MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvorstellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

Jürgen Roth

25.01.2026 MaTeGnu-Modul 1, Bad Kreuznach

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

1 Verständnis?!
2 Grundvorstellungen zur Ableitung
3 Ableitung als lokale Änderungsrate
4 Ableitung als Tangentensteigung

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

GeoGebra-Buch zu Modul 1
https://mategnu.de/m/l1

Status Quo: Oberstufen-Mathematik

MaTeGnu

Mathematik-Kompetenzen
am Ende der Oberstufe in Deutschland

(Rolfes et al. 2021)

- ca. $\frac{1}{3}$ verfügt **nicht** über das Mindestniveau mathematischer Grundbildung der **Sek. I**
- **nur 30%** beherrschen **grundlegende Inhalte** der **Sek. II-Mathematik** (LK: 56% GK: 16%)

(Fehlende) Voraussetzungen für Studierfähigkeit

- Fehlendes Verständnis
  → grundlegende Fähigkeiten nicht verfügbar (Knospe 2009)
- prozedurales Wissen alleine reicht nicht
  → konzeptuelle Basis zwingend erforderlich (Rach & Ufer 2020)
- formale Repräsentationen
  → nicht zwingend für Erfolg im Studium (Rach & Ufer 2020)

RPTU

Begriffsklärungen

MaTeGnu

Begriffe rund ums Verständnis

Grundvorstellung

- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

Grundfertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

Grundwissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Sätze, …)
- sollte auswendig gewusst werden

Vorstellungsorientierte Fähigkeiten (1)

MaTeGnu

absolute & relative Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können

Zusammenhang zwischen mittlerer (Differenzenquotient) **und momentaner Änderungsrate** (Differenzialquotient) kennen, auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes beschreiben und in verschiedenen Situationen anwenden können

Unterschied zwischen Bestand und Änderung in Anwendungssituationen erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

Hußmann, Prediger (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM, 52*(31), 35-38

Bestand und Änderung

MaTeGnu

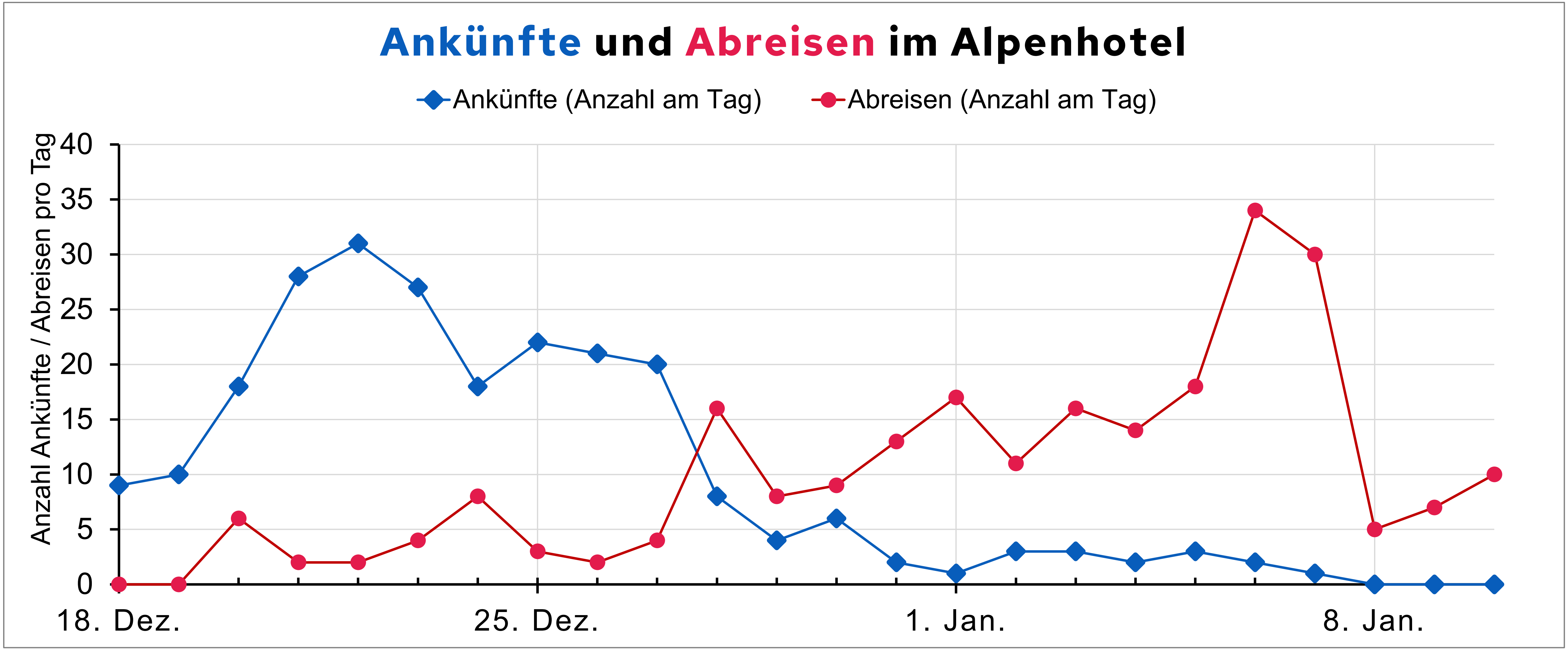
Bestandsgröße	Zuflüsse	Abflüsse
Anzahl der Studierenden einer Universität	Immatrikulationen	Exmatrikulationen, Ausscheiden aus der Universität
Benzinmenge im Tank	Tanken an der Tankstelle	Benzinverbrauch, Verdunstung
Kontostand	Zubuchungen	Abbuchungen
Anzahl der Gäste eines Hotels	ankommende Gäste	abreisende Gäste
Staatsverschuldung	Staatseinnahmen	Staatsausgaben

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

Bestand und Änderung

Wann waren die meisten Gäste im Hotel?

MaTeGnu



Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

https://www.geogebra.org/m/eg5dwnjy

Vorstellungsorientierte Fähigkeiten (2)

MaTeGnu

Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge
mit Hilfe der Ableitung beschreiben können (Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen)

Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten
deuten und beschreiben können

Bestimmtes Integral in Kontexten
deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Unterschied zwischen Änderungs-funktion & Wirkung bzw. Gesamteffekt
erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

Hußmann, Prediger (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM, 52*(31), 35-38

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

GeoGebra-Buch zu Modul 1
https://mategnu.de/m/l1

Grundvorstellungen

MaTeGnu

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
  haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
  werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, S. 2-9

