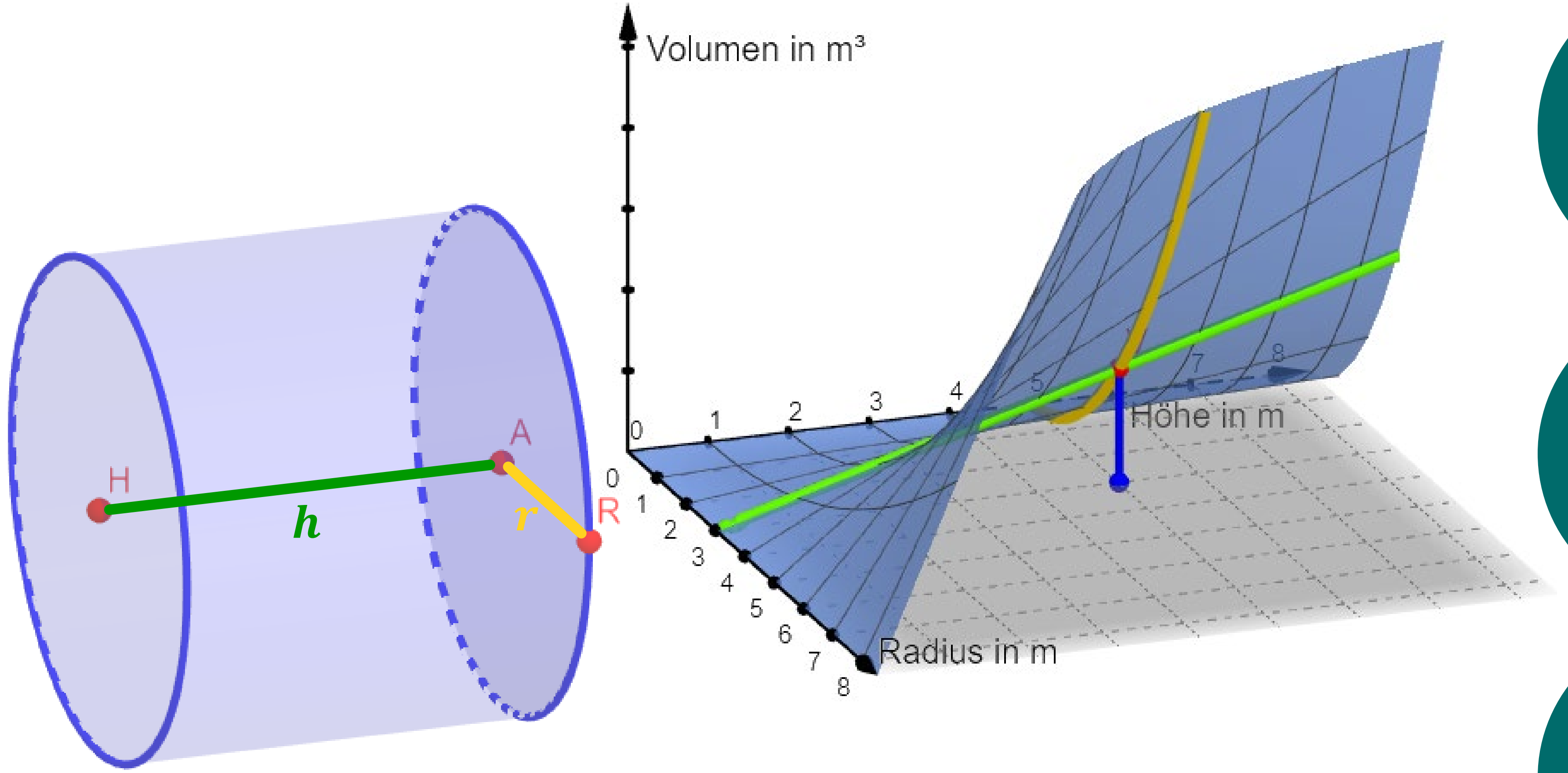
Grundvorstellung
Kovariation



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/gqhwaxmc

3k Funktionen mehrerer Veränderlicher (10)

