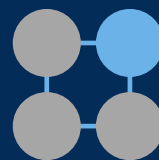


A photograph of a modern building's steel framework with several colorful bird sculptures perched on the beams. The birds are in shades of purple, red, yellow, and pink. In the background, a town with red-roofed buildings and church spires is visible under a blue sky with light clouds.

Grundvorstellungen zum Integral mit GeoGebra-Applets erarbeiten

Prof. Dr. Jürgen Roth

22.07.2026 Teachers' Day, DMV-Tagung 2026, Konstanz



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R

TU

P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Grundvorstellungen zum Integral

- 1 Grundvorstellungen zum Integral im Überblick ↪
- 2 Einstieg: Rekonstruieren ↪
- 3 Erweitern: Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts ↪
- 4 Vertiefen: Kumulieren ↪
- 5 Ergänzen: Mitteln ↪

dms.nuw.rptu.de

RPTU



GeoGebra-Buch
MaTeGnu Modul 2
<https://mategnu.de/m/l2>

Grundvorstellungen zum Integral

- 1 **Grundvorstellungen zum Integral im Überblick**
- 2 Einstieg: Rekonstruieren
- 3 Erweitern: Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts
- 4 Vertiefen: Kumulieren
- 5 Ergänzen: Mitteln

dms.nuw.rptu.de

RPTU



GeoGebra-Buch
MaTeGnu Modul 2
<https://mategnu.de/m/l2>

Verständnisanker

Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt.



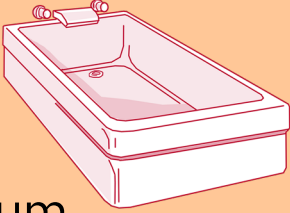
Eine **Situation** eignet sich als Verständnisanker, wenn

- sie leicht durchschaut werden kann und
- alle für ein Verständnis wesentlichen Strukturelemente vorkommen und gedeutet werden können.

Ziel des Aufbaus eines Verständnisankers

Lernende können in neuen Situationen, in denen der mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

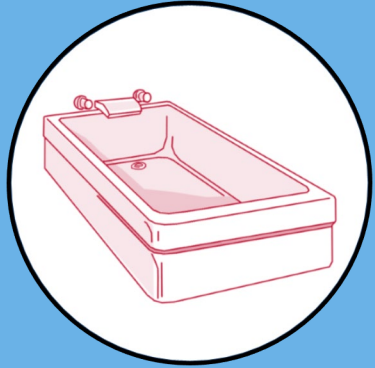
Beispiel



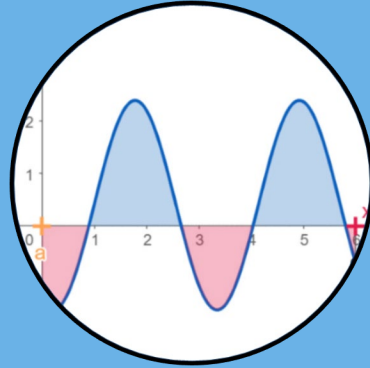
- Ein **Verständnisanker** für Grundvorstellungen zum Integral ist die Frage nach der **Füllmenge einer Wanne bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit**.
- Anhand der Waschbeckensituation können die Grundvorstellungen „Integral als Rekonstruieren des Gesamteffekts“ und „Integral als orientierter Flächeninhalt“ inhaltlich durchschaut werden.

<https://www.geogebra.org/m/dezx3qzv> 

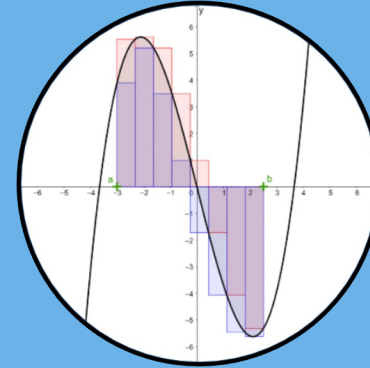
Grundvorstellungen zum Integralbegriff



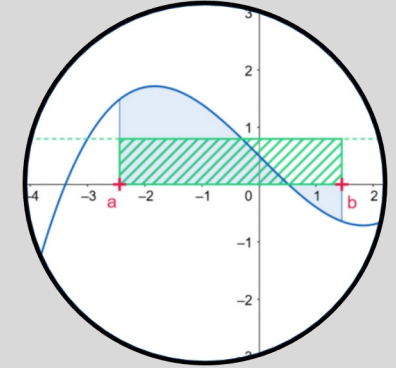
Rekonstruieren



**Bestimmen eines
orientierten
Flächeninhalts**



Kumulieren

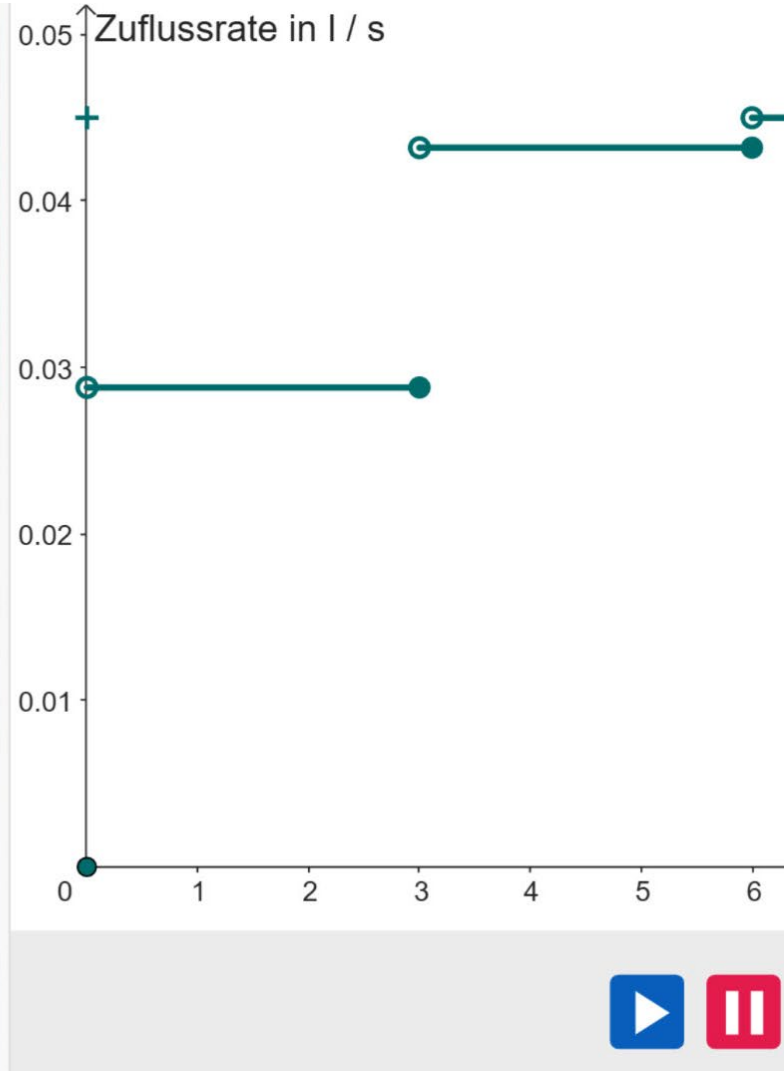
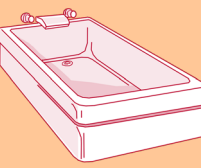


Mitteln

Grundvorstellung: Integrieren als Rekonstruieren

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

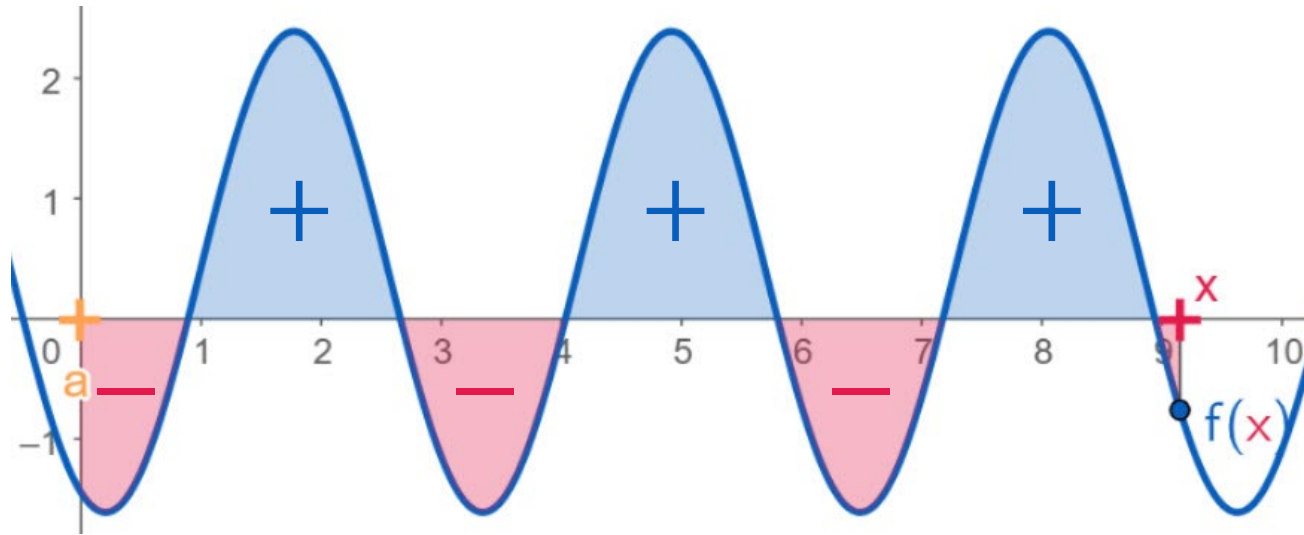


Grundvorstellung

Integrieren als Rekonstruieren

Ein bestimmtes Integral rekonstruiert die Gesamtänderung einer Größe (den Gesamteffekt der Änderung) aus ihrer Änderungsrate.

Grundvorstellung: Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



Grundvorstellung Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts

Ein bestimmtes Integral ist eine Bilanz von Flächeninhalten.

