MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie
an **G**rundvorstellungen orientiert
nachhaltig **u**nterrichten

GeoGebra als Lernumgebungen und Werkzeug in der Differentialrechnung

Jürgen Roth

25.01.2026 MaTeGnu - Modul 1, Bad Kreuznach

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

GeoGebra als Lernumgebungen und Werkzeug in der Differentialrechnung

1. Lernumgebung und MMS in der Differentialrechnung
2. Lernumgebungen alleine reichen nicht aus

GeoGebra-Buch zu Modul 1
https://mategnu.de/m/l1

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

GeoGebra als Lernumgebungen und Werkzeug in der Differentialrechnung

---

1. **Lernumgebung und MMS in der Differentialrechnung**
2. Lernumgebungen alleine reichen nicht aus

GeoGebra-Buch zu Modul 1
https://mategnu.de/m/l1

Digitale Werkzeuge
→ modulare Mathematiksysteme (MMS)

MaTeGnu

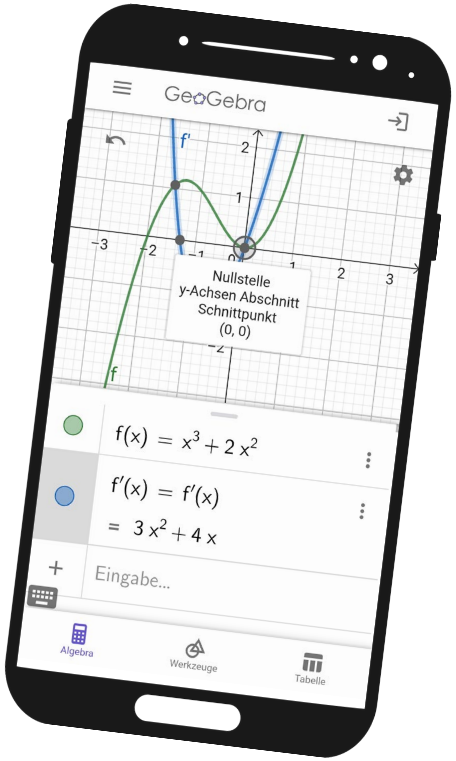
Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematik-unterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
- Computer-Algebra-Systeme,
- dynamische Geometrie-Systeme

und als deren Integration

- dynamische Mathematik-Systeme (DMS) [Multi-Repräsentations-Systeme, modulare Mathematiksysteme (MMS)].



MMS nur dann einsetzen, wenn dadurch das Erreichen der Ziele des Mathematikunterrichts nachhaltig unterstützt wird.

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis (S. 233-248). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Aufgabenstellungen und Protokollierung
für das Arbeiten mit MMS

MaTeGnu

Aufgabenstellungen

- schriftliche Ergebnis-Vorhersagen vor Nutzung dynamischer Interaktivitäten
- Konkrete Aufträge zur Variation des Applets und Analyse der Auswirkungen
- Reflexionsfragen zu beobachteten bzw. erarbeiteten Ergebnissen
- Zusammenhänge schriftlich festhalten
- dynamisch dargestellte Situation und dynamische mathematische Repräsentationen in Beziehung setzen
- Ergebnisse anwenden

Lichti & Roth (2018), Digel & Roth (2022)

Protokollierung

Ergebnisse und Vorgehensweisen schriftlich (Text & Grafik) festhalten

- erleichtert reflektierte Abstraktion sowie Schematisierung & ermöglicht tiefere Verarbeitung Dörfler (2003)
- entlastet das Arbeitsgedächtnis Schnotz et al. (2011)
- fördert Reflexionstiefe & neue Erkenntnisgewinnung Roth (2013)
- ermöglicht die spätere Weiterarbeit mit den Erkenntnissen
- Anregung: Prompts & leere Kästen Schumacher & Roth (2015)

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Digitale Werkzeuge ↔ Lernumgebungen

MaTeGnu

Digitale Werkzeuge (MMS)

sind Universalwerkzeuge zur mathematischen Problemlösung und müssen durch die Nutzer/in, durch geeignete Ausgestaltung, zu Spezialwerkzeugen für den jeweiligen Zweck gemacht werden.