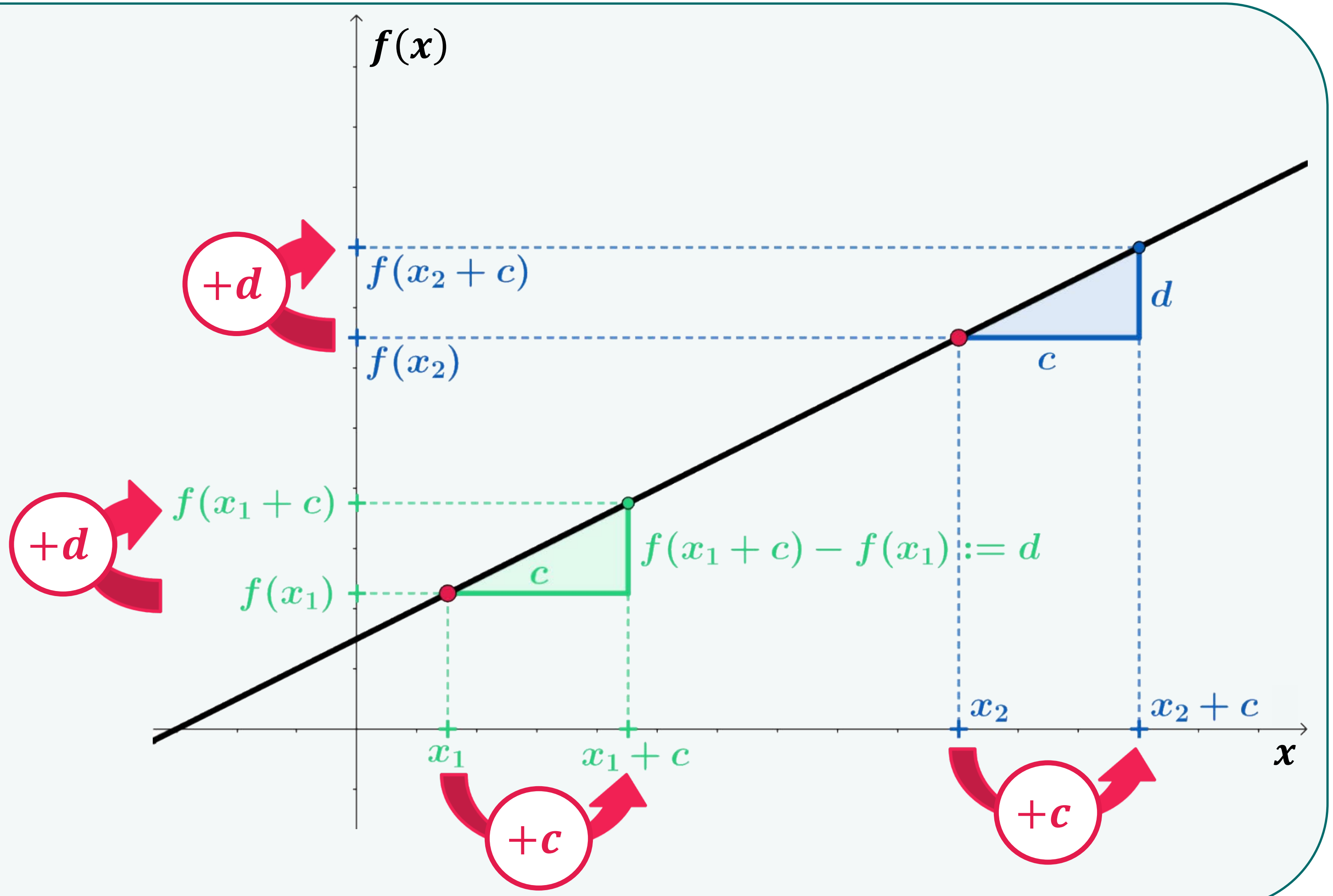
Primäre Grundvorstellungen

Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

$x \mapsto f(x) = a \cdot x + b$

$$f(x + c)$$

$$= a \cdot (x + c) + b$$

$$\overset{DG}{\triangleq} a \cdot x + a \cdot c + b$$

$$\overset{KG}{\triangleq} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Ausbilden von Grundvorstellungen: Ziele

MaTeGnu

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4-8

Verständnisanker

MaTeGnu

Verständnisanker

Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt.

Eine **Situation** eignet sich als Verständnisanker, wenn

- sie leicht durchschaut werden kann und
- alle für ein Verständnis wesentlichen Strukturelemente vorkommen und gedeutet werden können.

Ziel des Aufbaus eines Verständnisankers

Lernende können in neuen Situationen, in denen der mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel

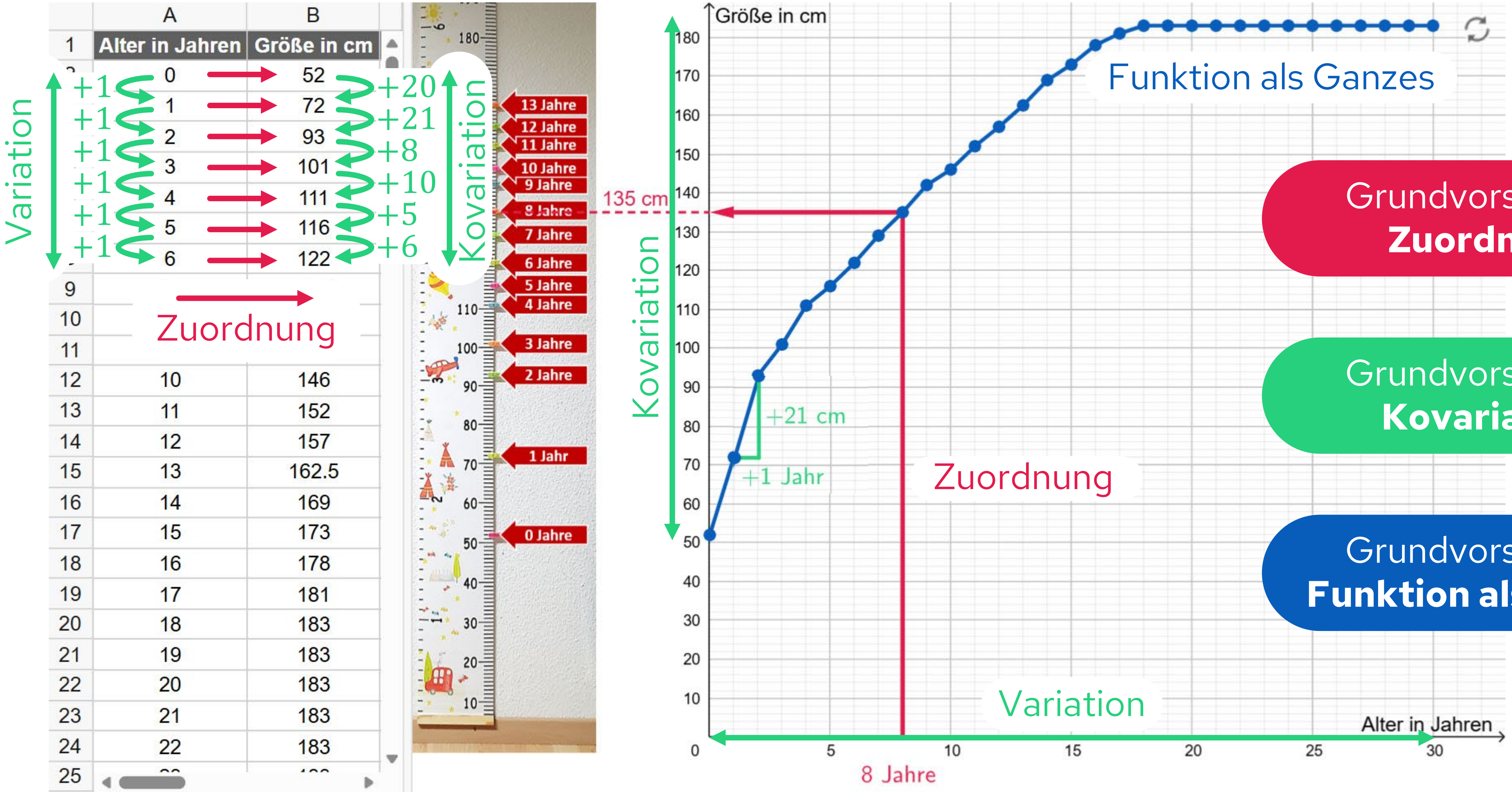
Ein Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Funktionen ist der Zusammenhang zwischen dem Lebensalter und der Körpergröße eines Menschen.

Näheres zu diesem Verständnisanker:
Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren, 236*, 6-9.