Ganz alltäglich:
Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolume

$V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

Funktion zweier Veränderlicher

$V_{Zylinder}(r, h) = r^2\pi \cdot h$

Parameterfunktionen / Funktionenscharen

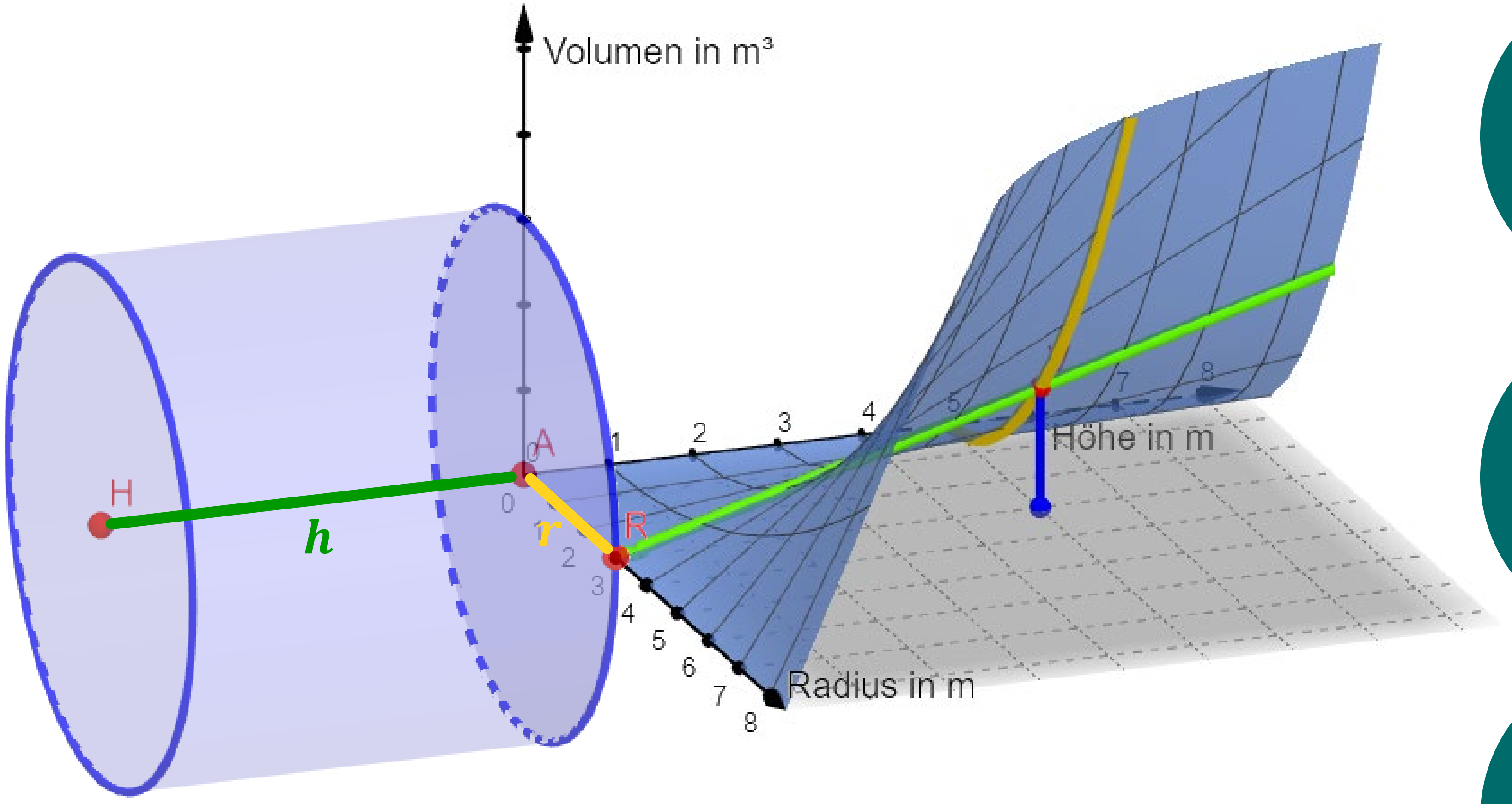
$V_r(h) = (r^2\pi) \cdot h$

$V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$

 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/pbsqwwjh

Ganz alltäglich:
Funktionen mehrerer Veränderlicher

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Zylindervolume

$V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

Funktion zweier Veränderlicher

$V_{Zylinder}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{r}^2\pi \cdot \boldsymbol{h}$

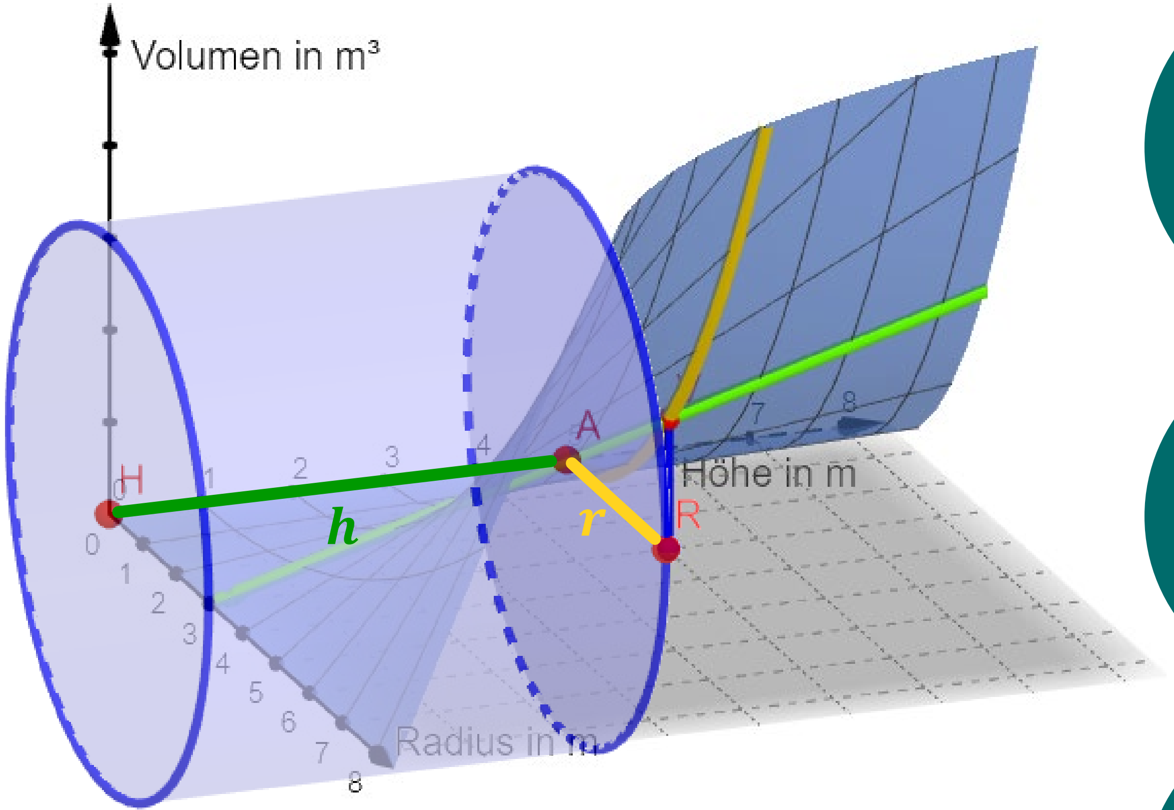
Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$V_r(\boldsymbol{h}) = (r^2\pi) \cdot \boldsymbol{h}$

$V_h(\boldsymbol{r}) = (\pi h) \cdot \boldsymbol{r}^2$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/pbsqwwjh

Ganz alltäglich:
Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolume

$V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

Funktion zweier Veränderlicher

$V_{Zylinder}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{r}^2\pi \cdot \boldsymbol{h}$

Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$V_r(\boldsymbol{h}) = (r^2\pi) \cdot \boldsymbol{h}$

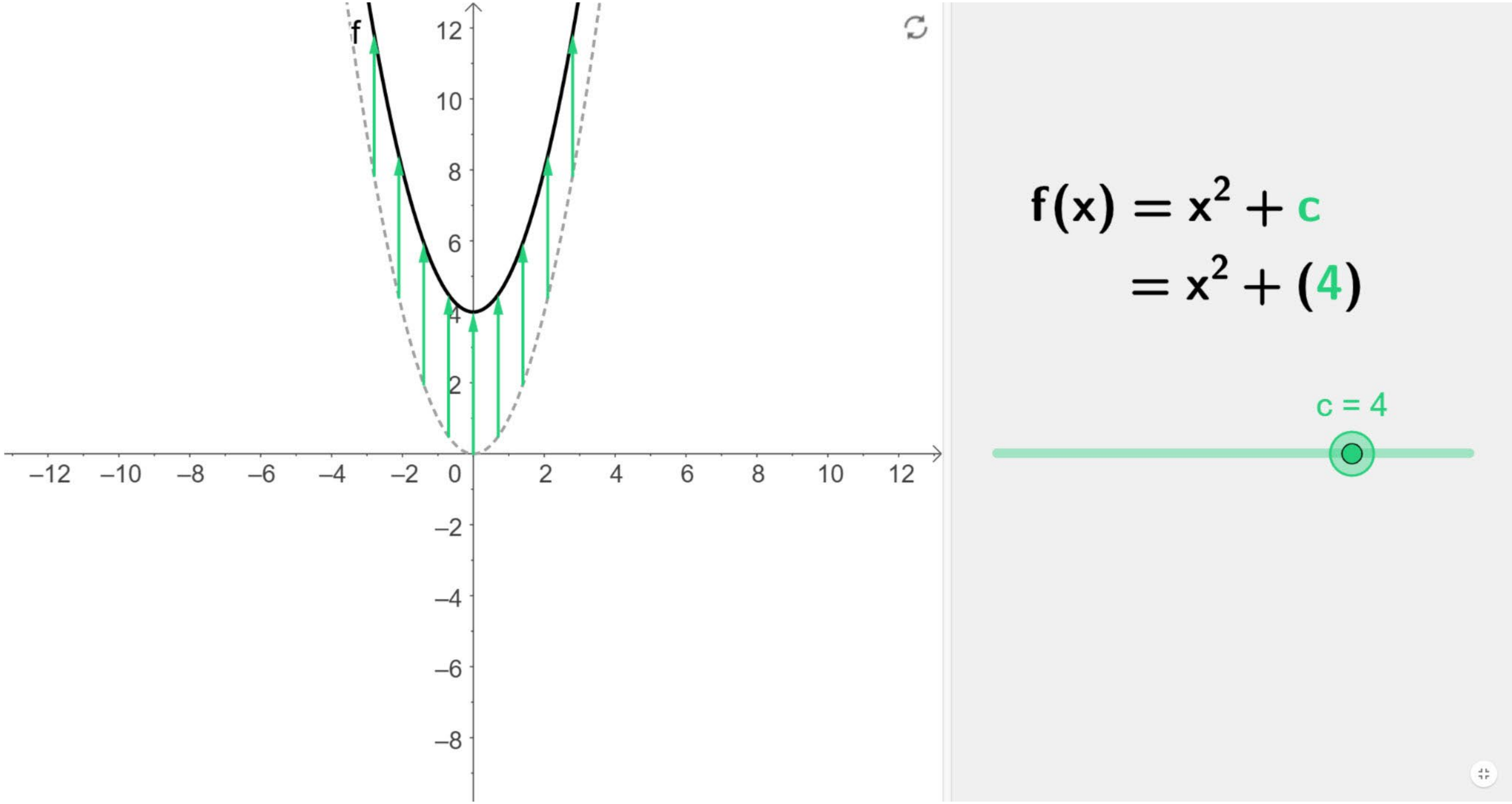
$V_h(\boldsymbol{r}) = (\pi h) \cdot \boldsymbol{r}^2$