Digitale Lernumgebungen

setzen einen Rahmen für das selbstständige Mathematik-Lernen. Dazu werden – häufig von Lehrpersonen – unter anderem Applets auf der Basis von digitalen Werkzeugen zur Unterstützung von selbstständigen Lernprozessen von Lernenden in die digitale Lernumgebung integriert.

Wann sollte was genutzt werden?

- **Digitales Werkzeug**
  Primäres Lernziel ist die Ausbildung von Nutzungsexpertise bzgl. des verwendeten digitalen Werkzeugs zur Problemlösung bzw. Aufgabenbearbeitung.
  → Die selbständige Nutzung des digitalen Werkzeugs ist sinnvoll.
- **Digitale Lernumgebungen**
  Primäres Lernziel besteht darin, einen mathematischen Inhalt zu durchschauen und zu verstehen.
  → Die Einbindung in eine digitale Lernumgebung ist sinnvoll.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

MMS-Nutzung durch Lernende
Grad der Vorstrukturierung

MaTeGnu

Digitale Lernumgebung

Konfiguration vollständig vorgegeben

Strukturierungs- und Fokussierungshilfen für alle wesentlichen Aspekte (z. B. Farbgebung, Linienstärken, Mitführen von Messwerten, ...)

Elemente können ein- und ausgeblendet werden

Variationsmöglichkeiten bewusst eingeschränkt.

Hybrid

Veränderbare (Teil-)Konfiguration vorgegeben

Kann / muss ergänzt oder verändert werden

Nur einzelne Strukturierungs- und Fokussierungshilfen vorhanden

Digitales Werkzeug

Leere, unstrukturierte MMS-Datei

MMS wird selbstständig und ohne Vorgaben benutzt

Erfordert Werkzeugkompetenz

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis (S. 233-248). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Digitale Lernumgebung
Beispiel: Ableitung als lokale Änderungsrate

MaTeGnu

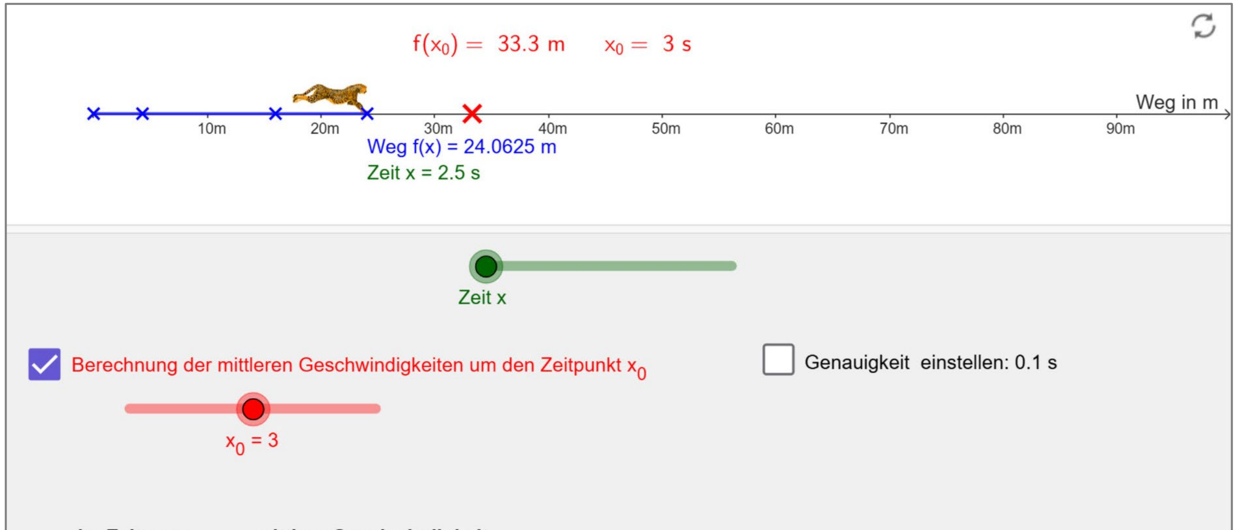
Digitale Lernumgebung

Ableitung als lokale Änderungsrate erarbeiten

- Gepard: Annäherung an die Momentangeschwindigkeit
- Basis für den Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten
- Verbaldefinition der Ableitung im Kontext

Arbeitsblatt

MaTeGnu



$$\bar{v} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{33.3\text{m} - 24.0625\ \text{m}}{3\text{s} - 2.5\text{s}} = 18.475\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Schritt 3:

Lesen Sie den **zurückgelegten Weg f(x)** (zum **Zeitpunkt x**) in der Animation mit dem Gepard ab und geben Sie den Wert im Zähler des Quotienten zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit ein.

https://mategnu.de/m/l1

RPTU

Digitale Lernumgebung
Beispiel: Ableitung als lokale Änderungsrate

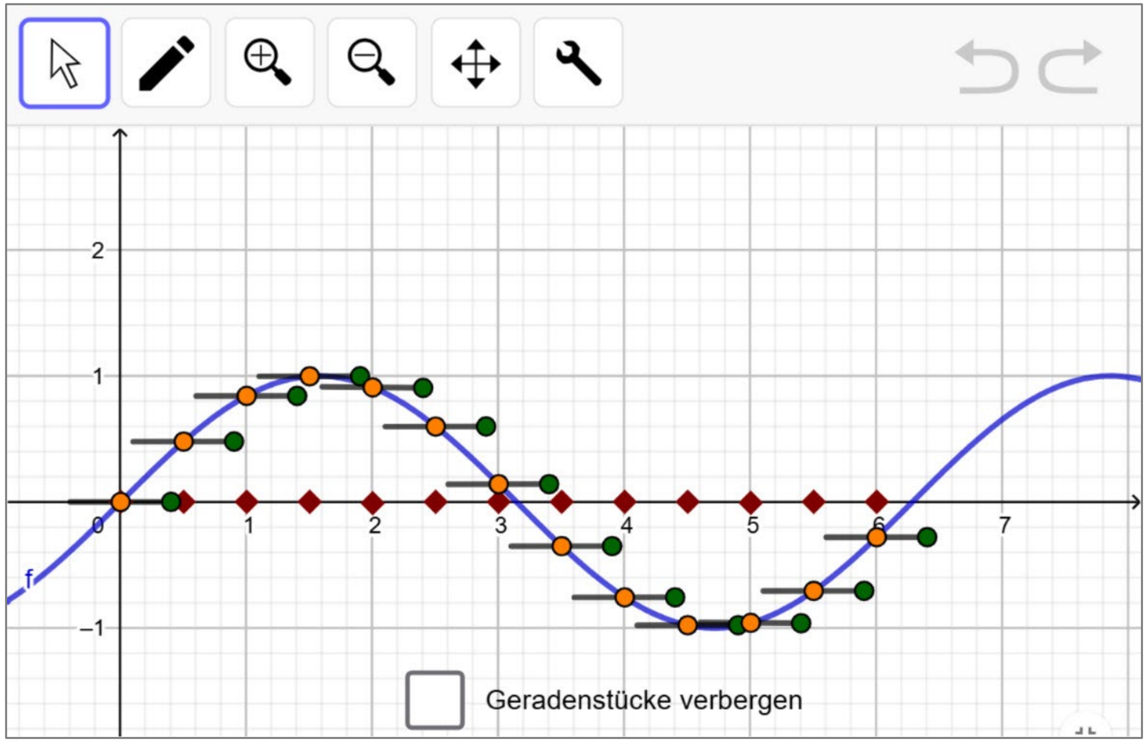
MaTeGnu

Hybrid

Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung graphisch erarbeiten

- Übergang zur Ableitungsfunktion
- Ableitung in mehreren Punkten visualisiert durch tangentiale Geradenstücke
- Adaptieren des Applets

Arbeitsblatt MaTeGnu



Aufgabe 3

Überprüfen Sie Ihre Graphen der Ableitung in den drei *Applets Beispiel 1, 2 und 3*, indem Sie die Ableitung an weiteren Stellen mit Geradenstückchen überprüfen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Erstellen Sie mithilfe des individuellen Werkzeugs ein weiteres drehbares Geradenstückchen.

Das passende rote Quadrat wird automatisch erzeugt.