Zusammenhang: Alter ↦ Körpergröße

MaTeGnu



Grundvorstellung Zuordnung

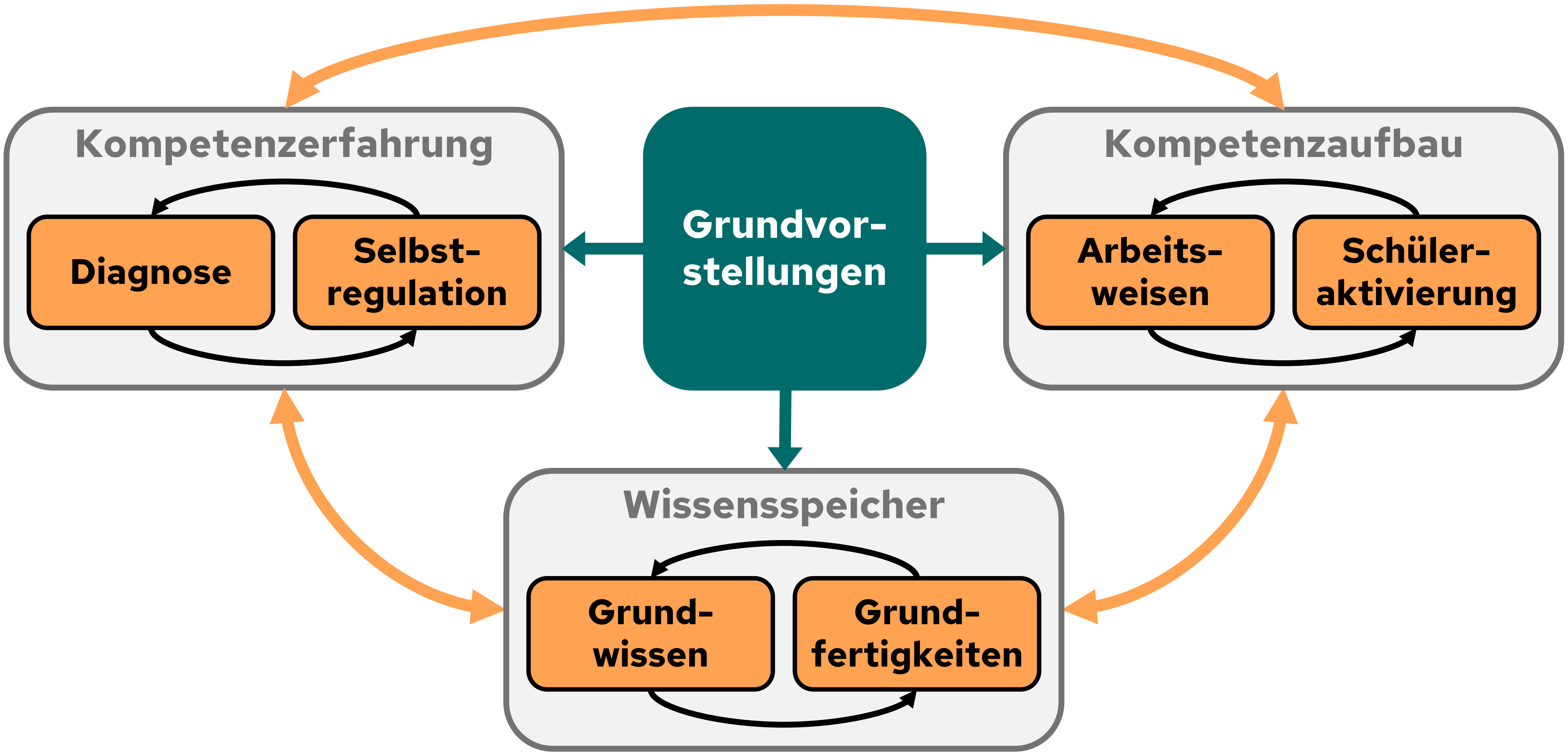
Grundvorstellung Kovariation

Grundvorstellung Funktion als Ganzes

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

Grundvorstellungen als Basis & Bezugsnorm

MaTeGnu

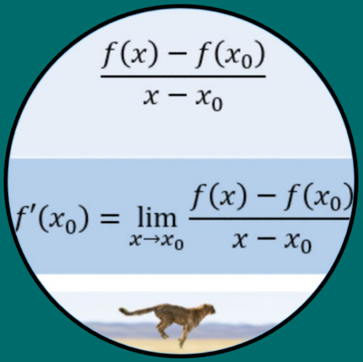


Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. *PM 70*, 2-8

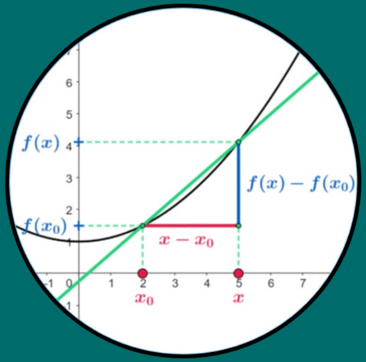
RPTU

Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

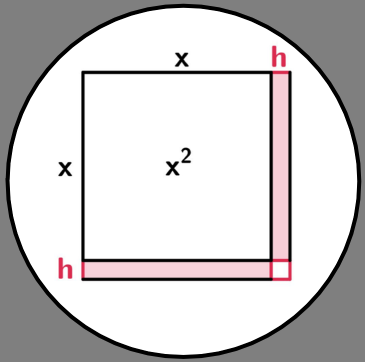
MaTeGnu



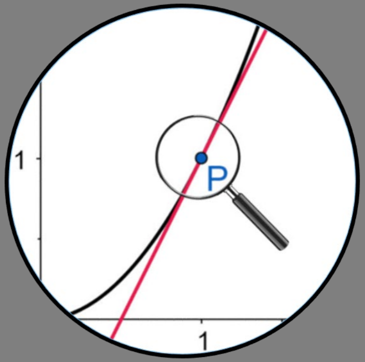
Lokale Änderungsrate



Tangenten-steigung



Verstärkungs-faktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-8

Ableitung als lokale Änderungsrate

MaTeGnu

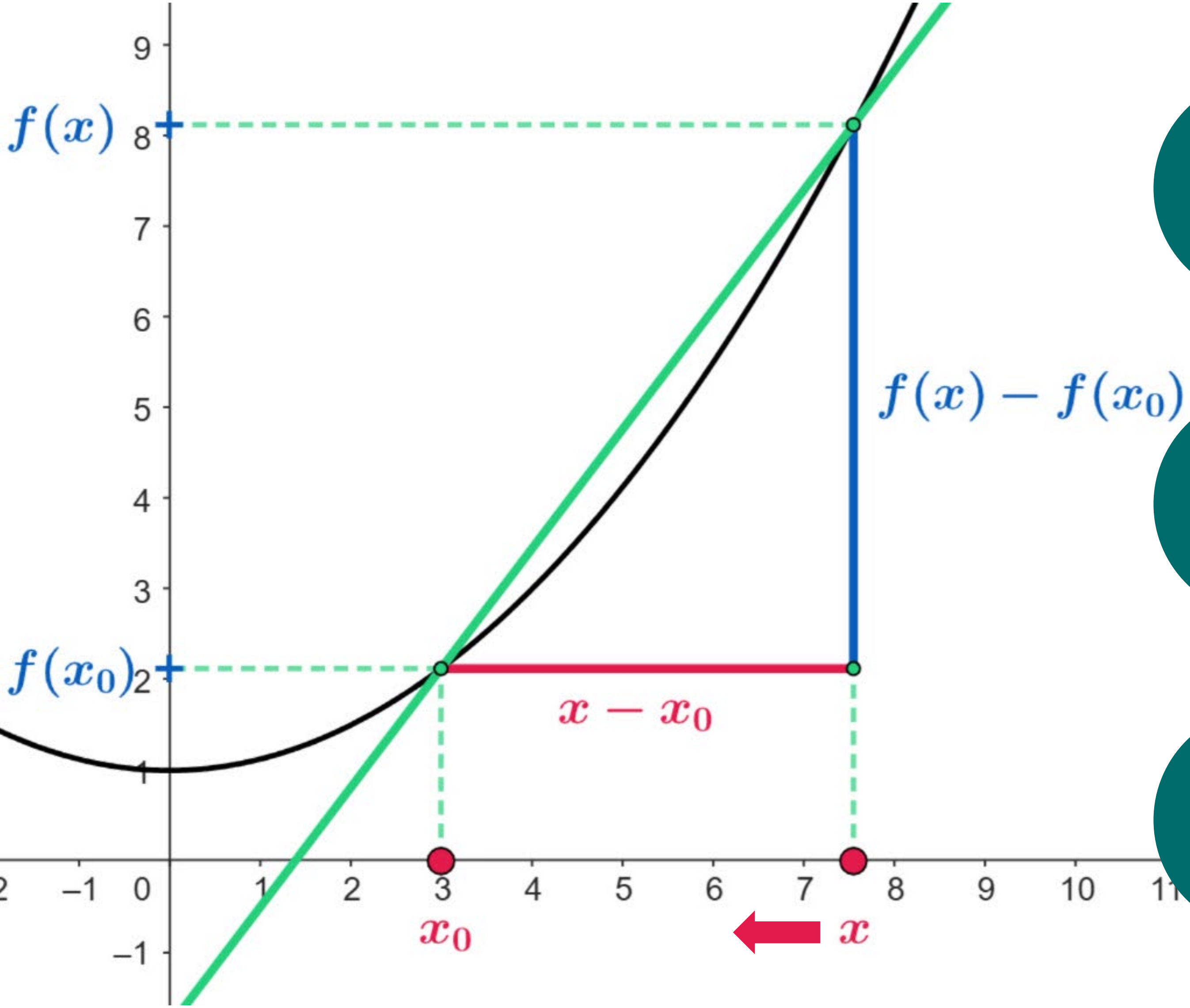
Beschrei-bungsebene	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
formal	$f(x_0)$	$f(x)-f(x_0)$	$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
inhaltlich	**Bestand** zum Zeitpunkt x_0	***absoluter* Zuwachs** in der Zeit von x_0 bis x	***relativer* Zuwachs** im Zeitintervall $[x_0, x]$ (***mittlere* Änderungsrate**)	momentane (***lokale***) **Änderungsrate** zum Zeitpunkt x_0
termino-logisch	Funktionswert	Differenz der Funktionswerte	Differenzenquotient	Ableitung

algebraisch **analytisch**

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Ableitung als Tangentensteigung

