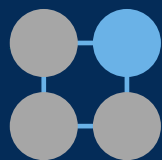


Funktionale Zusammenhänge verständnisorientiert lehren & lernen

Der Beitrag von GeoGebra



GeoGebra-Institut
Landau (RLP)



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Prof. Dr. Jürgen Roth

15.03.2026 GeoGebra-Tag RLP 2026, Speyer

R
P

TU
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Roth, J. & Lichti, M. & (2021). **Funktionales Denken entwickeln und fördern.** Mathematik lehren, 226, 2-9



Roth, J.: **Publikationen zum Funktionalen Denken**
<https://juergen-roth.de/publikationen/#publikationen-thematisch>



Lichti, M. & Roth, J. (2025). **Funktionales Denken mit Simulationen fördern**, <https://juergen-roth.de/funktionale-zusammenhaenge/>



Roth, J.: **GeoGebraBuch Funktionen**
<https://roth.tel/funktionen/>



Funktionale Zusammenhänge

verständnisorientiert lehren und lernen
Der Beitrag von GeoGebra

1. Grundvorstellungen
und Verständnisanker
2. Darstellungsformen
3. Funktionsgraphen verstehen

1

Grundvorstellungen & Verständnisanker



Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

Primäre Grundvorstellungen

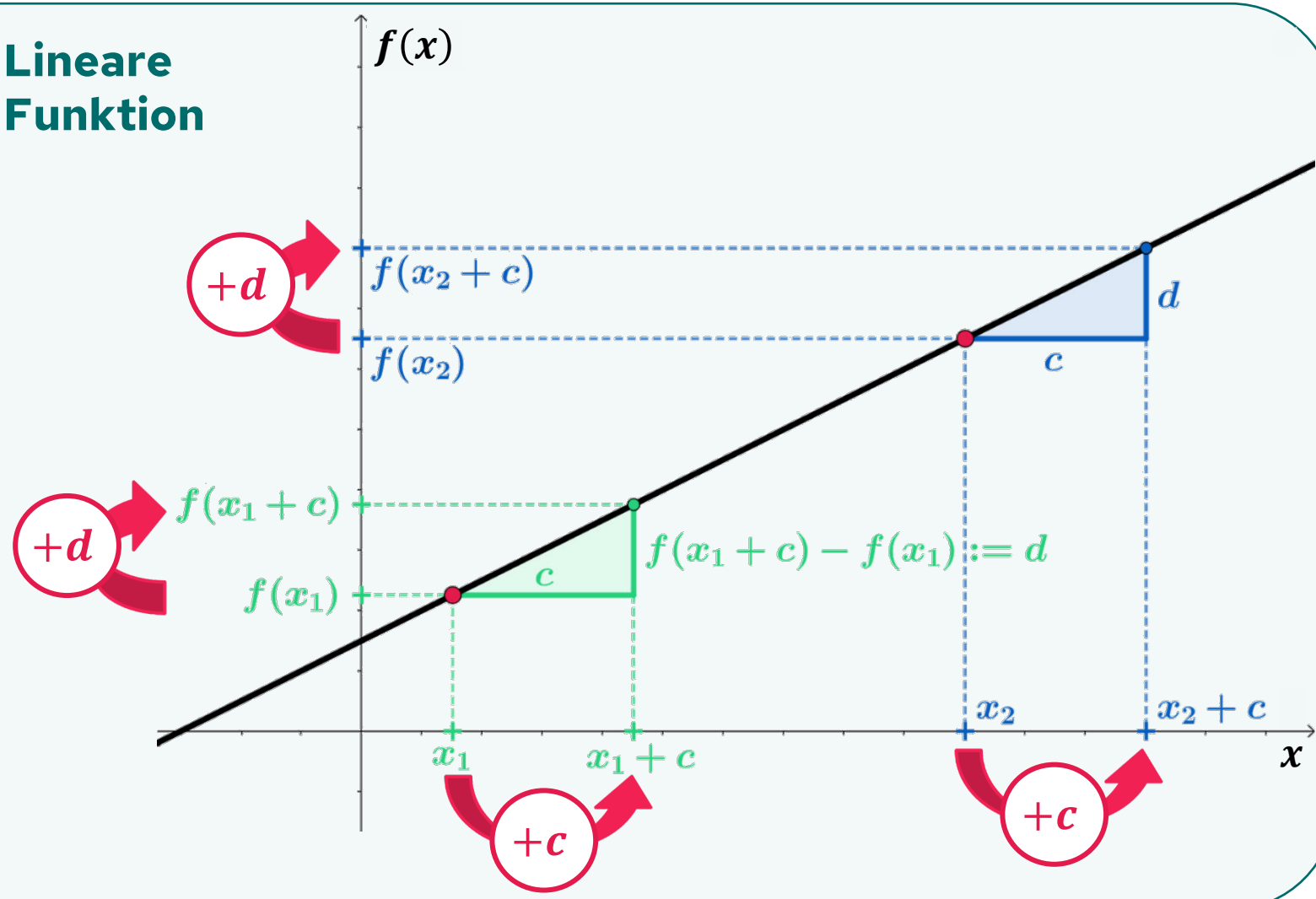
Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen



Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen

Lineare Funktion



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto f(x) = a \cdot x + b$$

$$f(x + c) \\ = a \cdot (x + c) + b$$

$$\stackrel{DG}{=} a \cdot x + a \cdot c + b$$

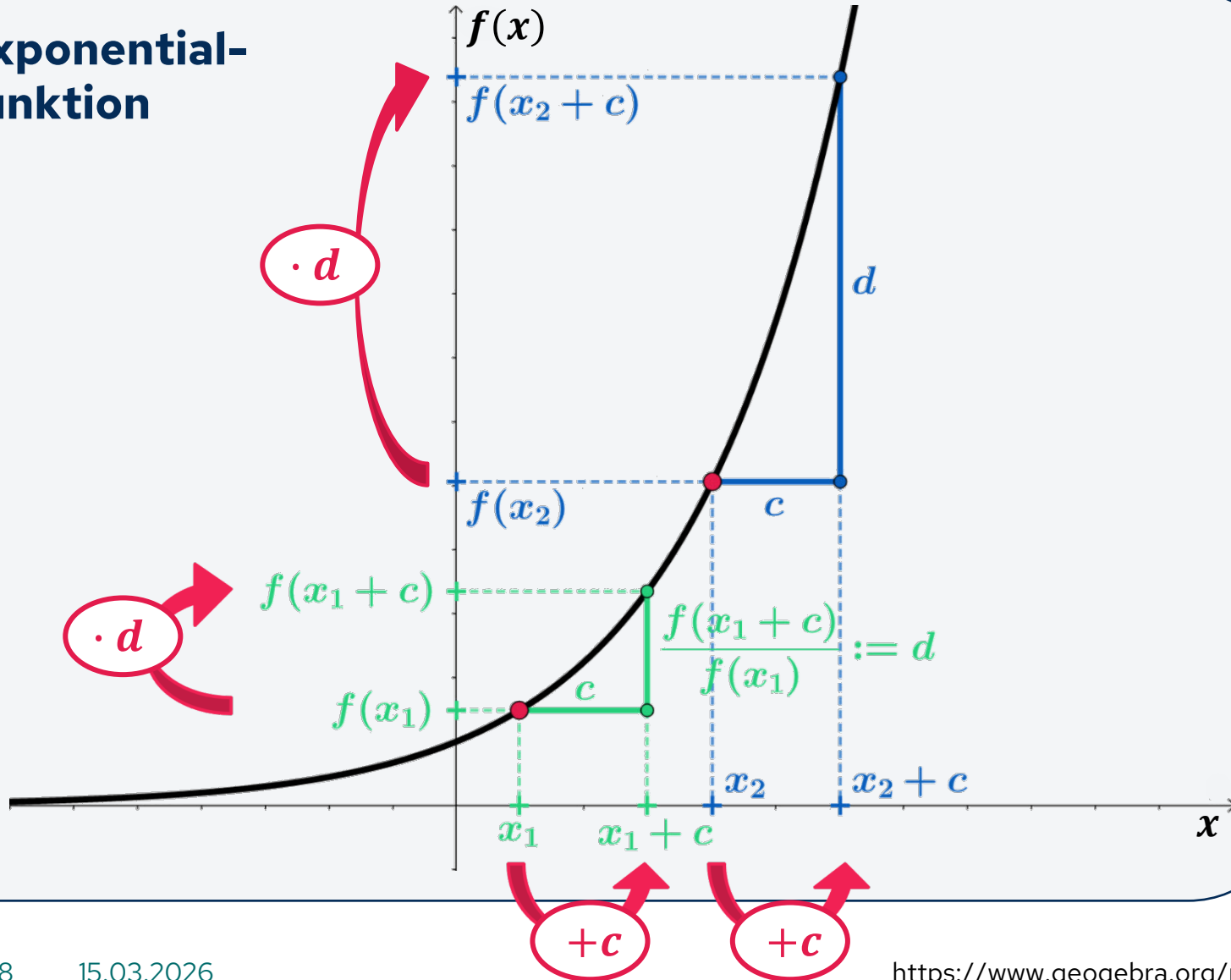
$$\stackrel{KG}{=} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen

Exponential- funktion



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \\ x \mapsto f(x) = a^x$$

$$f(x+c)$$

$$= a^{x+c}$$

$$= \underbrace{a^x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{a^c}_{:=d}$$

$$= f(x) \cdot d$$

Verständnisanker

Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt.



Eine **Situation** eignet sich als Verständnisanker, wenn

- sie leicht durchschaut werden kann und
- alle für ein Verständnis wesentlichen Strukturelemente vorkommen und gedeutet werden können.

Ziel des Aufbaus eines Verständnisankers

Lernende können in neuen Situationen, in denen der mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.



