

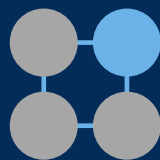
A photograph of a modern building's exterior featuring a complex metal framework. Several large, colorful bird sculptures are perched on the beams. The birds are in shades of purple, red, yellow, and pink. In the background, a town with red-roofed buildings and church spires is visible under a clear blue sky.

MaTeGnu Mathematik mit Technologie
an Grundvorstellungen orientiert
nachhaltig unterrichten

Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen durch Kernideen verstehen

Prof. Dr. Jürgen Roth

19.10.2026 MaTeGnu – K1 – M4, Bad Kreuznach



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R
TU
P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau



Leitidee L2: Messen

- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten

Leitidee L4: Funktionaler Zusammenhang

- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

Leitidee L5: Daten und Zufall (Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau)

- exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen
- die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

Leitidee L5: Daten und Zufall (Erhöhtes Anforderungsniveau)

- für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen (B1)
- Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (B2)
- exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

Grundkurs

(ca. 42 Stunden)

Stochastik 1

+ wahlweise

Stochastik 2 - B1

Schätzen von
Wahrscheinlichkeiten

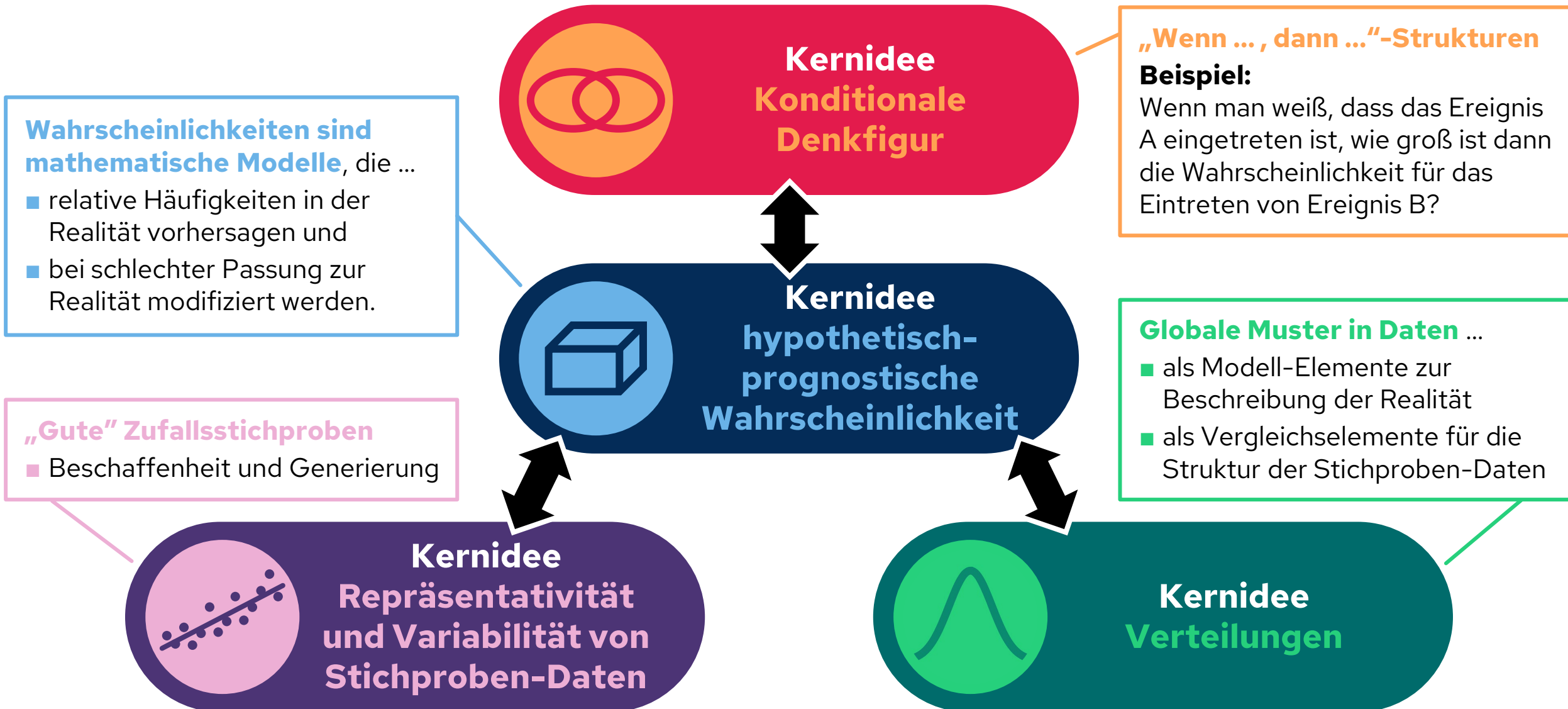
Stochastik 2 - B2

Testen von
Hypothesen

Leistungskurs

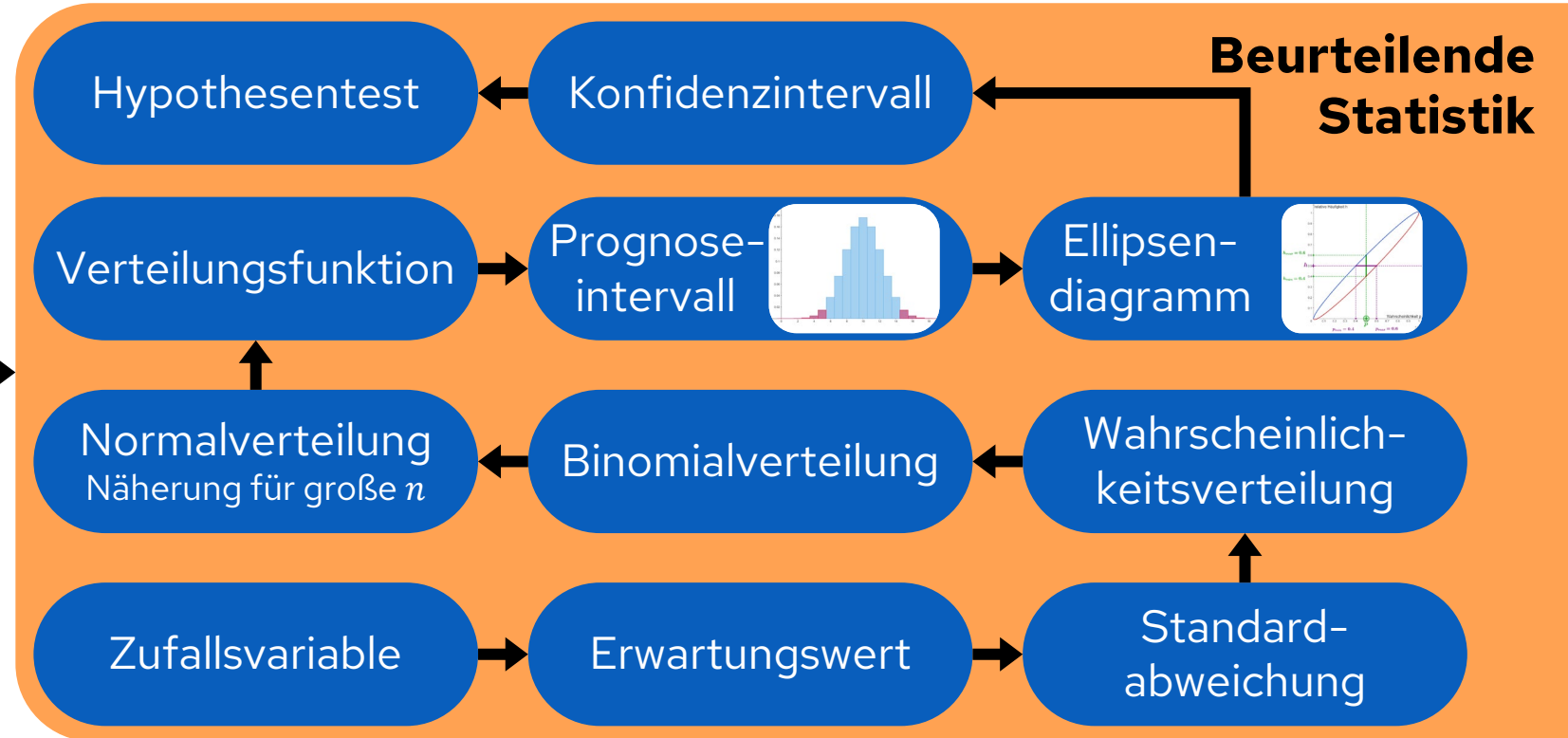
(ca. 70 Stunden)