MaTeGnu



Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P

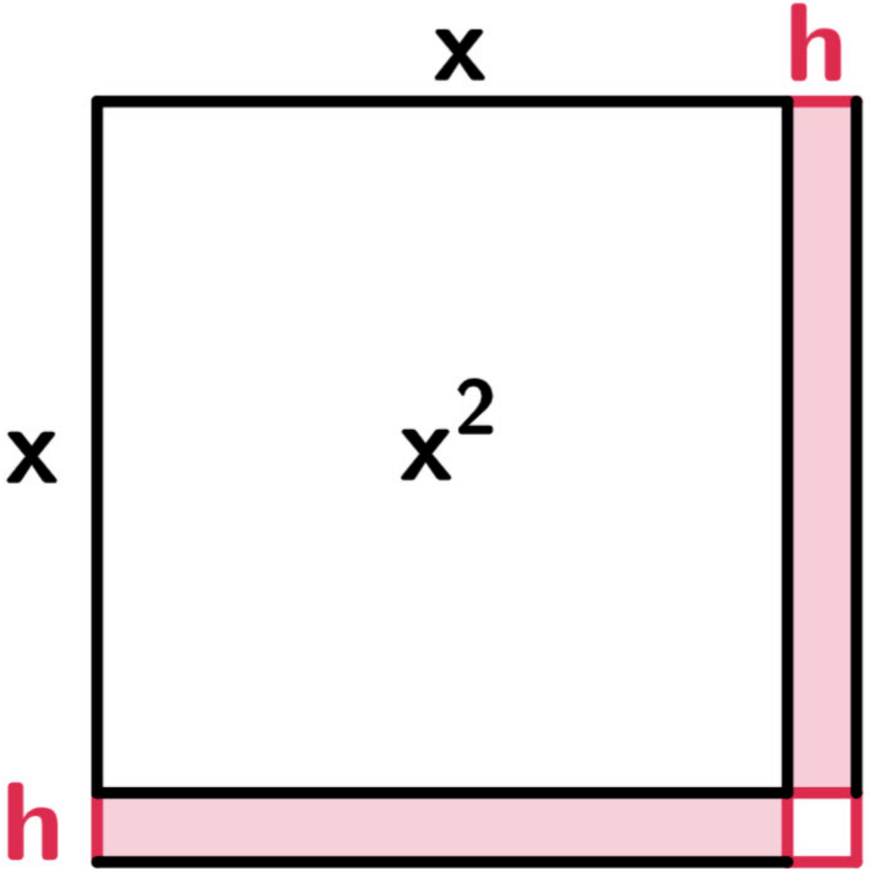
Tangente als Grenzlage von Sekanten

Bestimmung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Ableitung als Verstärkungsfaktor

MaTeGnu



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

Die Ableitung gibt an, wie stark sich die Änderung der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable auswirkt.

Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle bzw. starke Änderung der Funktionswerte.

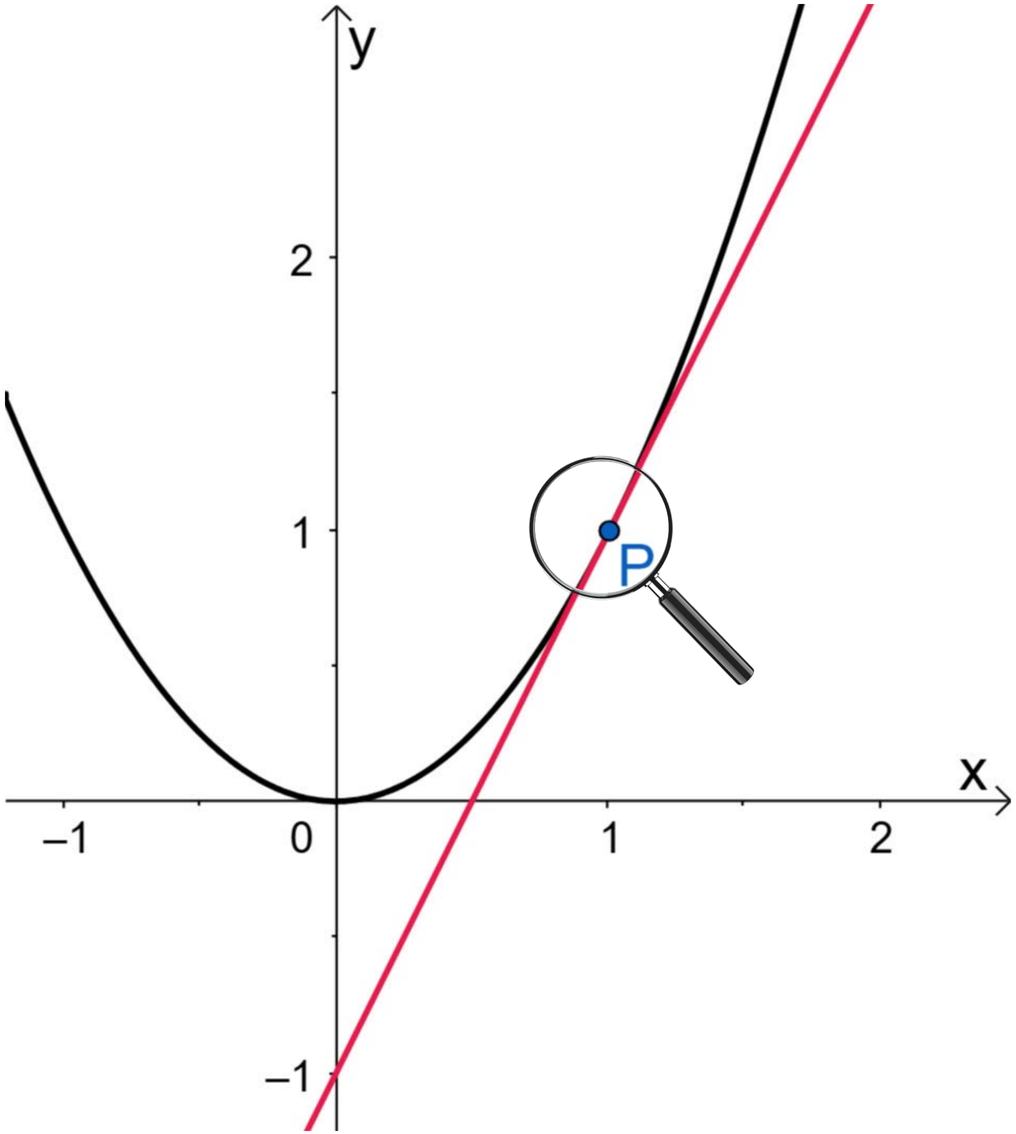
Für kleine Änderungen Δx gilt:

$$\Delta y \approx \underbrace{f'(x)}_{\textbf{Verstärkungsfaktor}} \cdot \Delta x$$

Greefrath, G. et al. (2016). Didaktik der Analysis – Aspekte & Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Spektrum, 151ff
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Ableitung als lokale lineare Approximation

