



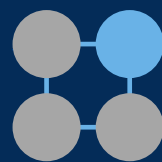
MaTeGnu

Mathematik mit Technologie
an Grundvorstellungen orientiert
nachhaltig unterrichten

Digitale Lernumgebungen in der Differentialrechnung

Jürgen Roth

18.05.2026 MaTeGnu - Modul 1, Bad Kreuznach



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R
TU
P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Digitale Lernumgebungen in der Differentialrechnung

1. Digitale Lernumgebung
↔ digitales Werkzeug
2. MaTeGnu-Beispiele aus Modul 1
zur Differentialrechnung
3. Lernumgebungen alleine
reichen nicht aus



Digitale Lernumgebungen in der Differentialrechnung

1. **Digitale Lernumgebung** ↔ **digitales Werkzeug**

2. MaTeGnu-Beispiele aus Modul 1
zur Differentialrechnung

3. Lernumgebungen alleine
reichen nicht aus

mategnu.de

RPTU



GeoGebra-Buch zu Modul 1
<https://mategnu.de/m/l1>

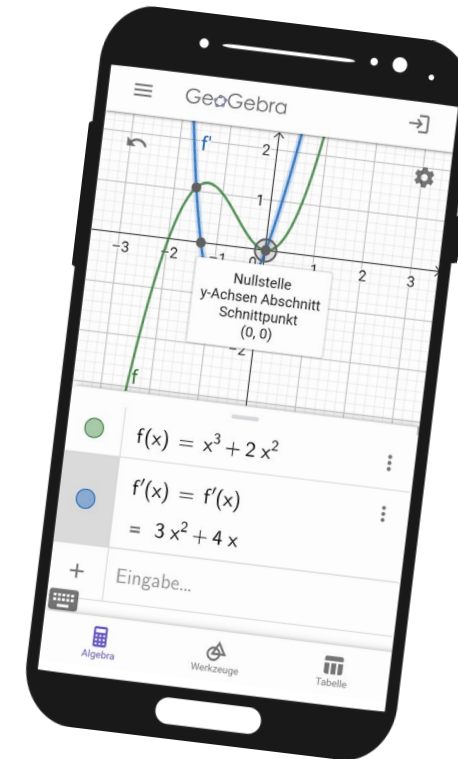
Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematik-
unterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
- Funktionen-Plotter
- Computer-Algebra-Systeme,
- dynamische Geometrie-Systeme
- dynamische Stochastik-Systeme

und als deren Integration

- dynamische Mathematik-Systeme (DMS)
[Multi-Repräsentations-Systeme,
modulare Mathematikssysteme (MMS)].



Digitale Werkzeuge nur dann einsetzen, wenn dadurch das Erreichen der Ziele des Mathematikunterrichts nachhaltig unterstützt wird.

Aufgabenstellungen

- schriftliche Ergebnis-Vorhersagen vor Nutzung dynamischer Interaktivitäten
- Konkrete Aufträge zur Variation des Applets und Analyse der Auswirkungen
- Reflexionsfragen zu beobachteten bzw. erarbeiteten Ergebnissen
- Zusammenhänge schriftlich festhalten
- dynamisch dargestellte Situation und dynamische mathematische Repräsentationen in Beziehung setzen
- Ergebnisse anwenden

Lichti & Roth (2018), Digel & Roth (2022)

Protokollierung

Ergebnisse und Vorgehensweisen schriftlich (Text & Grafik) festhalten

- erleichtert reflektierte Abstraktion sowie Schematisierung & ermöglicht tiefere Verarbeitung Dörfler (2003)
- entlastet das Arbeitsgedächtnis Schnotz et al. (2011)
- fördert Reflexionstiefe & neue Erkenntnisgewinnung Roth (2013)
- ermöglicht die spätere Weiterarbeit mit den Erkenntnissen
- Anregung: Prompts & leere Kästen

Schumacher & Roth (2015)

Digitale Werkzeuge (MMS)

sind Universalwerkzeuge zur mathematischen Problemlösung und müssen durch die Nutzer/in, durch geeignete Ausgestaltung, zu Spezialwerkzeugen für den jeweiligen Zweck gemacht werden.



Digitale Lernumgebungen

setzen einen Rahmen für das selbstständige Mathematik-Lernen. Dazu werden – häufig von Lehrpersonen – unter anderem Applets auf der Basis von digitalen Werkzeugen zur Unterstützung von selbstständigen Lernprozessen von Lernenden in die digitale Lernumgebung integriert.



Wann sollte was genutzt werden?

■ Digitales Werkzeug

Primäres Lernziel ist die Ausbildung von Nutzungsexpertise bzgl. des verwendeten digitalen Werkzeugs zur Problemlösung bzw. Aufgabenbearbeitung.

→ Die selbstständige Nutzung des digitalen Werkzeugs ist sinnvoll.