RPTU

Digitale Lernumgebung
Beispiel: Ableitung als lokale Änderungsrate

MaTeGnu

Digitales Werkzeug

Funktionsgraph der Ableitungsfunktion erzeugen

- Funktionalität entdecken in vorkonfiguriertem Applet
- GeoGebra-Werkzeug Spur kennenlernen und nutzen
- Applet nach Anleitung selbst nachbauen

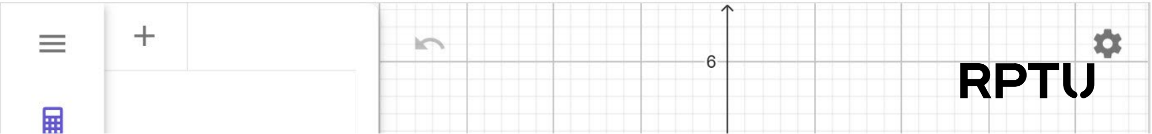
Arbeitsblatt

MaTeGnu

Jetzt sind Sie dran: So geht's

1. Geben Sie die Funktionsgleichung `f(x) = x^2/2 + 1` in das *Eingabefeld* ein.
2. Werkzeuge — Öffnen Sie das Werkzeug-Menü und klicken Sie ganz unten im Menü auf MEHR.
3. Erstellen Sie mit diesem Werkzeug einen neuen Punkt *A* auf der Funktion *f*.
   Hinweis: Punkt *A* kann nun nur entlang der Funktion bewegt werden.
4. Erstellen Sie eine Tangente *g* zur Funktion *f* durch den Punkt *A*.
5. Algebra — Stellen Sie die Steigung der Tangente *g* dar, indem Sie das Algebra-Menü anzeigen und `m = Steigung(g)` im *Eingabefeld* eingeben.
6. Definieren Sie den Punkt S indem Sie in im *Eingabefeld* `S = (x(A), m)` eingeben.
   Hinweis: `x(A)` gibt Ihnen die *x*-Koordinate von Punkt *A* an.
7. Werkzeuge — Zeigen Sie wieder das Werkzeug-Menü an.
8. Zeichnen Sie eine Gerade durch die Punkte *A* und *S*, indem Sie das Werkzeug verwenden oder mit dem Befehl `Gerade(A, S)`.
9. Aktivieren Sie die Spur von Punkt *S* und bewegen Sie Punkt *A*. *(siehe oben)*
   Hinweis: Rechts-Klick (MacOS: *Ctrl*-Klick, Tablet: lange antippen) und *Spur anzeigen* auswählen.

Los geht's im GeoGebra-MMS



Inhalts- und Unterstützungsdimension

MaTeGnu

Unterstützung: Grad der Fokussierungshilfe / Inhalt: Zweck des MMS-Einsatzes	Digitale Lernumgebung Vorgeg. Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)	Hybrid Ergänzb. Konfiguration (einzelne Fokussierungshilfen)	Digitales Werkzeug leeres, unstrukturiertes MMS
Mit Änderungen argumentieren	☑		(☑)
Beweisidee vermitteln	☑		(☑)
Verständnisgrundlage für Begriffe und ihre Eigenschaften schaffen	☑	☑	(☑)
Experimentelles Arbeiten ▪ Entdecken von Zusammenhängen	☑	☑	☑
▪ Ideen finden i. Problemlöseprozess		☑	☑
Reflexion von Problemlöseprozessen	☑		☑
Selbständiges Problemlösen			☑

Roth, J. (2008). Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen? In U. Kortenkamp et al. (Hrsg.), *Informatische Ideen im MU*. (S. 131-138). Franzbecker.

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

GeoGebra als Lernumgebungen und Werkzeug in der Differentialrechnung

1. Lernumgebung und MMS in der Differentialrechnung
2. **Lernumgebungen alleine reichen nicht aus**

GeoGebra-Buch zu Modul 1
https://mategnu.de/m/l1

Begriffsklärungen

MaTeGnu

Begriffe rund ums Verständnis

Grundvorstellung

- Tragfähiges mentales Modell
  für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

Grundfertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation
  (geforderte Operation vorgegeben)

Grundwissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten
  (Begriffe, Definitionen, Sätze, …)
- sollte auswendig gewusst werden

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

MaTeGnu

Lernumgebungen

... regen Lernende zu Prozessen aktiver Wissenskonstruktion an

durch Leitgedanken inhaltlich aufeinander bezogen

hinreichend offen, um differenzierend zu wirken

... organisieren und regulieren den Lernprozess über ein Netzwerk von Aufgaben

sinnvoll strukturiert bzgl. Inhalt und intendierten Lernprozessen

enthalten Aufforderungen zur Dokumentation (Ergebnisse & Vorgehensweisen)

... bilden den Rahmen für selbstständiges Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden

Unterrichtseinbindung

Lernende

- auf die Arbeit mit der Lernumgebung vorbereiten und
- beim Systematisieren der gewonnenen Erkenntnisse unterstützen.