MaTeGnu

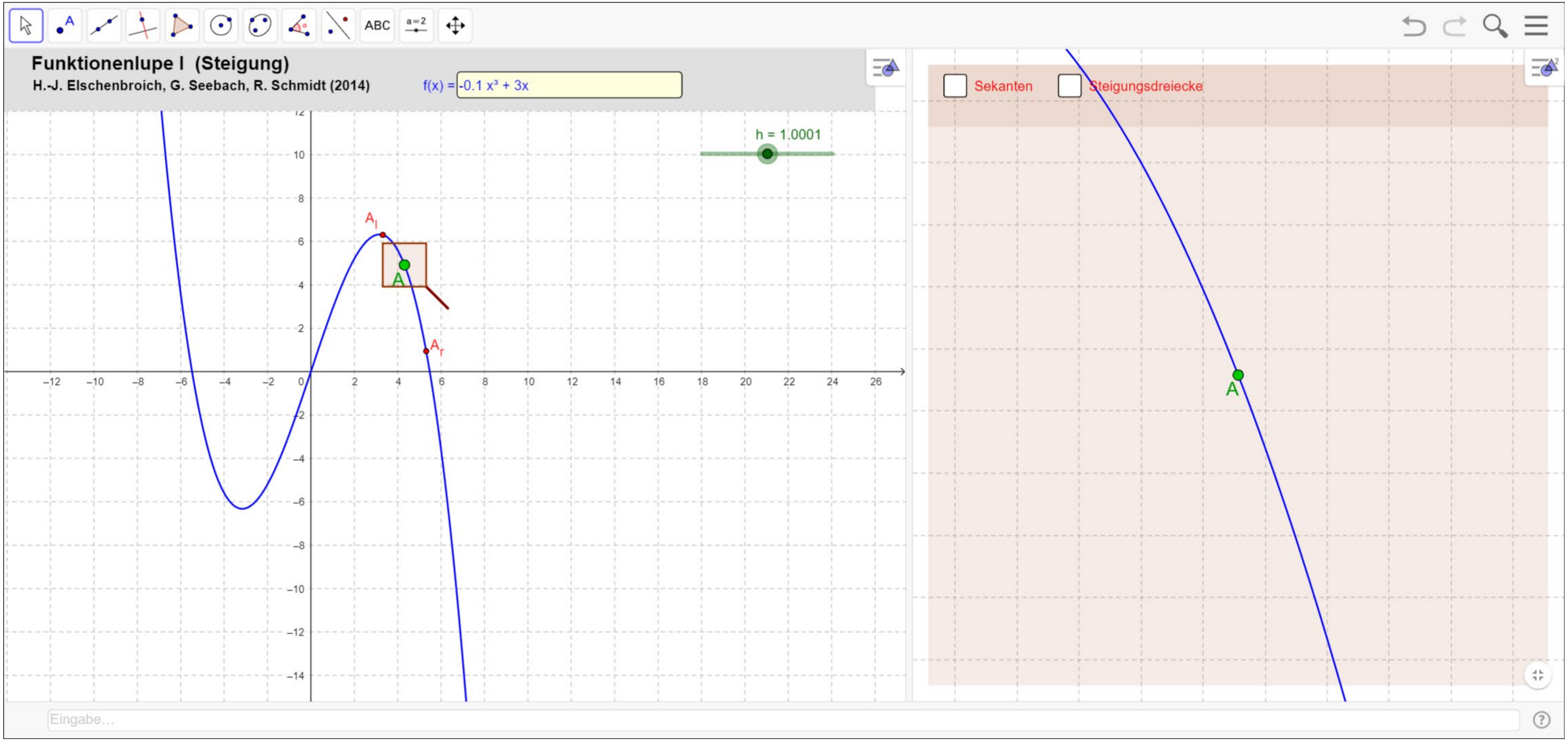


Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
www.funktionenlupe.de • https://www.geogebra.org/m/VNbhnUtq https://www.geogebra.org/m/tejWrTyU

RPTU

Funktionenlupe

MaTeGnu



 https://www.geogebra.org/m/QxeVkgpf#material/VNbhnUtq

RPTU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

1 Verständnis?!

2 Grundvorstellungen zur Ableitung

3 Ableitung als lokale Änderungsrate

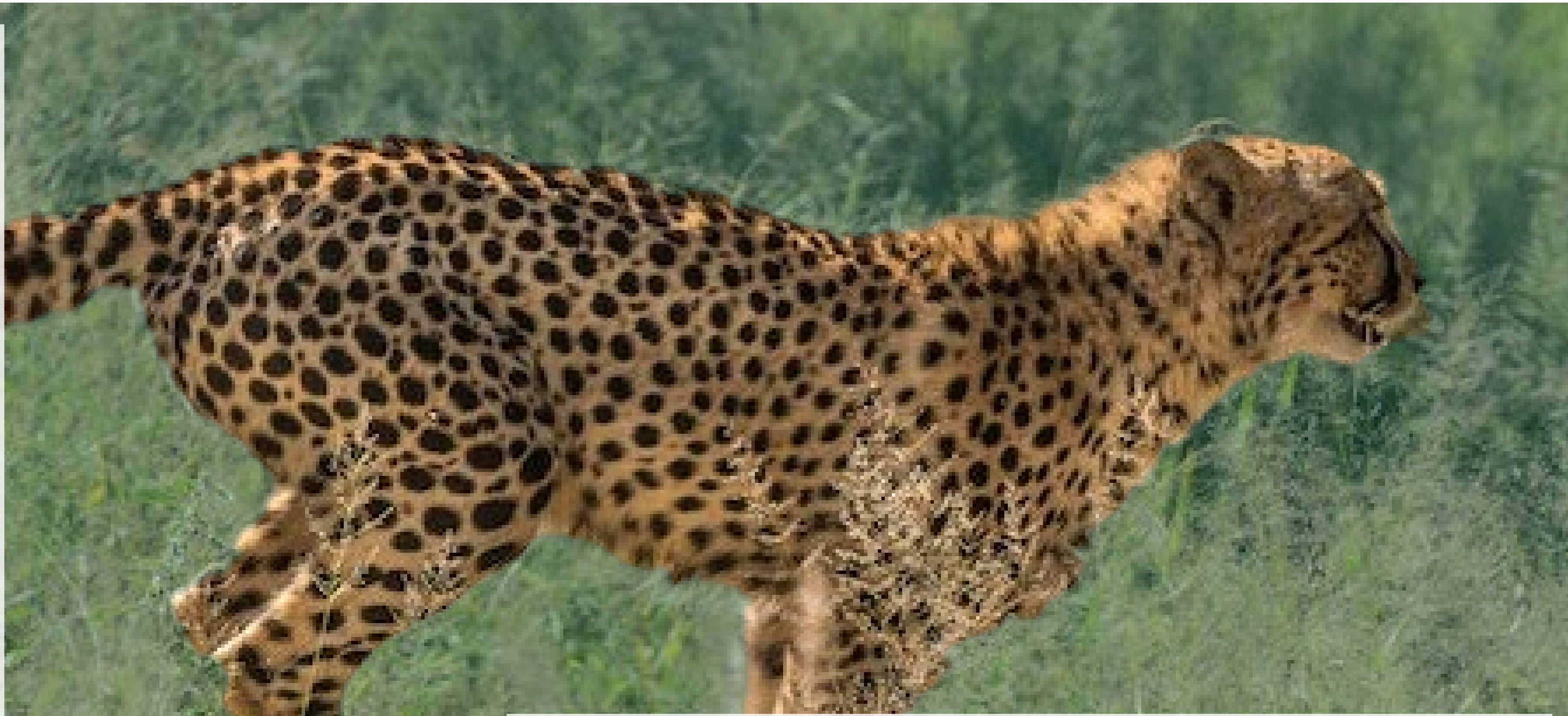
4 Ableitung als Tangentensteigung

GeoGebra-Buch zu Modul 1
https://mategnu.de/m/l1

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

MaTeGnu



- Geparden erreichen über längere Strecken eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und sind mit einer momentanen Spitzengeschwindigkeit von $93\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ die schnellsten Landtiere.
- In Versuchen wurden Hochgeschwindigkeitskameras und am Boden installierte Kraftmessplatten eingesetzt.

Wilson, A. M. et al. (2013). Locomotion dynamics of hunting in wild cheetahs, Nature, doi:10.1038/nature12295

Kernfrage

- Wie bestimmt man mit den Videoaufnahmen die Geschwindigkeiten?
- Ein Applet simuliert die Videoaufnahmen.
  https://mategnu.de/m/l1

RPTU

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Absolute Änderung: Zwischen zwei Zeitpunkten $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$ zurückgelegter Weg $\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1)}$.

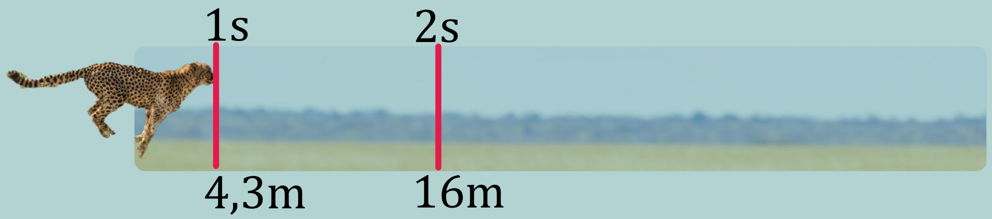
Bewegungen: Die Weg-Zeit-Funktion $x \mapsto f(x)$ ordnet jedem Zeitpunkt x den bis dahin zurückgelegten Weg $f(x)$ zu.

Erste Sekunde

$f(1\text{s}) - f(0\text{s}) = 4{,}3\text{m} - 0\text{m} = 4{,}3\text{m}$

Zweite Sekunde

$f(2\text{s}) - f(1\text{s}) = 16\text{m} - 4{,}3\text{m} = 11{,}7\text{m}$



Dritte Sekunde

$f(3\text{s}) - f(2\text{s}) = 33{,}3\text{m} - 16\text{m} = 17{,}3\text{m}$

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

MaTeGnu

Absolute Änderung: Zwischen zwei Zeitpunkten $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$ zurückgelegter Weg $\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1)}$.