■ Digitale Lernumgebungen

Primäres Lernziel besteht darin, einen mathematischen Inhalt zu durchschauen und zu verstehen.

→ Die Einbindung in eine digitale Lernumgebung ist sinnvoll.

MMS-Nutzung durch Lernende

Grad der Vorstruktururierung

Digitale Lernumgebung



Konfiguration vollständig vorgegeben

Strukturierungs- und Fokussierungshilfen für alle wesentlichen Aspekte (z. B. Farbgebung, Linienstärken, Mitführen von Messwerten, ...)

Elemente können ein- und ausgeblendet werden

Variationsmöglichkeiten bewusst eingeschränkt.

Hybrid



Veränderbare (Teil-)Konfiguration vorgegeben

Kann / muss ergänzt oder verändert werden

Nur einzelne Strukturierungs- und Fokussierungshilfen vorhanden

Digitales Werkzeug






Leere, unstrukturierte MMS-Datei

MMS wird selbstständig und ohne Vorgaben benutzt

Erfordert Werkzeugkompetenz

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 233-248). Wiesbaden: Springer Spektrum. 

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis**. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum. 

<p>Unterstützung: Grad der Fokussierungshilfe</p> <p>Inhalt: Zweck des MMS-Einsatzes</p>	 <p>Digitale Lernumgebung Vorgeg. Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)</p>	 <p>Hybrid Ergänzb. Konfiguration (einzelne Fokussierungshilfen)</p>	 <p>Digitales Werkzeug leeres, unstrukturiertes MMS</p>
Mit Änderungen argumentieren	☑		☑
Beweisidee vermitteln	☑		☑
Verständnisgrundlage für Begriffe und ihre Eigenschaften schaffen	☑	☑	☑
Experimentelles Arbeiten <ul style="list-style-type: none"> ▪ Entdecken von Zusammenhängen 	☑	☑	☑
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ideen finden i. Problemlöseprozess 		☑	☑
Reflexion von Problemlöseprozessen	☑		☑
Selbständiges Problemlösen			☑

Digitale Lernumgebungen in der Differentialrechnung

1. Digitale Lernumgebung
↔ digitales Werkzeug
2. **MaTeGnu-Beispiele aus Modul 1
zur Differentialrechnung**
3. Lernumgebungen alleine
reichen nicht aus



Digitale Lernumgebung



Ableitung als lokale Änderungsrate erarbeiten

- Gepard: Annäherung an die Momentangeschwindigkeit
- Basis für den Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten
- Verbaldefinition der Ableitung im Kontext



Kapitel

MaTeGnu Modul 1: Differentialre...

Reihenübersicht

I. Numerischer Zugang

M1.I.1 L Einstiegskontext Ge...

M1.I.1 AB Einstiegsvideo Ge...

M1.I.2 L Geschwindigkeit als ...

M1.I.2 AB Geschwindigkeit d...

M1.I.2 App Gepard

M1.I.3 L Momentane Gesch...

M1.I.3 AB Näherung der mo...

M1.I.3 App Näherung Gepard

M1.I.4 L Wissensspeicher Abl...

* M1.I.5 L Weg(Zeit)-Funktio...

* M1.I.5 AB Funktion mit Pun...

* M1.I.6 L Grenzwertbildung ...

Arbeitsblatt

MaTeGnu

$f(x_0) = 33.3 \text{ m}$ $x_0 = 3 \text{ s}$

Weg in m

Weg $f(x) = 24.0625 \text{ m}$
Zeit $x = 2.5 \text{ s}$

Zeit x

Berechnung der mittleren Geschwindigkeiten um den Zeitpunkt x_0 Genauigkeit einstellen: 0.1 s

$x_0 = 3$

im Zeitraum	mittlere Geschwindigkeit
$[x; x_0]$	$\bar{v} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{33.3 \text{ m} - 24.0625 \text{ m}}{3 \text{ s} - 2.5 \text{ s}} = 18.475 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schritt 3:

Lesen Sie den **zurückgelegten Weg $f(x)$** (zum **Zeitpunkt x**) in der Animation mit dem Gepard ab und geben Sie den Wert im Zähler des Quotienten zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit ein.

Hybrid

Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung graphisch erarbeiten

- Übergang zur Ableitungsfunktion
- Ableitung in mehreren Punkten visualisiert durch tangentielle Geradenstücke
- Adaptieren des Applets



←

Kapitel

MaTeGnu Modul 1: Differentialre...

Reihenübersicht

I. Numerischer Zugang

II. Graphische Darstellung

III. Ableitungsfunktion

M1 L III Didakt. Hinweise: Ab...

M1.III.1 L Zeitabhängige Ges...

M1.III.1 AB Geschwindigkeits...

M1.III.2 L Ableitung mit Gera...

M1.III.2 AB Ableitung mit Ge...