Stochastik



Beschreibende Statistik

-  Erhebung – Daten sammeln
-  Graphische Darstellungsformen
-  Mittelwerte & Streuungsmaße



Wahrscheinlichkeitsrechnung

-  (Mehrstufige) Zufallsexperimente
-  Stoch. (Un-)Abhängigkeit
-  Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
-  Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen

1. Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
2. Mehrstufige Zufallsexperimente
Baumdiagramme und Efron-Würfel
3. Stochastische (Un-)Abhängigkeit
und bedingte Wahrscheinlichkeit
4. Verteilungen – Binomialverteilung & Co

1

Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

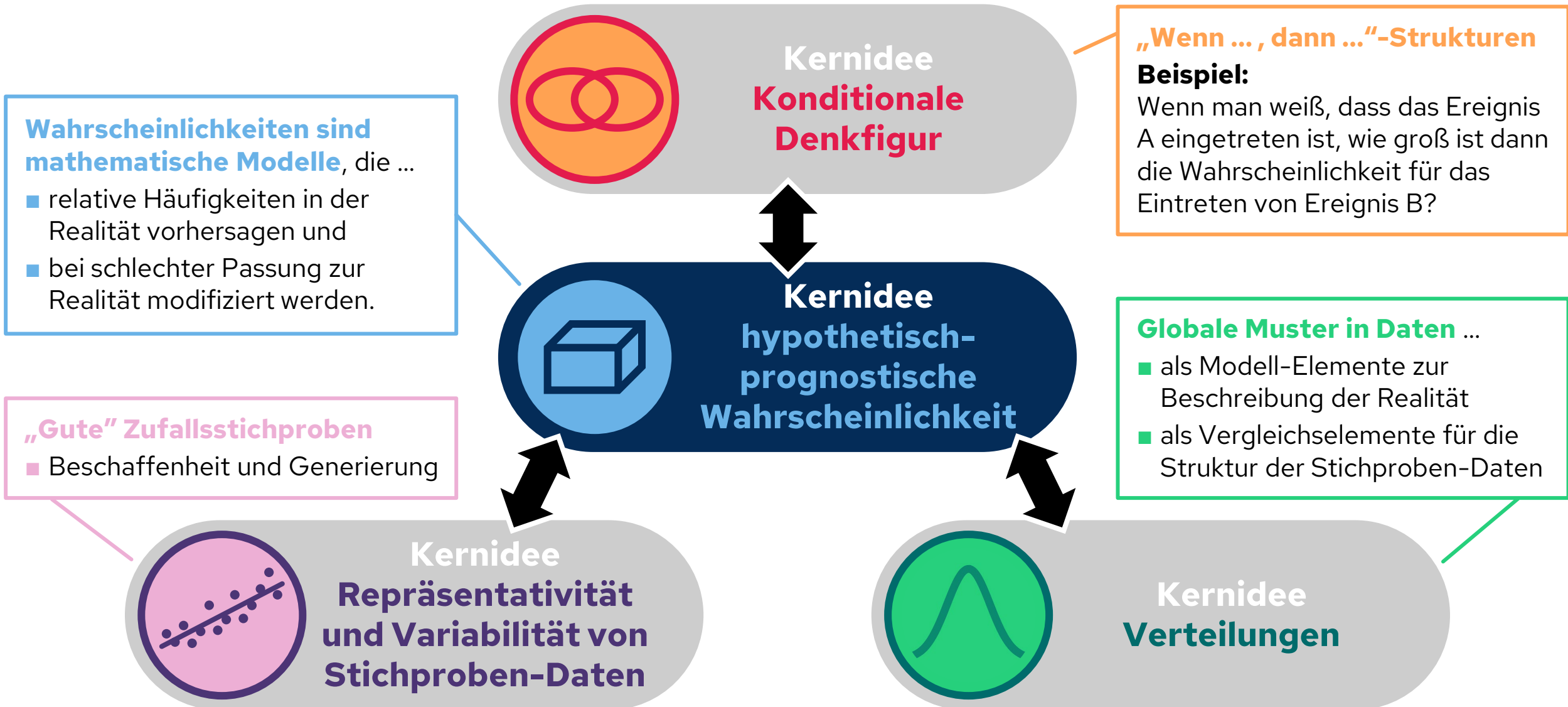
	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
2.	Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	■ Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. ■ Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. ■ Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3.	Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen begründen und anwenden (5.02g, 5.03g)	z.B. ■ Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit d. Gegenereignisses, ■ Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge von Ereignissen
4.	Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallszahlen simulieren und die Ergebnisse der Simulation interpretieren (5.05g)	■ Für die Durchführung der Simulationen sollte der Computer benutzt werden. ■ Die SuS sollen erfahren, dass Simulationen dort sinnvoll eingesetzt werden, wo eine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung nicht möglich oder zu komplex ist. ■ Im Unterricht können durch Simulationen auch wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen und Formeln vorbereitet oder bestätigt werden.