Orientierter Flächeninhalt

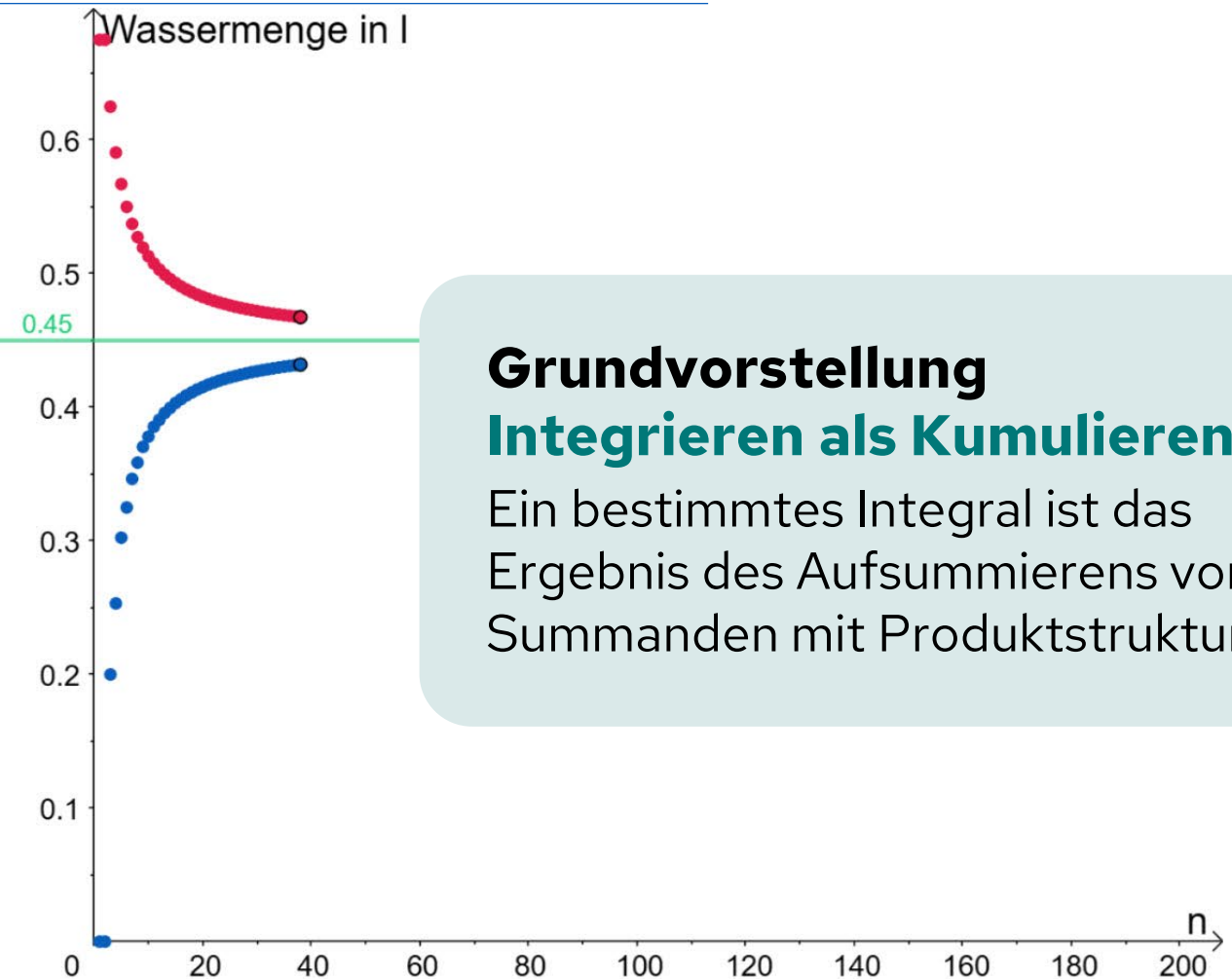
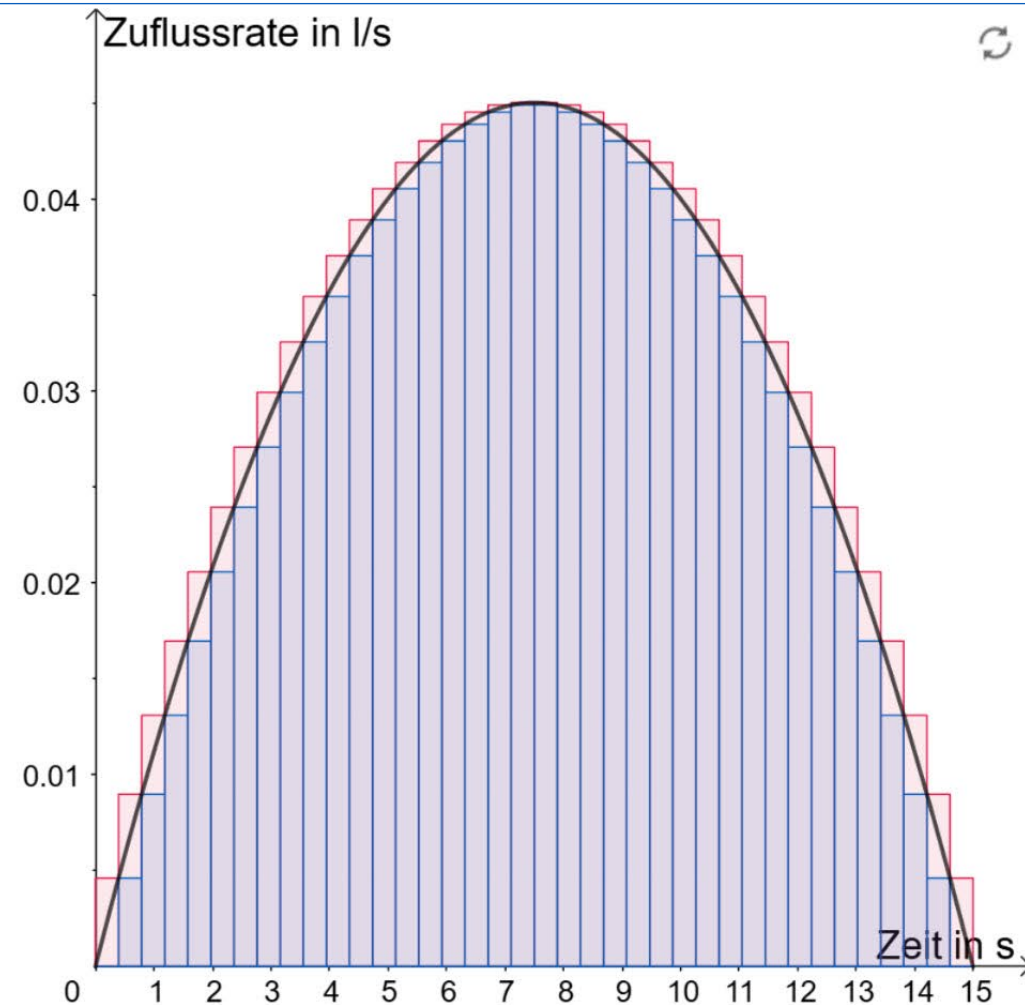
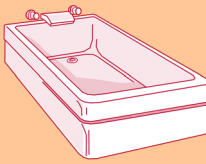
$$I_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

= (Summe der Inhalte aller oberhalb der x -Achse liegenden Flächenstücke zwischen a und x)
– (Summe der Inhalte aller unterhalb der x -Achse liegenden Flächenstücke zwischen a und x)

Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter
Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Grundvorstellung

Integrieren als Kumulieren

Ein bestimmtes Integral ist das
Ergebnis des Aufsummierens von
Summanden mit Produktstruktur.

Anzahl n der Teilintervalle

$n = 38$

Start

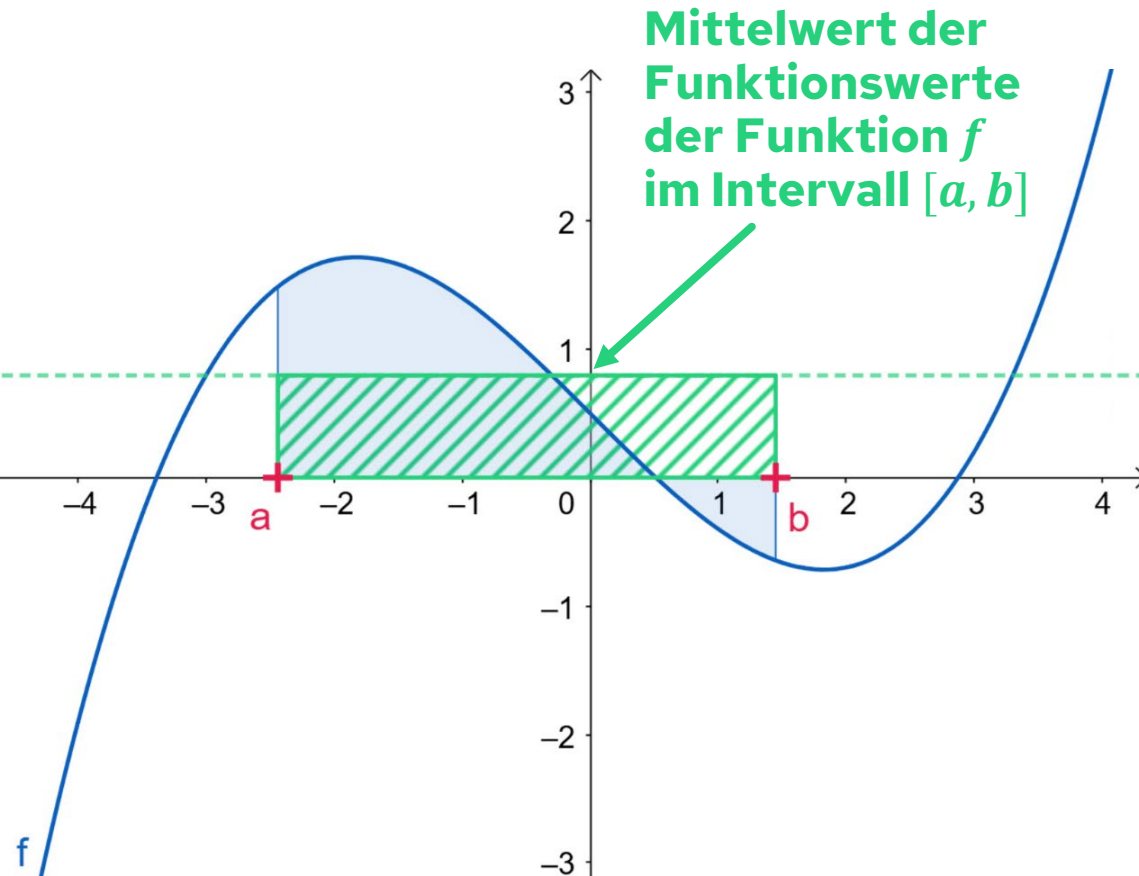
Stopp

Reset

☒ Werte

Obersumme = 0.4675

Untersumme = 0.4319



Grundvorstellung Integrieren als Mitteln

Ein bestimmtes Integral mittelt die Funktionswerte der Integrandenfunktion im Integrationsintervall.

Mittlerer Funktionswert

- Mit dem mittleren Funktionswert $f(x_0)$ in einem Intervall $[a, b]$ kann der orientierte Flächeninhalt $I_a(b)$ unter dem Graph von f als (orientiertes) Rechteck realisiert werden.
- Damit gilt: $I_a(b) = (b - a) \cdot f(x_0)$
- Für den Mittelwert $f(x_0)$ folgt:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$

Grundvorstellungen zum Integral

- 1 Grundvorstellungen zum Integral im Überblick
- 2 Einstieg: Rekonstruieren**
- 3 Erweitern: Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts
- 4 Vertiefen: Kumulieren
- 5 Ergänzen: Mitteln

dms.nuw.rptu.de

RPTU



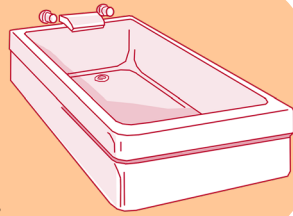
GeoGebra-Buch
MaTeGnu Modul 2
<https://mategnu.de/m/l2>

Grundvorstellung: Integrieren als Rekonstruieren

Vgl. GV „Ableitung als
lokale Änderungsrate“

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne
bei bekannter Zu- und
Abflussgeschwindigkeit.

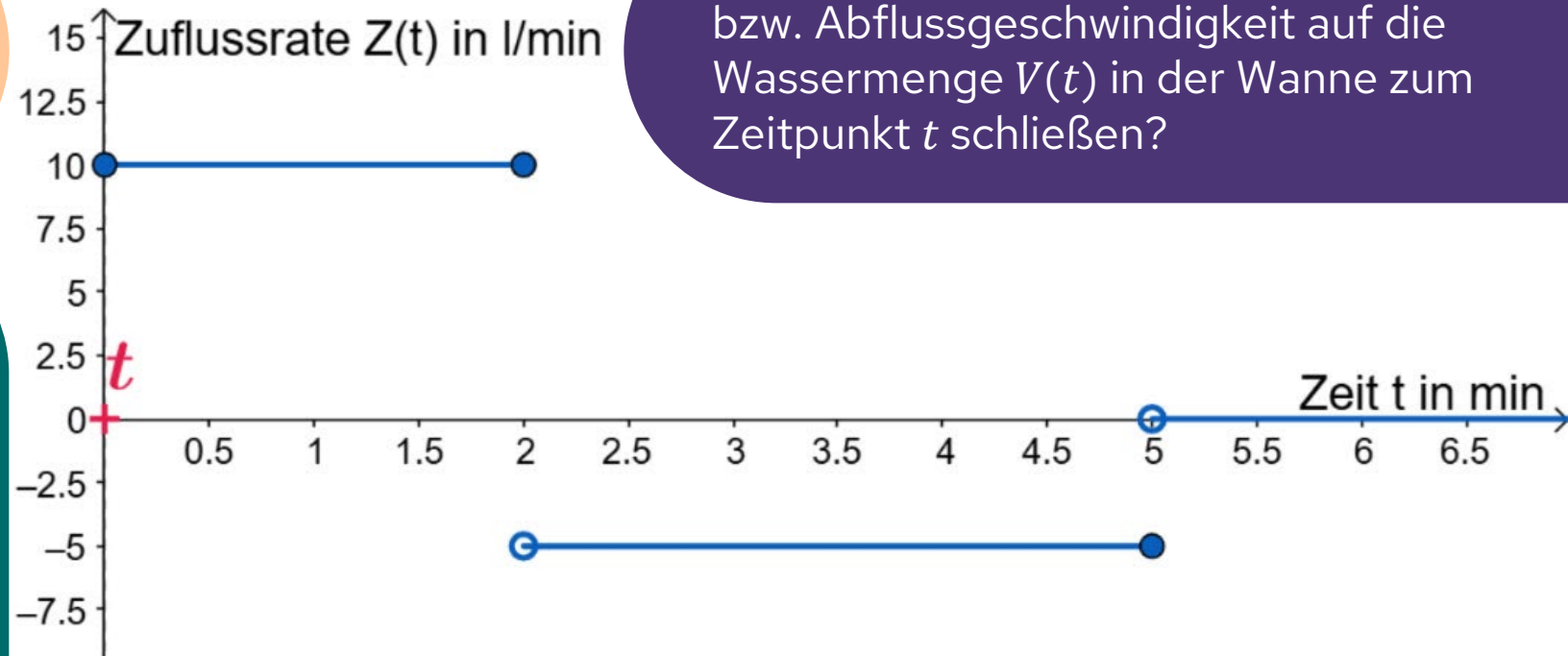


Situation

In eine leere Badewanne wird 2 Minuten lang Wasser mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit von 10 Litern pro Minute eingelassen.