M1.III.3 L Graphisches Ableit...

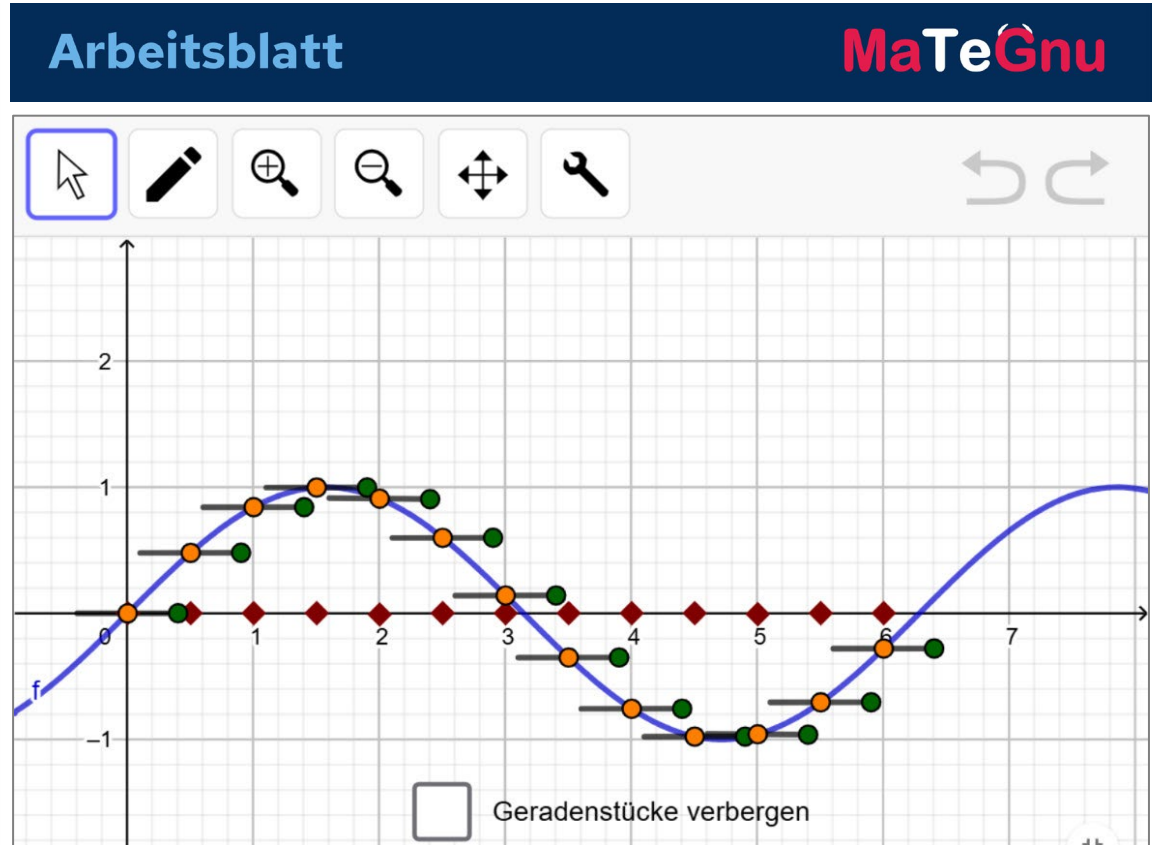
M1.III.3 AB Graph der Ableit...

M1.III.4 AB Kontrolle Graph ...

M1.III.4 L Ableitungsfunktion...

M1 AB III.4 Ableitungsregeln...

M1 Ü III.1 Übungen zu Ablei...



Aufgabe 3

Überprüfen Sie Ihre Graphen der Ableitung in den drei *Applets Beispiel 1, 2 und 3*, indem Sie die Ableitung an weiteren Stellen mit Geradenstückchen überprüfen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Erstellen Sie mithilfe des individuellen Werkzeugs ein weiteres drehbares Geradenstückchen.

Das passende rote Quadrat wird automatisch erzeugt.

Digitales Werkzeug



Funktionsgraph der Ableitungsfunktion erzeugen

- Funktionalität entdecken in vorkonfiguriertem Applet
- GeoGebra-Werkzeug **Spur** kennenlernen und nutzen
- Applet nach Anleitung selbst nachbauen

←

Kapitel

MaTeGnu Modul 1: Differentialre...

Reihenübersicht

I. Numerischer Zugang

II. Graphische Darstellung

III. Ableitungsfunktion

M1 L III Didakt. Hinweise: Ab...

M1.III.1 L Zeitabhängige Ges...

M1.III.1 AB Geschwindigkeits...

M1.III.2 L Ableitung mit Gera...

M1.III.2 AB Ableitung mit Ge...

M1.III.3 L Graphisches Ableit...

 M1.III.3 AB Graph der Ableit...

M1.III.4 AB Kontrolle Graph ...