Beispiel

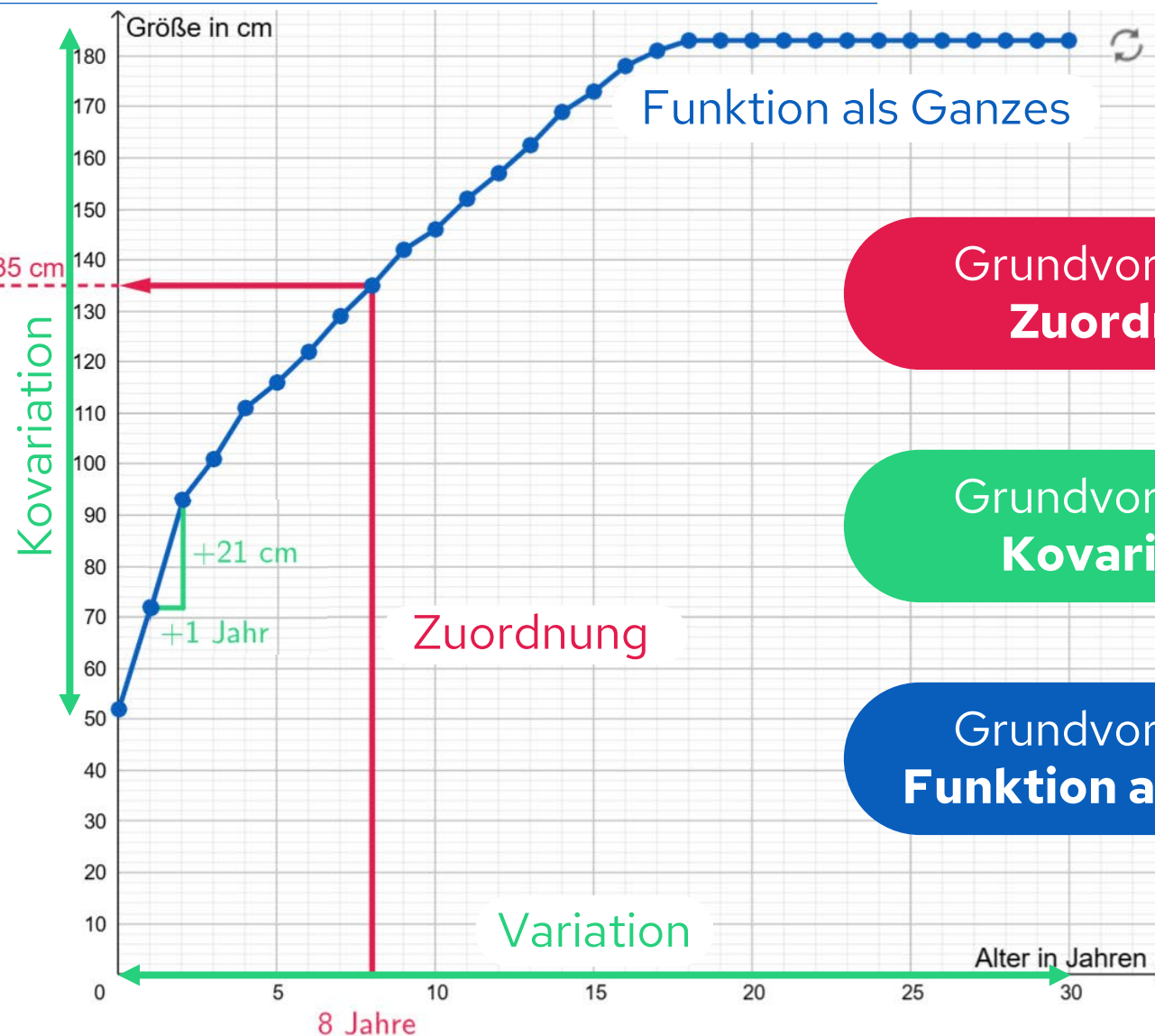
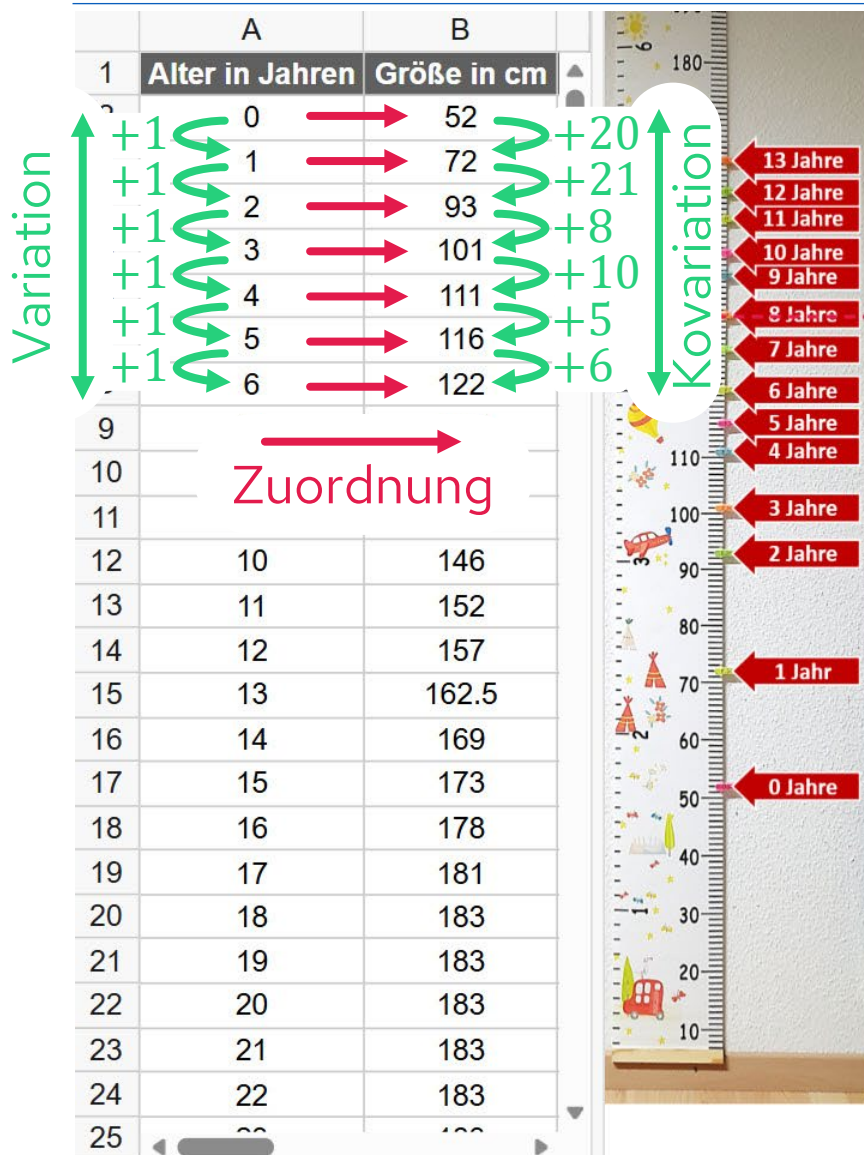
Ein Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Funktionen ist der Zusammenhang zwischen dem Lebensalter und der Körpergröße eines Menschen.