Anschließend wird die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, aus dem das Wasser mit einer Abflussgeschwindigkeit von 5 Litern pro Minute abfließt.

Nach weiteren 3 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen.



Frage: Wie lässt sich aus der Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit auf die Wassermenge $V(t)$ in der Wanne zum Zeitpunkt t schließen?

Wassermenge die zwischen 0 min und 2 min **in** das Becken fließt:

$$10 \frac{l}{\min} \cdot (2 \min - 0 \min) \\ = 10 \frac{l}{\min} \cdot 2 \min = 20 l$$

Wassermenge die zwischen 2 min und 5 min **aus** dem Becken fließt:

$$-5 \frac{l}{\min} \cdot (5 \min - 2 \min) \\ = -5 \frac{l}{\min} \cdot 3 \min = -15 l$$

Grundvorstellung: Integrieren als Rekonstruieren

Zufluss-Phase: Wassermenge die zwischen 0 min und 2 min **in** die Wanne fließt:

$$10 \frac{l}{\text{min}} \cdot (2 \text{ min} - 0 \text{ min}) = 10 \frac{l}{\text{min}} \cdot 2 \text{ min} = 20 l$$

Allgemein gilt für die Wassermenge $V(t)$ in der Wanne zum Zeitpunkt t mit $0 \leq t \leq 2$: $V(t) = 10 \cdot t$

Abfluss-Phase: Wassermenge die zwischen 2 min und 5 min **aus** der Wanne fließt:

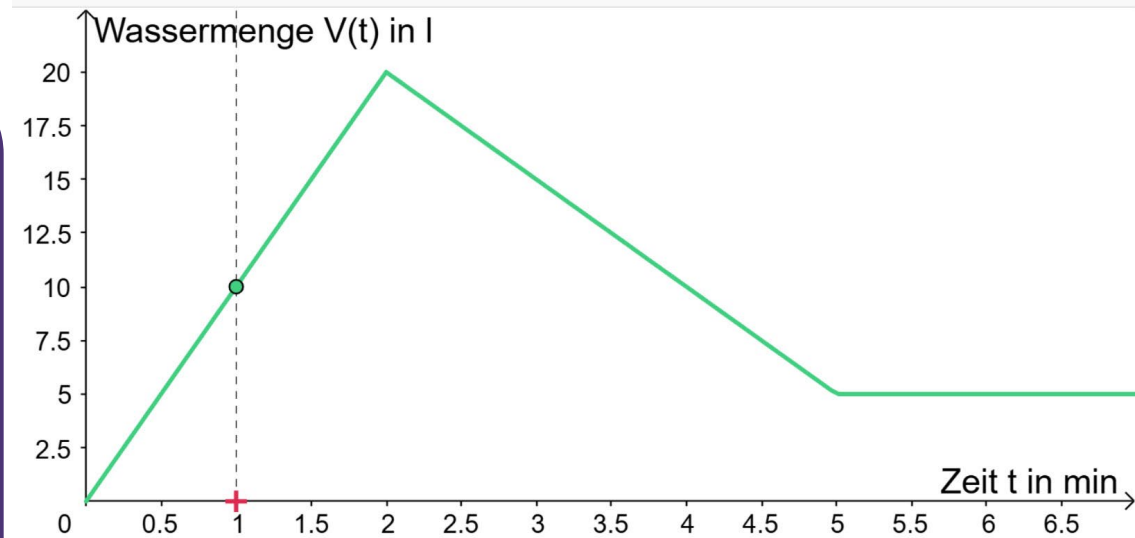
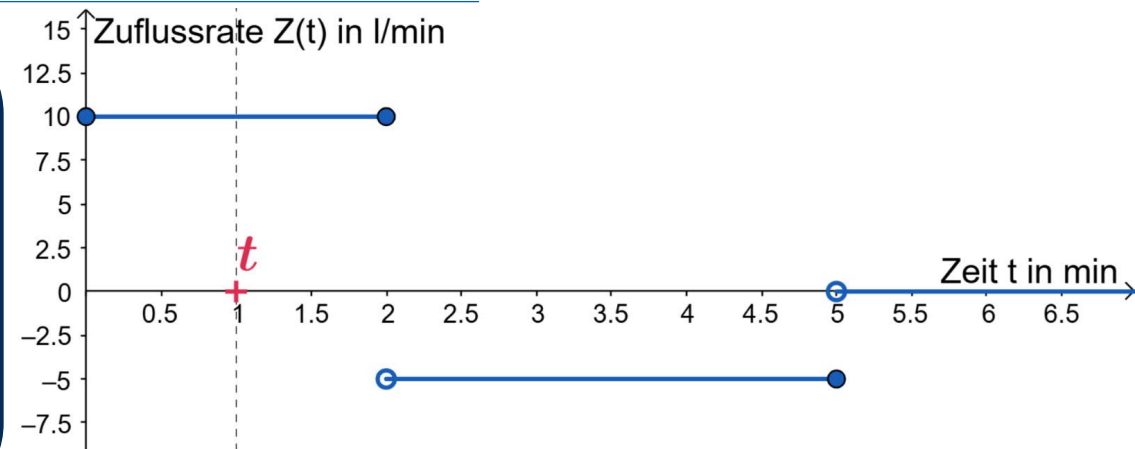
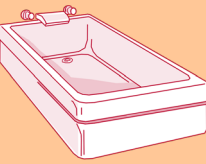
$$-5 \frac{l}{\text{min}} \cdot (5 \text{ min} - 2 \text{ min}) = -5 \frac{l}{\text{min}} \cdot 3 \text{ min} = -15 l$$

Nach 5 min sind also $20 - 5 \cdot (5 - 2) = 5$ Liter Wasser in der Wanne.

Allgemein gilt für die Wassermenge $V(t)$ in der Wanne zum Zeitpunkt t mit $2 < t \leq 5$: $V(t) = 10 - 5 \cdot (t - 2)$

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

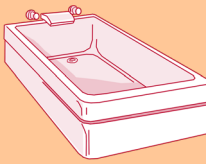


$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ 20 - 5 \cdot (t - 2) & \text{für } 2 < t \leq 5 \\ 5 & \text{für } t > 5 \end{cases}$$

Grundvorstellung: Integrieren als Rekonstruieren

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

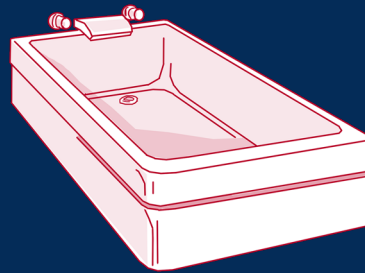


Rückblick

- Aus der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers wurde die Wassermenge $V(t)$ rekonstruiert.
- Die Zuflussgeschwindigkeit ist die (momentane) Änderungsrate der Wassermenge in der Wanne.
- Aus der Änderungsrate wurde die Funktion V wiederhergestellt. [wiederherstellen = integrieren (lat.)]

Vorteile des Badewannen-Beispiels

- Fokussiert auf die Grundvorstellung Integrieren als Rekonstruieren.
- Unterstützt die Grundvorstellung Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts.



Grundvorstellung

Integrieren als Rekonstruieren

Ein bestimmtes Integral rekonstruiert die Gesamtänderung einer Größe (den Gesamteffekt der Änderung) aus ihrer Änderungsrate.

Grundvorstellungen zum Integral

- 1 Grundvorstellungen zum Integral im Überblick
- 2 Einstieg: Rekonstruieren
- 3 Erweitern: Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts**
- 4 Vertiefen: Kumulieren
- 5 Ergänzen: Mitteln

dms.nuw.rptu.de

RPTU

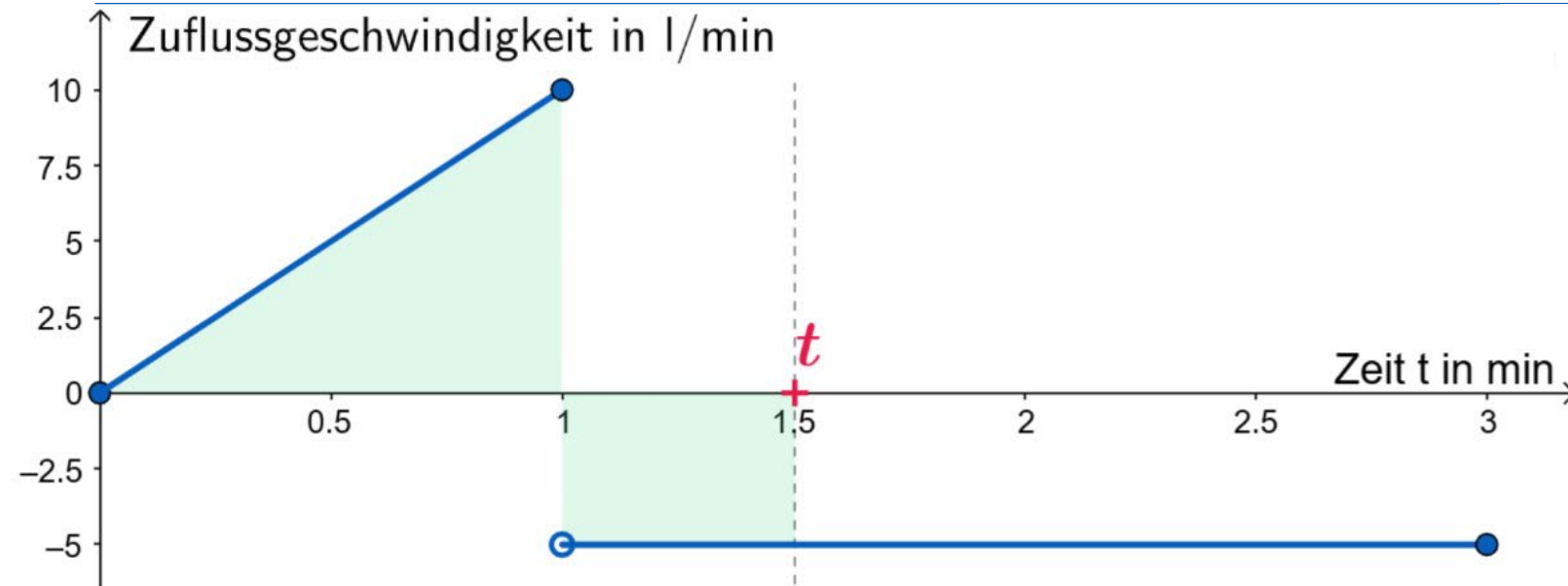
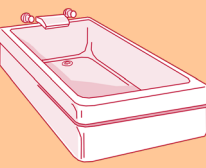