In den zwei Sekunden von $x_1 = 1\text{s}$ bis $x_2 = 3\text{s}$ zurückgelegter Weg

$$f(x_2) - f(x_1) = f(3\text{s}) - f(1\text{s})$$
$$= 33{,}3\text{m} - 4{,}3\text{m} = 29\text{m}$$

Zeitpunkt x	**zurückgelegter Weg $f(x)$**
0s	0m
1s	4,3m
2s	16m
3s	33,3m

Zeitänderung $\Delta x = 1\text{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 4{,}3\text{m}$

Zeitänderung $\Delta x = 1\text{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 11{,}7\text{m}$

Zeitänderung $\Delta x = 2\text{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 29\text{m}$

Zeitänderung $\Delta x = 1\text{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 17{,}3\text{m}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Relative Änderung / Änderungsrate: Durchschnittsgeschwindigkeit

Um die mittleren Geschwindigkeiten in unterschiedlich langen Zeitintervallen $[x_1, x_2]$ und $[x_3, x_4]$ vergleichen zu können, muss man jeweils die **Wegdifferenz** $\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1)}$ auf die zugehörige **Zeitdifferenz** $\boldsymbol{x_2 - x_1}$ beziehen:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Im Zeitintervall $[2\text{s}, 3\text{s}]$ werden im Mittel $\frac{33{,}3\text{m} - 16\text{m}}{3\text{s} - 2\text{s}} = \frac{17{,}3\text{m}}{1\text{s}} = 17{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also 17,3 Meter pro Sekunde zurückgelegt.

Im Zeitintervall $[1\text{s}, 3\text{s}]$ werden im Mittel $\frac{33{,}3\text{m} - 4{,}3\text{m}}{3\text{s} - 1\text{s}} = \frac{29\text{m}}{2\text{s}} = 14{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also 14,5 Meter pro Sekunde zurückgelegt.

Im Zeitintervall $[2\text{s}, 3\text{s}]$ ist die **mittlere Geschwindigkeit (Durchschnitts-geschwindigkeit)** mit $17{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ also höher als im Zeitintervall $[1\text{s}, 3\text{s}]$ mit $14{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

MaTeGnu

Lokale Änderungsrate: Momentangeschwindigkeit

Wie groß ist die **Momentangeschwindigkeit (lokale Änderungsrate)** zu einem Zeitpunkt $x_0 = 2s$?

Idee: Mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen betrachten, die $x_0 = 2s$ als Intervallgrenze besitzen.

Zeitintervall $[x_1, x_0]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$ im Zeitintervall $[x_1, x_0]$
$[1s; 2s]$	$\frac{16m - 4,3m}{2s - 1s} = 11,7\,\frac{m}{s}$
$[1,9s; 2s]$	$\frac{16m - 14,5483m}{2s - 1,9s} = 14,517\,\frac{m}{s}$
$[1,99s; 2s]$	$\frac{16m - 15,8522803m}{2s - 1,99s} = 14,77197\,\frac{m}{s}$
$[1,999s; 2s]$	$\frac{16m - 15,9852028003m}{2s - 1,999s} = 14,7971997\,\frac{m}{s}$

Zeitintervall $[x_0, x_2]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ im Zeitintervall $[x_0, x_2]$
$[2s; 3s]$	$\frac{33,3m - 16m}{3s - 2s} = 23,25\,\frac{m}{s}$
$[2s; 2,1s]$	$\frac{17,5077m - 16m}{2,1s - 2s} = 15,077\,\frac{m}{s}$
$[2s; 2,01s]$	$\frac{16,1482797m - 16m}{2,01s - 2s} = 14,82797\,\frac{m}{s}$
$[2s; 2,001s]$	$\frac{16,0148027997m - 16m}{2,001s - 2s} = 14,8027997\,\frac{m}{s}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

MaTeGnu

Momentangeschwindigkeit

- Je kleiner das Intervall $[x_0, x]$ wird, je näher also x an $x_0 = 2\text{s}$ heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit dem Wert $14{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Die mittlere Geschwindigkeit kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beliebig nah, wenn x genügend nah bei $x_0 = 2\text{s}$ liegt.
- Damit ist die **Momentangeschwindigkeit** (lokale Änderungsrate) zum Zeitpunkt $x_0 = 2\text{s}$ bestimmt. Sie beträgt hier $14{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Lokale Änderungsrate

Ableitung: Verbale Definition im Kontext

- Der Wert, dem sich die mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ beliebig nah annähert, wenn x gegen x_0 läuft, heißt **Ableitung $f'(x_0)$ von f an der Stelle x_0**.
- Man schreibt dafür: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Sprechweisen für Grenzprozesse

MaTeGnu

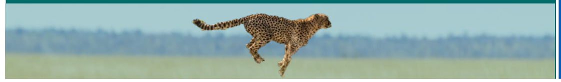
Aufgabe: Konvergenz von $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ für $x \to 2s$: Welche Sprechweisen sind dafür geeignet?

Sprechweisen	Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beliebig nahe, wenn x gegen 2s läuft.“ 1	1 Ohne Einschränkung geeignet.
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ strebt gegen $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ für x gegen 2s.“ 2	2 Ohne Einschränkung geeignet.
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ immer näher, wenn x gegen 2s läuft.“ 3	3 Problematisch! $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt auch der 10 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. 1)!
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ immer näher, ohne ihn jemals zu erreichen.“ 4	4 Grenze zur inhaltlichen Verfälschung überschritten! Bei konstanten Funktionen konvergiert der Differenzenquotient (gegen 0).

Wissensspeicher:

Ableitung als lokale Änderungsrate

MaTeGnu

Beispiel: Gepard 	Bedeutung	Mathematischer Ausdruck	Kontext 2	Kontext 3
Bis zum Zeitpunkt x_0 zurückgelegter Weg	Bestand	$f(x_0)$		
In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg	Absolute Änderung	$f(x) - f(x_0)$		
Durchschnitts-geschwindigkeit im Zeit**RAUM** von x_0 bis x	Mittlere (durchschnittliche) Änderungsrate	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
Momentan-geschwindigkeit zum Zeit**PUNKT** x_0	Momentane (lokale) Änderungsrate	$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

MaTeGnu

Vorteile

des Zugangs zum Ableitungsbegriff als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate:

- Kinematischer Kontext ist Teil der Alltagserfahrungen von Jugendlichen. (Straßenverkehr, Computerspiele, Sport, ...)
- Zeitliche Änderung von Geschwindigkeiten
  → Zugang zum Begriff Momentanbeschleunigung
- Das Beispiel ist als universelles Modell überall tragfähig, wo ein Änderungsverhalten punktuell beschrieben werden soll.
  → Diese Grundvorstellung ist in vielen Zusammenhängen notwendig.
- Anschlussfähig an anderen Grundvorstellungen
  → Start mit der Ableitung als Tangentensteigung führt oft zu einseitiger Sichtweise.

Geparden beschleunigen auch am besten und können mit einem „Satz“ knapp 11 km/h an Tempo hinzugewinnen.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-8

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

GeoGebra-Buch zu Modul 1
https://mategnu.de/m/l1

Ableitung als Tangentensteigung

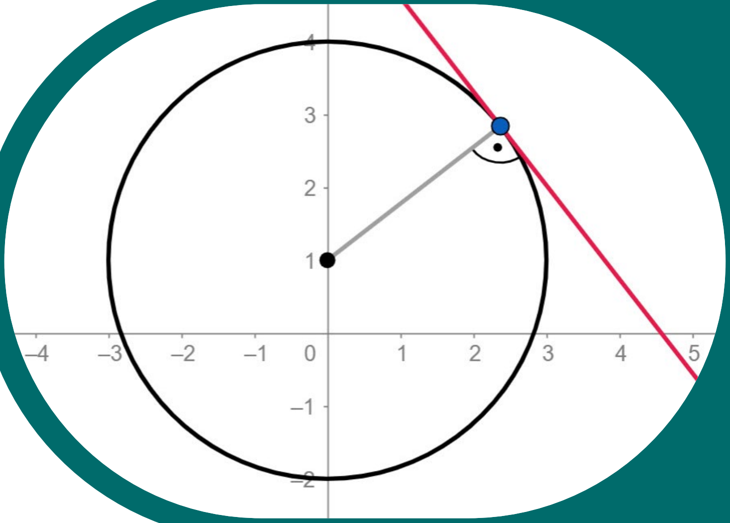
MaTeGnu

Aspekte bei diesem Zugang	Zu beachten ist:
Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P	Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff
Tangente als Grenzlage von Sekanten	
Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen	

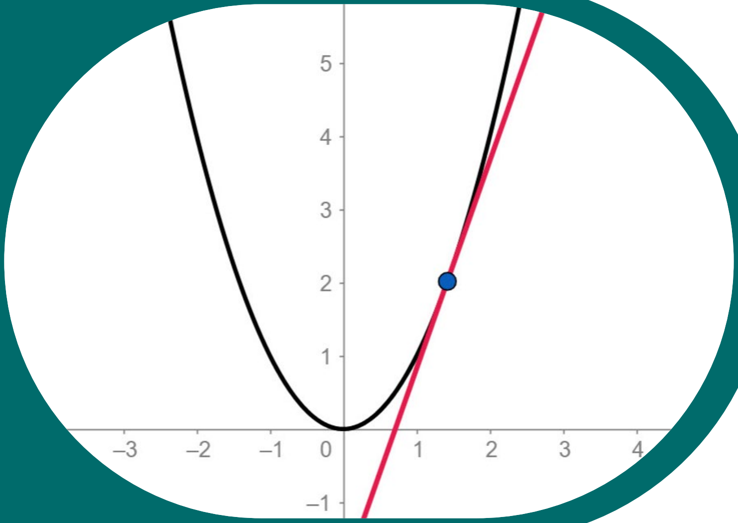
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