M1.III.4 L Ableitungsfunktion...








M1 AB III.4 Ableitungsregeln...

M1 Ü III.1 Übungen zu Ablei...

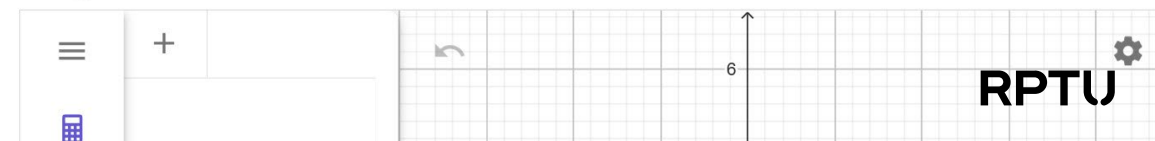
Weiterer Unterricht

Arbeitsblatt

Jetzt sind Sie dran: So geht's

1. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x) = x^2/2 + 1$ in das *Eingabefeld* ein.
2.  Öffnen Sie das Werkzeug-Menü und klicken Sie ganz unten im Menü auf MEHR.
3.  Erstellen Sie mit diesem Werkzeug einen neuen Punkt *A* auf der Funktion *f*.
Hinweis: Punkt *A* kann nun nur entlang der Funktion bewegt werden.
4.  Erstellen Sie eine Tangente *g* zur Funktion *f* durch den Punkt *A*.
5.  Stellen Sie die Steigung der Tangente *g* dar, indem Sie das Algebra-Menü anzeigen und $m = \text{Steigung}(g)$ im *Eingabefeld* eingeben.
6. Definieren Sie den Punkt *S* indem Sie in im *Eingabefeld* $S = (x(A), m)$ eingeben.
Hinweis: $x(A)$ gibt Ihnen die *x*-Koordinate von Punkt *A* an.
7.  Zeigen Sie wieder das Werkzeug-Menü an.
8.  Zeichnen Sie eine Gerade durch die Punkte *A* und *S*, indem Sie das Werkzeug verwenden oder mit dem Befehl `Gerade(A, S)`.
9.  Aktivieren Sie die Spur von Punkt *S* und bewegen Sie Punkt *A*. (*siehe oben*)
Hinweis: Rechts-Klick (MacOS: *Ctrl*-Klick, Tablet: lange antippen) und *Spur anzeigen* auswählen.

Los geht's im GeoGebra-MMS



Digitale Lernumgebungen in der Differentialrechnung

1. Digitale Lernumgebung
↔ digitales Werkzeug
2. MaTeGnu-Beispiele aus Modul 1
zur Differentialrechnung
- 3. Lernumgebungen alleine
reichen nicht aus**



MaTeGnu

Grund-
vorstellung

- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisenwicklung



Begriffe
rund ums
Verständnis

Grund-
fertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

Grund-
wissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Sätze, ...)
- sollte auswendig gewusst werden

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.