 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/pbsqwwjh

3 | Parameter und Funktionsgraphen (9-11)

Parameter und Funktionsgraph: $x^2 + c$

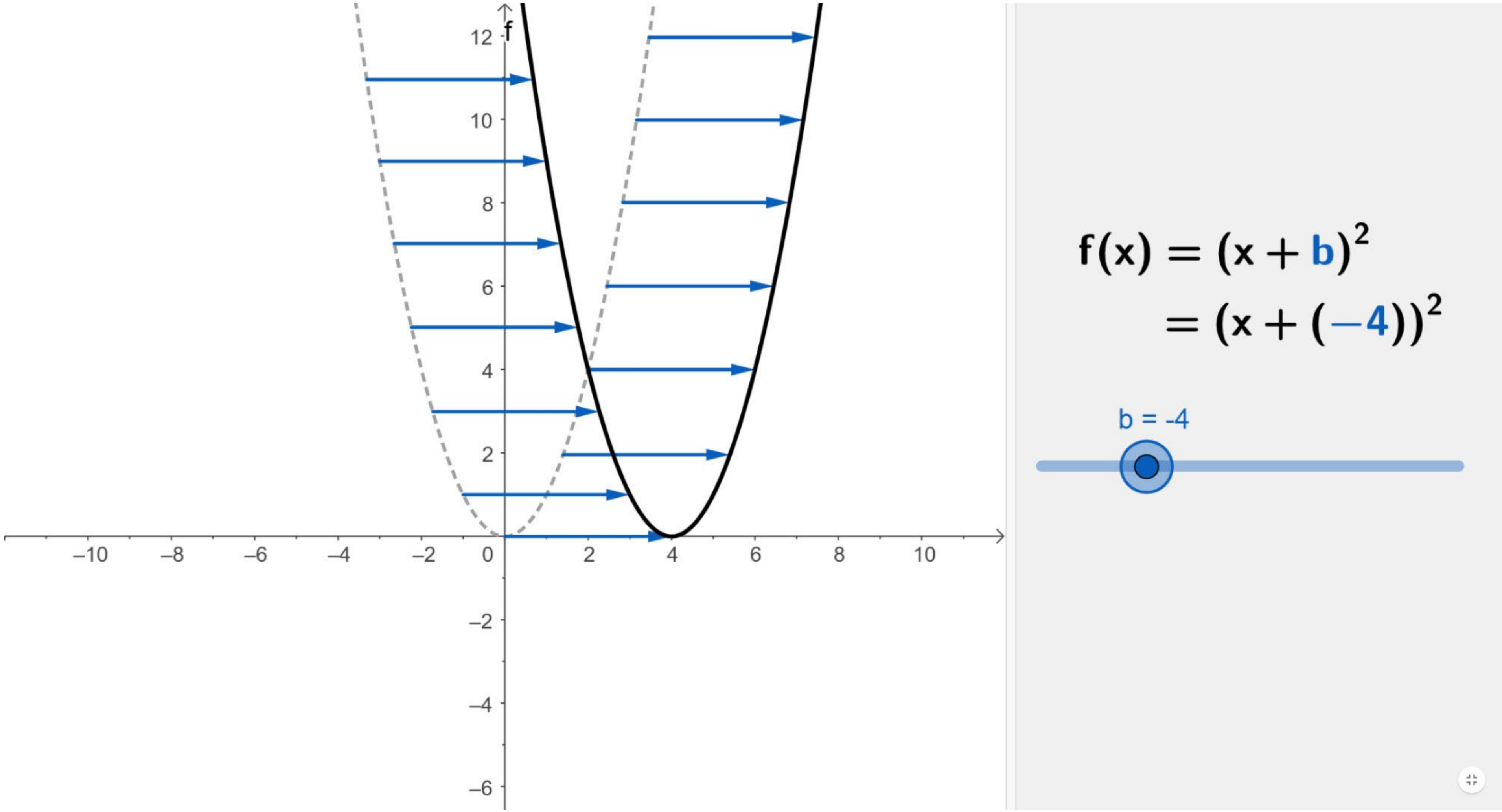
Aufgabe
Welche Auswirkung hat die Variation des Parameters c im Funktionsterm $f(x) = x^2 + c$ auf den Graph der Funktion f?