Näheres zu diesem Verständnisanker:
Roth, J. & Lichti, M. (2021).

Funktionales Denken entwickeln und fördern.
Mathematik lehren, 226, 2-9.

<https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w> 

Zusammenhang: Alter $\mapsto$ Körpergröße



Grundvorstellung
Zuordnung

Grundvorstellung
Kovariation

Grundvorstellung
Funktion als Ganzes

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches
Beispiel als
Verständnisanker



Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

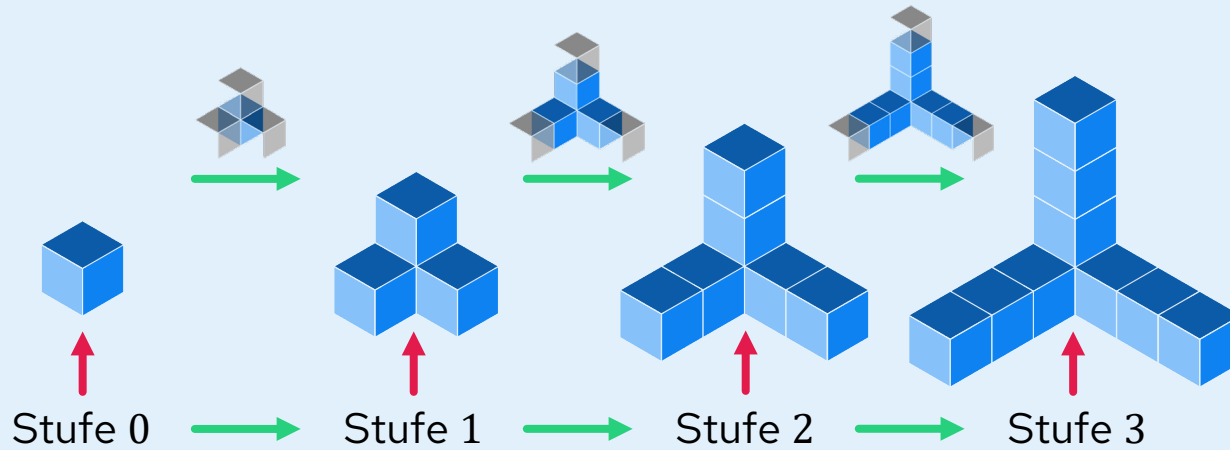
2

Darstellungsformen

Grundvorstellungen zu Funktionen an Darstellungsformen ausbilden

Kovariation

Zuordnung
Variation



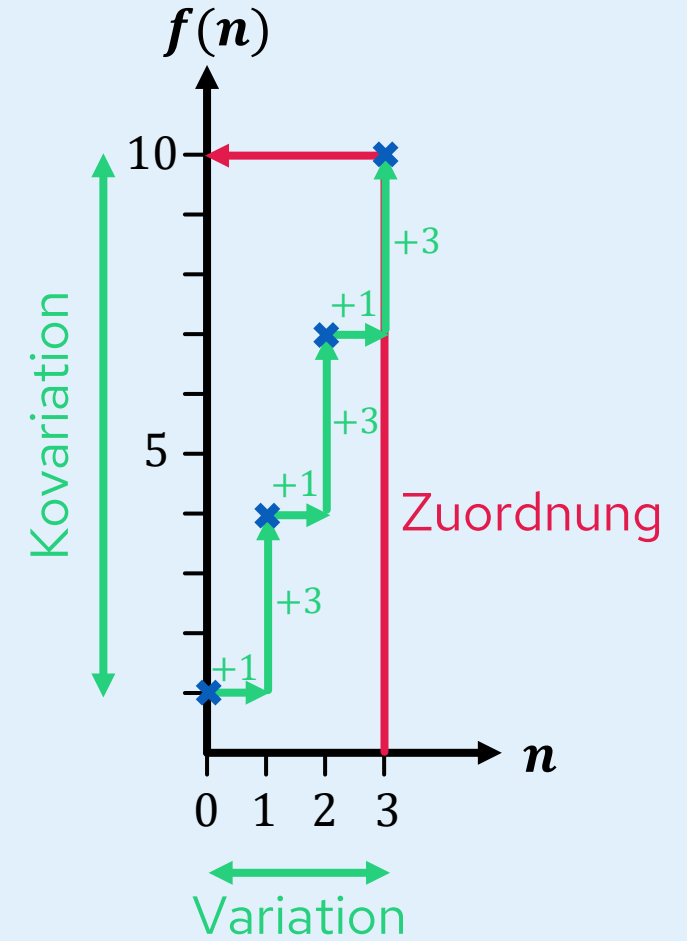
$$f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ n \mapsto 3n + 1$$