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
2.	Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	■ Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. ■ Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. ■ Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3.	Einfache Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen anwenden (5.02g)	z.B. ■ Pfadregeln (Summe, Produkt), ■ Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

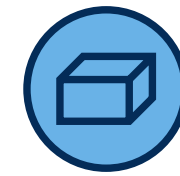
1.1

Kernidee

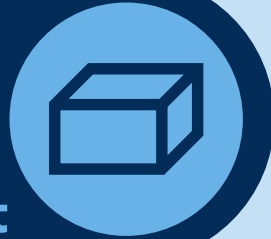
**Hypothetisch-prognostische
Wahrscheinlichkeit**



Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit



Kernidee Hypothetisch- prognostische Wahrscheinlichkeit

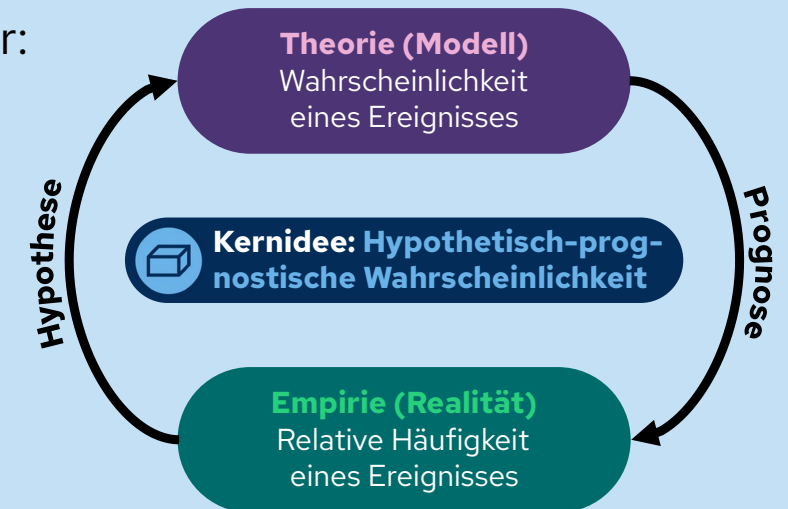


Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die

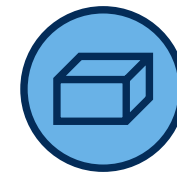
- ... relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- ... bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Diese Kernidee setzt Wahrscheinlichkeiten (Modelle) und relativen Häufigkeiten (Realität) durch zwei Perspektiven in Beziehung zueinander:
 - **Prognostisch:**
Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die vorhersagen, um welchen Wert relative Häufigkeiten bei mehrfacher Versuchswiederholung in der Realität zufallsabhängig schwanken werden.
 - **Hypothetisch:**
Modelle können angezweifelt und modifiziert werden, wenn sie die Realität bei mehrfacher Versuchswiederholung nicht gut abbilden.
- Diese Kernidee betont damit den Modellcharakter von Wahrscheinlichkeiten und die Tatsache, dass Modelle sich an der Realität messen lassen müssen.

