



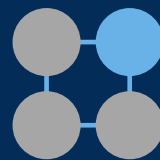
GeoGebra-Institut  
Landau (RLP)

# GeoGebra beim Lernen & Leisten

## Das Beispiel Umkehrfunktionen

Prof. Dr. Jürgen Roth

22.07.2026 GeoGebra-Tag für Studienseminare, RPTU in Landau



Didaktik der  
Mathematik  
Sekundarstufen



Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

# GeoGebra beim Lernen & Leisten

## Das Beispiel Umkehrfunktionen

1. GeoGebra als Lernumgebung und Werkzeug
2. Lernen & Leisten
  - a) Lernziel
  - b) Erarbeitung
  - c) Sicherung
  - d) Prüfung

mategnu.de

**RPTU**



GeoGebra-Buch  
„Umkehrfunktionen“  
<https://roth.tel/umkehrfunktionen>

# 1

## GeoGebra als Lernumgebung & Werkzeug

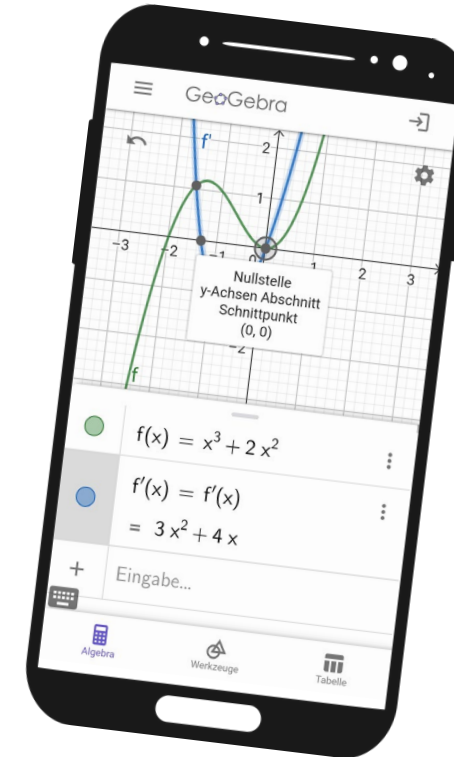
# Digitale Werkzeuge

## → modulare Mathematikssysteme (MMS)

### Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematikunterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
  - Computer-Algebra-Systeme,
  - dynamische Geometrie-Systeme
- und als deren Integration
- dynamische Mathematik-Systeme (DMS)  
[Multi-Repräsentations-Systeme,  
modulare Mathematikssysteme (MMS)].



MMS nur dann einsetzen, wenn dadurch das Erreichen der Ziele des Mathematikunterrichts nachhaltig unterstützt wird.

## Aufgabenstellungen

- schriftliche Ergebnis-Vorhersagen vor Nutzung dynamischer Interaktivitäten
- Reflexionsfragen zu beobachteten bzw. erarbeiteten Ergebnissen
- Zusammenhänge schriftlich festhalten
- dynamisch dargestellte Situation und dynamische mathematische Repräsentationen in Beziehung setzen
- Ergebnisse anwenden

Lichti & Roth (2018), Digel & Roth (2022)

## Protokollierung

Ergebnisse und Vorgehensweisen schriftlich (Text & Grafik) festhalten

- erleichtert reflektierte Abstraktion sowie Schematisierung & ermöglicht tiefere Verarbeitung Dörfler (2003)
- entlastet das Arbeitsgedächtnis Schnotz et al. (2011)
- fördert Reflexionstiefe & neue Erkenntnisgewinnung Roth (2013)
- ermöglicht die spätere Weiterarbeit mit den Erkenntnissen
- Anregung: Prompts & leere Kästen Schumacher & Roth (2015)

# Thesen zum Einsatz von MMS im MU

Ein digitales Werkzeug (MMS) ist ...

**Experimentierumgebung  
zur Erkenntnisgewinnung**

entlastet vom Kalkül → mehr Planung, Analyse  
und Argumentation

**Heuristisches Hilfsmittel  
(„Denkzeug“)**

ermöglicht Realitätsorientierung  
und authentische Probleme

**Modellierungswerkzeug  
(„Kreativitäts-/Interpretationskrücke“)**

unterstützt selbsttätiges, entdeckendes Arbeiten

**Kommunikationsmittel**

fördern kreatives und produktives Arbeiten

## Digitale Werkzeuge

sind Universalwerkzeuge zur mathematischen Problemlösung und müssen durch die Nutzer/in, durch geeignete Ausgestaltung, zu Spezialwerkzeugen für den jeweiligen Zweck gemacht werden.



## Digitale Lernumgebungen

setzen einen Rahmen für das selbstständige Mathematik-Lernen. Dazu werden – häufig von Lehrpersonen – unter anderem Applets auf der Basis von digitalen Werkzeugen zur Unterstützung von selbstständigen Lernprozessen von Lernenden in die digitale Lernumgebung integriert.



## Wann sollte was genutzt werden?

### ■ Digitales Werkzeug

Primäres Lernziel ist die Ausbildung von Nutzungsexpertise bzgl. des verwendeten digitalen Werkzeugs zur Problemlösung bzw. Aufgabenbearbeitung.

→ Die selbstständige Nutzung des digitalen Werkzeugs ist sinnvoll.

### ■ Digitale Lernumgebungen

Primäres Lernziel besteht darin, einen mathematischen Inhalt zu durchschauen und zu verstehen.

→ Die Einbindung in eine digitale Lernumgebung ist sinnvoll.

# MMS-Nutzung durch Lernende

## Grad der Vorstrukturierung

### Digitale Lernumgebung



**K**onfiguration  
vollständig  
vorgegeben

**S**trukturierungs- und  
Fokussierungshilfen für  
alle wesentlichen Aspekte  
(z. B. Farbgebung, Linienstärken,  
Mitführen von Messwerten, ...)

**E**lemente können ein-  
und ausgeblendet werden

**V**ariationsmöglichkeiten  
bewusst eingeschränkt.

### Hybrid



**V**eränderbare  
(Teil-)Konfiguration  
vorgegeben

**K**ann / muss ergänzt  
oder verändert werden

**N**ur einzelne  
Strukturierungs- und  
Fokussierungshilfen  
vorhanden

### Digitales Werkzeug



**L**eere,  
unstrukturierte  
MMS-Datei

**MMS** wird selbst-  
ständig und ohne  
Vorgaben benutzt

**E**rfordert  
Werkzeugkompetenz

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis (S. 233–248). Wiesbaden: Springer Spektrum. 

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis**. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109–136). Berlin: Springer Spektrum. 

| <div>Unterstützung: Grad der Fokussierungshilfe</div> <div>Inhalt: Zweck des MMS-Einsatzes</div> |  <b>Digitale Lernumgebung</b><br>Vorgeg. Konfiguration<br>(evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen) |  <b>Hybrid</b><br>Ergänzb. Konfiguration<br>(einzelne Fokussierungshilfen) |  <b>Digitales Werkzeug</b><br>leeres, unstrukturiertes MMS |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mit Änderungen argumentieren                                                                     | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                               | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |
| Beweisidee vermitteln                                                                            | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                               | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |
| Verständnisgrundlage für Begriffe und ihre Eigenschaften schaffen                                | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                                                                  | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |
| Experimentelles Arbeiten                                                                         | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                                                                  | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |
| ▪ Entdecken von Zusammenhängen                                                                   |                                                                                                                                                                                                      | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |
| ▪ Ideen finden i. Problemlöseprozess                                                             |                                                                                                                                                                                                      | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |
| Reflexion von Problemlöseprozessen                                                               | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                               | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |
| Selbständiges Problemlösen                                                                       |                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                               | <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                           |

# Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

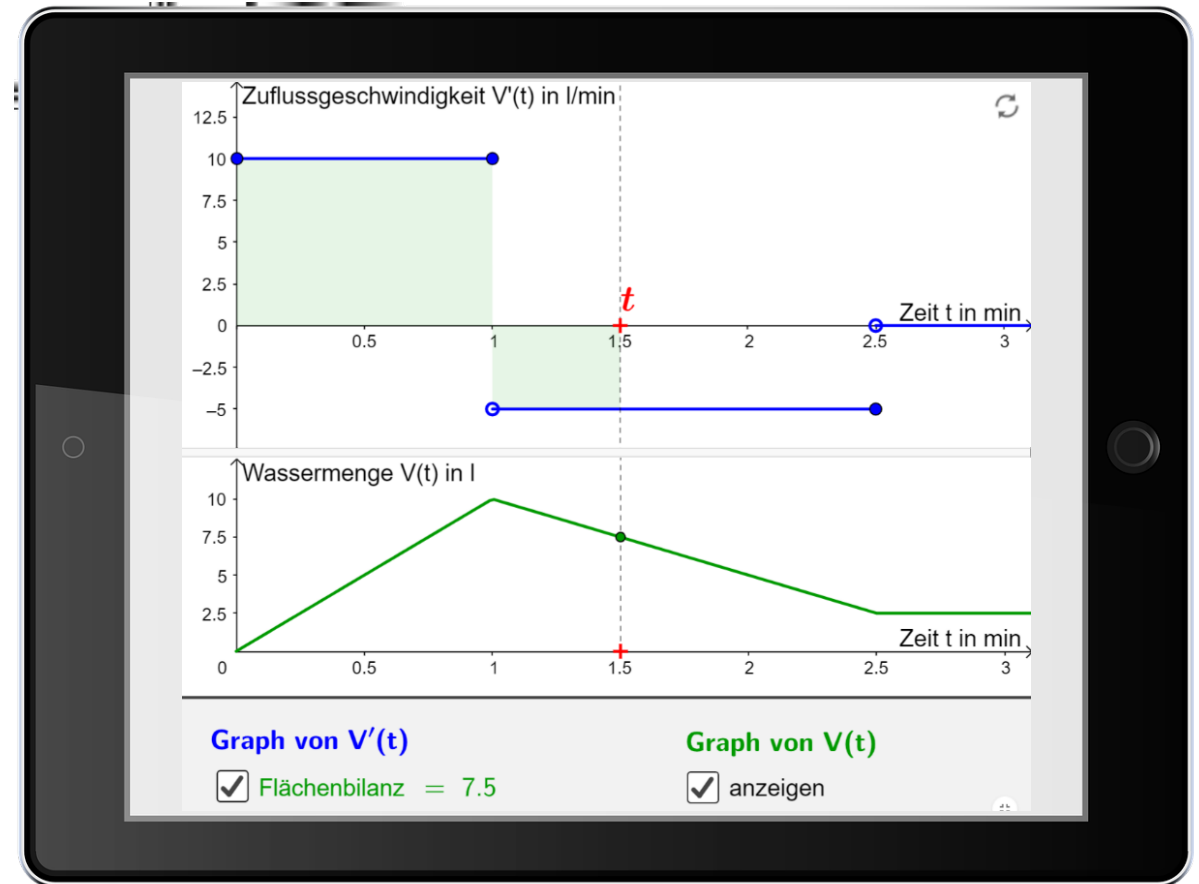


# Definition: Digitale Lernumgebung

## Digitale Lernumgebungen



- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
  - von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
  - die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten, digital angereichert wurde.