GeoGebra-Buch
MaTeGnu Modul 2
<https://mategnu.de/m/l2>

Grundvorstellung: Integral als orientierter Flächeninhalt

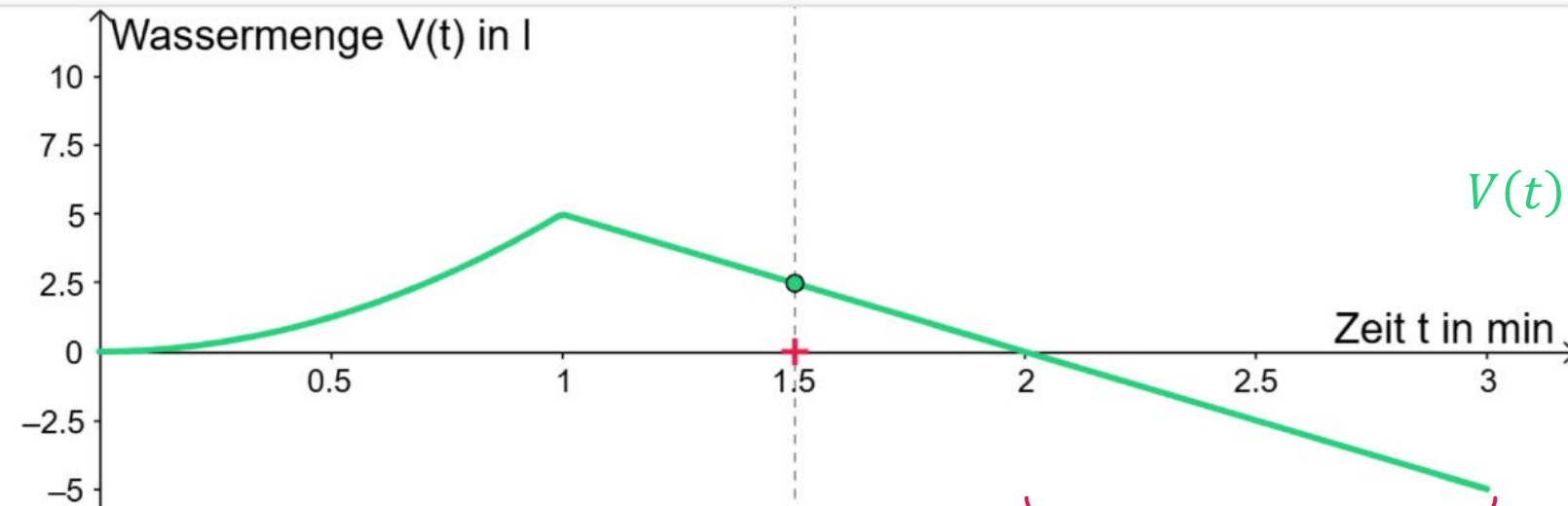
Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter
Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Die Produkte $\frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t$ und $5 \cdot (t - 1)$ können als **Flächeninhalte** eines Dreiecks bzw. eines Rechtecks gedeutet werden.

$V(t)$ kann als die Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte, also als **orientierter Flächeninhalt**, gedeutet werden.



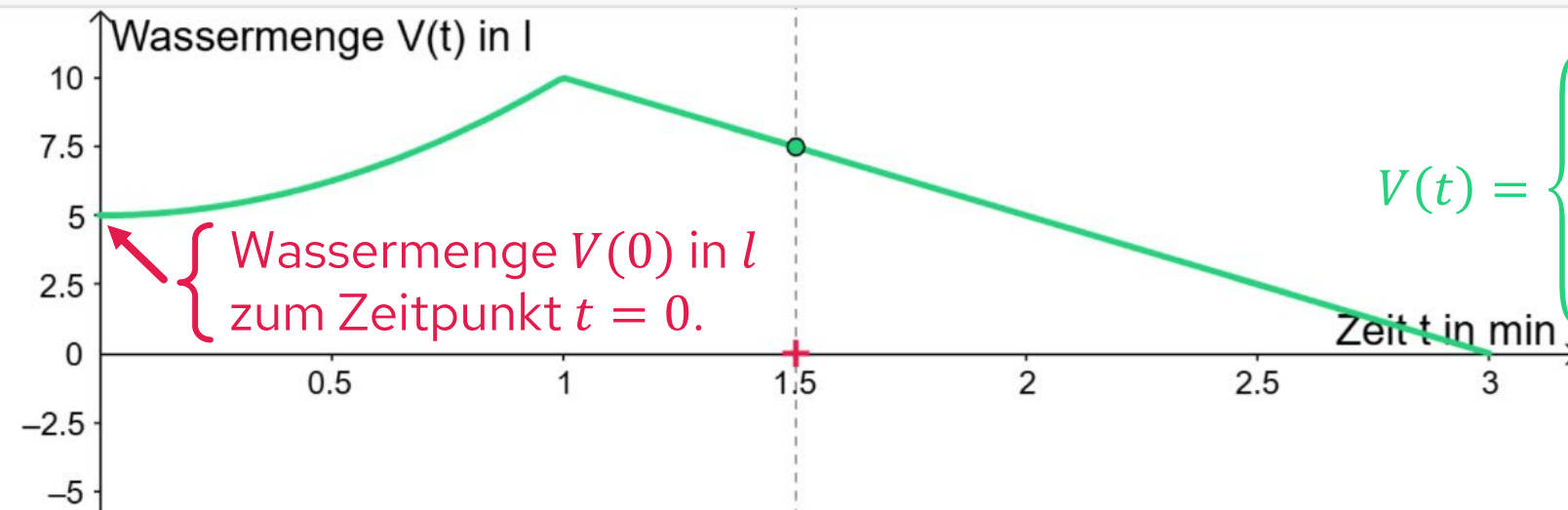
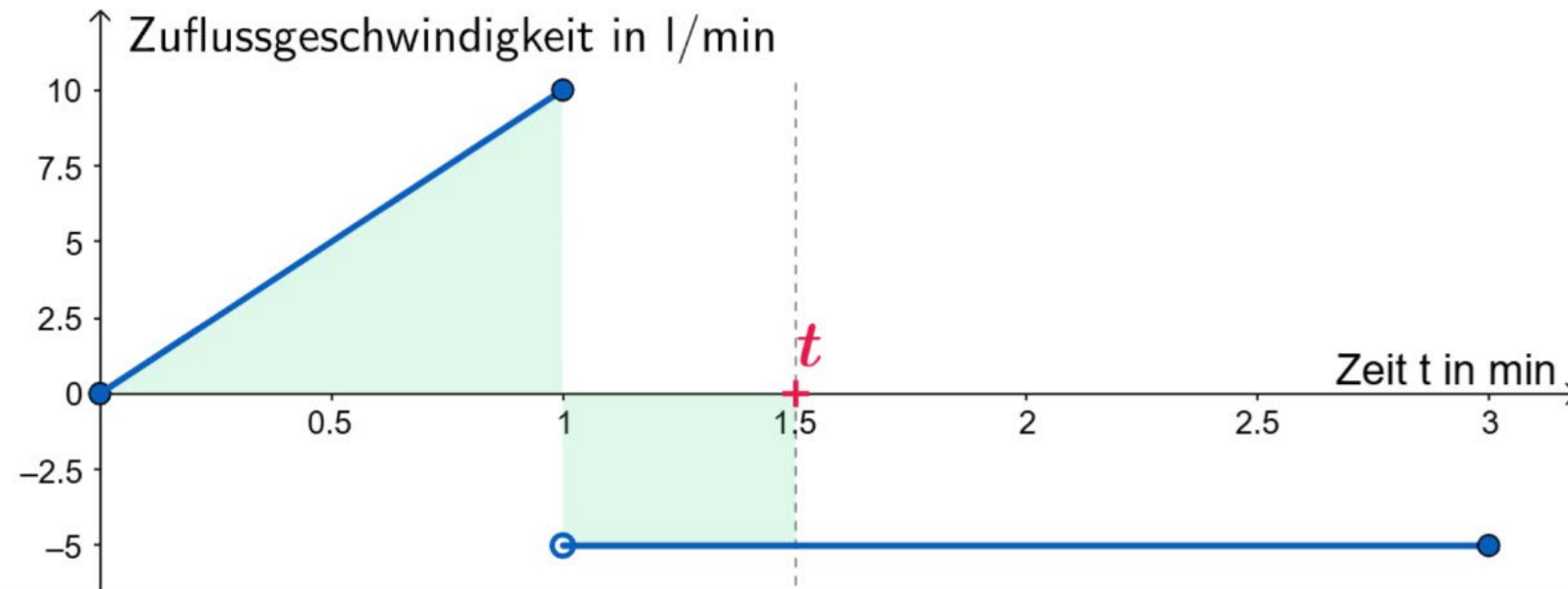
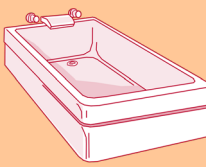
$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t - 1) & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

Negative Wassermenge?

Grundvorstellung: Anfangsbestand

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Bemerkung

Der aktuelle Bestand ergibt sich aus dem rekonstruierten Gesamteffekt der Änderung und dem **Anfangsbestand** zu Beginn der betrachteten Änderungen.

$$V(t) = \begin{cases} 5 + \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t - 1) & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

Grundvorstellungen zum Integral

- 1 Grundvorstellungen zum Integral im Überblick
- 2 Einstieg: Rekonstruieren
- 3 Erweitern: Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts
- 4 Vertiefen: Kumulieren**
- 5 Ergänzen: Mitteln

dms.nuw.rptu.de

RPTU

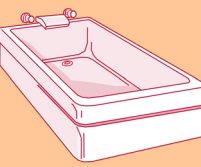


GeoGebra-Buch
MaTeGnu Modul 2
<https://mategnu.de/m/l2>

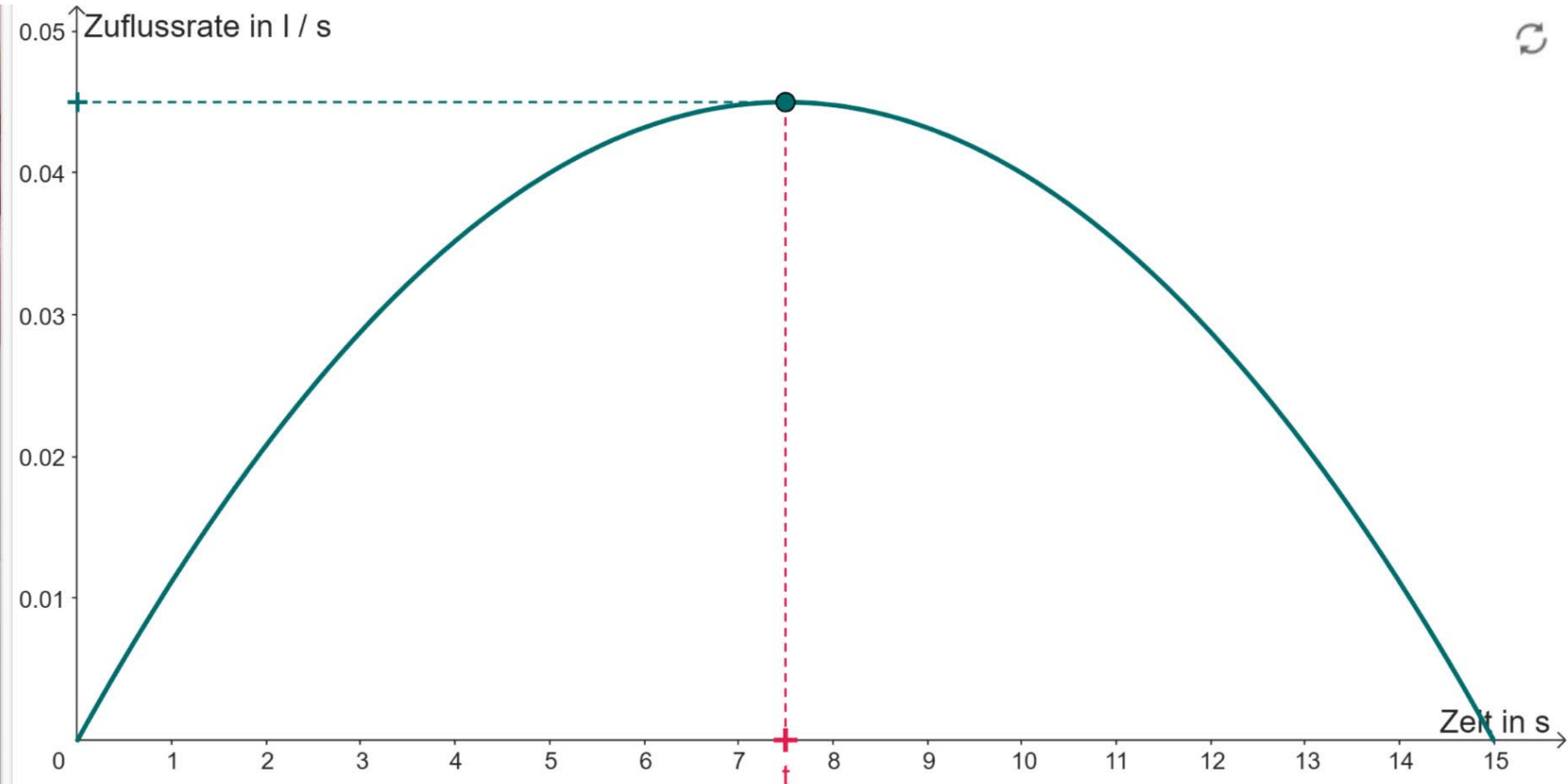
Verständnisanker: Wanne

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Frage: Wie kann man den Gesamteffekt aus den Änderungsraten rekonstruieren, wenn der Zufluss bzw. Abfluss **nicht linear** ist?