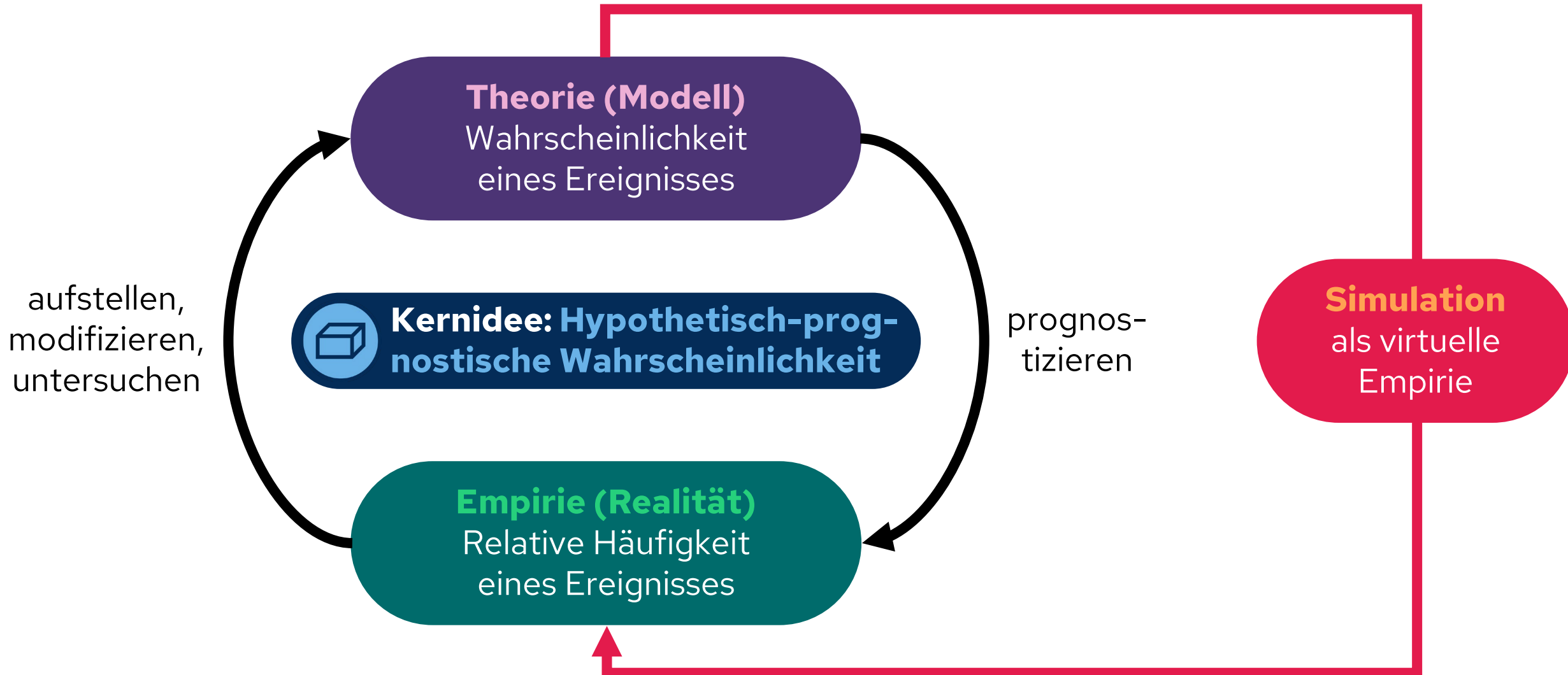


Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit



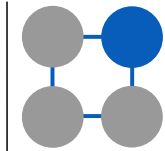
R
P TU

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen



Eichler, A. (2014). Simulation als Bindeglied zwischen der empirischen Welt der Daten und der theoretischen Welt des Zufalls. In T. Wassong et al. (Hrsg.). Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen (S. 251-265), Springer.
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.





Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Subjektive Wahrscheinlichkeit

Frequentistische Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Axiomatische Wahrscheinlichkeit



1.2

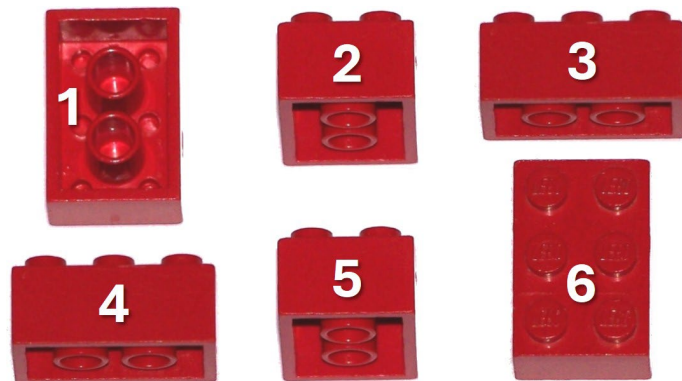
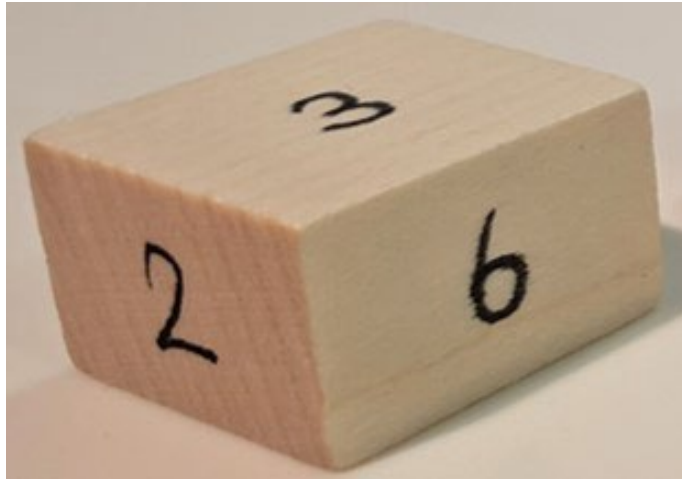
Quader-„Würfel“