# Rolle der Lehrperson im Rahmen der Arbeit mit (digitalen) Lernumgebungen

## Vorbereitung

- L**ernende auf Arbeit mit digitaler Lernumgebung einstimmen
- R**egeln und Art der Dokumentation festlegen
- N**otwendige mathem. Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sicherstellen
- V**oraussetzungen für sinnvolles Arbeiten mit digitaler Lernumgebung schaffen



## Durchführung

- Ü**berblick über Arbeitsstände und -ergebnisse wiederholt verschaffen
- I**mplementierte Unterstützungssysteme adaptiv ergänzen
- M**öglichst minimal und in der Regel nicht inhaltlich unterstützen (Lernhilfen nach Zech)
- N**achbereitungsphase inhaltlich vorbereiten



## Nachbereitung

- K**onsolidieren der erarbeiteten Wissens Elemente
- B**eobachtungen & Protokolle Lernender nutzen
- M**it regulärem mathem. Wissen abgleichen
- W**esentliche Grundvorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten herausarbeiten und sichern
- E**rreichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen
- E**rarbeitetes weiter nutzen

## Motivationshilfe

Hier beginnen.

- Lernende Motivieren
- Lernende bei der Aufgabenbearbeitung halten

## Rückmeldehilfe

- Lernstand
- Korrektheit der Bearbeitung

Protokollierung

## Allgemein- strategische Hilfe

- Strategie vermitteln, die unabhängig vom aktuellen Inhalt genutzt werden kann

Verweis auf  
Hilfen, MMS ...

## Inhaltsorientiert- strategische Hilfe

- Strategie vermitteln, die überwiegend beim aktuellen Inhalt Anwendung findet

## Inhaltliche Hilfe

- Inhaltliche Hinweise
- (Teil-)Lösungen

Zech, F. (1998). Grundkurs Mathematikdidaktik (9. Aufl.). Beltz.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.





## Ziel der Nutzung

- Selbstständiges, verständnisbasiertes, an Grundvorstellungen ausgerichtetes Lernen mathematischer Inhalte
- durch geeignete Aufbereitung und mithilfe passgenauer (digitaler) Unterstützungsmedien ermöglichen

Keine Drill and Practice-Programme!



## Mögliche Einsatzszenarien

- **In Inhaltsbereich einsteigen:** Inhaltsbereich explorieren und Grundvorstellungen erarbeiten
- **Inhaltsbereich konsolidieren:** Sichtweisen untereinander und mit Grundvorstellungen vernetzen

## Computerunterstütztes Lernen



- mittlerer Effekt trotz Heterogenität  
(Effektstärke: Cohens  $d = 0,37$ ) Hattie (2015)

## Einsatz digitaler Werkzeuge beim MINT-Lernen in den Sekundarstufen

- 92 Vergleichsstudien mit ↔ ohne  
digitale Werkzeuge seit 2000
- Positiver Effekt digitaler Werkzeuge  
(Effektstärke: Hedges  $g = 0,65$ )
- Fortbildungen zum Einsatz digitaler  
Werkzeuge → positiver Einfluss  
Hillmayer et al. (2020)

## Digitale Lernumgebungen sind besonders lernförderlich, wenn



- Lerninhalte Veränderungen  
bzw. Prozesse einschließen
- Lerninhalte subjektiv anspruchsvoll
- Lerninhalte dynamisiert darstellbar
- dynamische Darstellungen  
interaktiv genutzt werden  
Rolfes et al. (2020)
- sie Aushandlungs- und  
Austauschphasen beinhalten
- sie von schriftlichen Protokoll-  
aktivitäten begleitet werden  
Digel et al. (2022)



## Fokussierungshilfen



- dyna-linking, also dynamische Verbindungen zwischen Repräsentationen
- (identische) Farbgebung, Linienstärke
- Bezeichner & Messwerte mitführen
- Hilfslinien
- Veränderungsmöglichkeiten nur, wo für Erkenntnisgewinnung notwendig
- Zu- und Abschaltbare Optionen

Ainsworth (1999), Roth (2005, 2017, 2019)

## Feedback



individuell und adaptiv

- Wissensstand d. Lernenden
  - Art des Feedbacks
  - Detailgrad des Feedbacks
- Lernende werden aktiv in den Feedbackprozess einbezogen
- Lernende: Feedback ist hilfreich
  - Bearbeitung richtig oder falsch
  - Erklärung für korrekte Lösung

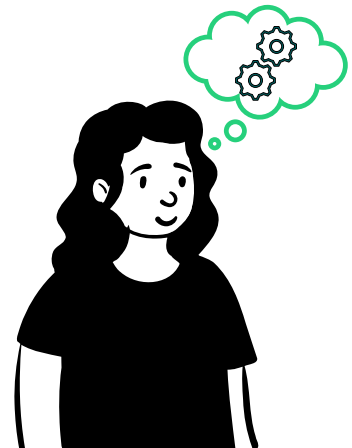
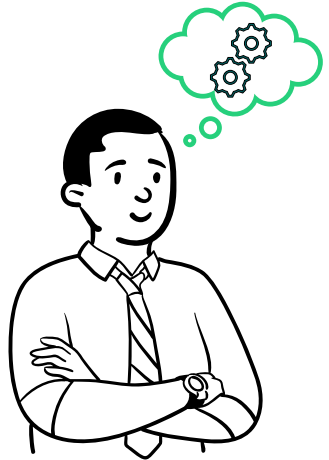
Bimba et al. (2017)

Jedtke & Greefrath (2019)

- Leistung ↔ Feedbacknutzung

Rezat (2017)





# 2

## Lernen und Leisten

## Prüfungen sollten ...

- Ziele von Bildungsstandards und Lehrplänen widerspiegeln
- im Einklang mit den Lehr- & Lernpraktiken des Unterrichts stehen
- Lernenden die Möglichkeit geben ihr Wissen und ihre Fähigkeiten geeignet darzustellen

## Prüfungen verdeutlichen ...

welche Kenntnisse und Fähigkeiten für wichtig erachtet & honoriert werden  
(Art der Aufgaben, geprüfte Fähigkeiten, Anzahl der Bewertungseinheiten, erlaubte Hilfsmittel)

### Assessment

should not merely be done to students; rather, it should also be done for students, to guide and enhance their learning.

NCTM: Principles and Standards for School Mathematics

### Constructive Alignment

In **Prüfungen** muss qualitativ und quantitativ das abgefragt werden, was auch den **Unterricht** qualitativ und quantitativ prägt.

Henning Körner

# GeoGebra beim Lernen & Leisten

## Das Beispiel Umkehrfunktionen

- a) Lernziel
- b) Erarbeitung
- c) Sicherung
- d) Prüfung

mategnu.de

**RPTU**



GeoGebra-Buch  
„Umkehrfunktionen“  
<https://roth.tel/umkehrfunktionen>

# GeoGebra beim Lernen & Leisten

## Das Beispiel Umkehrfunktionen

- a) **Lernziel**
- b) Erarbeitung
- c) Sicherung
- d) Prüfung

mategnu.de

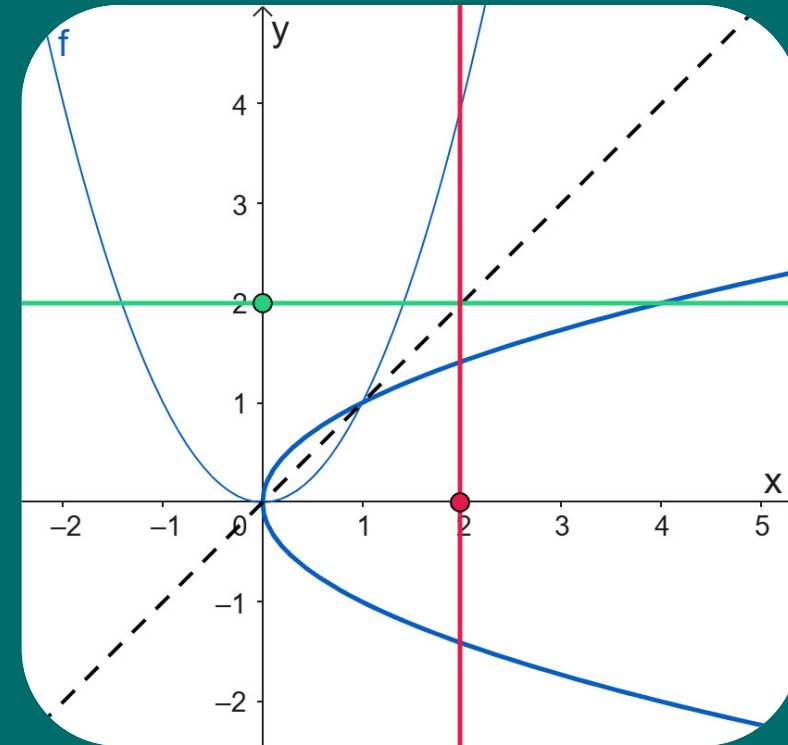
**RPTU**



GeoGebra-Buch  
„Umkehrfunktionen“  
<https://roth.tel/umkehrfunktionen>

## Grundverständnis für Umkehrfunktionen

- Umgekehrte Zuordnung am Graph erfassen
- $f^{-1}(f(x)) = x \wedge f(f^{-1}(x)) = x$
- Funktionstest
- Umkehrbarkeitstest
- Definitionsbereich ggf. geeignet einschränken
- Bedeutung
  - Spiegelung an Winkelhalbierender (I/III)
  - Vertauschung von  $x$  und  $y$