Zuordnung

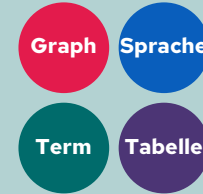
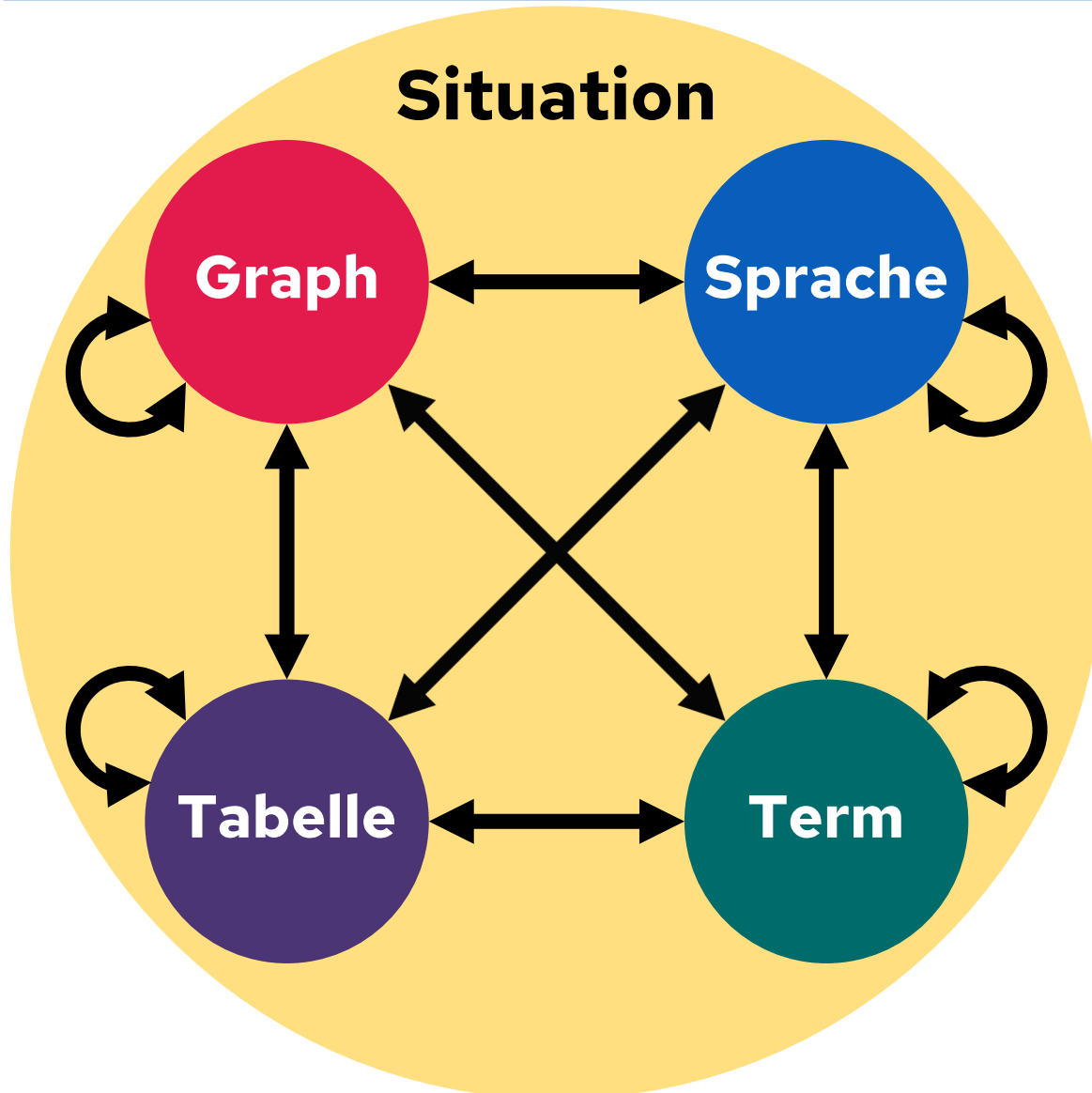
n	$f(n)$
0	1
1	4
2	7
3	10

Variation: $+1$ (between n values), $+3$ (between $f(n)$ values)