 https://www.geogebra.org/m/shmjjv3x

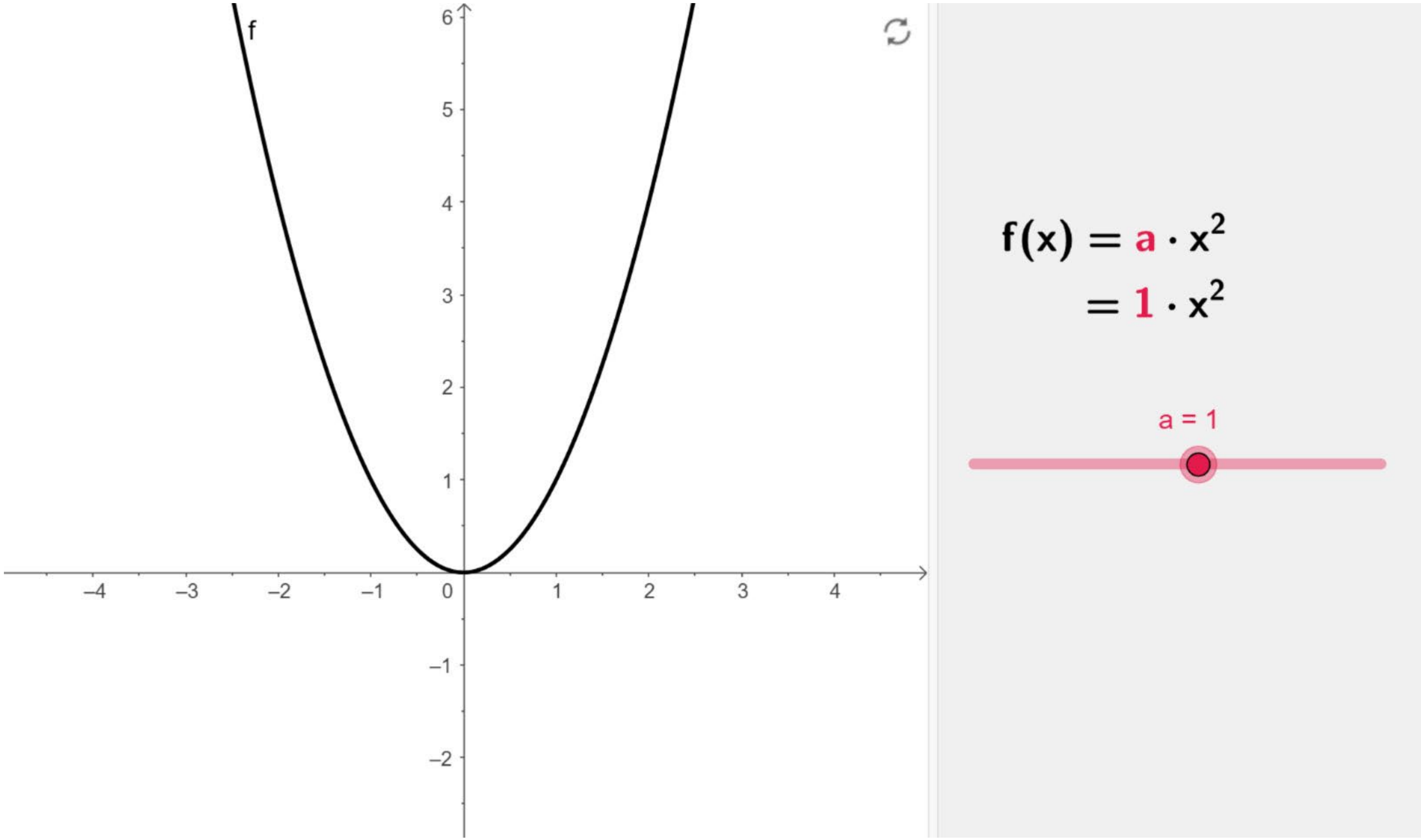
Parameter und Funktionsgraph: $(x + b)^2$

Aufgabe
Welche Auswirkung hat die Variation des Parameters b im Funktionsterm $f(x) = (x + b)^2$ auf den Graph der Funktion f?



Parameter und Funktionsgraph: $a \cdot x^2$

Aufgabe
Welche Auswirkung hat die Variation des Parameters a im Funktionsterm $f(x) = a \cdot x^2$ auf den Graph der Funktion f?