**Ziel: Begriffsverständnis  
bzgl. Umkehrfunktionen**

- Verständnisanker aufbauen
- (Grund-)Vorstellungen entwickeln



# GeoGebra beim Lernen & Leisten

## Das Beispiel Umkehrfunktionen

- a) Lernziel
- b) Erarbeitung**
- c) Sicherung
- d) Prüfung

mategnu.de

**RPTU**



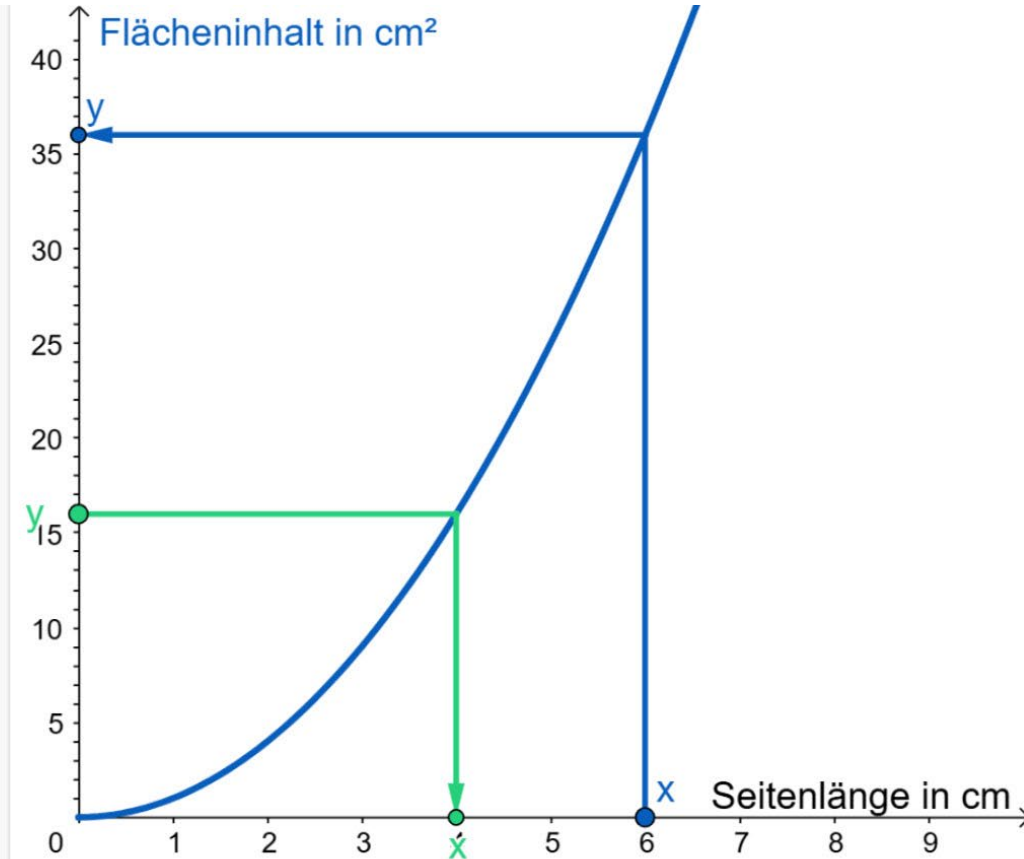
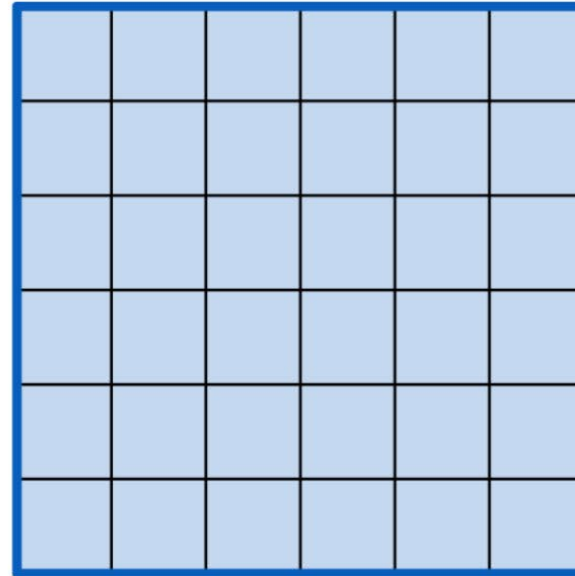
GeoGebra-Buch  
„Umkehrfunktionen“  
<https://roth.tel/umkehrfunktionen>

# Verständnisanker für Umkehrfunktionen

## Umgekehrte Zuordnung

### Verständnis- anker

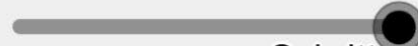
- Einer Seitenlänge  $x$  eines Quadrats wird ein Flächeninhalt  $y$  zugeordnet.
- Kann man am Graph dieses funktionalen Zusammenhangs auch für einen Flächeninhalt  $y$  ablesen, welche Kantenlänge  $x$  zugeordnet wird?



Seitenlänge = 6



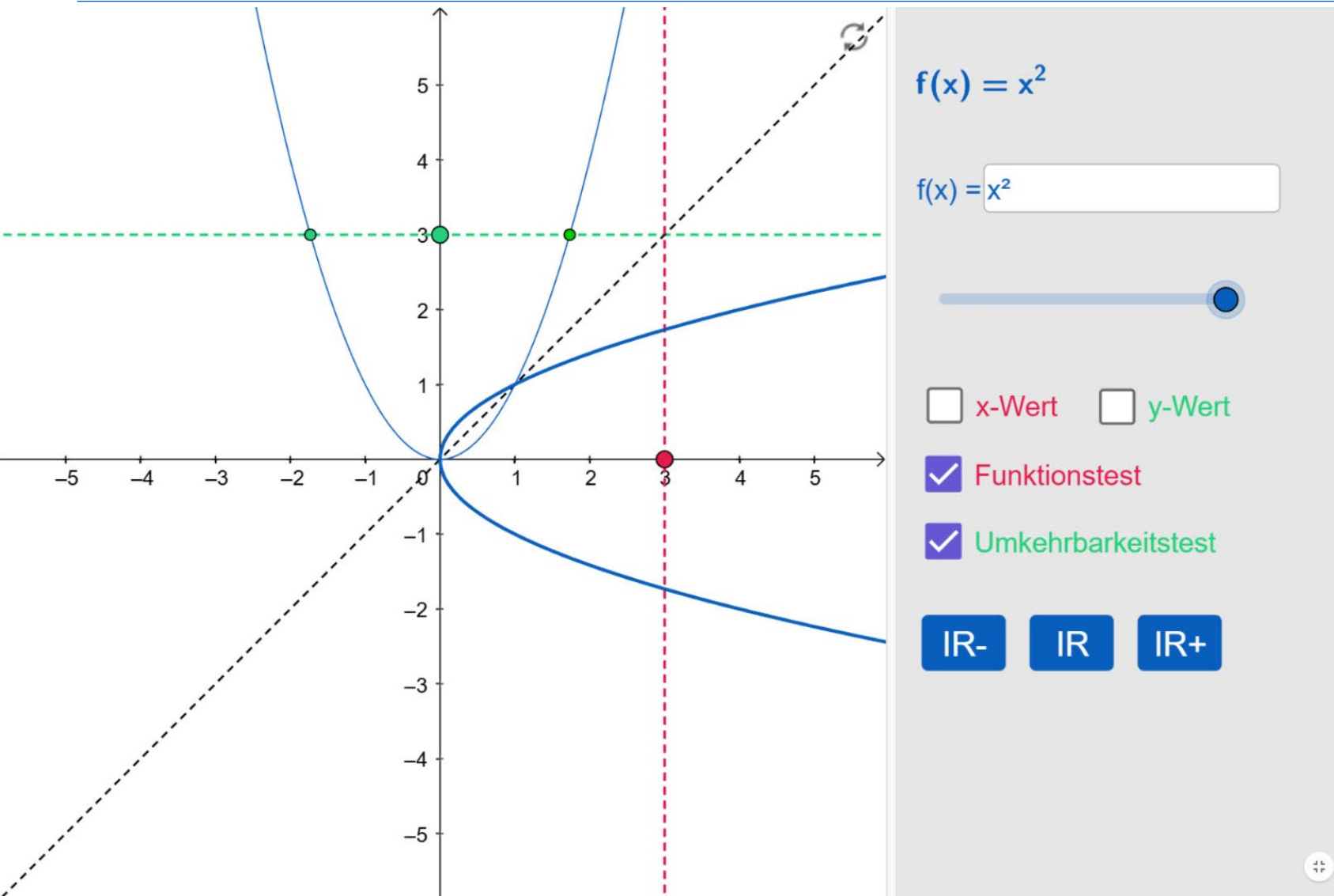
Schrittweite = 1



☒ Zuordnung  $x \mapsto y$

☒ Zuordnung  $y \mapsto x$

# Umgekehrte Zuordnung: Umkehrfunktion?

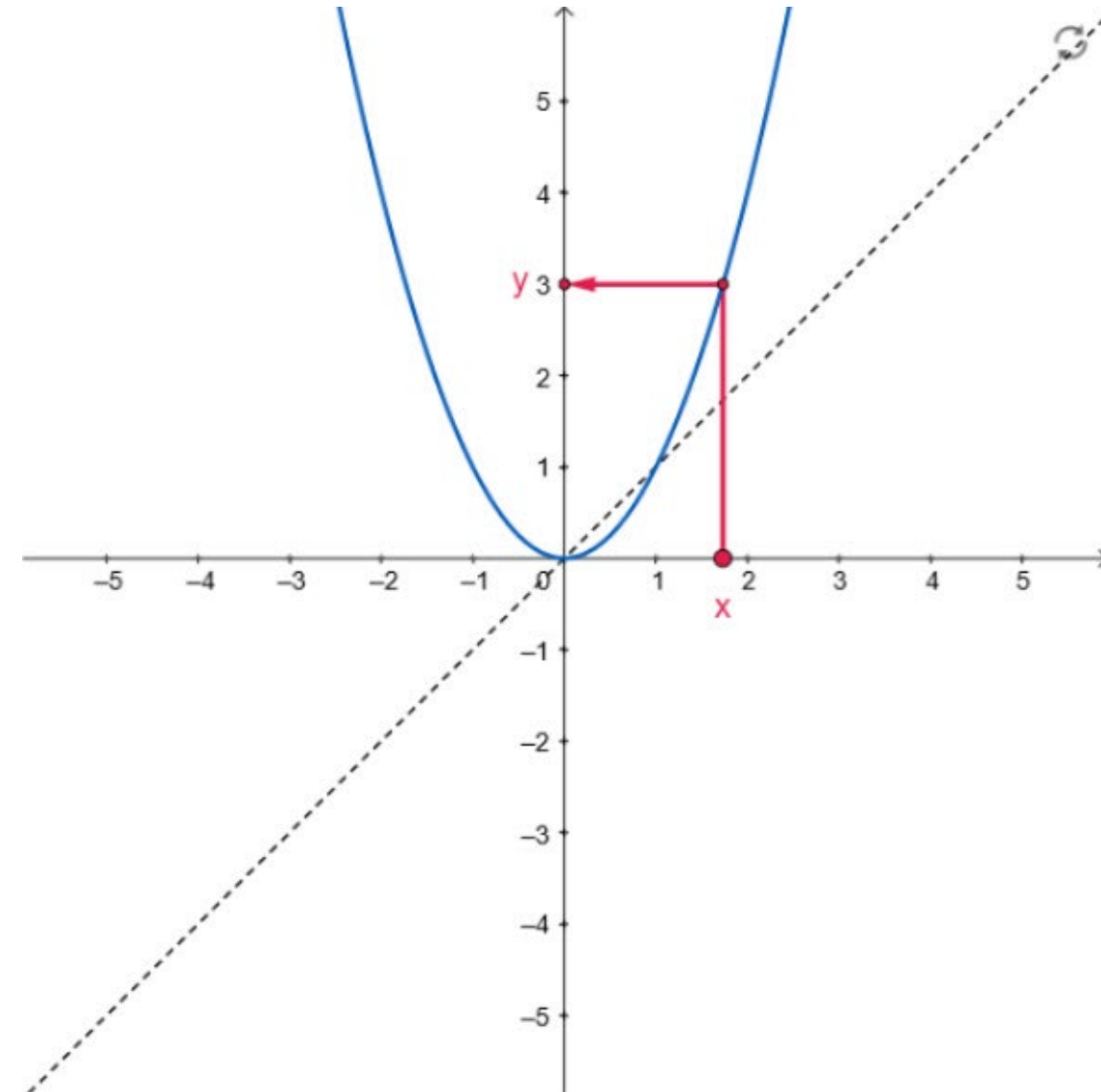


# Umgekehrte Zuordnung: Umkehrfunktion?

## Aufgaben

Gegeben ist ein Graph eines Zusammenhangs  $f$ .