Zuordnung



Funktionale Zusammenhänge in Situationen: **Darstellungsformen**



Darstellungsformen



**Mit bzw. in einer
Darstellung arbeiten**



Darstellungswechsel

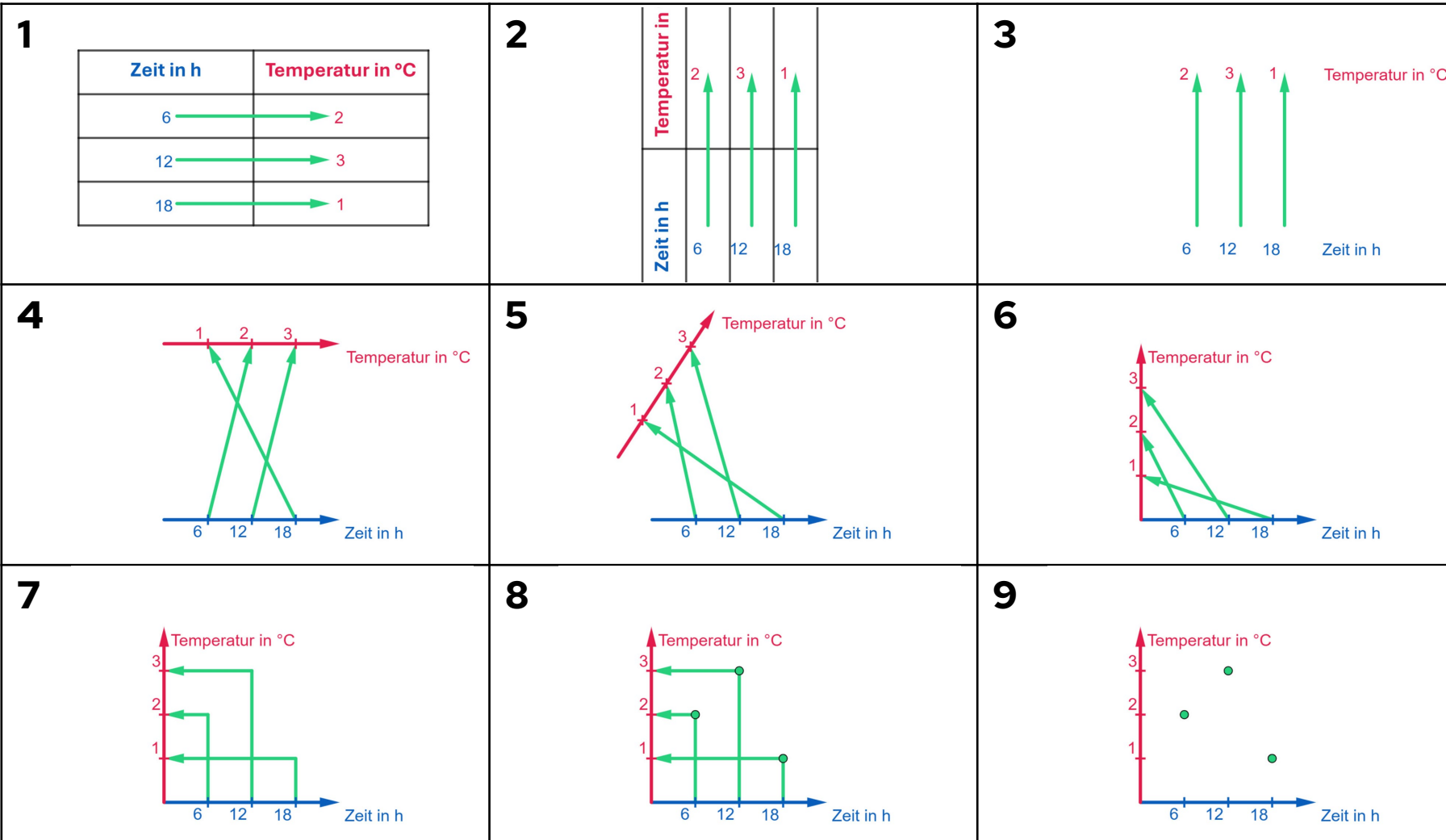
Grundvorstellung ↔ Darstellungsform

Darstellungs- form Grund- vorstellung	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	Tätigkeit: Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet. Hauptzweck: Markante Punkte erfassen	Tätigkeit: Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet. Hauptzweck: Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen	Tätigkeit: Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet. Hauptzweck: Bestimmen einzelner Werte	Tätigkeit: Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen. Hauptzweck: Erfassen einzelner Werte
Kovariation	Tätigkeit: Unterteilung in Abschnitte mit unterschiedlichem Änderungsverhalten Hauptzweck: Änderungsverhalten qualitativ erfassen	Tätigkeit: Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung. Hauptzweck: Änderungsverhalten quantifizieren	Tätigkeit: Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen. Hauptzweck: Änderungsverhalten quantifizieren	Tätigkeit: Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten. Hauptzweck: Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Sicht als Ganzes	Tätigkeit: Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes / in Teilen typisieren. Hauptzweck: Charakteristischen Verlauf erfassen	Tätigkeit: Differenzen-, Produkt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen. Hauptzweck: Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	Tätigkeit: Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren. Hauptzweck: Charakteristika quantitativ erfassen	Tätigkeit: Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus. Hauptzweck: Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