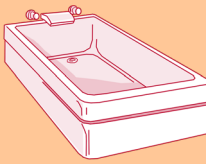
$t = 7.5$



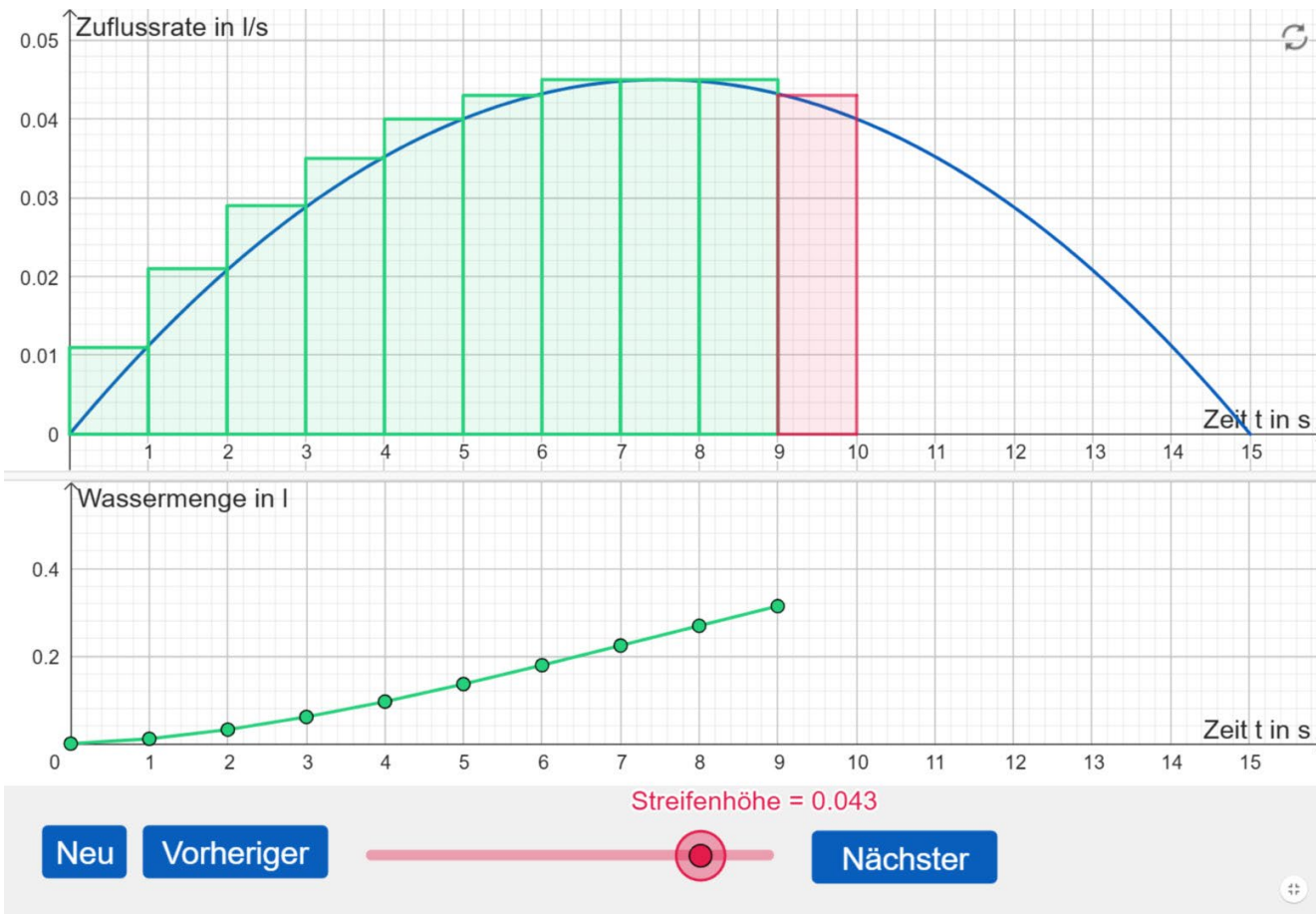
Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Frage: Wie kann man den Gesamteffekt aus den Änderungsraten rekonstruieren, wenn der Zufluss bzw. Abfluss **nicht linear** ist?



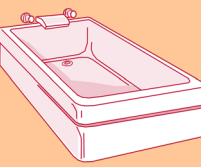
Idee

- Die Zuflussrate ist bei genügend kleinen Zeitintervallen nahezu konstant.
- Wenn man das Zeitintervall in n kleine zueinander gleichgroße Teilintervalle zerlegt, kann man vorgehen, wie in der Abbildung dargestellt.
- Der Gesamteffekt ist also eine Summe von Produkten aus der Teilintervall-Breite und dem (gewählten) Funktionswert im Teilintervall.

Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren

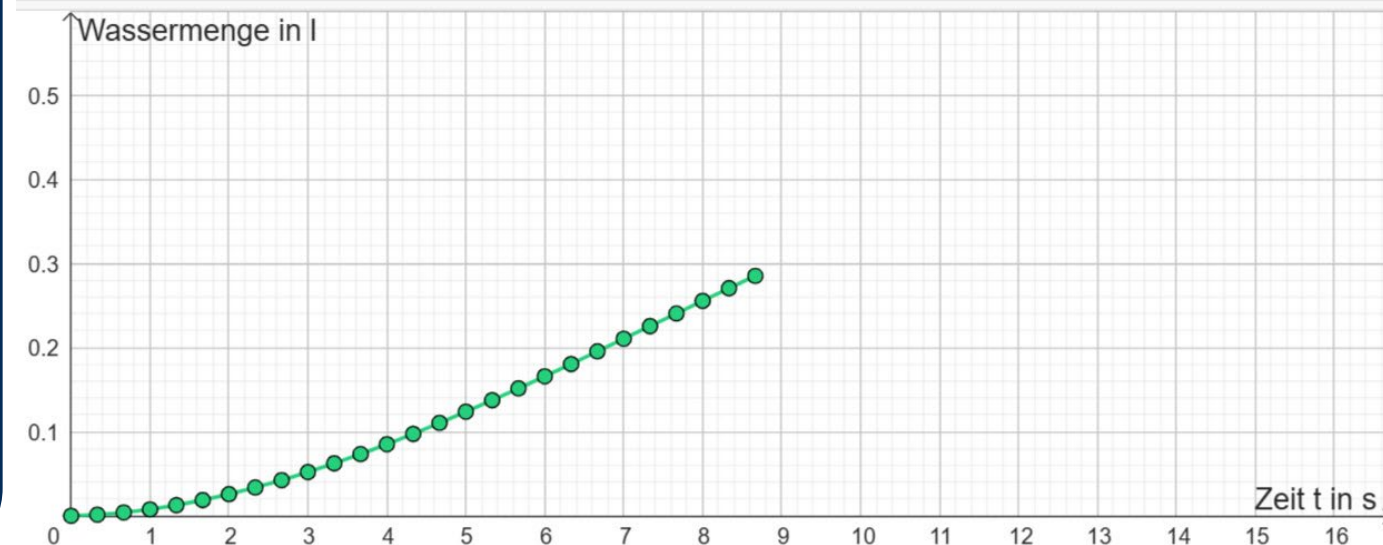
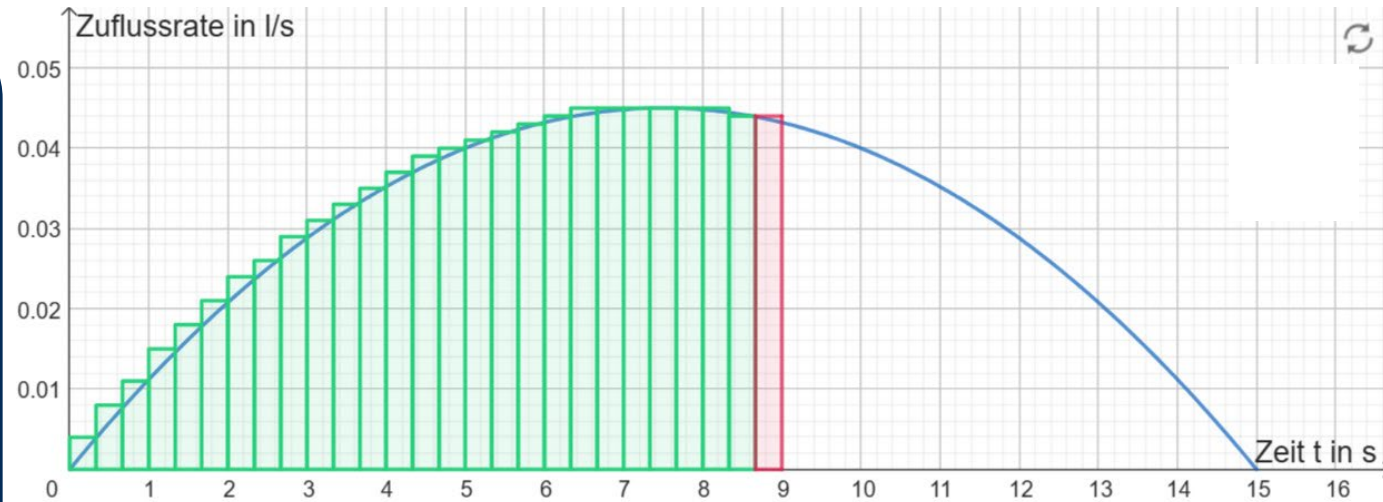
Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Erkenntnis: Nichtlinearer Zufluss

- Zur Rekonstruktion der Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt t sind die Zuwächse über alle Teilintervalle zu summieren, in die das Intervall $[0; t]$ zerlegt wurde.
- Geometrisch gedeutet, ist der rekonstruierte Wert $V(t)$ die Summe aller dieser kleinen *orientierten* Rechteckinhalte.
- Diese unterscheidet sich bei genügend kleiner Streifenbreite beliebig wenig von dem *orientierten* Inhalt der Fläche unter dem Graph von V' .



Streifenhöhe = 0.044

Neu

Vorheriger

Nächster

RPTU

Ober- und Untersumme

Definition für Schülerinnen und Schüler

Definition: Ober- und Untersumme

Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt.

Für eine Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ in $n \in \mathbb{N}$ gleichlange Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ sind

$m_1, \dots, m_n$ die **minimalen Funktionswerte*** und $M_1, \dots, M_n$ die **maximalen Funktionswerte*** von f im Teilintervall 1, ... bzw. n .