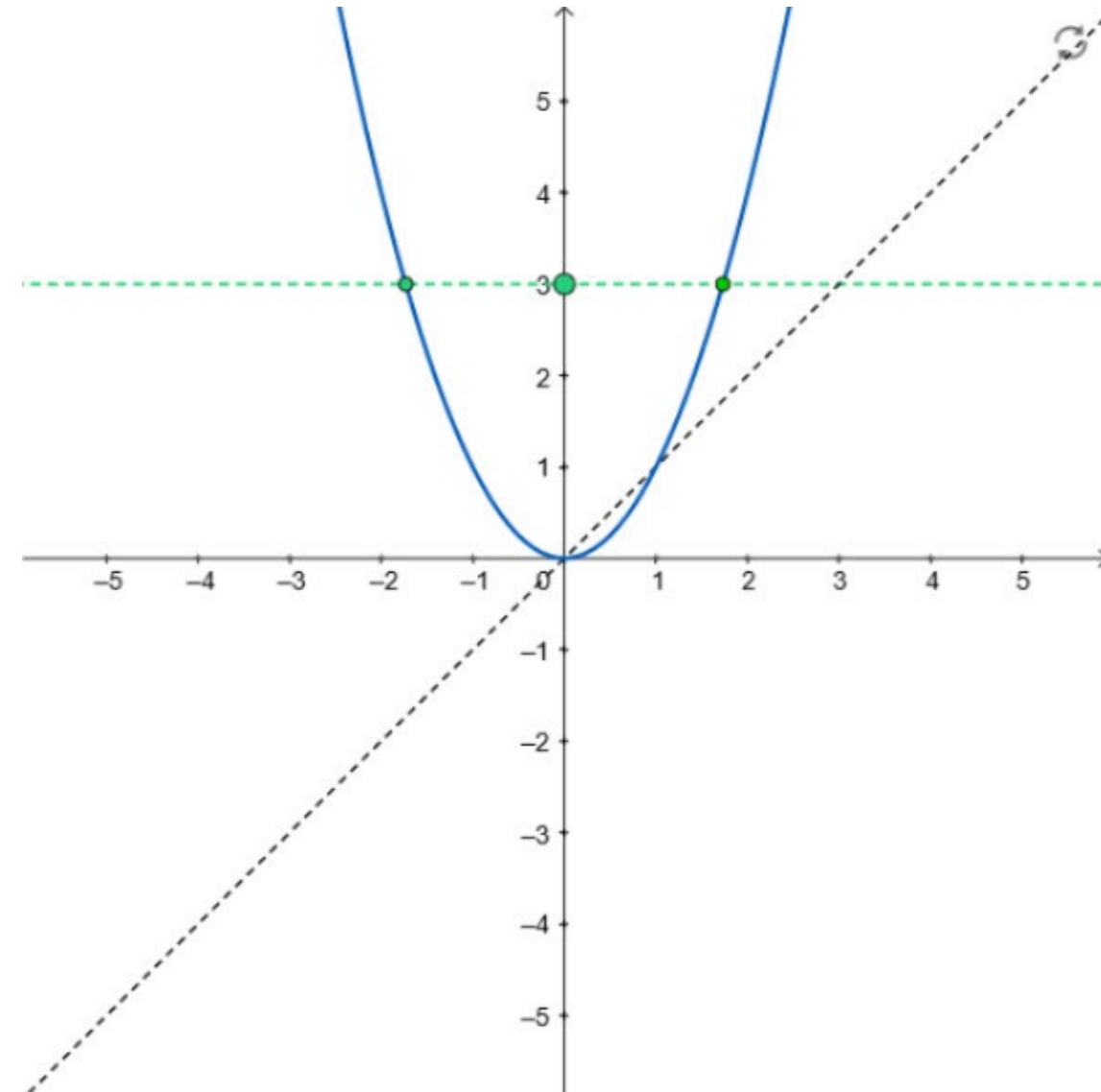
1. Überlegt, wie man überprüfen kann, ob es sich beim Graph von  $f$  um einen Funktionsgraph handelt.
2. Klickt im Applet „**Umkehrfunktion?!**“ auf das Auswahlfeld „**Funktionstest**“. Erkundet, wie ihr mit der erscheinenden Gerade überprüfen könnt, ob der Graph ein Funktionsgraph ist. Notiert euer Vorgehen und euer Ergebnis.
3. Durch die Erkenntnis aus Aufgabe 2 könnt ihr jedem  $x$ -Wert genau einen  $y$ -Wert zuordnen. Dies könnt ihr durch Anklicken des Auswahlfelds „ **$x$ -Wert**“ und Ziehen am Punkt  $x$  erkunden.



# Umgekehrte Zuordnung: Umkehrfunktion?

## Aufgaben

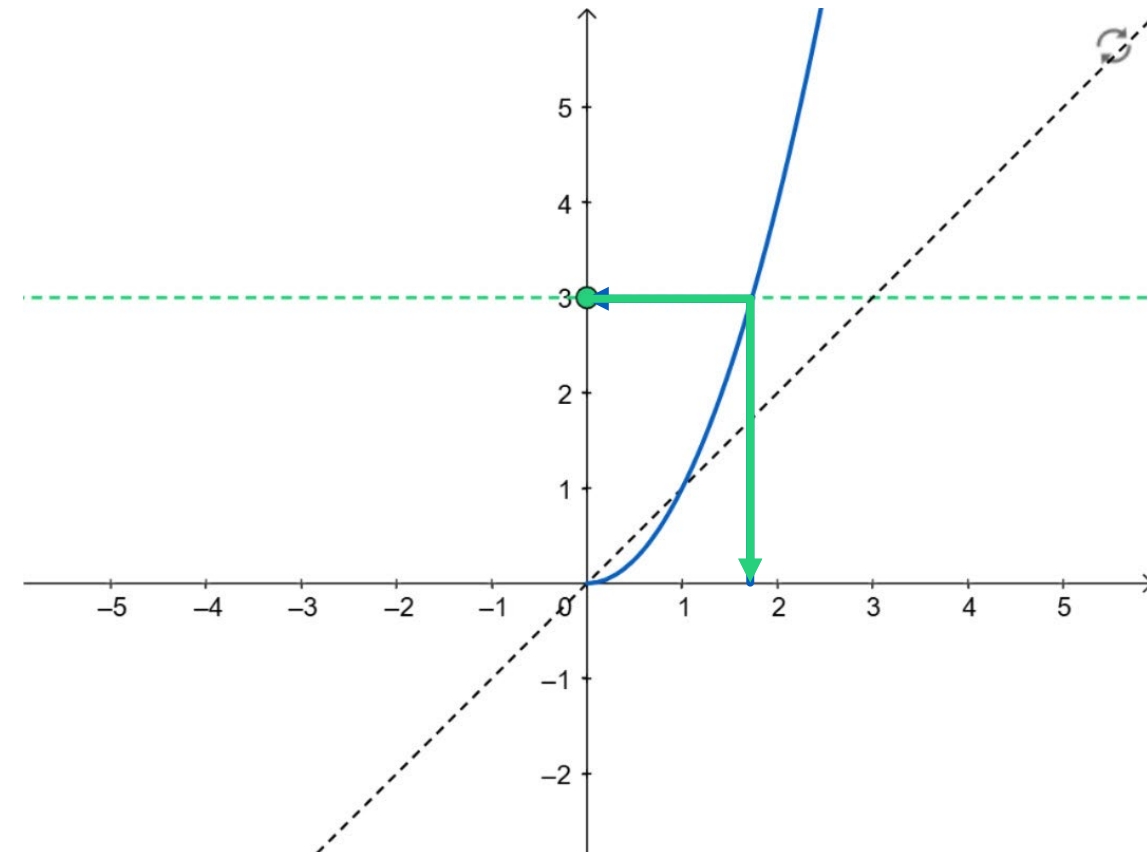
4. Kann man auch jedem  $y$ -Wert genau einen  $x$ -Wert zuordnen? Überlegt zunächst ohne das Applet zu nutzen!  
Durch Anklicken des Auswahlfelds „ $y$ -Wert“ und Ziehen am Punkt  $y$  könnt ihr das erkunden.
5. Überlegt, wie man bei einem Graph überprüfen kann, ob die umgekehrte Zuordnung  $y \mapsto x$  eindeutig ist und notiert eure Ideen.
6. Klickt auf das Auswahlfeld „Umkehrbarkeits-test“. Erkundet, wie ihr mit der erscheinenden Gerade überprüfen könnt, ob die umgekehrte Zuordnung eine Funktion ist.  
Notiert euer Vorgehen und euer Ergebnis.



# Umgekehrte Zuordnung: Umkehrfunktion?

## Aufgaben

- Überlegt, wie man den Definitionsbereich der Quadratfunktion einschränken müsste, damit die umgekehrte Zuordnung eine Funktion wird.
- Im Applet kann durch Klicken auf die Auswahlknöpfe  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^-$  bzw.  $\mathbb{R}^+$  die Definitionsmenge der Funktion  $f$  entsprechend gewählt werden. Für welche der so entstehenden Funktionen ist auch die umgekehrte Zuordnung eine Funktion, die sogenannte Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$ ?  
Notiert und begründet eure Überlegungen.