3

Funktionsgraphen verstehen

Darstellungsformen erfassen: Das Beispiel Funktionsgraph



Bemerkung

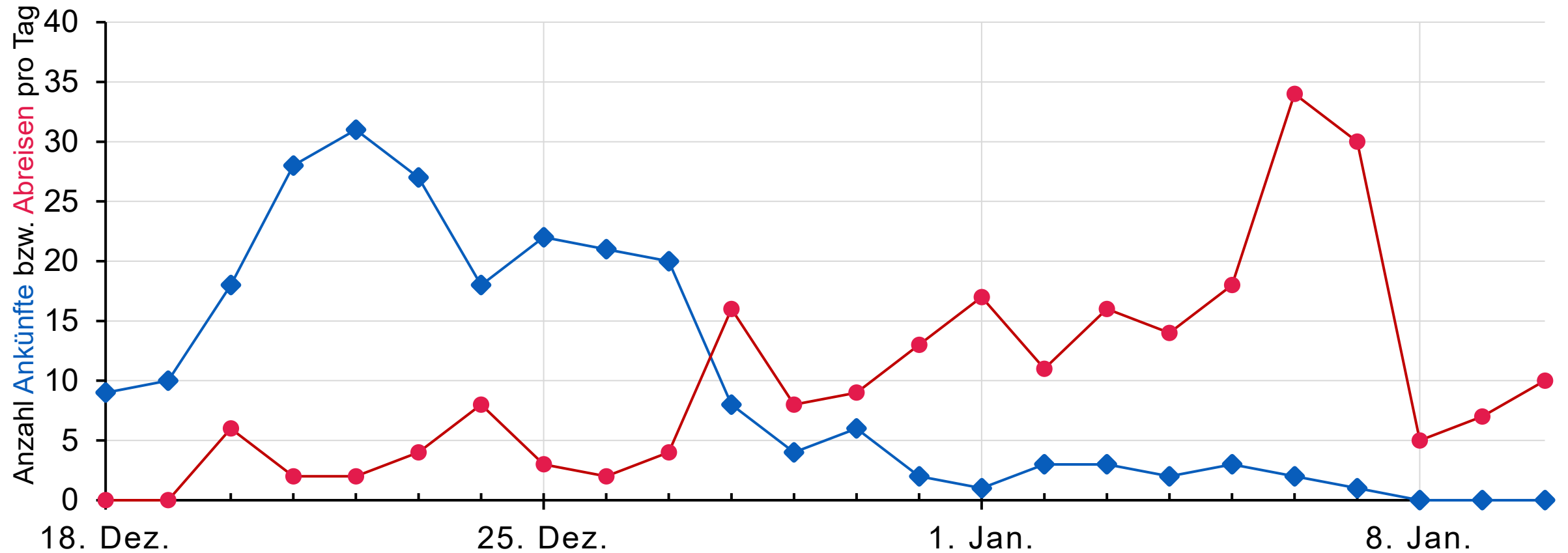
Das Applet zeigt, wie aus den Zuordnungen von Zeit und Temperatur, die oben links in der Tabelle dargestellt sind, der Funktionsgraph der Zeit-Temperatur-Funktion unten rechts entsteht.

Dafür müssen die Elemente der beteiligten Mengen jeweils der Größe nach angeordnet werden können.