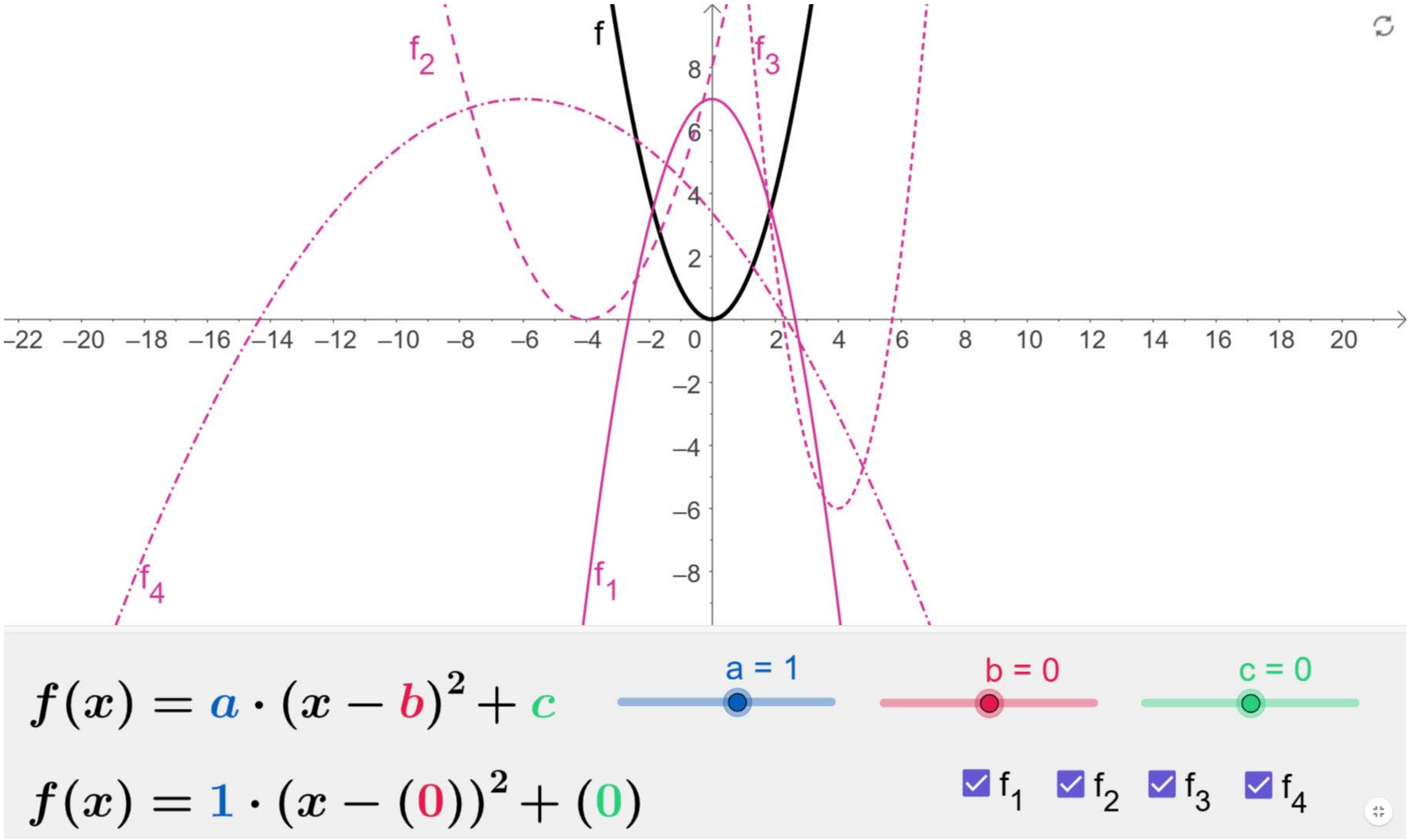


 https://www.geogebra.org/m/uhmqrkyc

Präsenzübung

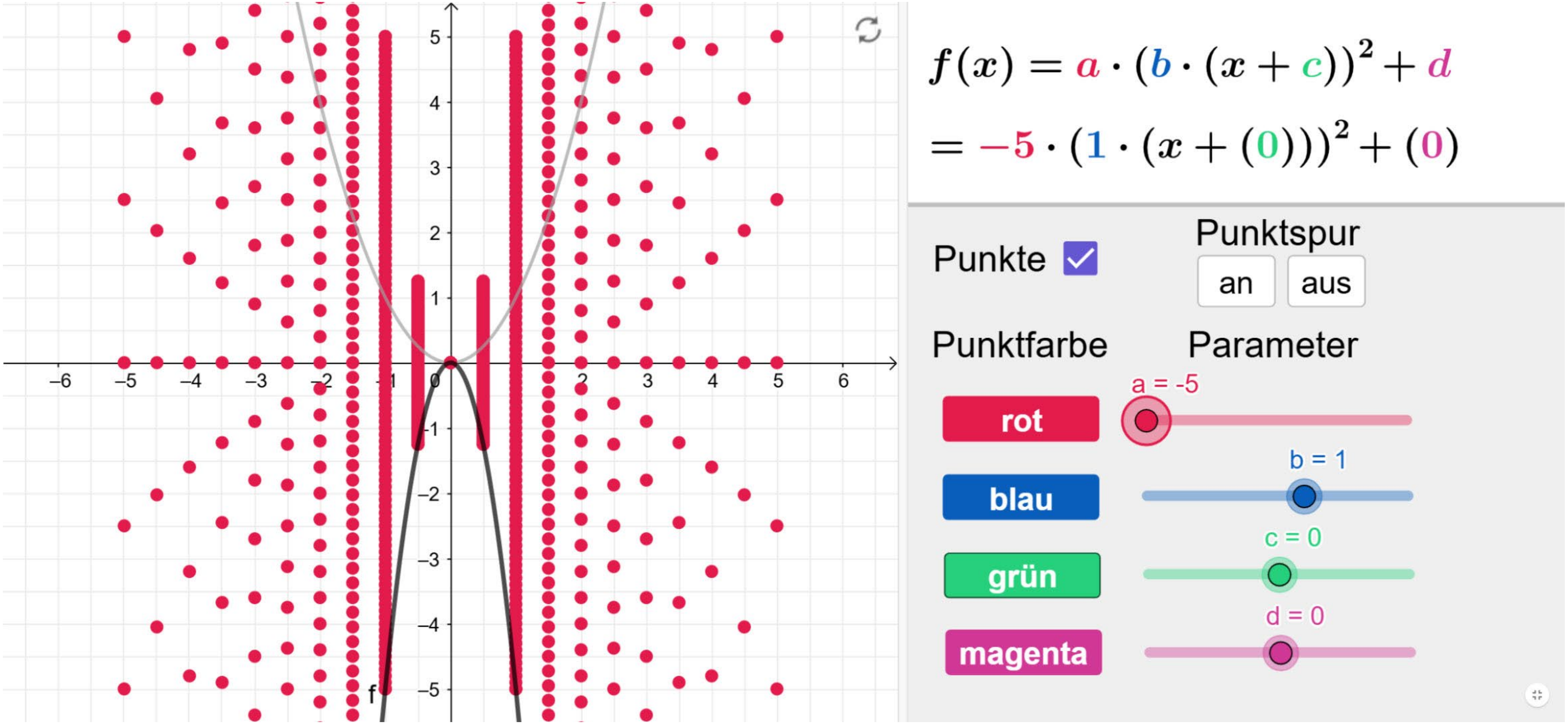
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Aufgabe
Finden Sie die Funktionsterme zu den dargestellten Funktionsgraphen der Funktion f.



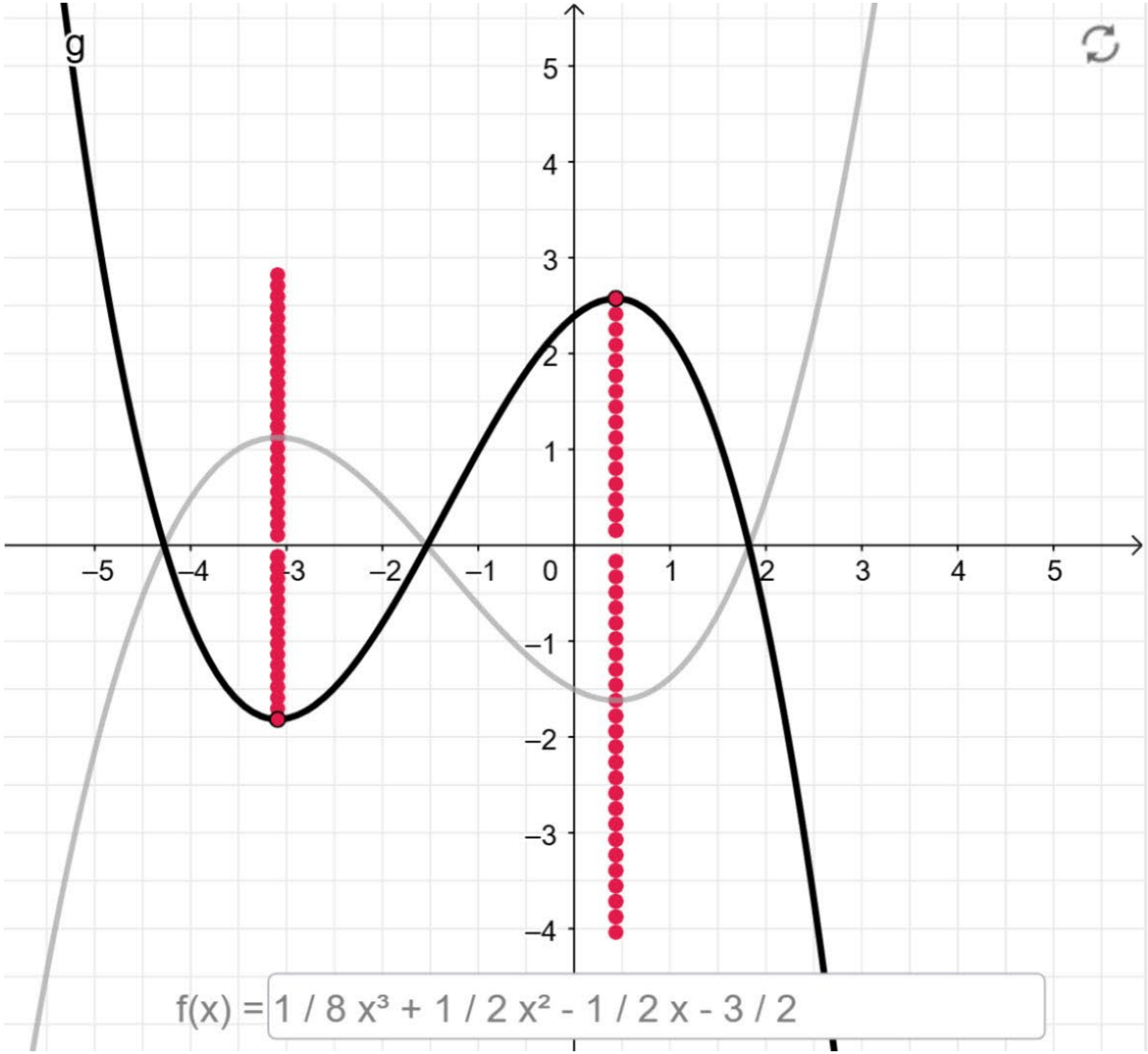
RPTU

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion



 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9. https://www.geogebra.org/m/jp4t7u6k