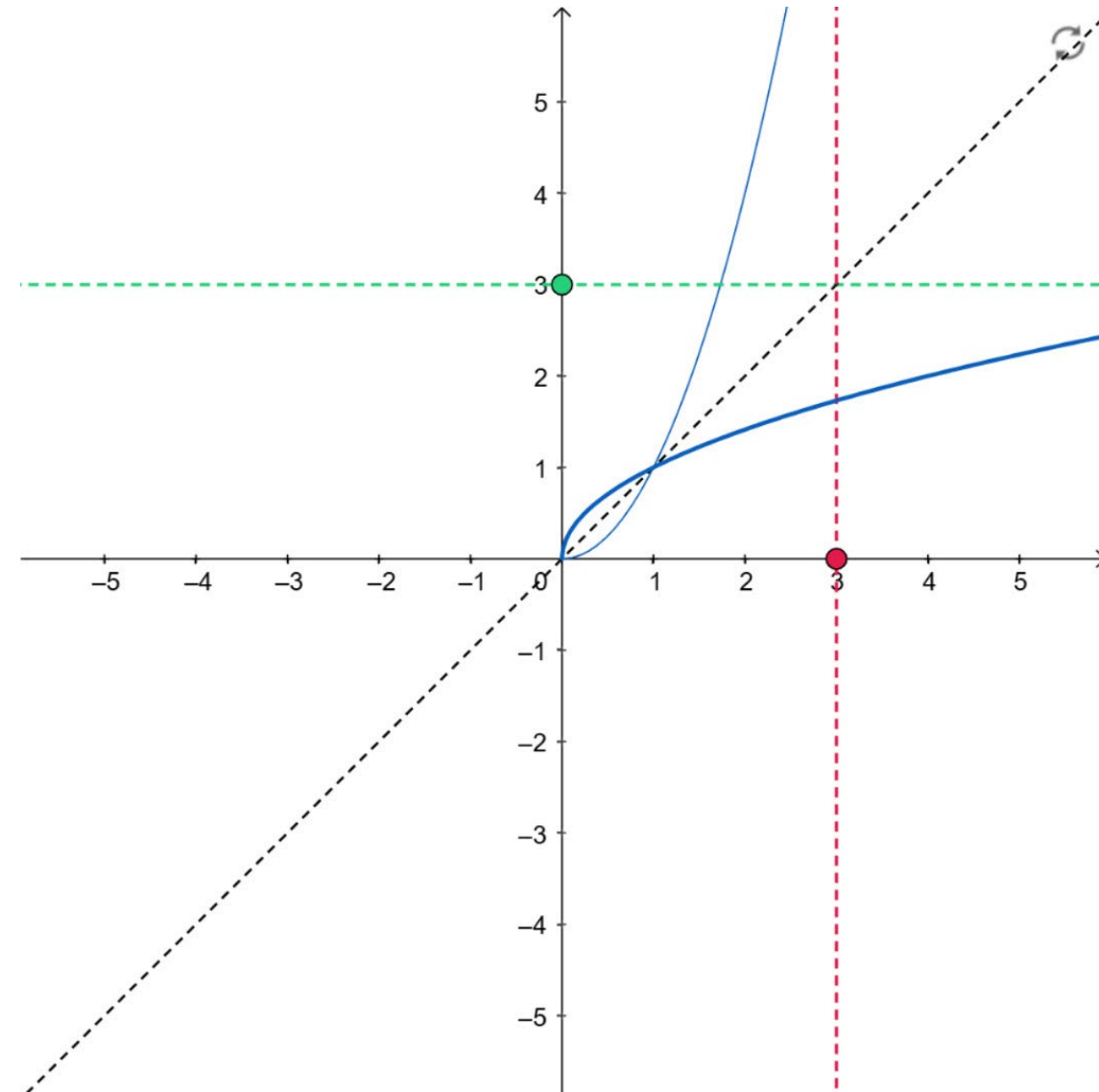


**Bemerkung:** Ist eine Funktion  $f$  bzgl. einer Definitionsmenge umkehrbar, dann ist der Graph der Funktion zugleich auch der Graph der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .  
Man kann nämlich auch von einem beliebigen  $y$ -Wert parallel zur  $x$ -Achse zum Graphen laufen und anschließend senkrecht zur  $x$ -Achse und dort den zugeordneten  $x$ -Wert ablesen.

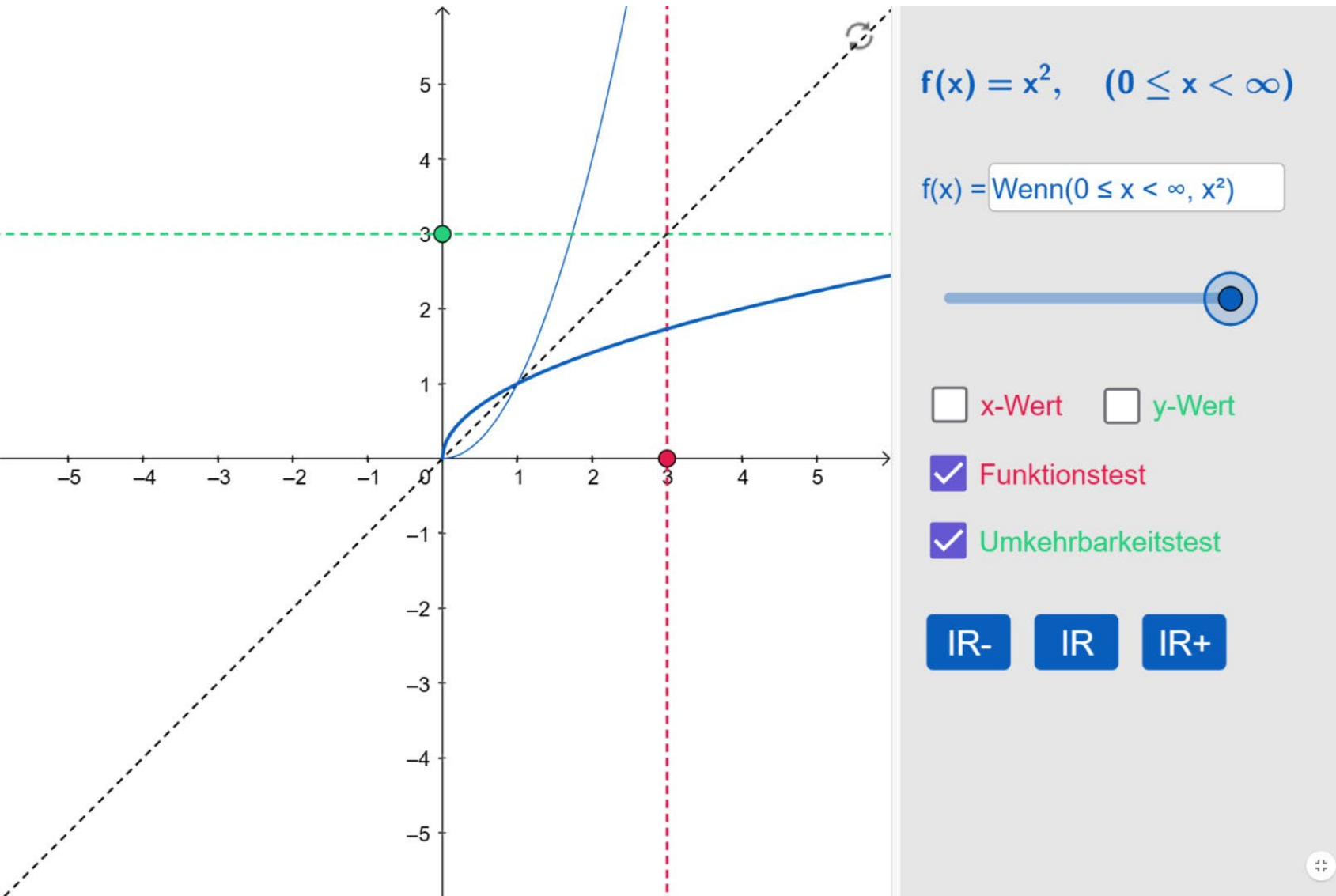
# Umgekehrte Zuordnung: Umkehrfunktion?

## Aufgaben

9. Spiegelt den Graph der Funktion  $f$  und damit das ganze Koordinatensystem an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten des Koordinatensystems, indem ihr am blauen Schieberegler -o---- zieht. Dabei wird die y-Achse auf die x-Achse abgebildet und umgekehrt.
10. Macht euch klar, dass der Umkehrbarkeitstest für die Funktion  $f$  dem Funktionstest für die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  entspricht und umgekehrt. Aktiviert dazu beide Tests und stellt die Test-Geraden jeweils auf den gleichen Wert auf der x- bzw. y-Achse ein.



# Umgekehrte Zuordnung: Umkehrfunktion?



**Schritte zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$** , wenn die Funktion  $f$  umkehrbar ist.

**Beispiel:**  $f(x) = x^2$  mit  $x \geq 0$ .

1. Schritt: Funktionsgleichung nach  $x$  auflösen

$$y = x^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$
$$\sqrt{y} = |x| \stackrel{x \geq 0}{=} x$$
$$x = \sqrt{y}$$

2. Schritt:  $x$  und  $y$  vertauschen

$$y = \sqrt{x}$$

# GeoGebra beim Lernen & Leisten

## Das Beispiel Umkehrfunktionen

- a) Lernziel
- b) Erarbeitung
- c) Sicherung**
- d) Prüfung

mategnu.de

**RPTU**

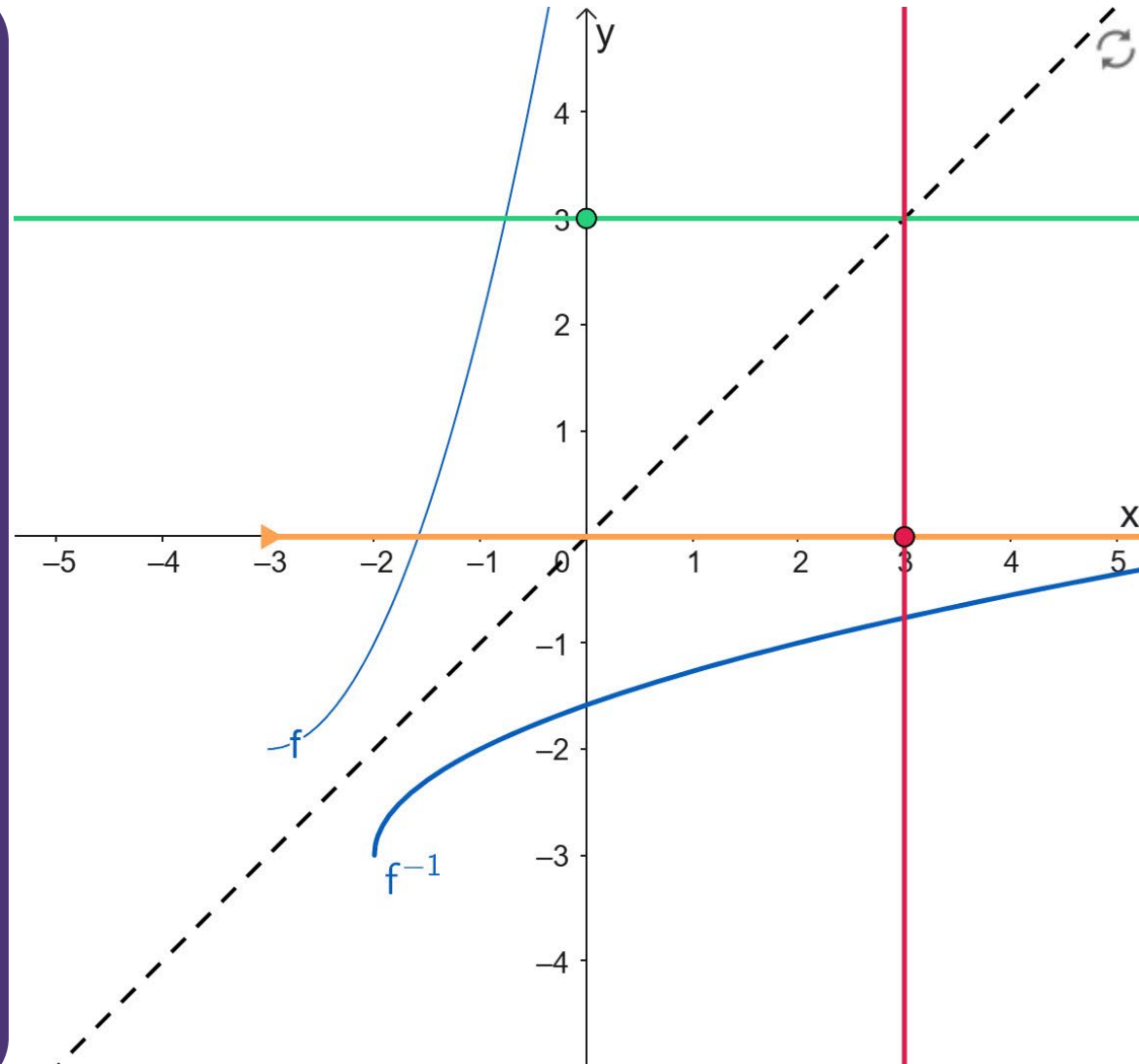


GeoGebra-Buch  
„Umkehrfunktionen“  
<https://roth.tel/umkehrfunktionen>

## Aufgaben

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = (x + 3)^2 - 2$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Überprüft, ob die Funktion  $f$  umkehrbar ist.
2. Schränkt den Definitionsbereich ggf. so ein, dass  $f$  umkehrbar wird.
3. Bestimmt Graph und Term der Umkehrfunktion.