... umfassen geeignete Medien und Materialien für aktive und vielfältige Auseinandersetzung mit einem Phänomen

... fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus

... bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen sowie die Möglichkeit der Ergebniskontrolle

Arbeit mit Lernumgebung vorbereiten

MaTeGnu

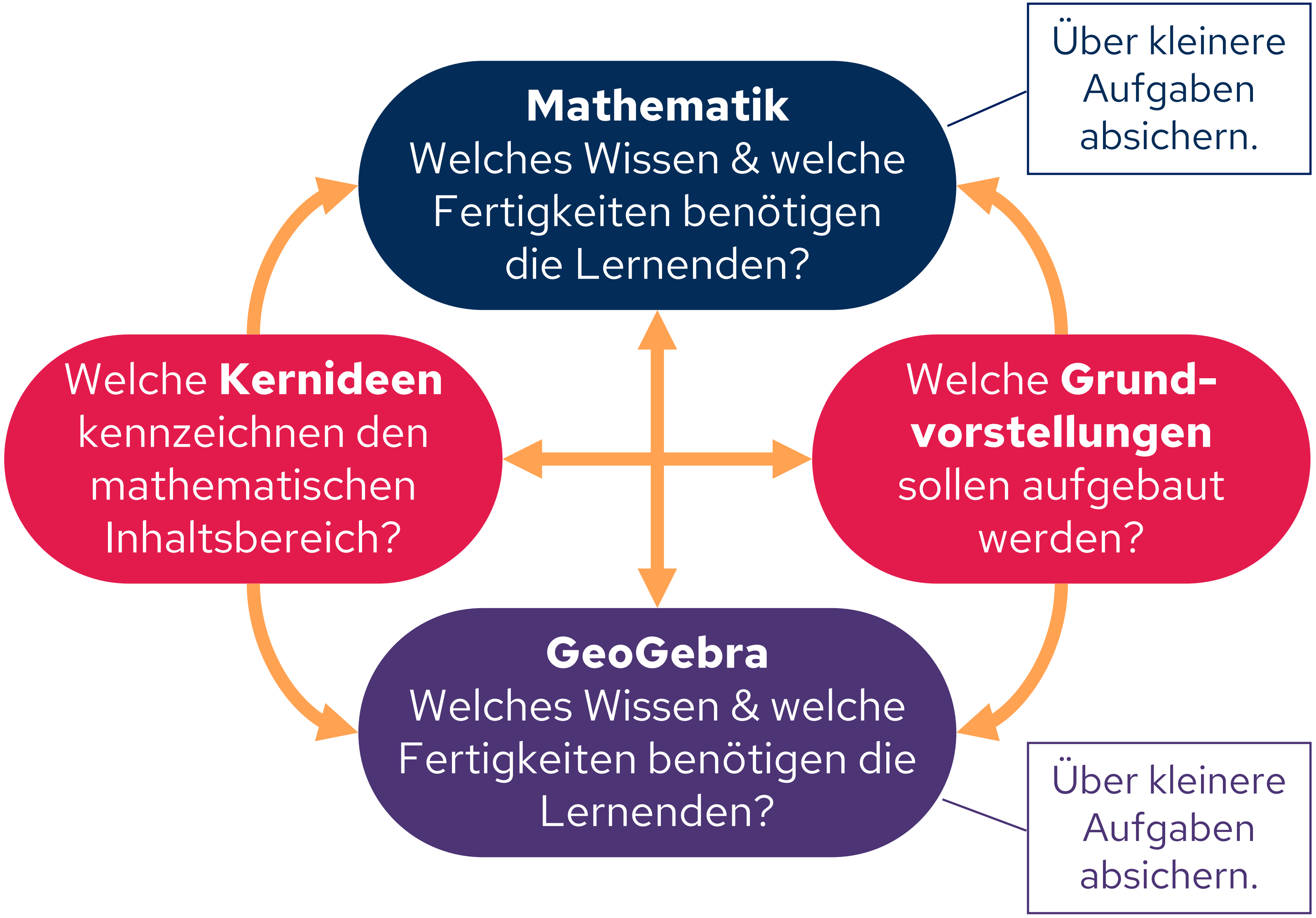
Vorbereitung

Lernende auf Arbeit mit digitaler Lernumgebung einstimmen

Regeln und Art der Dokumentation festlegen

Notwendige mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sicherstellen

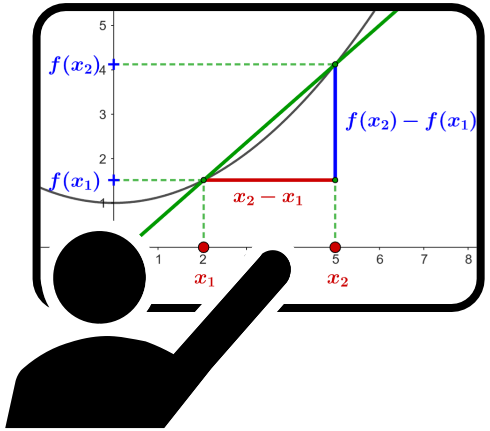
Voraussetzungen für sinnvolles Arbeiten mit digitaler Lernumgebung schaffen



Arbeit mit Lernumgebung nachbereiten

MaTeGnu

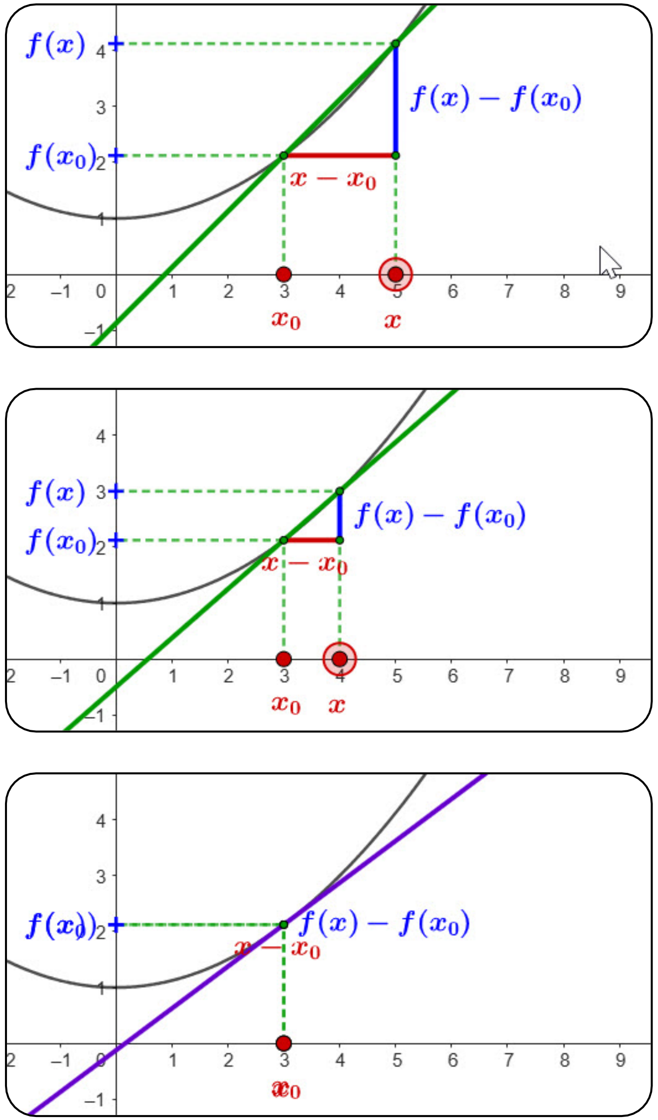
1 **Ergebnisse** im Plenum **besprechen** (GeoGebra)



2 **Ergebnisse festhalten** mit Screenshots & mehr

Der Grenzwert der Sekantensteigungen durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ für $x \to x_0$ heißt Ableitung von $\boldsymbol{f}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$.

$$f'(x_0) \coloneqq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Nachbereitung

- **E**rarbeitete Wissens-elemente konsolidieren
- **B**eobachtungen & Proto-kolle Lernender nutzen
- **M**it regulärem mathem. Wissen abgleichen
- **W**esentliche Grundvor-stellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten heraus-arbeiten sowie sichern
- **E**rreichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen
- **E**rarbeitetes weiter nutzen

Arbeit mit Lernumgebung nachbereiten

Definition

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

Der Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0) \coloneqq \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bezeichnet.