MaTeGnu





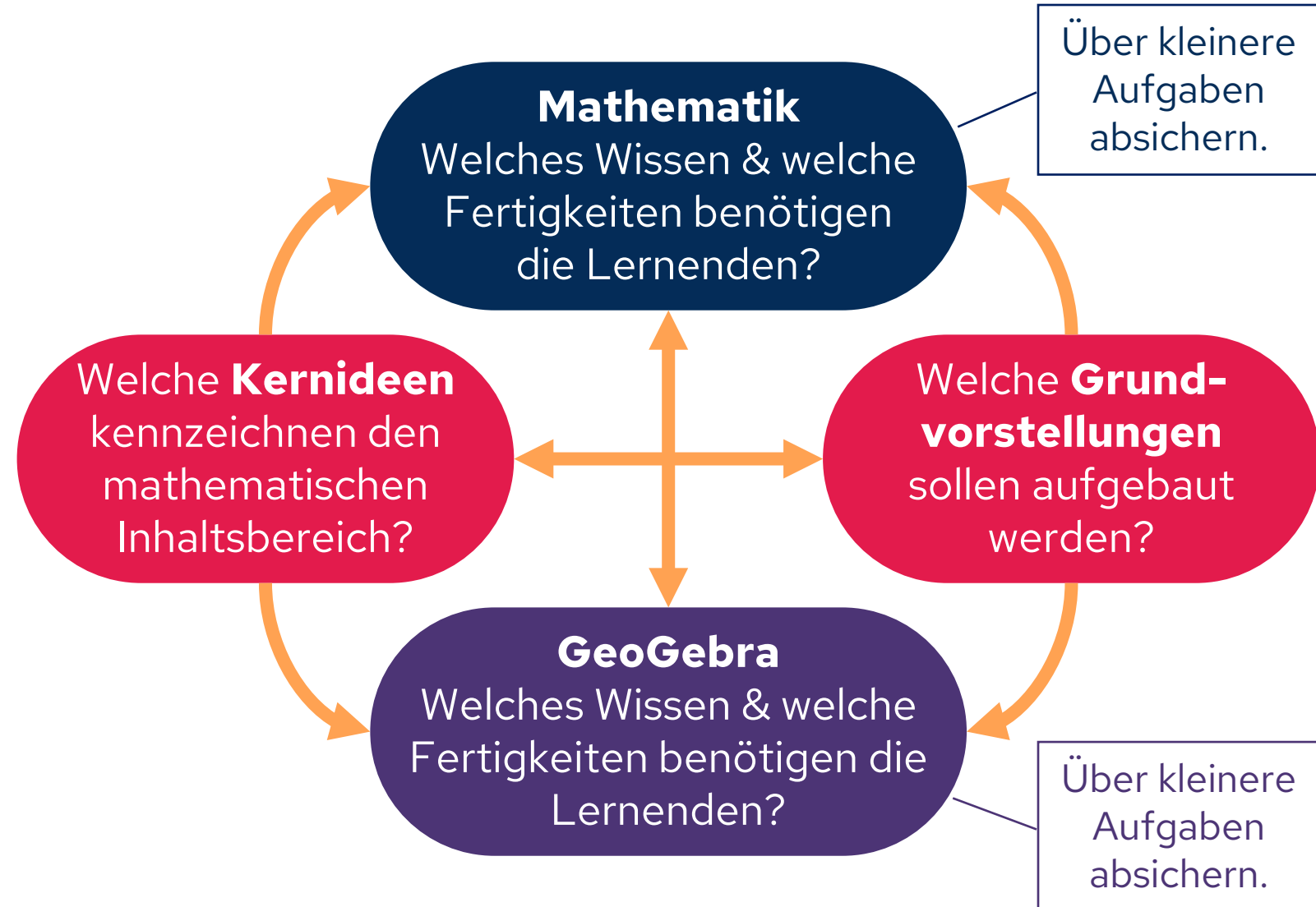
Vorbereitung

Lernende auf Arbeit mit digitaler Lernumgebung einstimmen

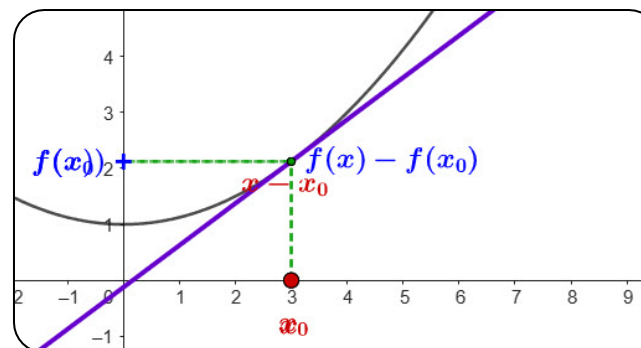
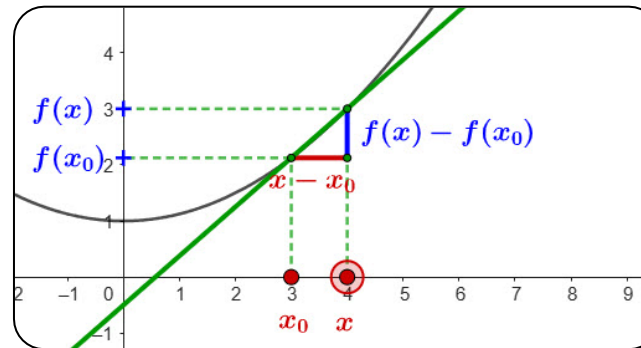
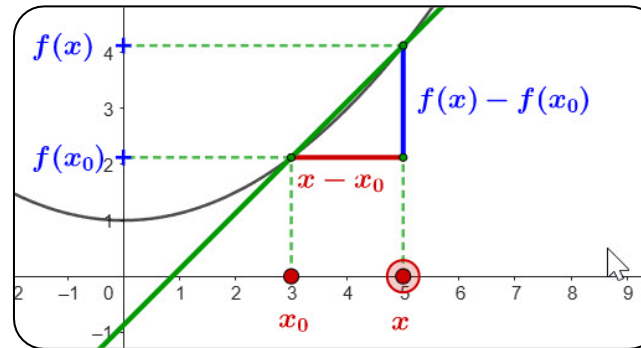
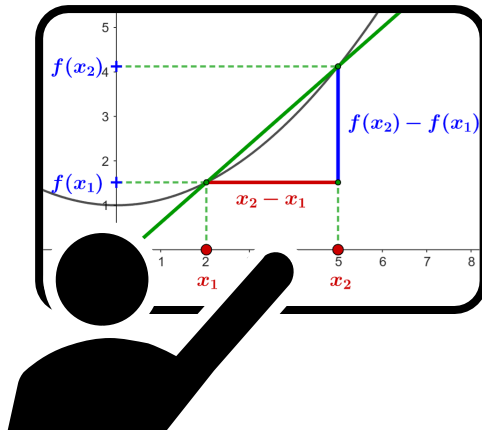
Regeln und Art der Dokumentation festlegen

Notwendige mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sicherstellen

Voraussetzungen für sinnvolles Arbeiten mit digitaler Lernumgebung schaffen



1 Ergebnisse im Plenum besprechen (GeoGebra)



2 Ergebnisse festhalten mit Screenshots & mehr

Der Grenzwert der Sekantensteigungen durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ für $x \rightarrow x_0$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 .