$$f(x) = (x + 3)^2 - 2$$

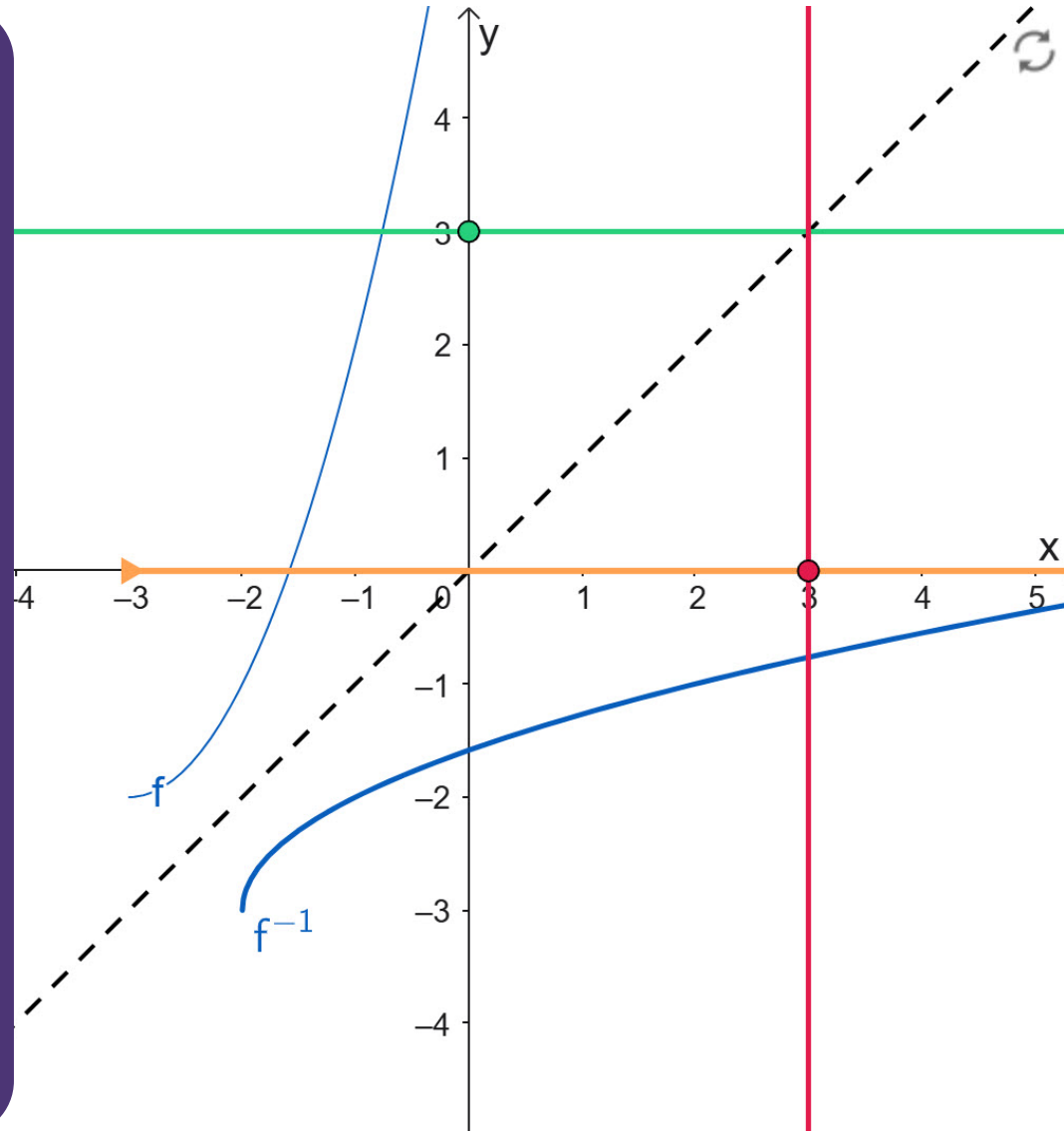
- ✓ Funktionstest
- ✓ Umkehrbarkeitstest
- ✓ Definitionsbereich einschränken
- ✓ Winkelhalbierende
- ✓ Graph der Umkehrfunktion?!



## Aufgaben

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = (x + 3)^2 - 2$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Überprüft, ob die Funktion  $f$  umkehrbar ist.
2. Schränkt den Definitionsbereich ggf. so sein, dass  $f$  umkehrbar wird.
3. Bestimmt Graph und Term der Umkehrfunktion.



**Schritte zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$** , wenn die Funktion  $f$  umkehrbar ist.

$$y = (x + 3)^2 - 2 \text{ mit } x \geq -3$$

1. Schritt: Funktionsgleichung nach  $x$  auflösen

$$\begin{aligned} y + 2 &= (x + 3)^2 & \sqrt{\phantom{x}} \\ \sqrt{y + 2} &= |x + 3| \stackrel{x \geq -3}{=} x + 3 & -3 \\ x &= \sqrt{y + 2} - 3 \end{aligned}$$

2. Schritt:  $x$  und  $y$  vertauschen

$$y = \sqrt{x + 2} - 3$$

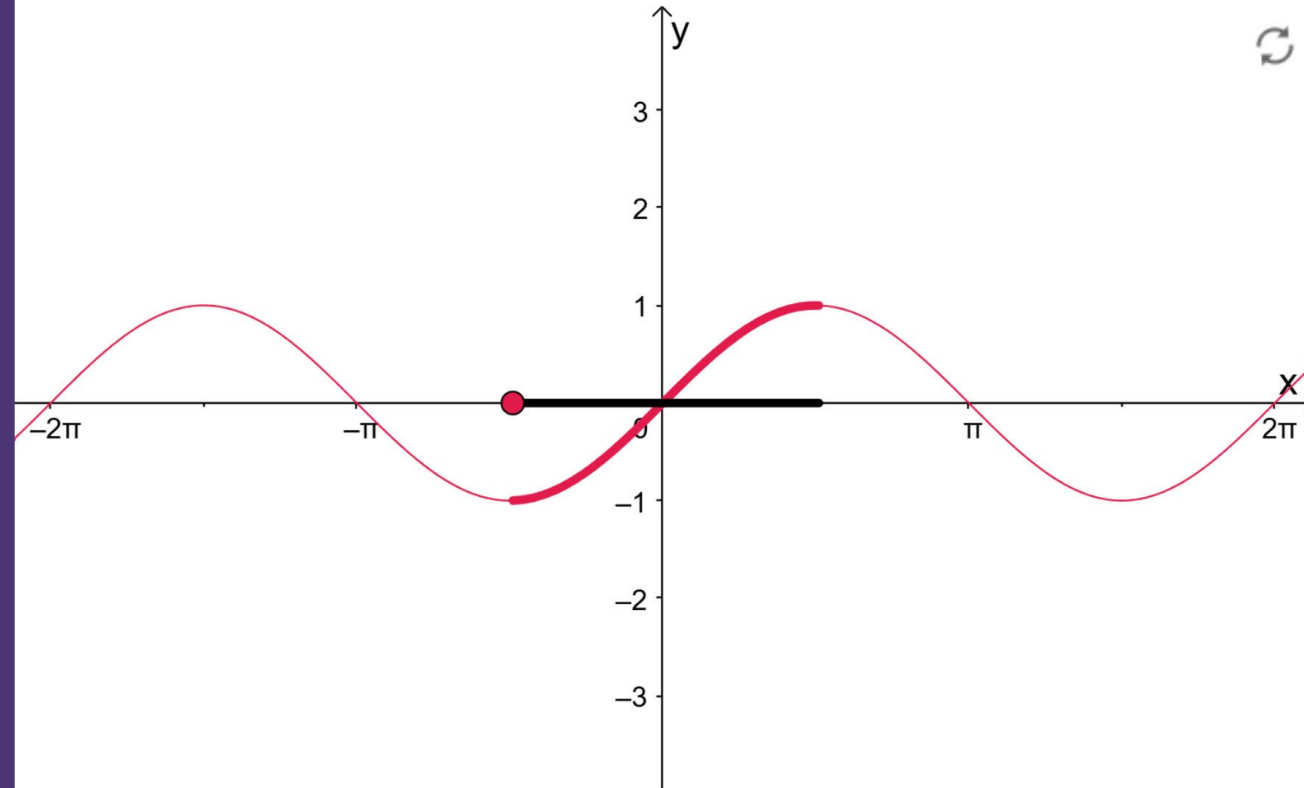
# Zum $y$ -Wert den $x$ -Wert bestimmen

## Trigonometrische Funktionen umkehren

### Aufgaben

Zu einem Sinuswert den Winkel finden.

1. Überprüft, ob die Sinusfunktion umkehrbar ist.
2. Schränkt den Definitionsbereich so sein, dass **sin( $x$ )** umkehrbar wird.
3. Bestimmt den Graph der Umkehrfunktion.
4. Was heißt das für die gesuchten Winkel?



# GeoGebra beim Lernen & Leisten

## Das Beispiel Umkehrfunktionen

- a) Lernziel
- b) Erarbeitung
- c) Sicherung
- d) Prüfung**

mategnu.de

**RPTU**



GeoGebra-Buch  
„Umkehrfunktionen“  
<https://roth.tel/umkehrfunktionen>

# Prüfungsaufgaben mit Bezug zum GeoGebra-Einsatz

Unterricht  
**mit**  
GeoGebra



Prüfung  
**ohne**  
GeoGebra

## Prüfungsaufgaben

- Standardaufgaben
- Nutzung von mit GeoGebra gewonnenen Erkenntnissen
- Bildschirmausgaben von GeoGebra interpretieren
- Beschreiben (mehrerer) Lösungswege mit GeoGebra
- ...