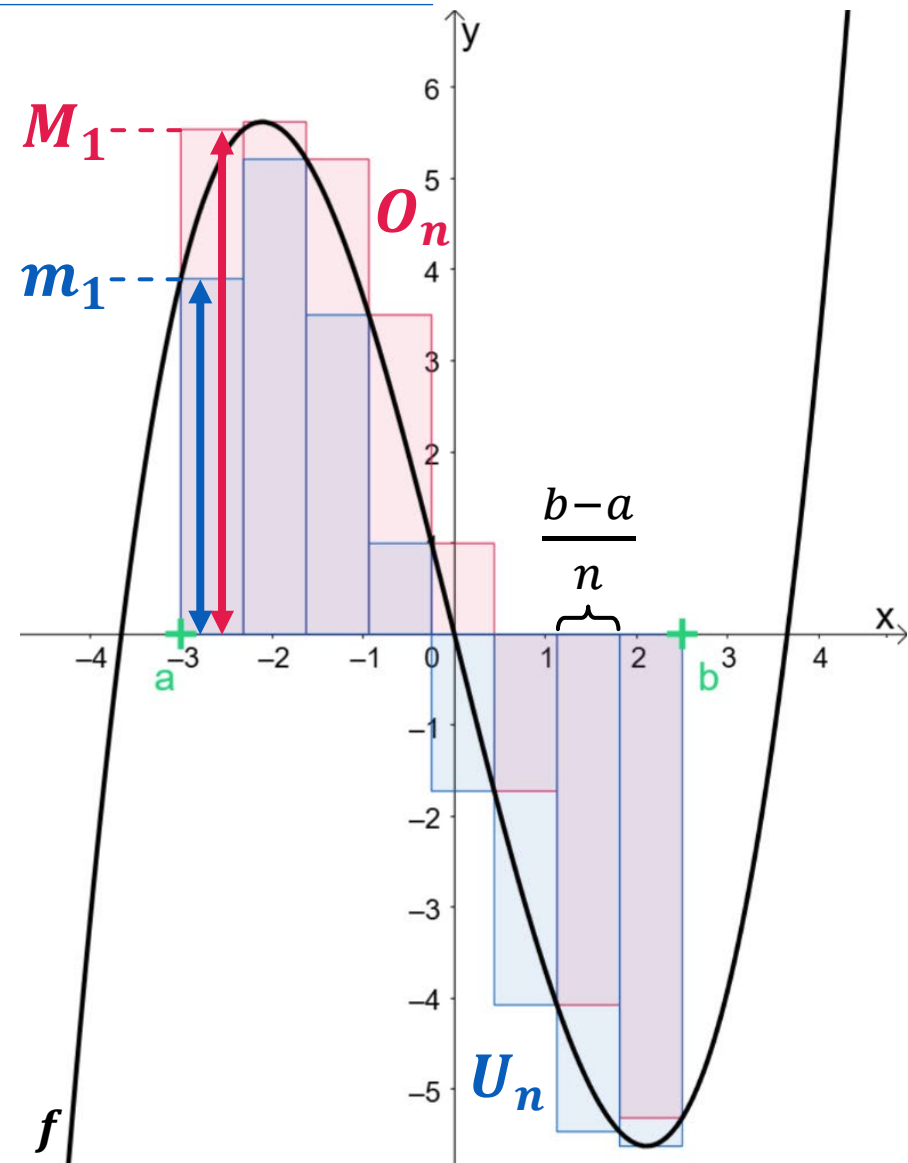
Dann heißen

$$U_n = m_1 \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + m_n \cdot \frac{b-a}{n}$$

die **Untersumme** und

$$O_n = M_1 \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + M_n \cdot \frac{b-a}{n}$$

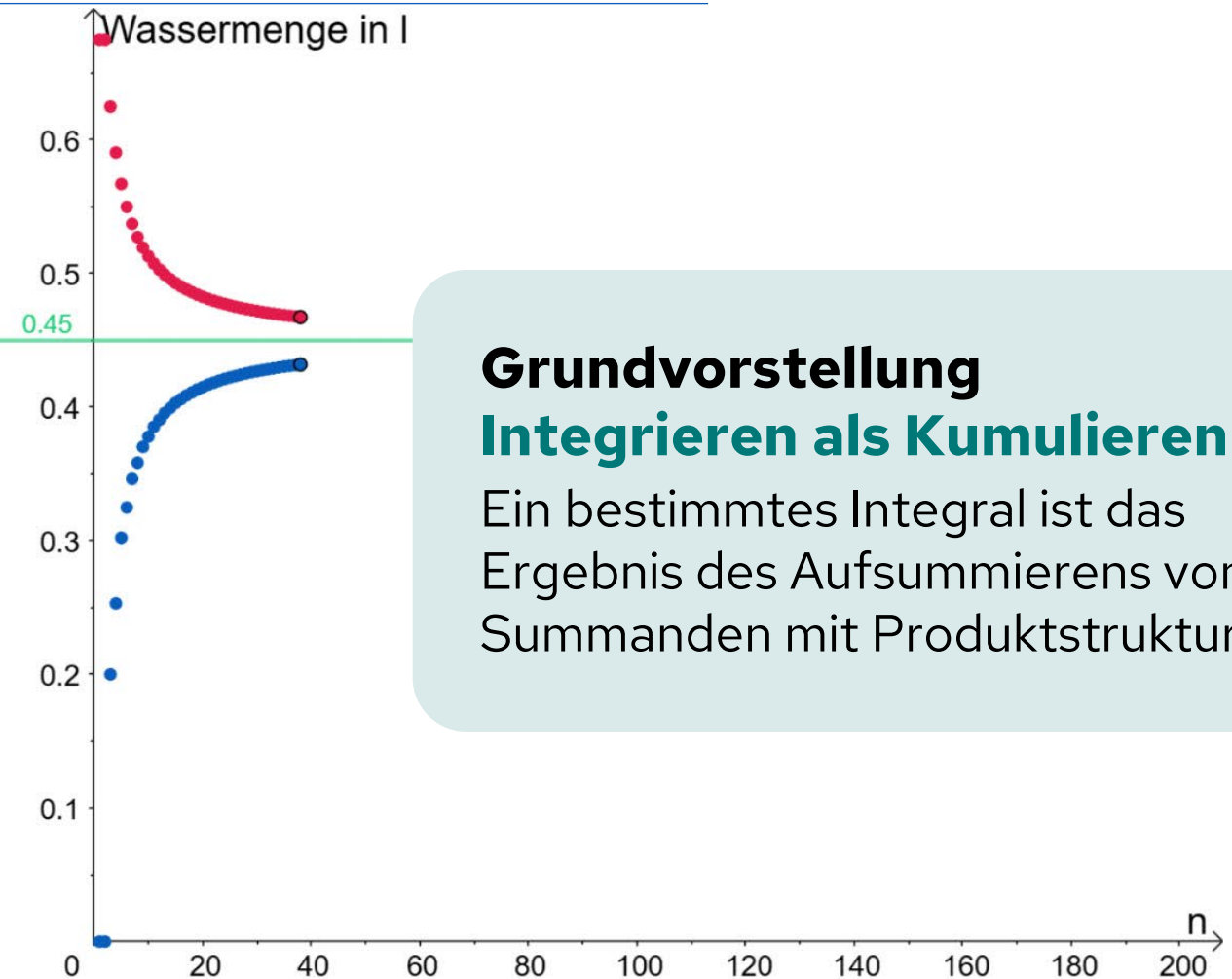
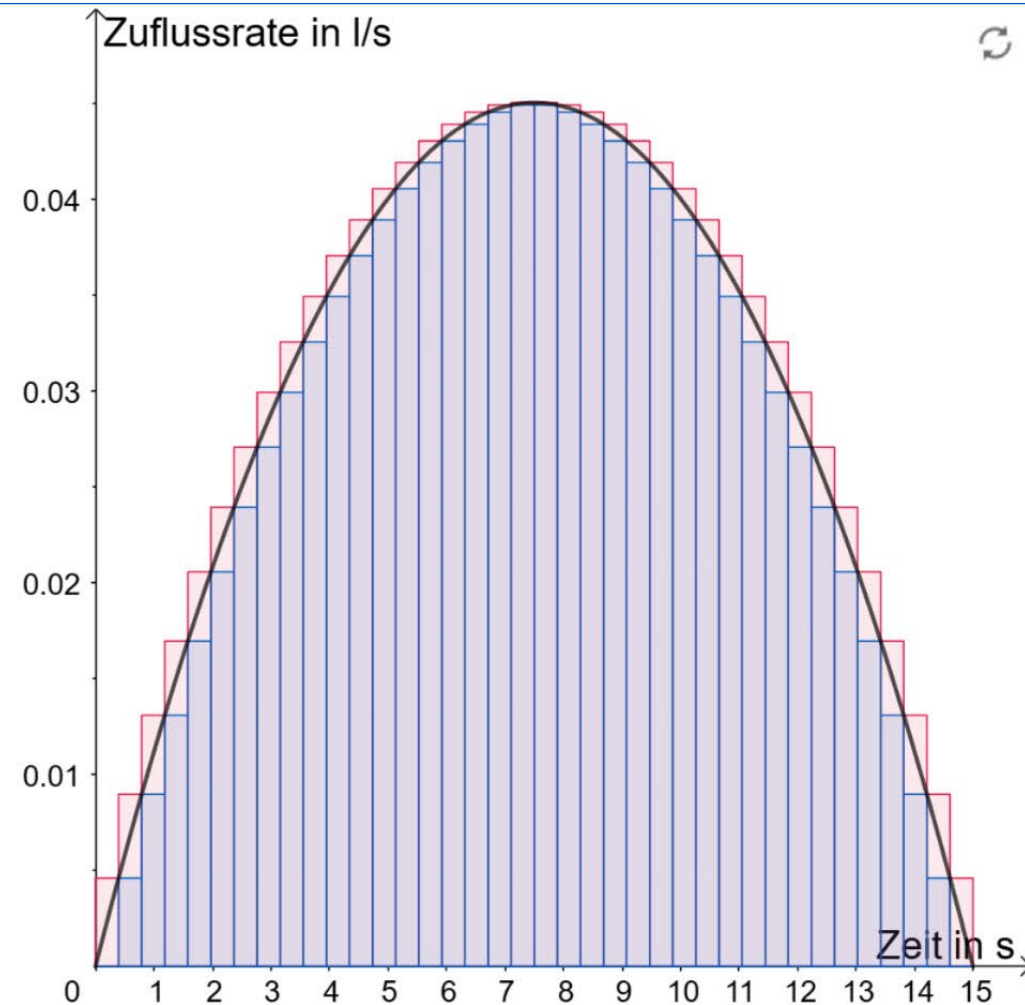
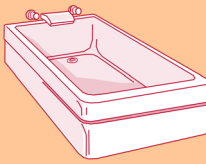
die **Obersumme** von f zu dieser Zerlegung.



Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren

Verständnisanker

Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Grundvorstellung

Integrieren als Kumulieren

Ein bestimmtes Integral ist das Ergebnis des Aufsummierens von Summanden mit Produktstruktur.