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nachbereitung

Erarbeitete Wissens-
elemente konsolidieren

Beobachtungen & Proto-
kolle Lernender nutzen

Mit regulärem mathem.
Wissen abgleichen

Wesentliche Grundvor-
stellungen, Kenntnisse
und Fähigkeiten heraus-
arbeiten sowie sichern

Erreichten Fähigkeits- &
Wissensstand überprüfen

Erarbeitetes weiter nutzen

Definition

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Der Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bezeichnet.

3 Ergebnisse systematisieren

4 Erreichten Fähigkeits- & Wissenstand prüfen

5 Grundwissen / Grundfertigkeiten sichern

6 Erarbeitetes weiter nutzen

Nachbereitung

Erarbeitete Wissens-elemente konsolidieren

Beobachtungen & Protokolle Lernender nutzen

Mit regulärem mathem. Wissen abgleichen

Wesentliche Grundvorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten herausarbeiten sowie sichern

Erreichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen

Erarbeitetes weiter nutzen

Rolle der Lehrperson im Rahmen der Arbeit mit (digitalen) Lernumgebungen

Vorbereitung

- L**ernende auf Arbeit mit digitaler Lernumgebung einstimmen
- R**egeln und Art der Dokumentation festlegen
- N**otwendige mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sicherstellen
- V**oraussetzungen für sinnvolles Arbeiten mit digitaler Lernumgebung schaffen