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein



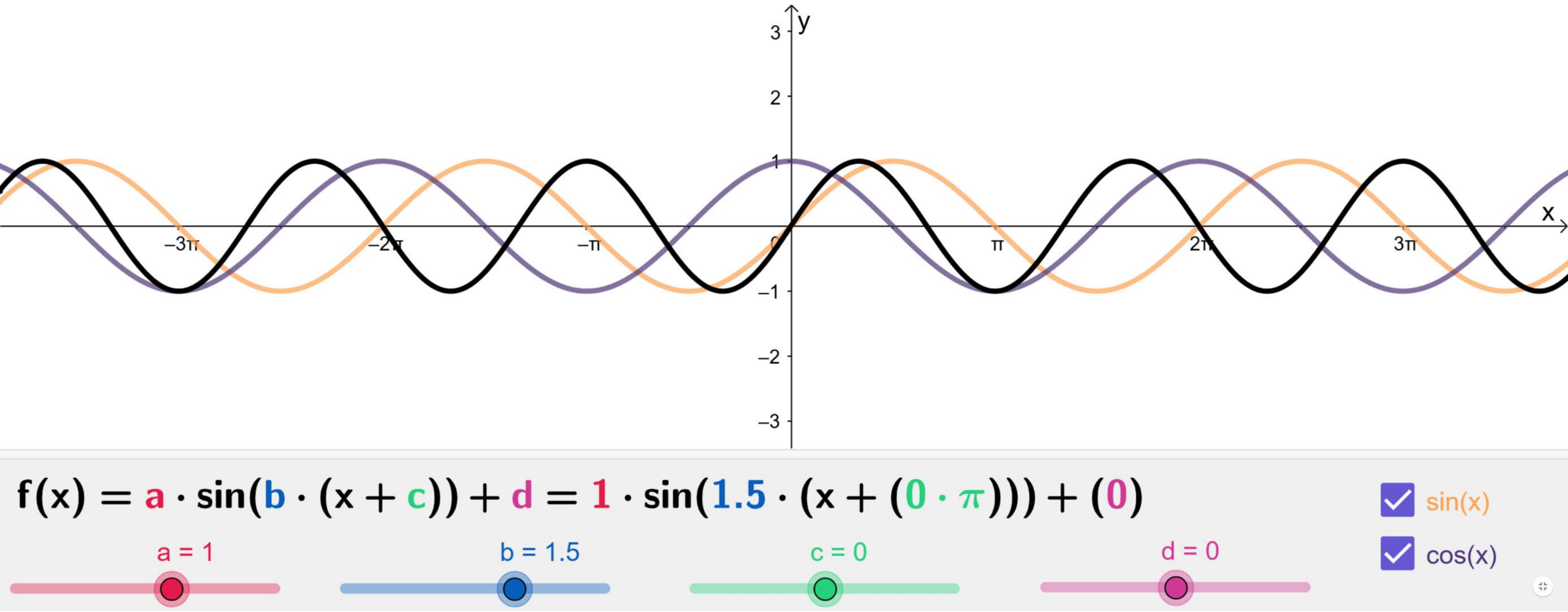
$$g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$$

$$= -1.6 \cdot f(1 \cdot (x + (0))) + (0)$$

Punktfarbe	Parameter
rot	a = -1.6
blau	b = 1
grün	c = 0
magenta	d = 0

 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9. https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Sinusfunktion mit Parametern