Anzahl n der Teilintervalle

$n = 38$

Start

Stopp

Reset

☒ Werte

Obersumme = 0.4675

Untersumme = 0.4319

Bestimmtes Integral und Integrierbarkeit

Definition für Schülerinnen und Schüler

Definition: Bestimmtes Integral & Integrierbarkeit

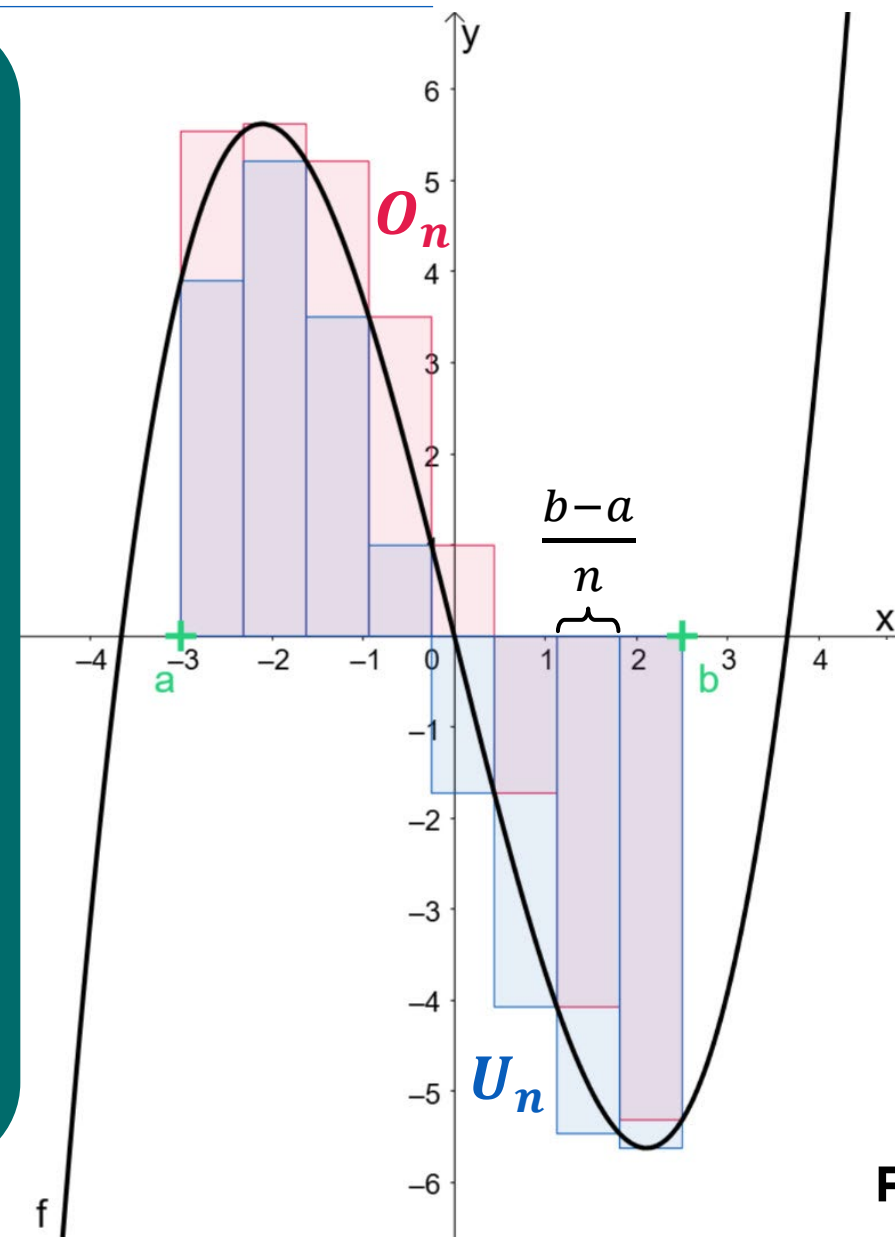
Wenn

- eine Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt ist,
- U_n die **Untersumme** und O_n die **Obersumme** von f für Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$ in $n \in \mathbb{N}$ gleichlange Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ sind und
- $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$,

dann heißt

(1) die Zahl $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$
bestimmtes Integral von f über dem Intervall $[a; b]$,
und wird mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet,

(2) die Funktion f **integrierbar** über dem Intervall $[a; b]$.



Grundvorstellungen zum Integral

- 1 Grundvorstellungen zum Integral im Überblick
- 2 Einstieg: Rekonstruieren
- 3 Erweitern: Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts
- 4 Vertiefen: Kumulieren
- 5 Ergänzen: Mitteln**

dms.nuw.rptu.de

RPTU



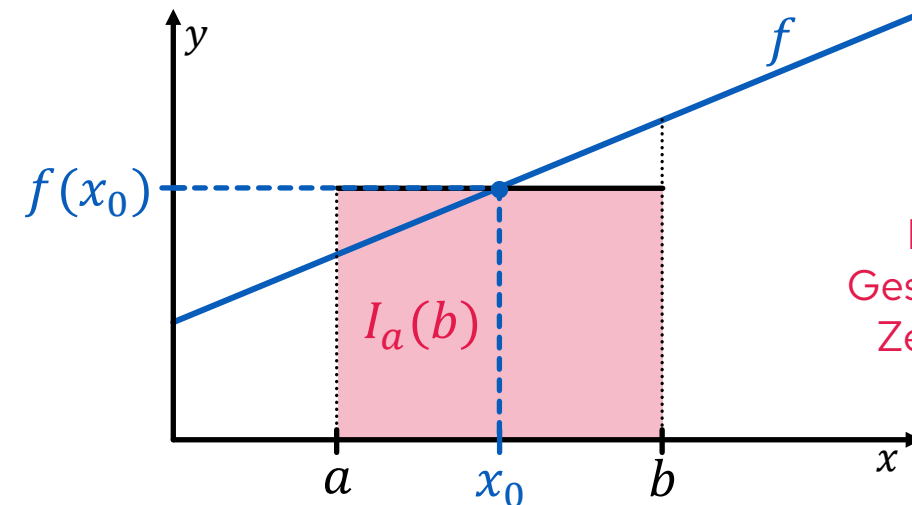
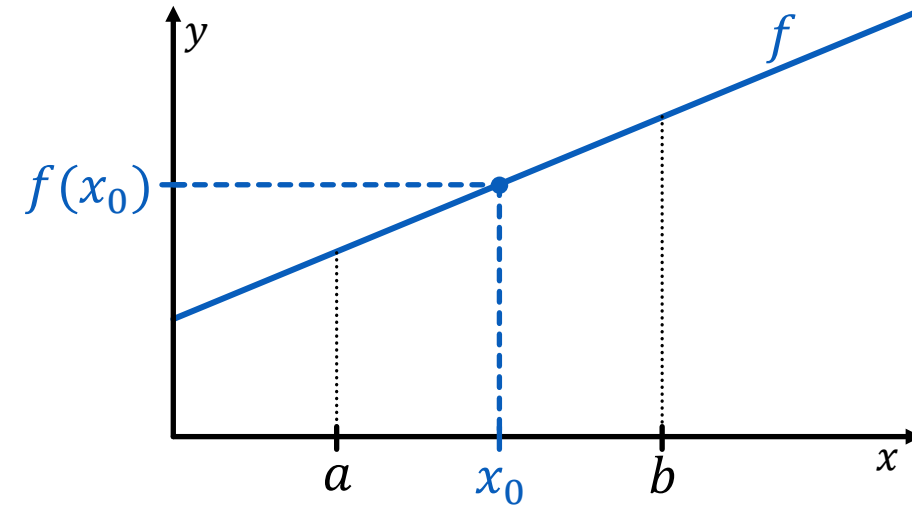
GeoGebra-Buch
MaTeGnu Modul 2
<https://mategnu.de/m/l2>

Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln

Mittelwertbildung bei linearen Funktionen

Gesucht

- Mittelwert $f(x_0)$ einer linearen Funktion in einem Intervall $[a, b]$.
- Der Mittelwert wird in der Mitte des Intervalls angenommen.
- Der mittlere Funktionswert kann genutzt werden, um den Flächeninhalt $I_a(b)$ unter dem Graph von f als Rechteck zu realisieren.
- Damit gilt:
$$I_a(b) = (b - a) \cdot f(x_0)$$
- Für den Mittelwert $f(x_0)$ folgt:
$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$



Inhaltlich als
Geschwindigkeits-
Zeit-Diagramm
deuten

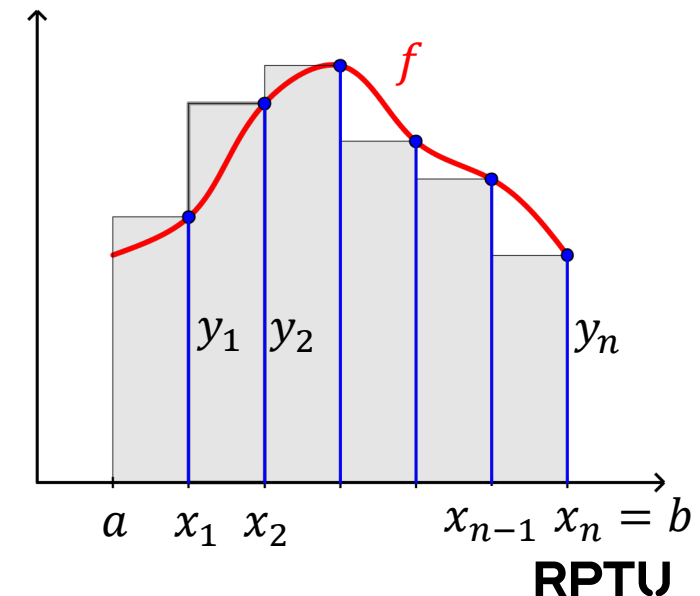
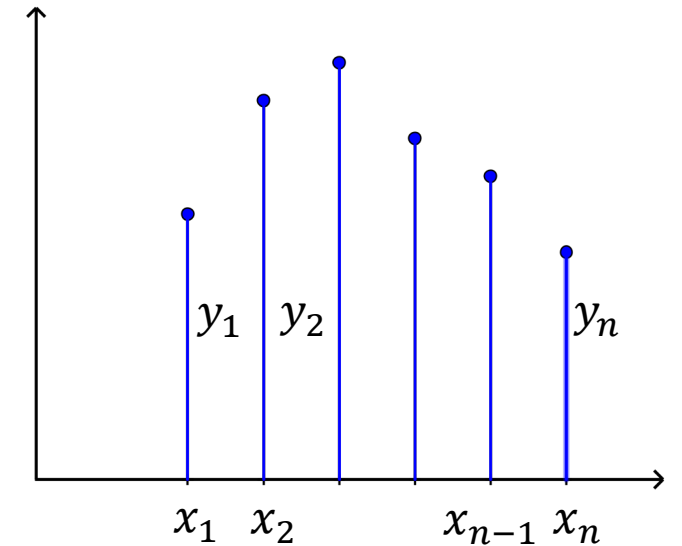
Gesucht: Mittelwert einer Messreihe aus n Messwerten $y_1, y_2, \dots, y_n$ zu äquidistanten Zeitpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ergebnis: Der gesuchte Mittelwert ist das arithmetische Mittel der Messwerte $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + \dots + y_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i.$$

- Messwerte werden als diskrete Realisierung eines stetigen Funktionsverlaufs f betrachtet.
- Algebraische Umformung des Terms für das arithmetische Mittel liefert:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &\approx \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b) \end{aligned}$$



Bemerkung

- Aus den Beispielen folgt, dass es sinnvoll ist, unter der Zahl

$$m_{[a;b]}(f) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$

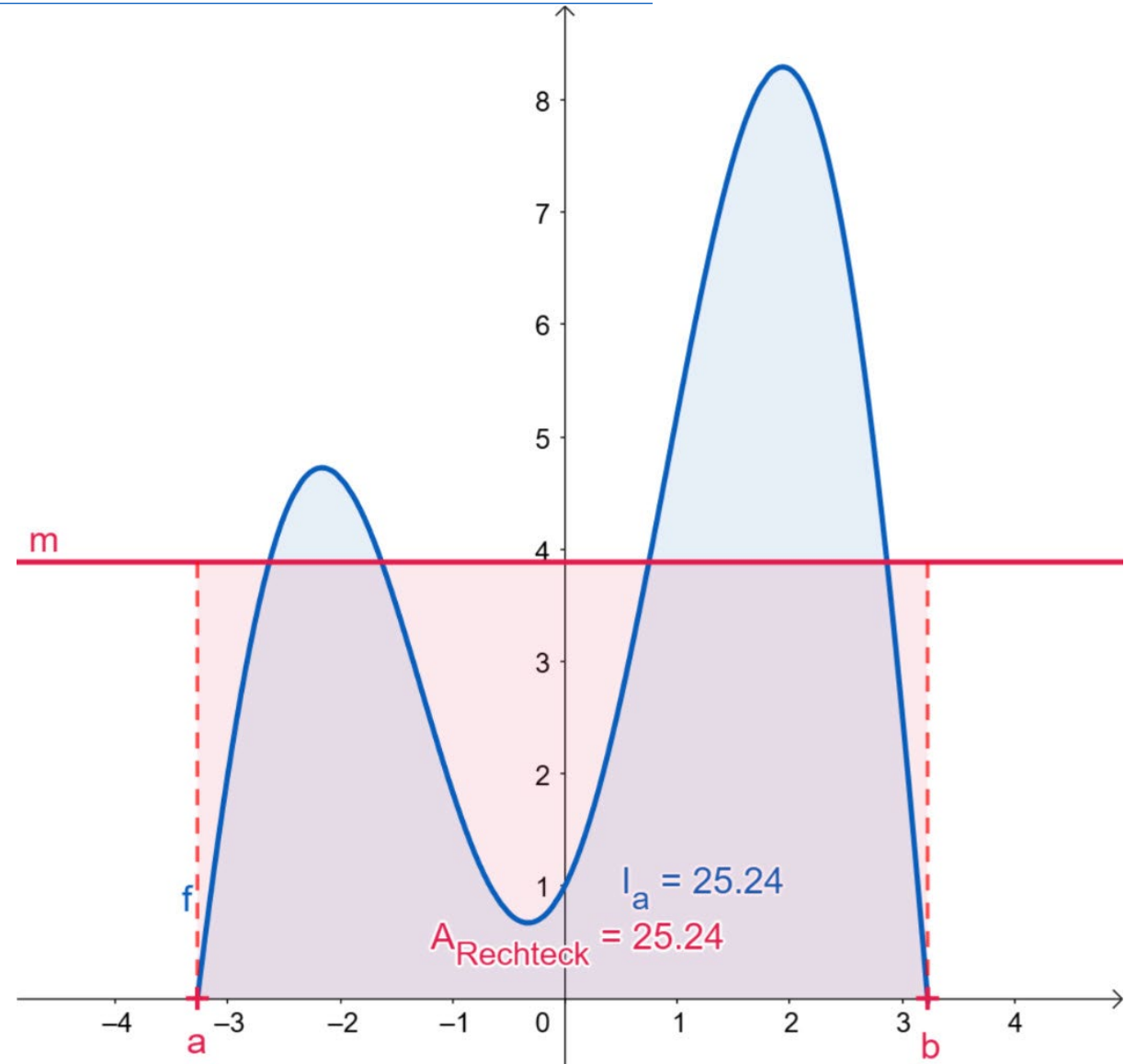
den Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ zu verstehen.