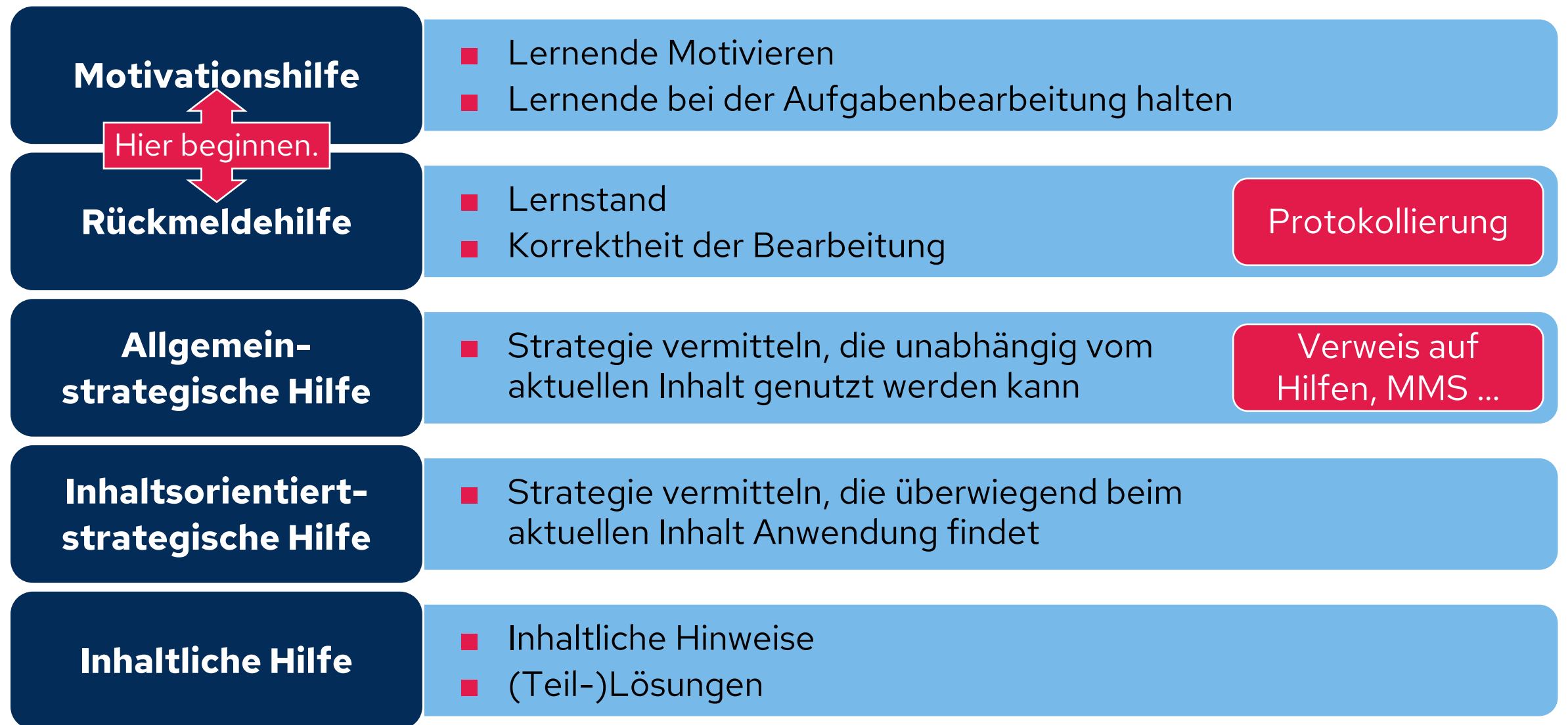
Durchführung

- Ü**berblick über Arbeitsstände und -ergebnisse wiederholt verschaffen
- I**mplementierte Unterstützungssysteme adaptiv ergänzen
- M**öglichst minimal und in der Regel nicht inhaltlich unterstützen (Lernhilfen nach Zech)
- N**achbereitungsphase inhaltlich vorbereiten



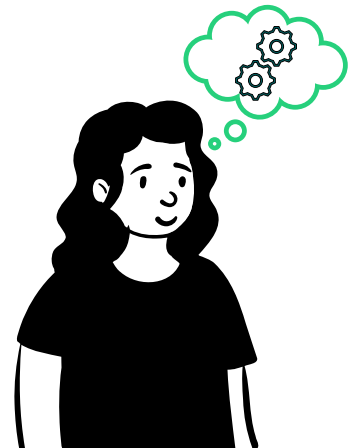
Nachbereitung

- K**onsolidieren der erarbeiteten Wissens Elemente
- B**eobachtungen & Protokolle Lernender nutzen
- M**it regulärem mathem. Wissen abgleichen
- W**esentliche Grundvorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten herausarbeiten und sichern
- E**reichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen
- E**rarbeitetes weiter nutzen



Zech, F. (1998). Grundkurs Mathematikdidaktik (9. Aufl.). Beltz.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de

mategnu.de

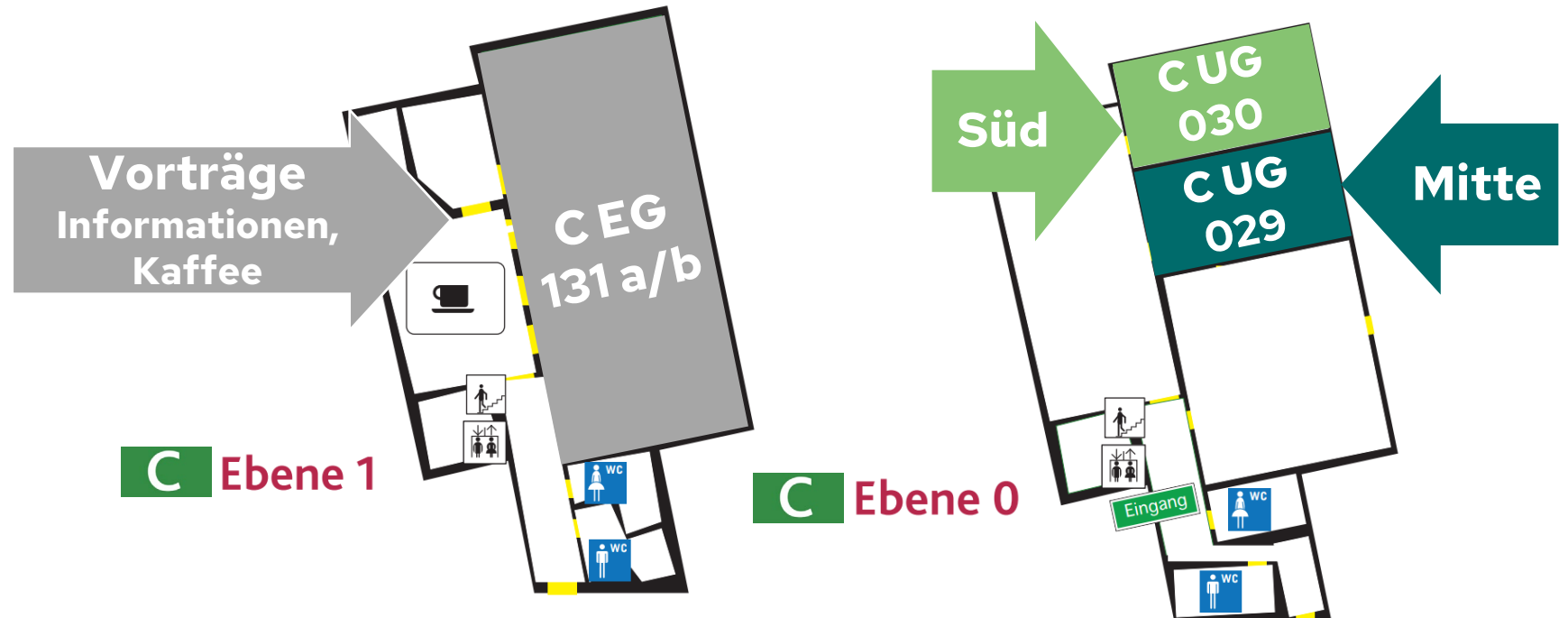
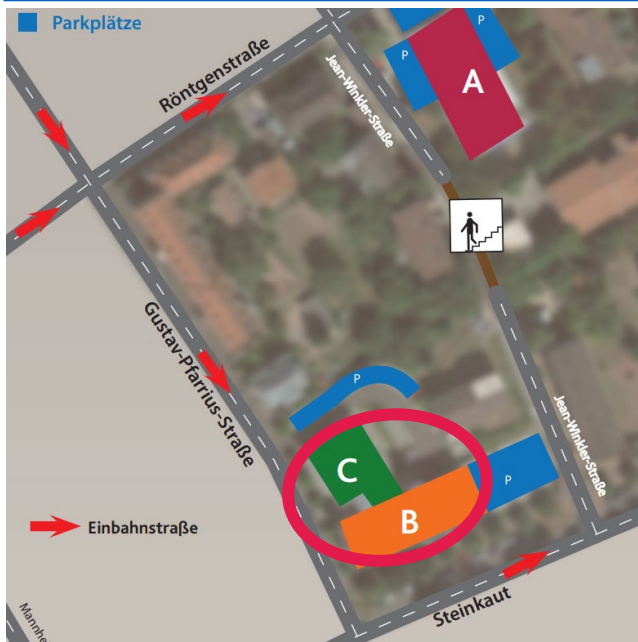