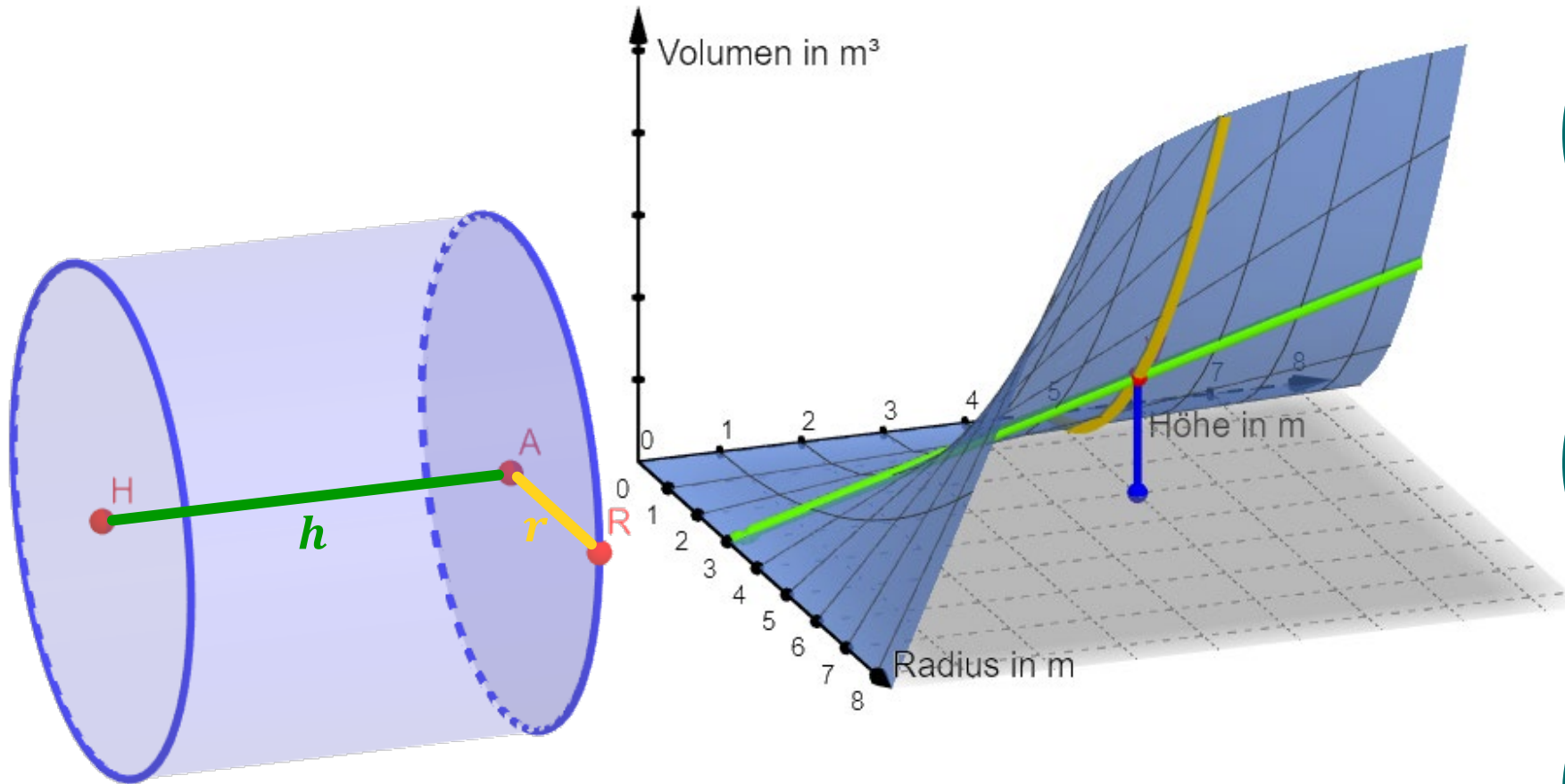
Grundvorstellung
Zuordnung

Ankünfte und Abreisen im Alpenhotel

◆ Ankünfte (Anzahl am Tag) ● Abreisen (Anzahl am Tag)



Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolume

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(h) = (r^2 \pi) \cdot h$$

$$V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$$

R
P **TU**

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen



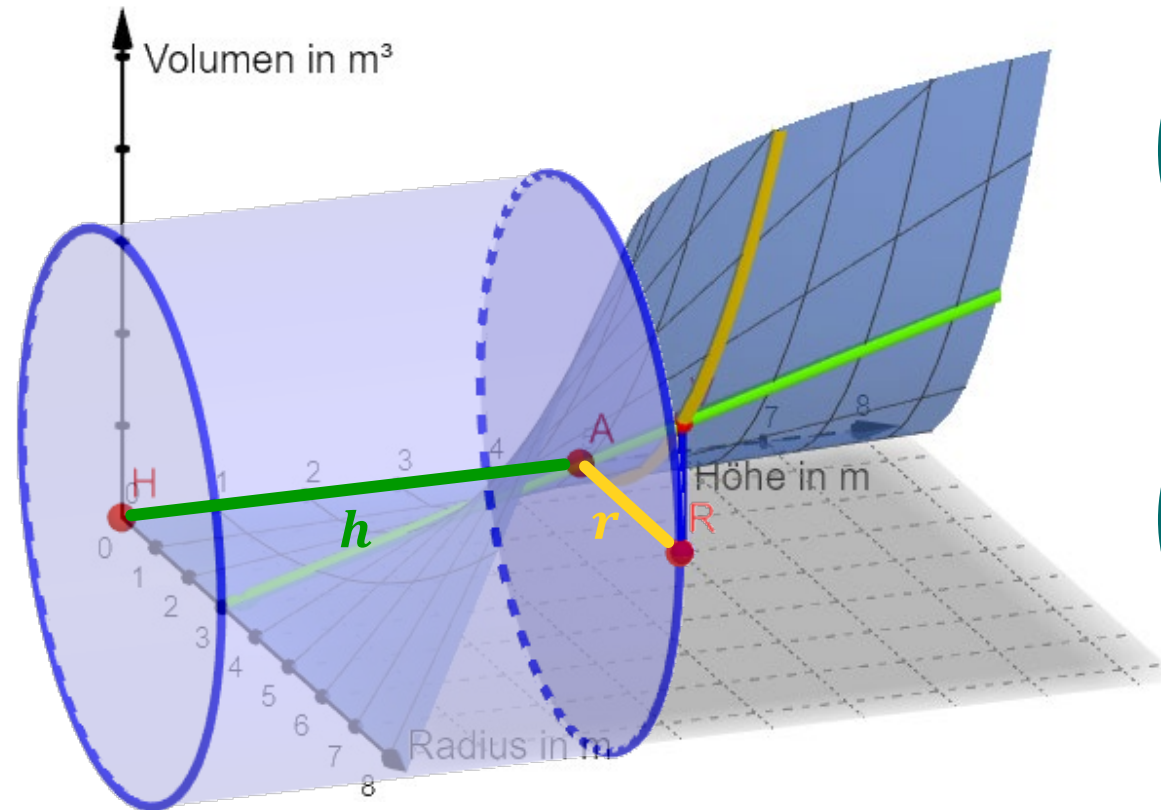
Funktion zweier Veränderlicher

Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(\mathbf{h}) = (r^2\pi) \cdot \mathbf{h}$$

$$V_h(\mathbf{r}) = (\pi h) \cdot \mathbf{r}^2$$

Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolume

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(h) = (r^2 \pi) \cdot h$$

$$V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de



RPTU



Feedback zur Veranstaltung

- <https://roth.tel/feedback>

Fragen

(Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.)

- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)
- Was wünschen Sie sich für die Veranstaltung?
Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