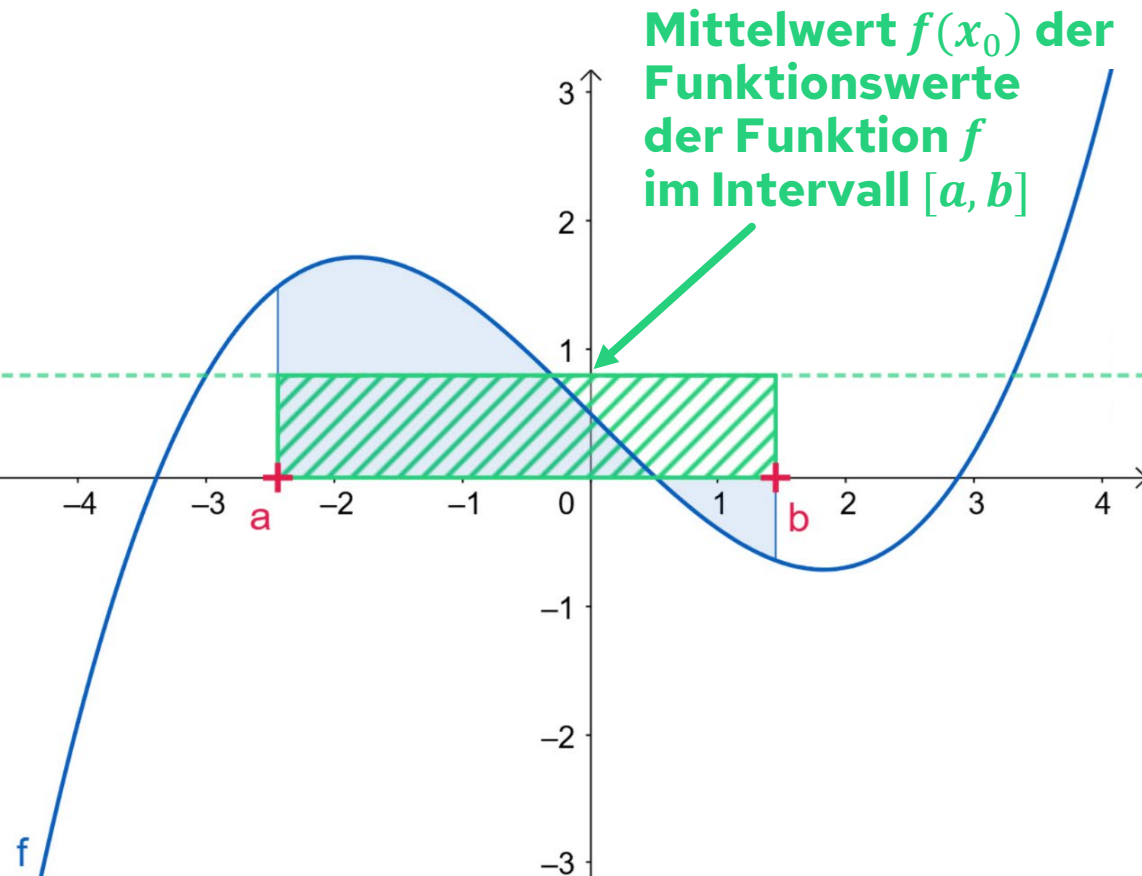
- Es gilt:

$$I_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- Speziell:

$$I_a(b) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$





Grundvorstellung Integrieren als Mitteln

Ein bestimmtes Integral mittelt die Funktionswerte der Integrandenfunktion im Integrationsintervall.

Mittlerer Funktionswert

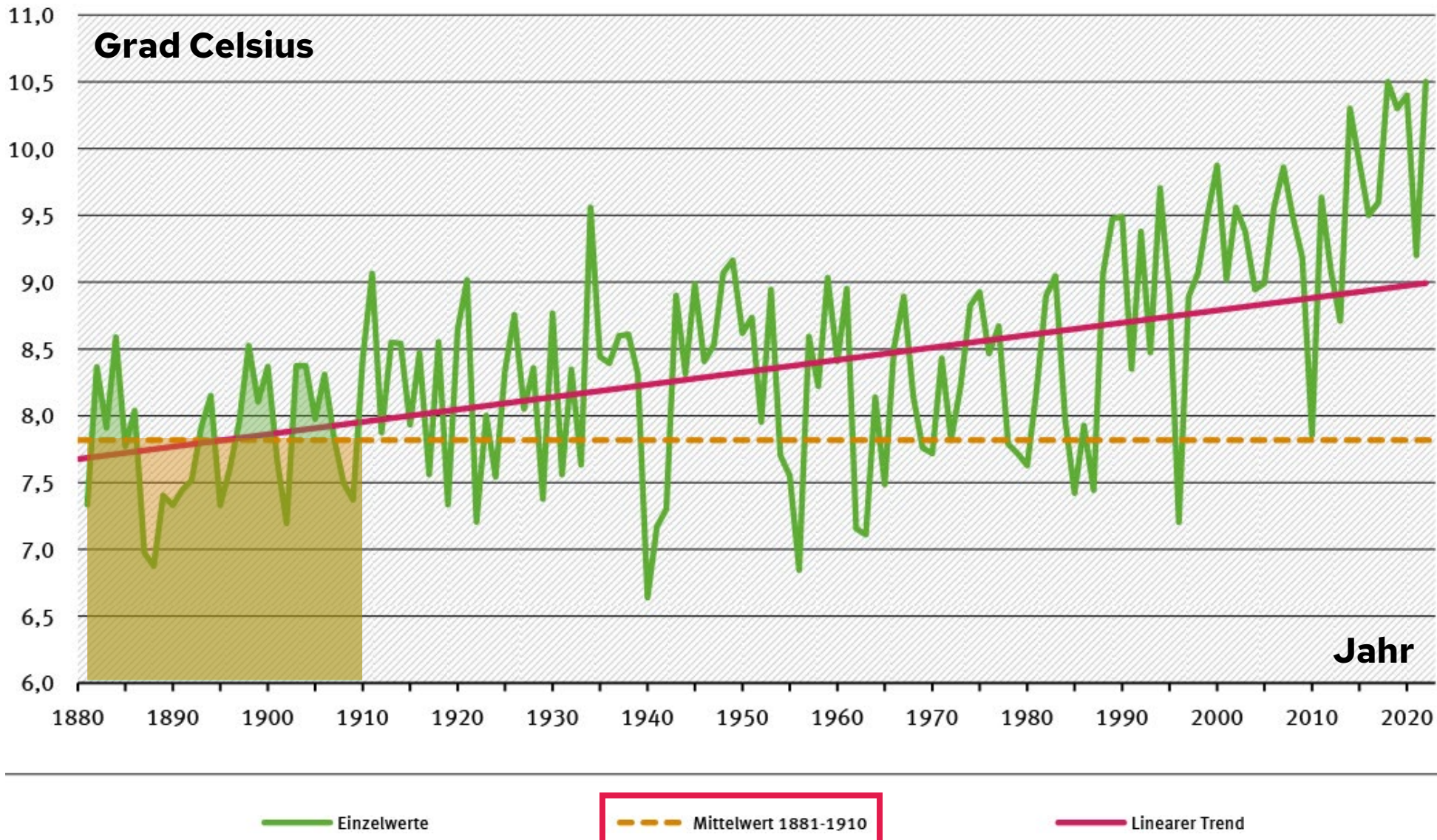
- Mit dem mittleren Funktionswert $f(x_0)$ in einem Intervall $[a, b]$ kann der orientierte Flächeninhalt $I_a(b)$ unter dem Graph von f als (orientiertes) Rechteck realisiert werden.

- Damit gilt: $I_a(b) = (b - a) \cdot f(x_0)$

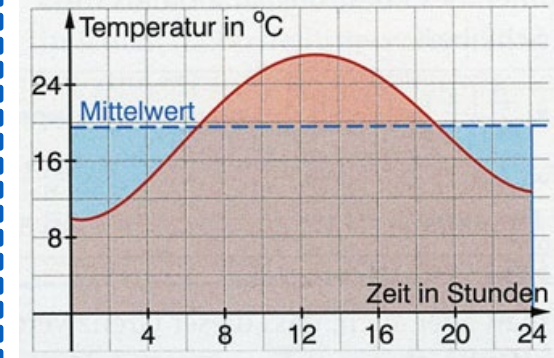
- Für den Mittelwert $f(x_0)$ folgt:

$$f(x_0) = \frac{1}{b - a} \cdot I_a(b)$$

Jährliche mittlere Tagesmitteltemperatur in Deutschland 1881 bis 2022

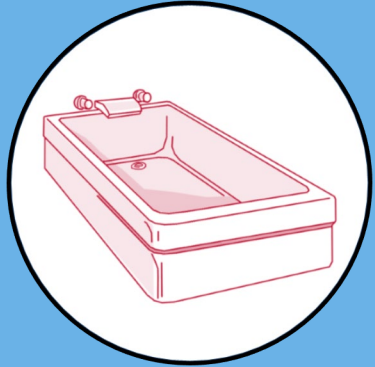


C Mit dem Integral lässt sich der Mittelwert bei einer sich kontinuierlich verändernden Größe berechnen, z. B. die mittlere Tagestemperatur aus einer aufgezeichneten Temperaturkurve.

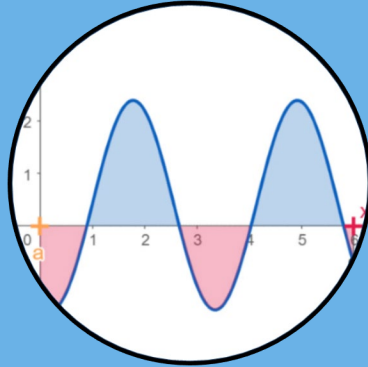


Schmidt, G, Körner, H., Lergenmüller, A. (Hrsg.) (2011). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien, Analysis II. Braunschweig: Westermann, Schroedel, Diesterweg, Schöningh, Winklers, S. 162

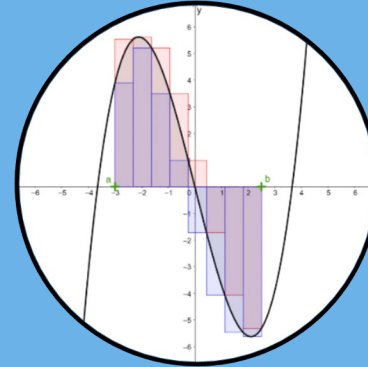
Grundvorstellungen zum Integralbegriff



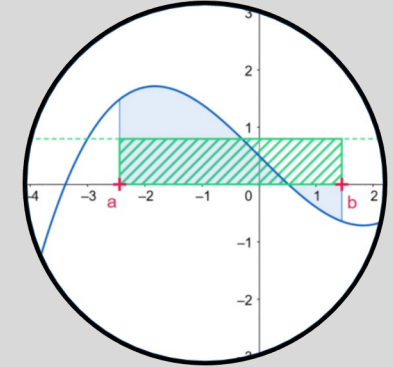
Rekonstruieren



**Bestimmen eines
orientierten
Flächeninhalts**



Kumulieren



Mitteln

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de

dms.nuw.rptu.de.de



RPTU