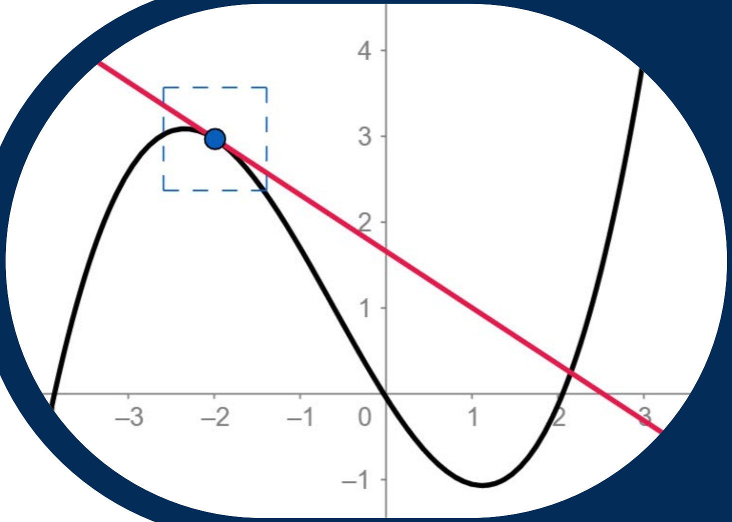
Was ist eine Tangente?

MaTeGnu



Geometrische Sichtweise:
Tangente
als globale
Stützgerade





Analytische Sichtweise:
Tangente
als lokale
Schmieggerade

Ableitung als Tangentensteigung

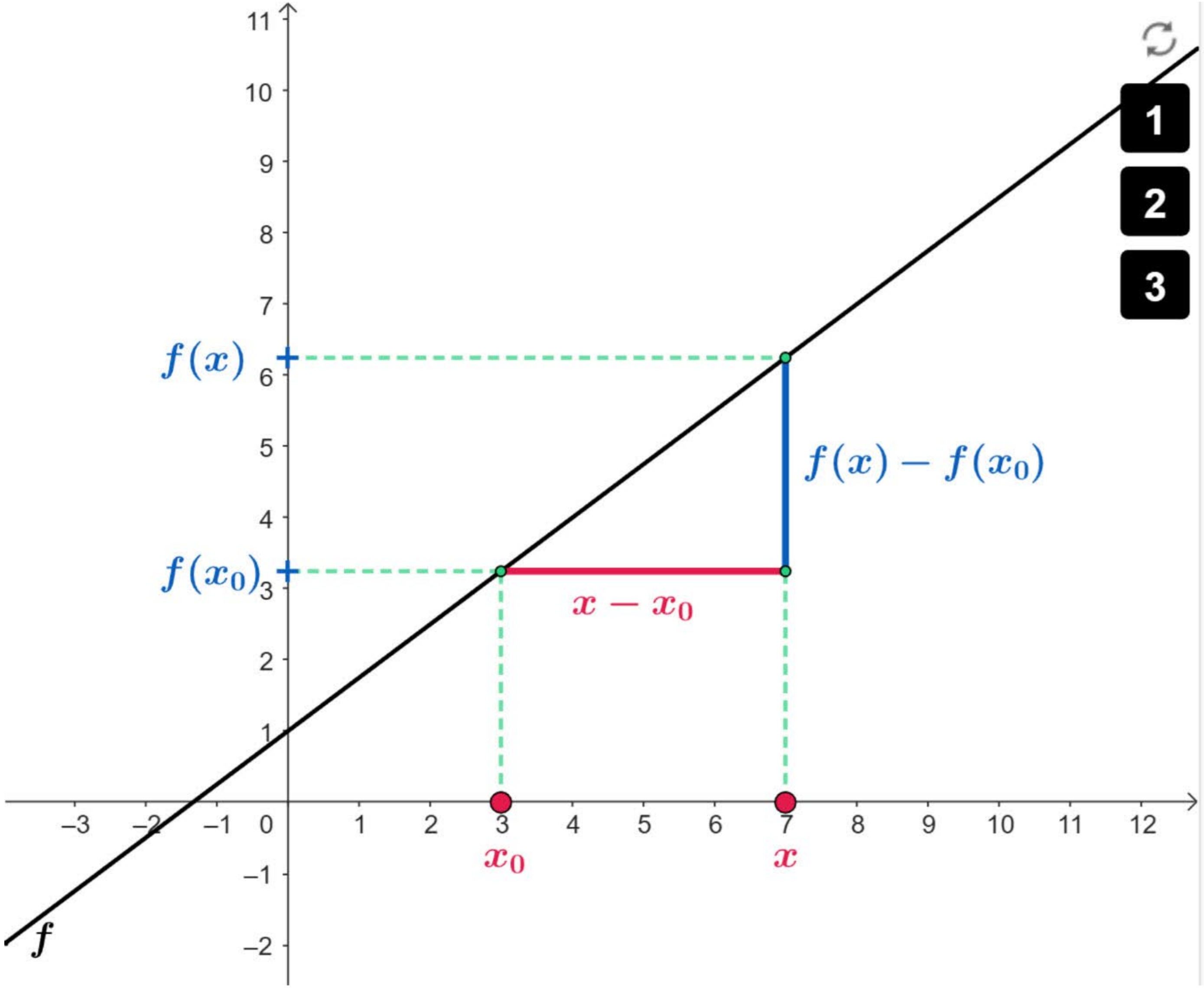
MaTeGnu

Aspekte bei diesem Zugang	Zu beachten ist:
Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P	Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff
Tangente als Grenzlage von Sekanten	Liegt quer zur Schmieg-Vorstellung der Tangente
Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen	Gibt es einen Grenzfall von Sekanten? Eine Gerade durch einen Punkt ist gar nicht eindeutig festgelegt.

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Vorwissen reaktivieren: Geradensteigung

MaTeGnu



$f(x) = \frac{3}{4}x + 1$

- [x] Zuordnung
- [x] Absolute Änderung
- [ ] Änderungsrate (relative Änderung)