Unterricht  
**mit**  
GeoGebra



Prüfung  
**mit**  
GeoGebra

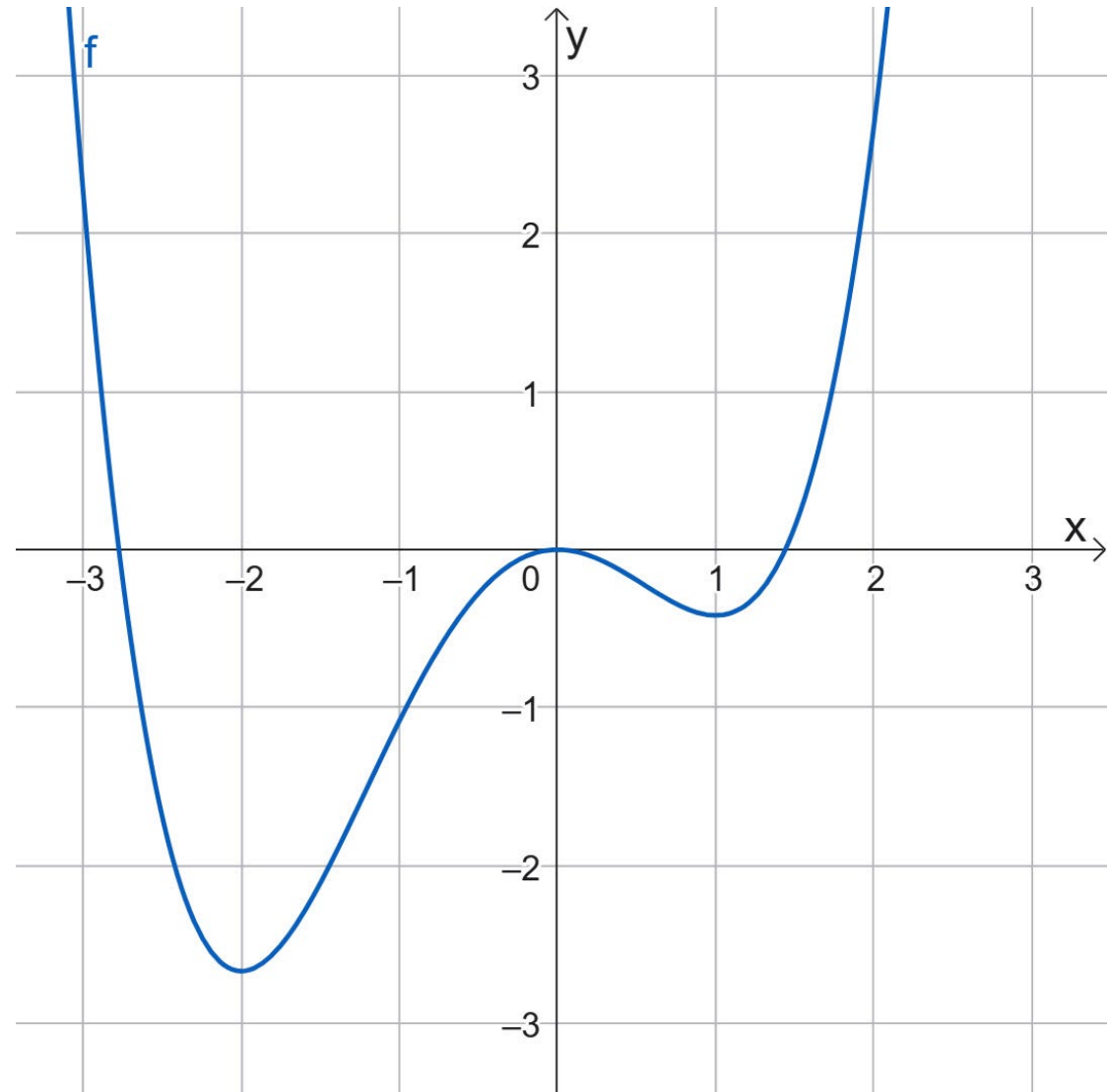
## Prüfungsaufgaben

- wie links
  - eventuell komplexer
  - GeoGebra als Kontrollinstanz
- Schwerpunkt:  
Analysieren und Argumentieren
- Problemorientierung
- Realitätsnähe
- ...

## Aufgaben

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  
 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Entscheide ob die Funktion  $f$  umkehrbar ist und erläutere, wie du zu dieser Aussage gekommen bist.
2. Nenne vier möglichst große Teilintervalle von  $\mathbb{R}$  in denen die Funktion  $f$  jeweils umkehrbar ist.
3. Bestimme für ein möglichst großes Teilintervall  $I$  des Intervalls  $[-3, 2]$  den Graph der Umkehrfunktion zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in I$ .



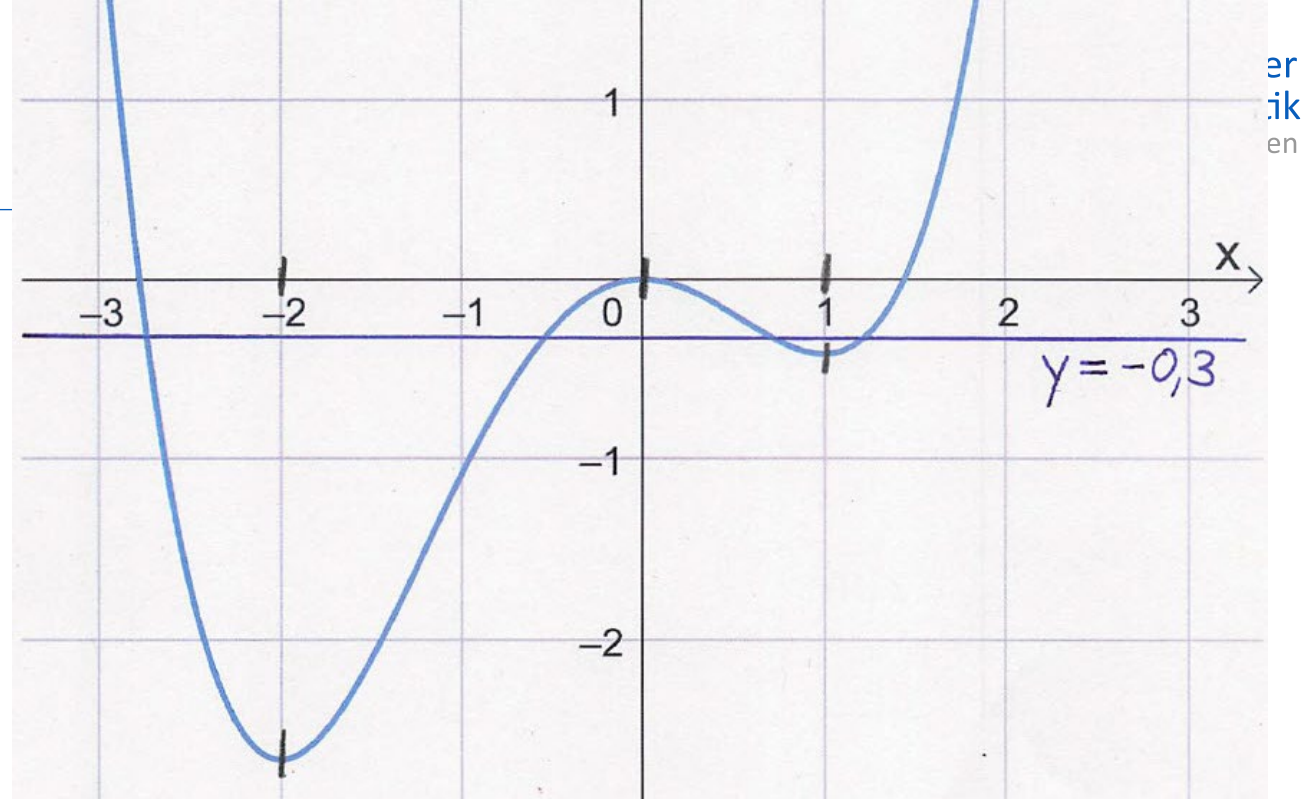
# Prüfungsaufgabe

## Schülerlösung

### Aufgaben

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Entscheide ob die Funktion  $f$  umkehrbar ist und erläutere, wie du zu dieser Aussage gekommen bist.
2. Nenne vier möglichst große Teilintervalle von  $\mathbb{R}$  in denen die Funktion  $f$  jeweils umkehrbar ist.
3. Bestimme für ein möglichst großes Teilintervall  $I$  des Intervalls  $[-3, 2]$  den Graph der Umkehrfunktion zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in I$ .



1) Die Funktion  $f$  ist auf  $\mathbb{R}$  nicht umkehrbar. Man sieht das z.B. daran, dass eine Parallele zur  $x$ -Achse den Graph von  $f$  in der Regel mehrfach schneidet. Die Gerade  $y = -0,3$  z.B. viermal.

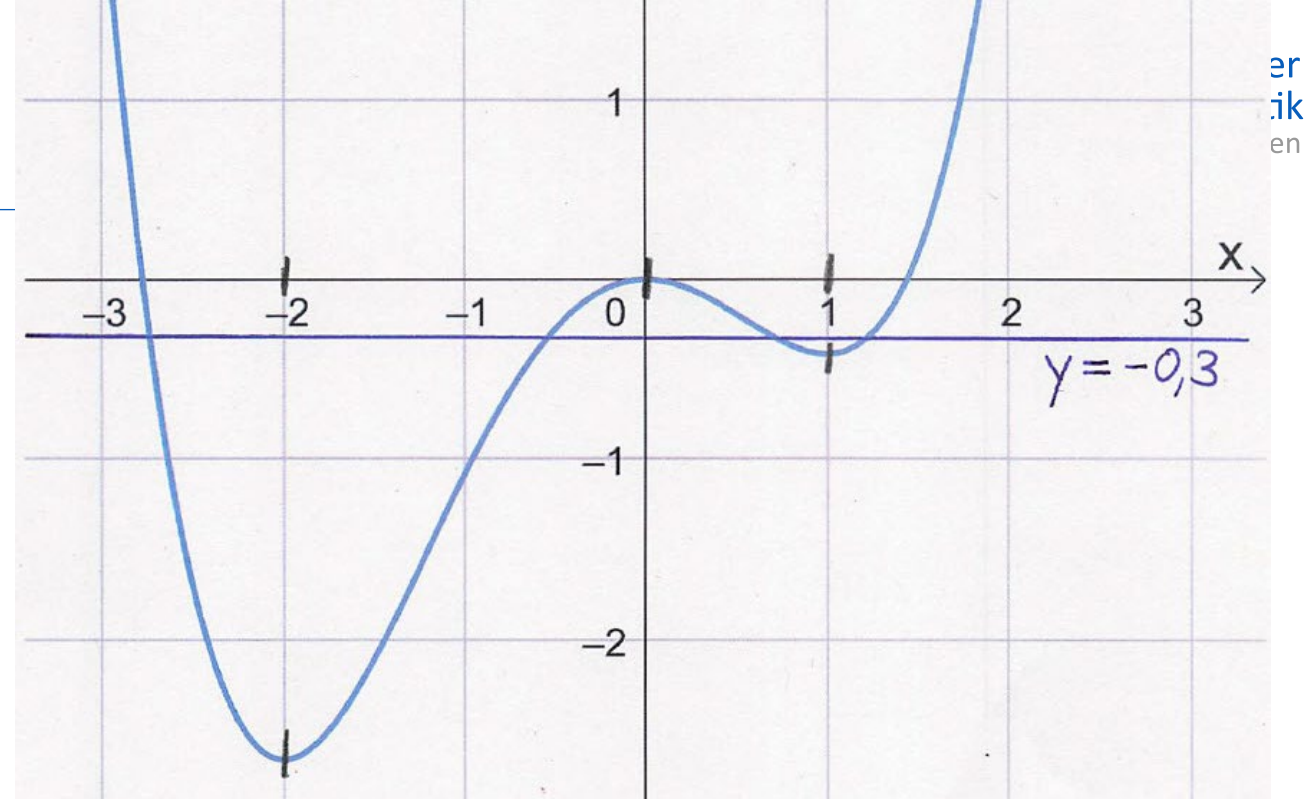
# Prüfungsaufgabe

## Schülerlösung

### Aufgaben

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Entscheide ob die Funktion  $f$  umkehrbar ist und erkläre, wie du zu dieser Aussage gekommen bist.
2. Nenne vier möglichst große Teilintervalle von  $\mathbb{R}$  in denen die Funktion  $f$  jeweils umkehrbar ist.
3. Bestimme für ein möglichst großes Teilintervall  $I$  des Intervalls  $[-3, 2]$  den Graph der Umkehrfunktion zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in I$ .