RPTU

Zeit	Aktivität	
9:30–10:00	Begrüßung & Überblick zu MaTeGnu	alle
10:00–11:00	Vortrag: Verständnisorientierung in der Differentialrechnung	alle
	<i>Kaffeepause</i>	
11:15–13:00	Ws 1: Einstieg in die Differentialrechnung	PLG
	<i>Mittagspause Restaurant Osakii http://osakii.de/</i>	
15:00–15:30	Vortrag: Digitale Lernumgebungen in der Differentialrechnung	alle
	<i>Kaffeepause</i>	
15:45–17:30	Ws 2: MaTeGnu in den eigenen Unterricht zur Differentialrechnung einbinden	PLG

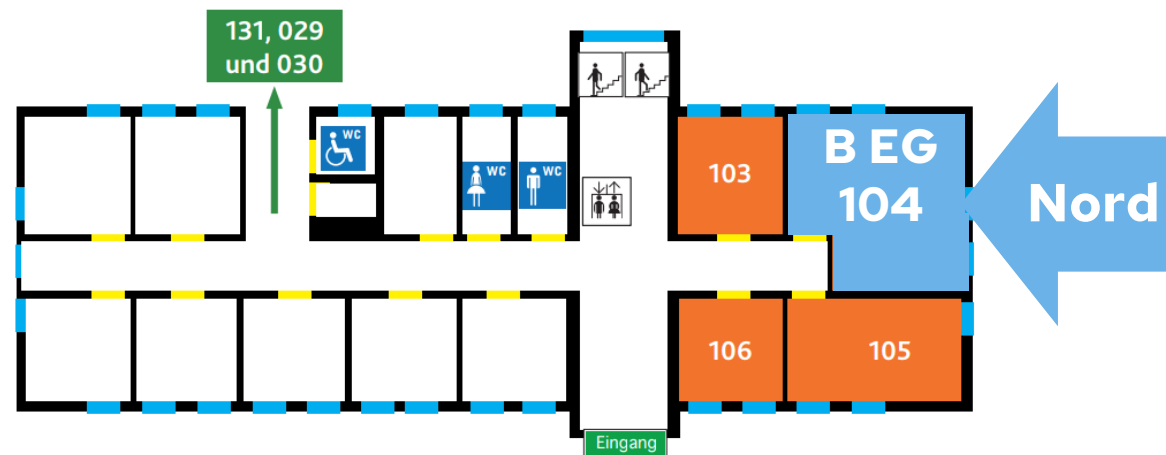
	C UG 0.29	C UG 0.30	B EG 104
WS 1, 2 & 3	PLG Mitte	PLG Süd	PLG Nord
WS 4	4a GeoGebra Erste Schritte	4b GeoGebra Lernen & Leisten	4c GeoGebra Dokumentation

Orientierung



C Ebene 1

C Ebene 0



B Ebene 1