Absolute Änderung der x-Werte

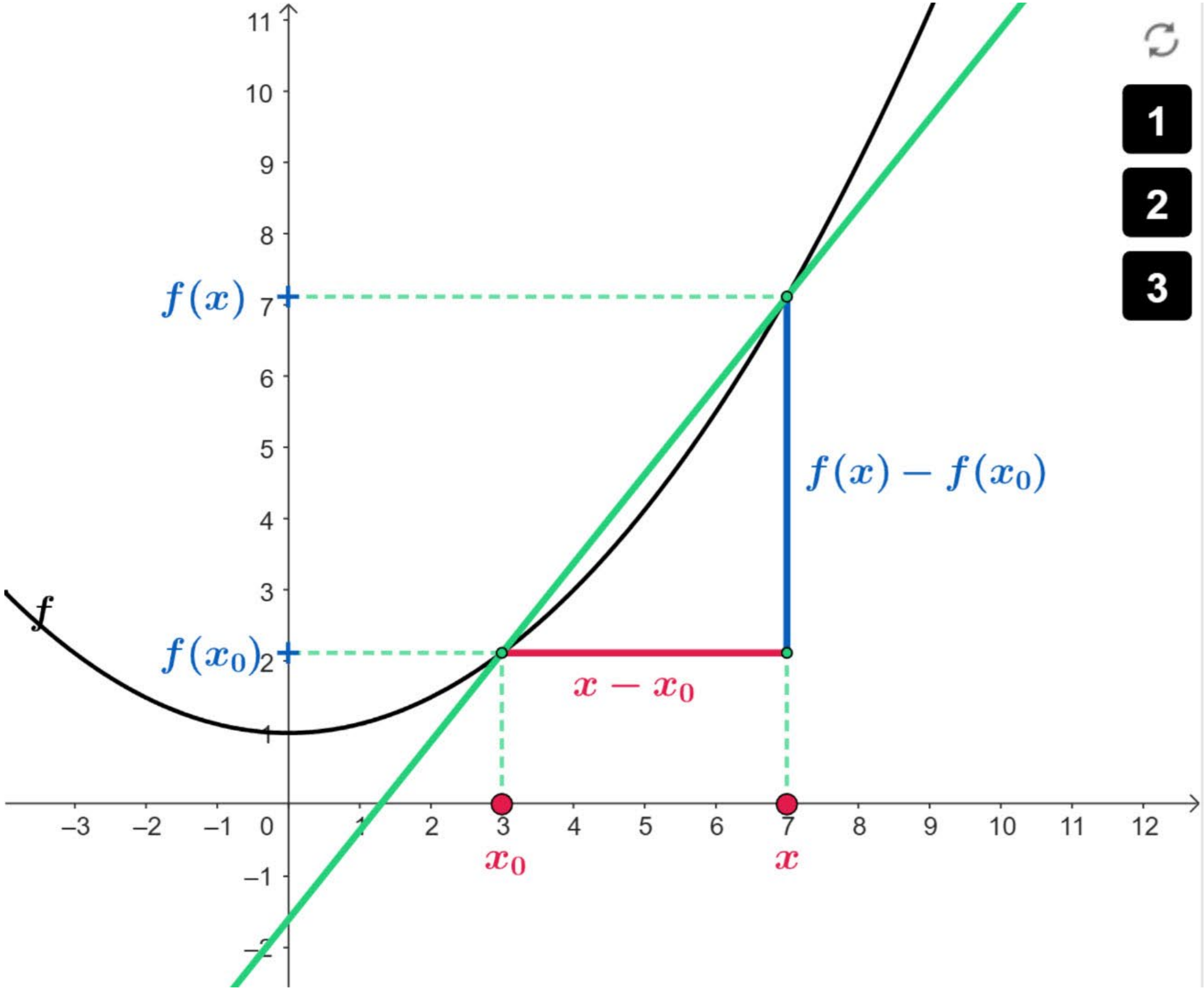
$$x - x_0 = 7 - 3 = 4$$

Absolute Änderung der Funktionswerte

$$f(x) - f(x_0) = 6.25 - 3.25 = 3$$

Lokale Steigung als Tangentensteigung

MaTeGnu



$f(x) = \frac{1}{8}\, x^2 + 1$

- [x] Zuordnung
- [x] Absolute Änderung
- [x] Änderungsrate (relative Änderung)

Absolute Änderung der x-Werte

$$x - x_0 = 7 - 3 = 4$$

Absolute Änderung der Funktionswerte

$$f(x) - f(x_0) = 7.125 - 2.125 = 5$$

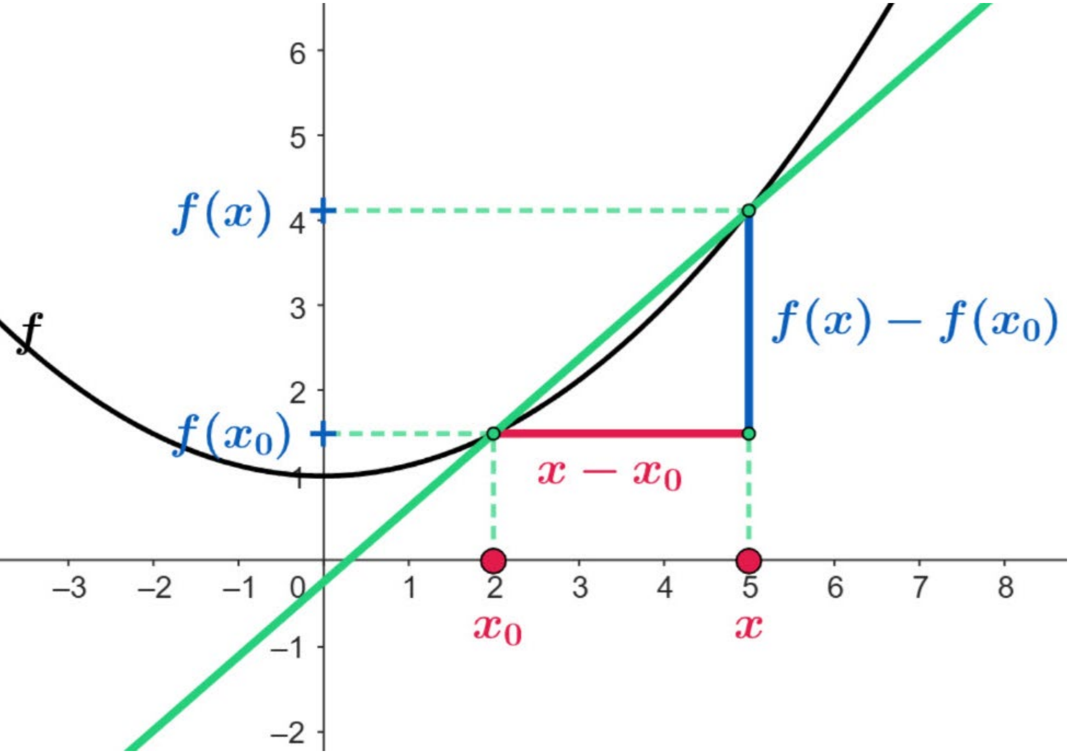
Änderungsrate (Relative Änderung)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{7.125 - 2.125}{7 - 3} = 1.25$$

- [x] Sekante

Tangente als Grenzlage von Sekanten

MaTeGnu



Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + 1$

Gesucht: Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 2$

Sekantensteigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot x^2 + 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot 2^2 + 1\right)}{x - 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \cdot (x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2}$$

$x \neq 2$

$$= \frac{1}{8} \cdot (x + 2)$$

Tangentensteigung

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{8} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{8} \cdot (x + 2) = \frac{1}{2}$$

Sprechweise

Die Sekantensteigung kommt der Zahl $\frac{1}{2}$ beliebig nahe, wenn x gegen $x_0 = 2$ strebt.

RPTU

Definition: Differenzierbarkeit und Ableitung

MaTeGnu

Definition

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

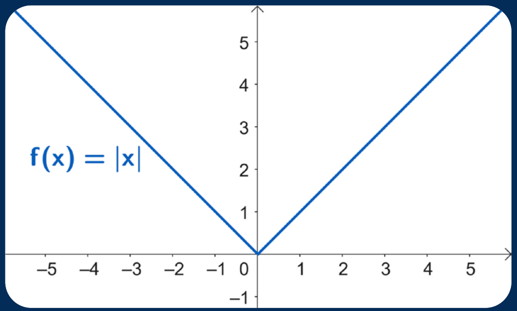
Der Grenzwert heißt Ableitung von $\boldsymbol{f}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$ und wird mit

$$f'(x_0) \coloneqq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bezeichnet.

Bemerkungen

- Der Grenzwert muss derselbe sein, unabhängig davon, ob man sich der Stelle x_0 von links oder von rechts nähert. Nur in diesem Fall ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.
- Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist z. B. an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

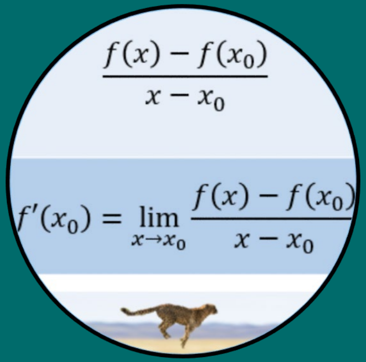


- Genau genommen muss x_0 im Inneren der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ von f liegen, weil sonst nur eine einseitige Annäherung an x_0 möglich ist.

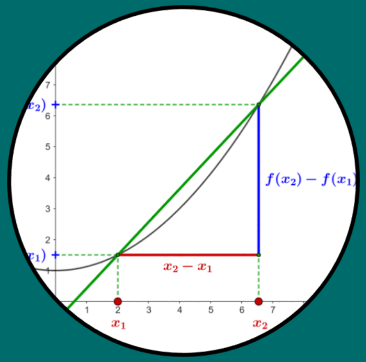
Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91

Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

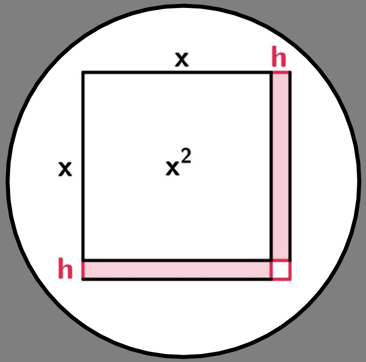
MaTeGnu



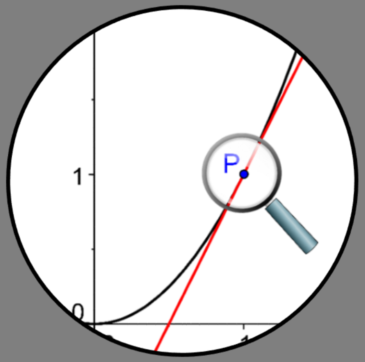
Lokale Änderungsrate



Tangenten-steigung



Verstärkungs-faktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-8

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
mategnu.de

RPTU