3 **Ergebnisse systematisieren**

4 **Erreichten Fähigkeits- & Wissenstand prüfen**

5 **Grundwissen / Grundfertigkeiten sichern**

6 **Erarbeitetes weiter nutzen**

Nachbereitung

Erarbeitete Wissenselemente konsolidieren

Beobachtungen & Protokolle Lernender nutzen

Mit regulärem mathem. Wissen abgleichen

Wesentliche Grundvorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten herausarbeiten sowie sichern

Erreichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen

Erarbeitetes weiter nutzen

Rolle der Lehrperson im Rahmen der Arbeit mit (digitalen) Lernumgebungen

MaTeGnu

Vorbereitung

- **L**ernende auf Arbeit mit digitaler Lernumgebung einstimmen
- **R**egeln und Art der Dokumentation festlegen
- **N**otwendige mathem. Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sicherstellen
- **V**oraussetzungen für sinnvolles Arbeiten mit digitaler Lernumgebung schaffen

Durchführung

- **Ü**berblick über Arbeits-stände und -ergebnisse wiederholt verschaffen
- **I**mplementierte Unterstützungssysteme adaptiv ergänzen
- **M**öglichst minimal und in der Regel nicht inhaltlich unterstützen (Lernhilfen nach Zech)
- **N**achbereitungsphase inhaltlich vorbereiten

Nachbereitung

- **K**onsolidieren der erarbei-teten Wissenselemente
- **B**eobachtungen & Proto-kolle Lernender nutzen
- **M**it regulärem mathem. Wissen abgleichen
- **W**esentliche Grundvor-stellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten heraus-arbeiten und sichern
- **E**rreichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen
- **E**rarbeitetes weiter nutzen

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Taxonomie der Lernhilfen

MaTeGnu

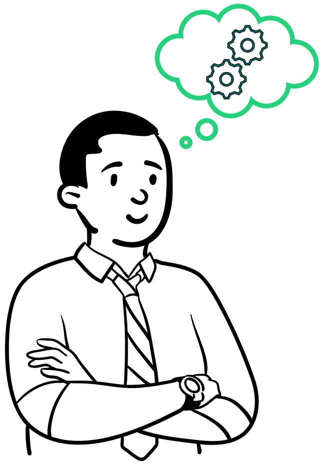
Motivationshilfe	▪ Lernende Motivieren ▪ Lernende bei der Aufgabenbearbeitung halten	
Rückmeldehilfe	▪ Lernstand ▪ Korrektheit der Bearbeitung	Protokollierung
Allgemein-strategische Hilfe	▪ Strategie vermitteln, die unabhängig vom aktuellen Inhalt genutzt werden kann	Verweis auf Hilfen, MMS …
Inhaltsorientiert-strategische Hilfe	▪ Strategie vermitteln, die überwiegend beim aktuellen Inhalt Anwendung findet	
Inhaltliche Hilfe	▪ Inhaltliche Hinweise ▪ (Teil-)Lösungen	

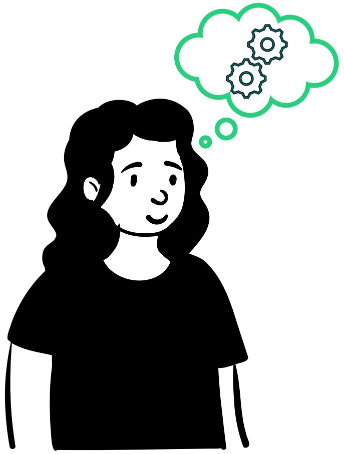
Hier beginnen.

Zech, F. (1998). Grundkurs Mathematikdidaktik (9. Aufl.). Beltz.
Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Unterrichtsplanung und -durchführung

MaTeGnu





Lehr-Lern-Ziele

(Digitales) Werkzeug oder **(digitale) Lernumgebung**

Art der digitalen Lernumgebung

Auswahl/Passung

- Inhalt / Lernziel
- Lerngruppe
- Rahmenbedingung

Überarbeitung

- Aufgabenstellungen
- Digitale Elemente
- Hilfen / Feedback

Vorbereitung

Durchführung

Nachbereitung

Lehr-Lern-Ziele

RPTU

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
mategnu.de

RPTU