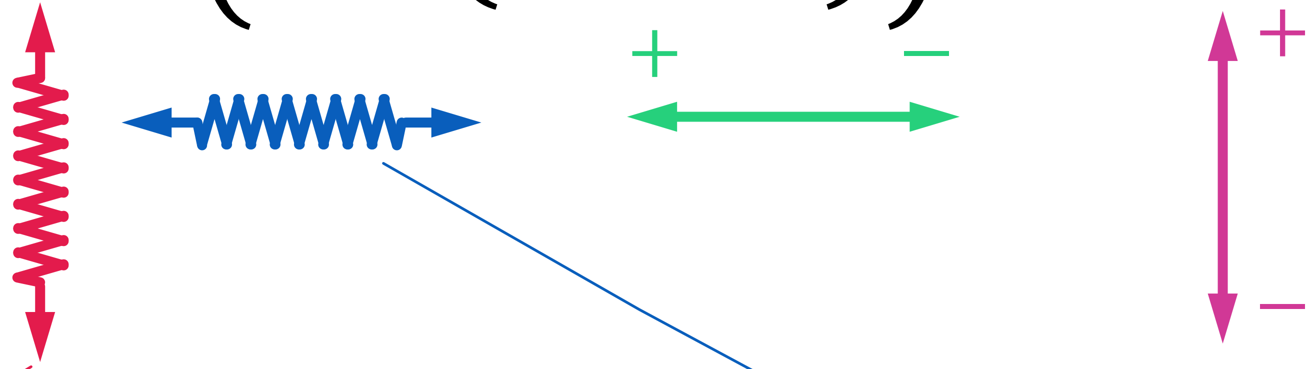
 https://www.geogebra.org/m/auhfzmky

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$f(x) = x^2$

$$g(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c)\right)^2 + d$$



Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein

$$g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x + c)\big) + d$$

Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

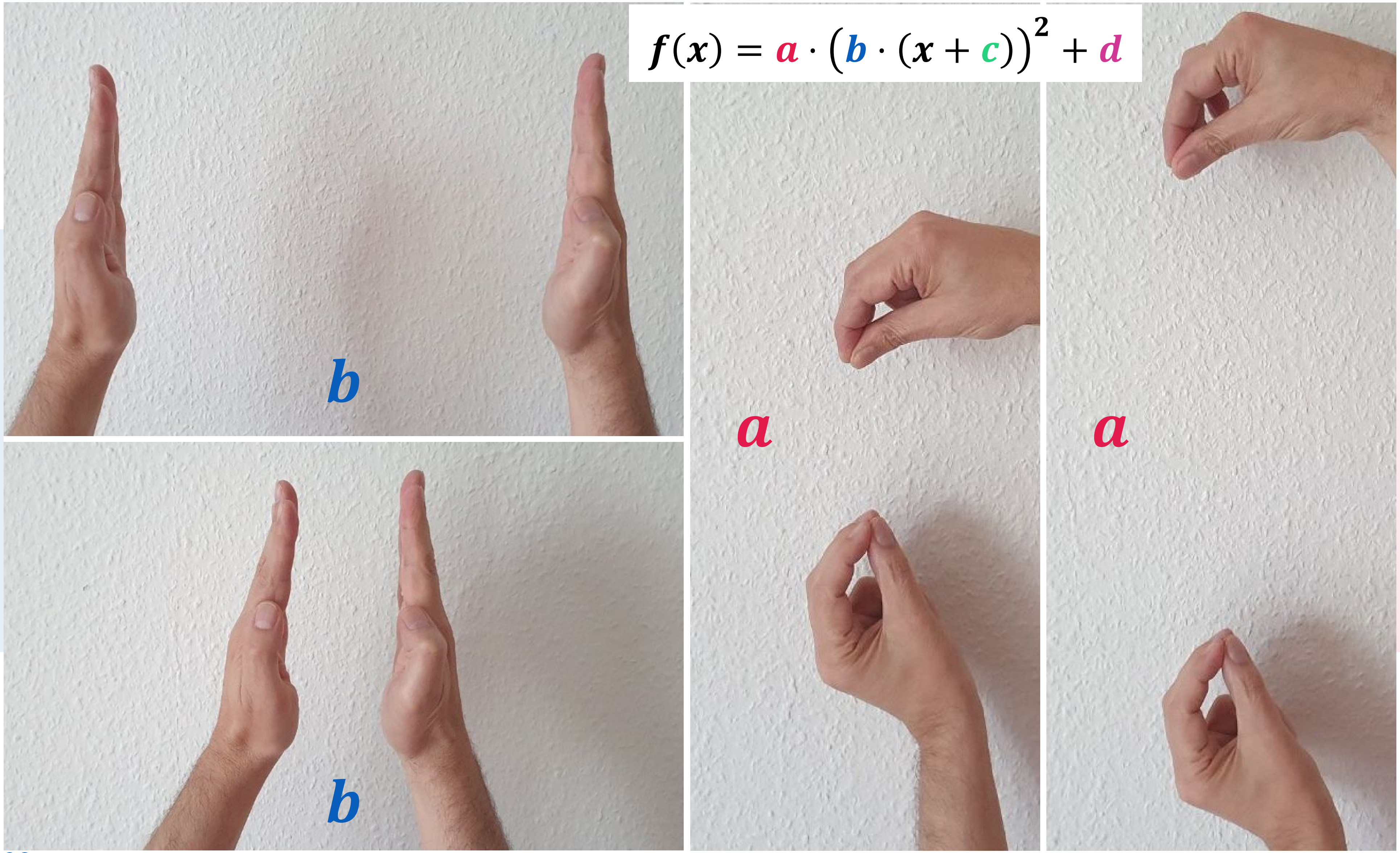
https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Passende Sprechweisen und Handbewegungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

$$f(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c)\right)^2 + d$$

Parameter
b
Streckung
$(0 < |b| < 1)$
bzw.
Stauchung
$(|b| > 1)$
in
x-Richtung



Parameter
a
Streckung
$(|a| > 1)$
bzw.
Stauchung
$(0 < |a| < 1)$
in
y-Richtung

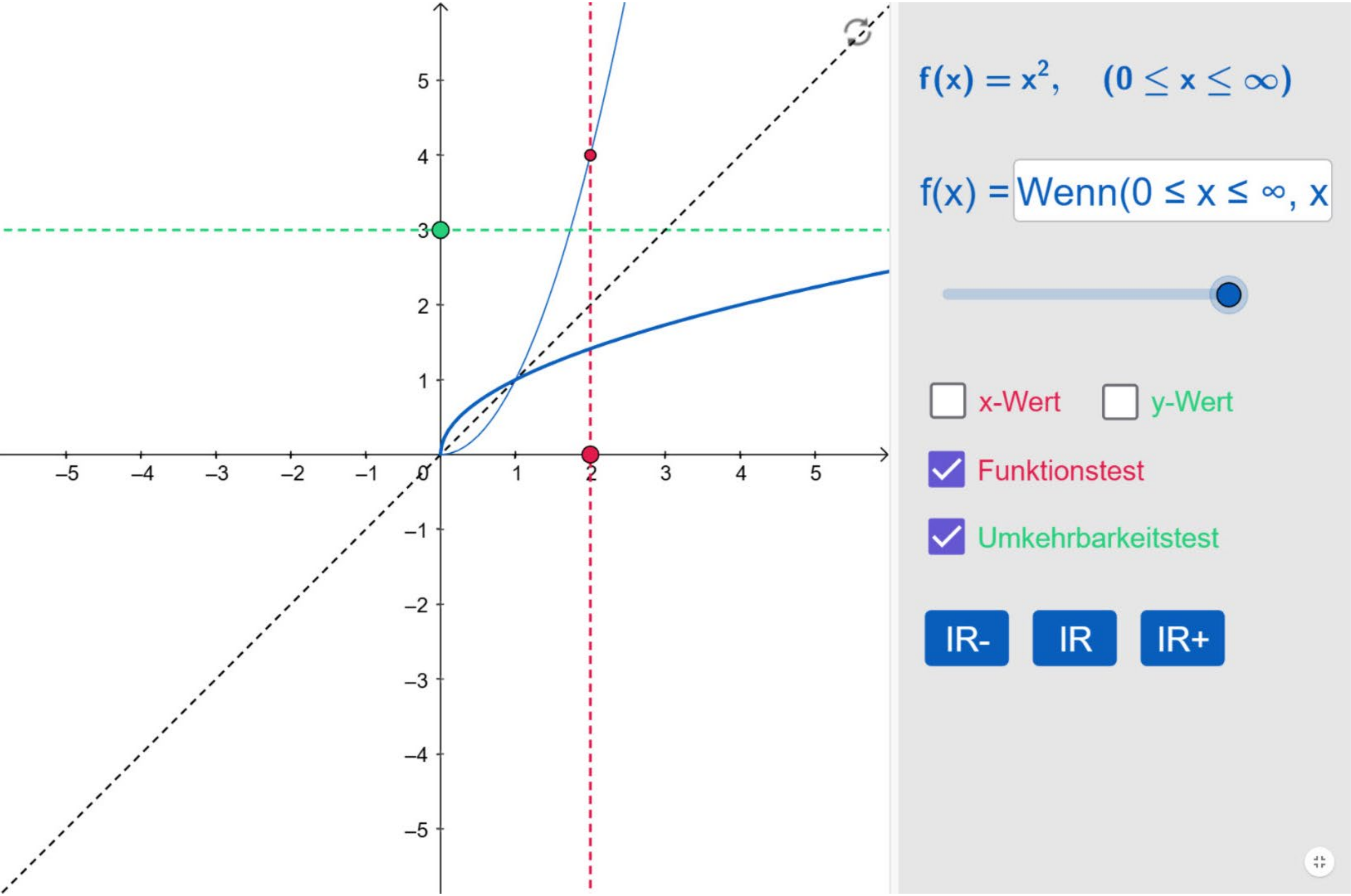
Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

RPTU

3m Umkehrfunktionen (9-11)

Umkehrfunktion?!