2) Auf den Intervallen  $]-\infty, -2]$ ,  $[-2, 0]$ ,  $[0, 1]$  und  $[1, \infty[$  ist die Funktion  $f$  jeweils umkehrbar.

# Prüfungsaufgabe

## Schülerlösung

### Aufgaben

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Entscheide ob die Funktion  $f$  umkehrbar ist und erkläre, wie du zu dieser Aussage gekommen bist.
2. Nenne vier möglichst große Teilintervalle von  $\mathbb{R}$  in denen die Funktion  $f$  jeweils umkehrbar ist.
3. Bestimme für ein möglichst großes Teilintervall  $I$  des Intervalls  $[-3, 2]$  den Graph der Umkehrfunktion zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in I$ .

3)

| $x$  | $f(x)$           | $x$              | $f^{-1}(x)$ |
|------|------------------|------------------|-------------|
| -2   | $-2\frac{2}{3}$  | $-2\frac{2}{3}$  | -2          |
| -1,5 | -2,11            | -2,11            | -1,5        |
| -1   | $-1\frac{1}{12}$ | $-1\frac{1}{12}$ | -1          |
| -0,5 | -0,28            | -0,28            | -0,5        |
| 0    | 0                | 0                | 0           |

Der Graph der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  wird mit den Werten der rechten Tabelle über einzelne Punkte im Koordinatensystem als Freihand-Kurve skizziert. Zusätzlich wird ausgenutzt, dass die Graphen an  $w$  gespiegelt sind.

# Prüfungsaufgabe

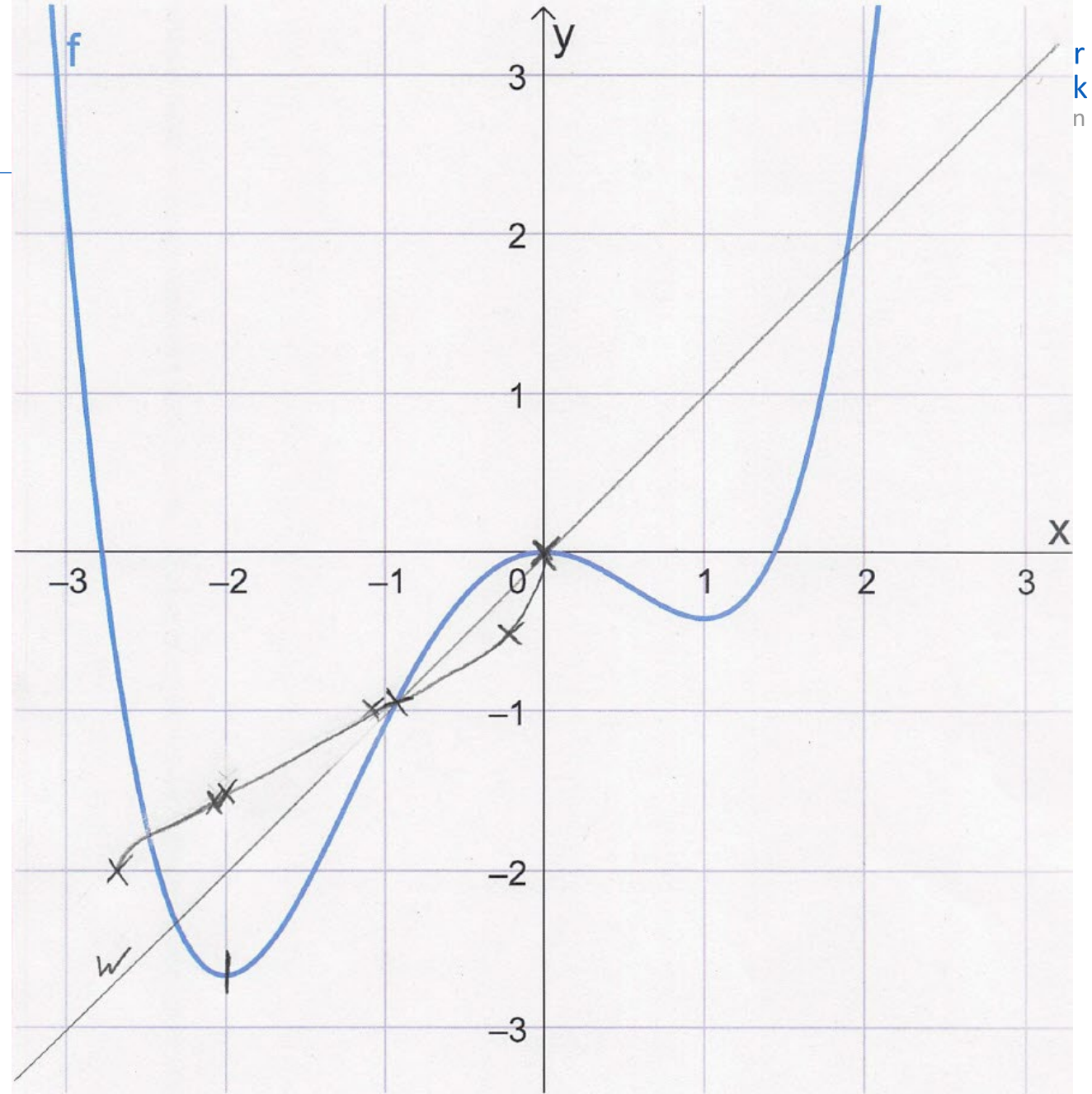
## Schülerlösung

### Aufgaben

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

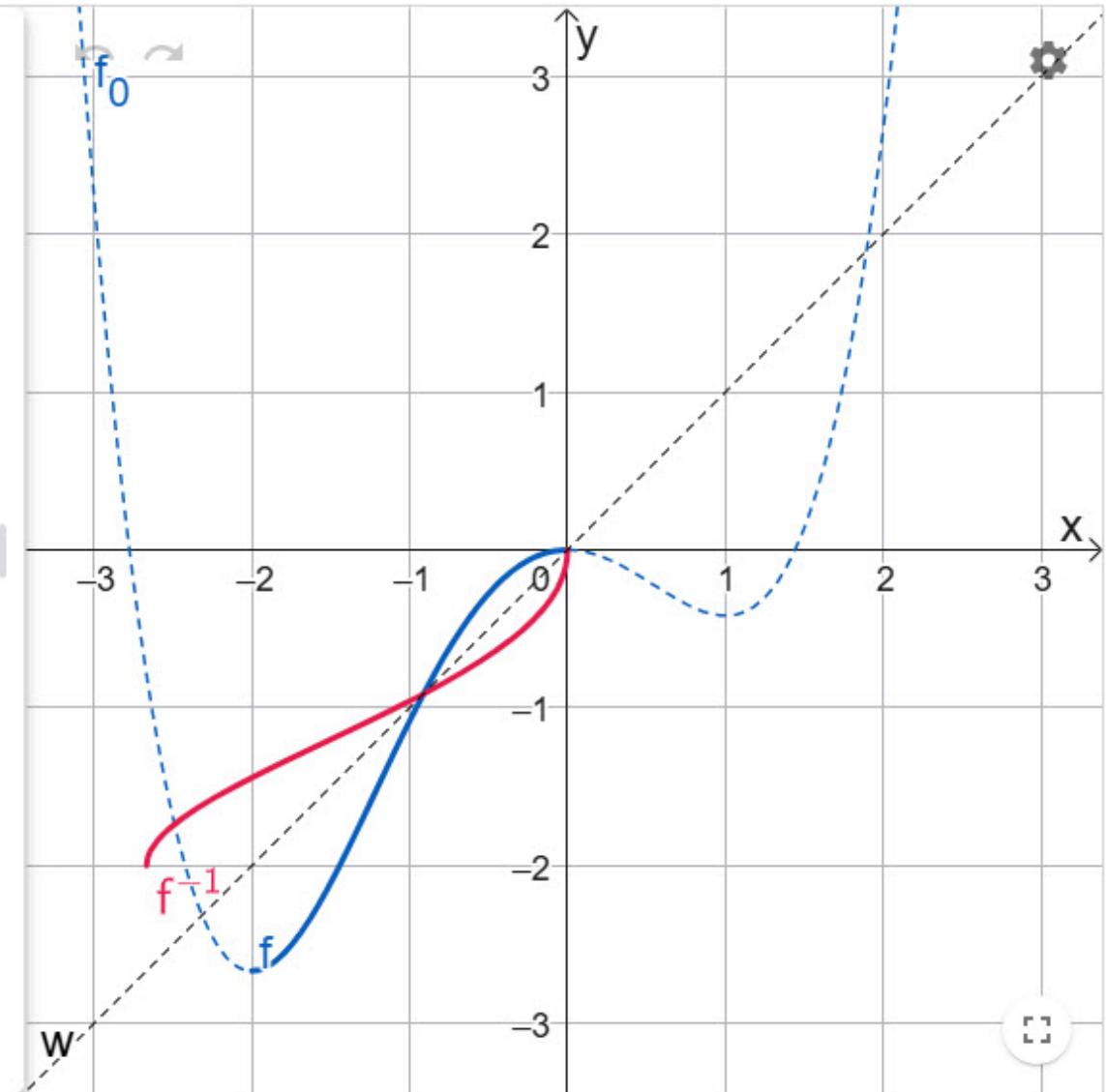
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

1. Entscheide ob die Funktion  $f$  umkehrbar ist und erläutere, wie du zu dieser Aussage gekommen bist.
2. Nenne vier möglichst große Teilintervalle von  $\mathbb{R}$  in denen die Funktion  $f$  jeweils umkehrbar ist.
3. Bestimme für ein möglichst großes Teilintervall  $I$  des Intervalls  $[-3, 2]$  den Graph der Umkehrfunktion zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$  und  $x \in I$ .



# Prüfungsaufgabe: Lösung mit GeoGebra

|                                                                                   |                                                                                     |                                                                                                                                                                                             |                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|   |    | $f_0(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$                                                                                                                                            |    |
|   |                                                                                     | $f(x) = \text{Wenn}(-2 \leq x \leq 0, f_0(x))$                                                                                                                                              |    |
|   |    | $= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2, \quad (-2 \leq x \leq 0)$                                                                                                                         |                                                                                       |
|   |    | $w: y = x$                                                                                                                                                                                  |    |
|   |                                                                                     | $f_1 = \text{Spiegle}(f, w)$                                                                                                                                                                |    |
|   |    | $x = 0t + \text{Wenn}\left(-2 \leq t \leq 0, \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2\right)$ $=$ $y = t + 0 \text{ Wenn}\left(-2 \leq t \leq 0, \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2\right)$ |                                                                                       |
|                                                                                   |  | $\text{Text1} = "f^{-1}"$                                                                                                                                                                   |  |
|  |  | Eingabe... <a href="https://www.geogebra.org/m/pahbcd4z">https://www.geogebra.org/m/pahbcd4z</a>       |                                                                                       |



---

# Kontakt

---

**Prof. Dr. Jürgen Roth**

**RPTU**

Rheinland-Pfälzische Technische Universität  
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

[j.roth@rptu.de](mailto:j.roth@rptu.de)

[juergen-roth.de](http://juergen-roth.de)

[dms.nuw.rptu.de](http://dms.nuw.rptu.de)

[geogebra-rlp.de](http://geogebra-rlp.de)



**RPTU**