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Schritte zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1}, wenn die Funktion f umkehrbar ist.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$.

1. Schritt: Funktionsgleichung nach x auflösen

$$y = x^2 \;|\sqrt{}$$

$$\sqrt{y} = |x| \overset{x\geq 0}{=} x$$

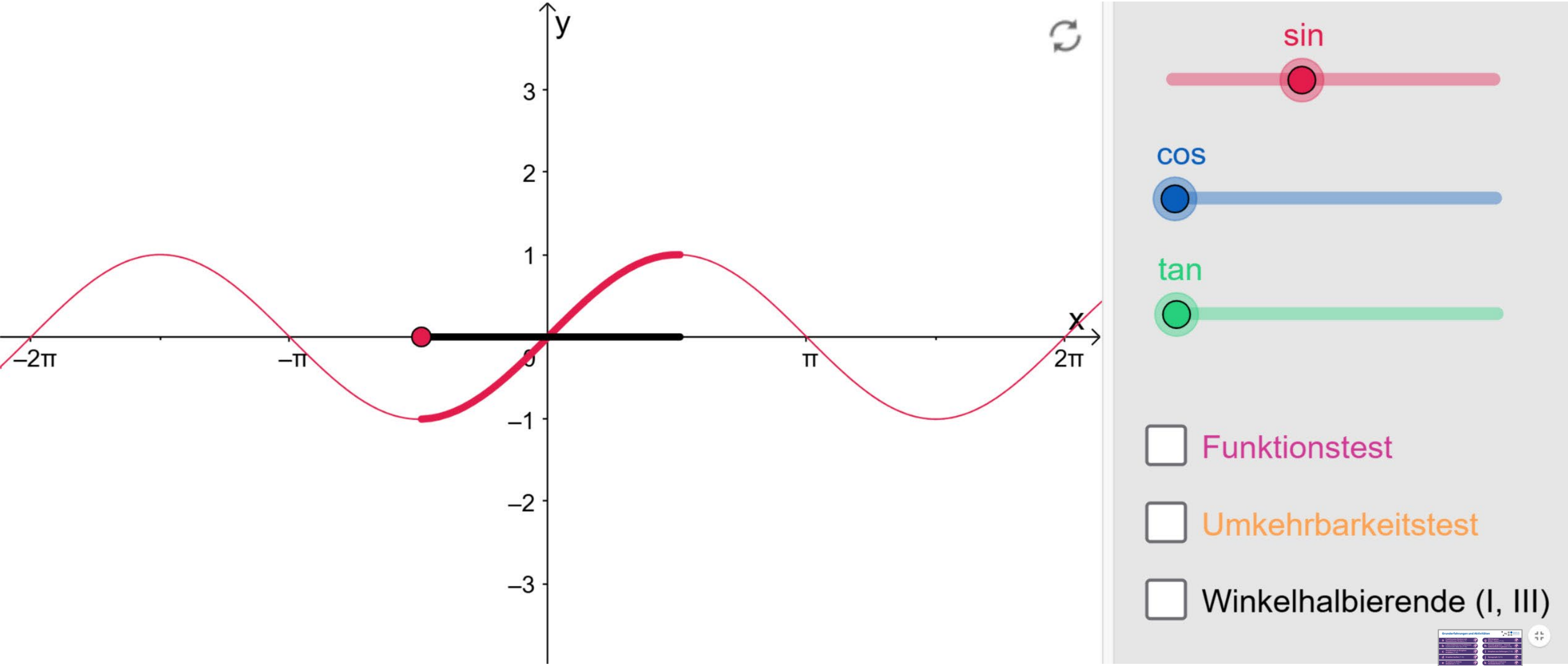
$$x = \sqrt{y}$$

2. Schritt: x und y vertauschen

$$y = \sqrt{x}$$

Roth, J. (2017). Zum y-Wert den x-Wert finden – Trigonometrische Funktionen umkehren. *Mathematik lehren 204*, 33-35
https://www.geogebra.org/m/zDX4NKR2

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



Roth, J. (2017). Zum y-Wert den x-Wert finden – Trigonometrische Funktionen umkehren. Mathematik lehren, 204, S. 33-35.
https://www.geogebra.org/m/YRqeU59w

Grundvorstellungen ↔ Verständnis

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentale Repräsentationen aufbauen

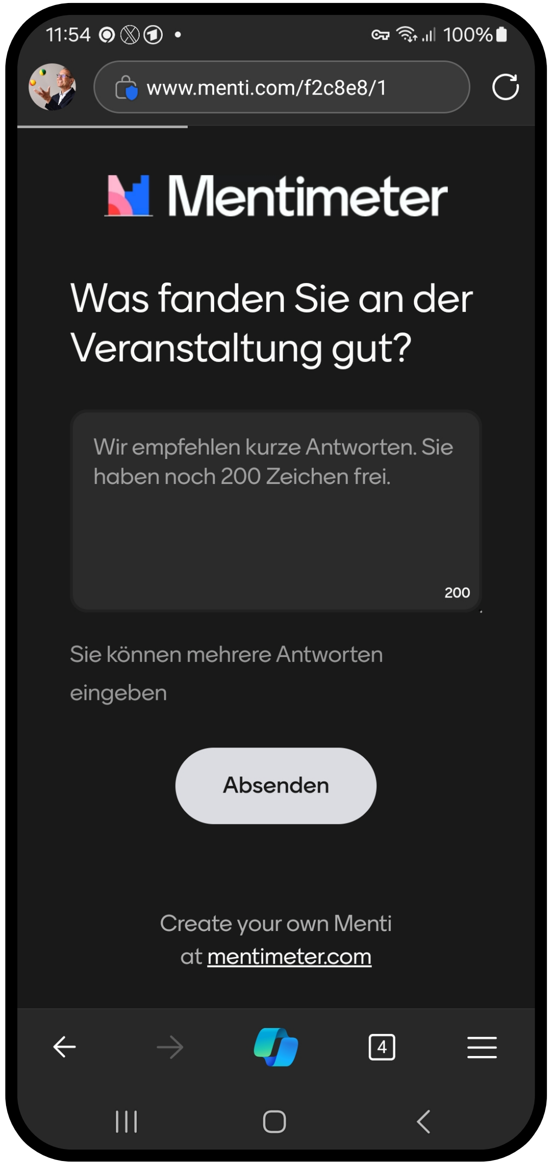
- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4-8

Feedback zur Veranstaltung



Feedback zur Veranstaltung

- https://roth.tel/feedback

Fragen

(Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.)

- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)
- Was wünschen Sie sich für die Veranstaltung?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

Feedback

Hamburg

Feedback zur MINT-Tagung 2026

Diese Umfrage ist anonym. Vielen Dank für die Teilnahme.

1. Wie zufrieden waren Sie insgesamt mit der Tagung?

2. Welche Veranstaltung (Vortrag, Workshop) würden Sie weiterempfehlen?

https://t1p.de/8kqm5