Quader-„Würfel“



Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

R
P TU



1

Hypothesen aufstellen

Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen schätzen und tabellarisch festhalten.

2

Experimentieren

Den Quader-„Würfel“ 100-mal werfen und die Ergebnisse zusammentragen.

3

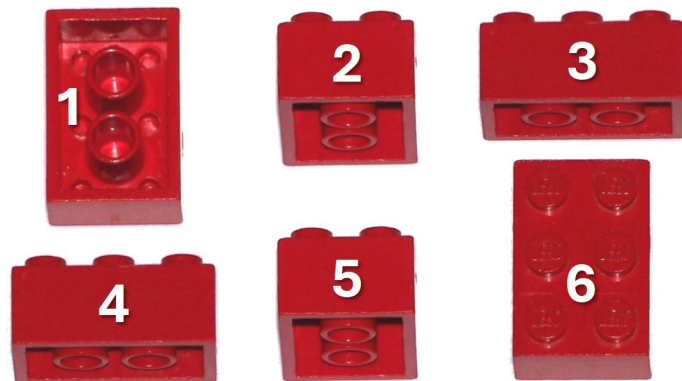
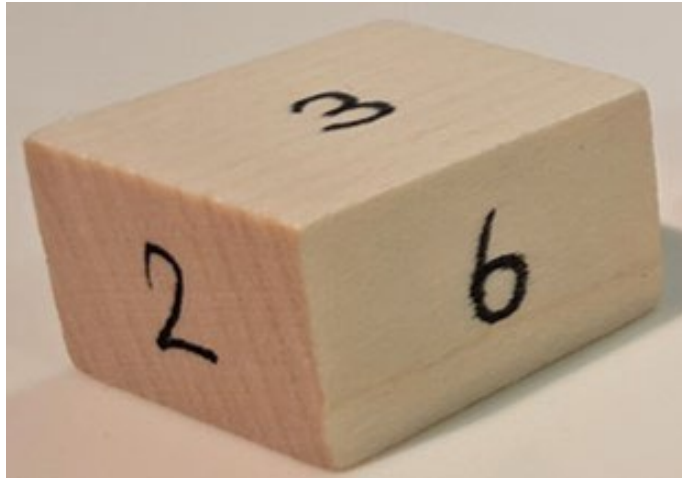
Simulieren

Wahrscheinlichkeitsmodell festlegen und in Simulation übertragen. Lange Versuchsreihen wiederholt simulieren.

4

Reflektieren

Zusammenstellen und diskutieren der Erkenntnisse aus Hypothesen, Experimenten und Simulation.



1

Hypothesen aufstellen

Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen schätzen und tabellarisch festhalten.

Aufgabe

Sehen Sie sich den Quader-„Würfel“ genau an und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten der 6 Augenzahlen.

Achtung: Nicht würfeln, nur schätzen!



**Hypothetische
Wahrscheinlichkeitsverteilung**

Mögliche Überlegungen

- Gegenseiten haben gleiche Wahrscheinlichkeiten (ggf. abhängig von der unten liegenden Masse).
- Größere Seiten haben größere Wahrscheinlichkeiten.
- Alle Wahrscheinlichkeiten addieren sich zu 100% (bzw. 1).

Quader-„Würfel“



Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

R
P TU

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Arbeitsblatt										MaTeGnu										Sechsstufiges Zufallsgerät: Versuchsauswertung									
	1			2			3			4			5			6													
n	$H_{100}(\{1\})$	$H(\{1\})$	$h(\{1\})$	$H_{100}(\{2\})$	$H(\{2\})$	$h(\{2\})$	$H_{100}(\{3\})$	$H(\{3\})$	$h(\{3\})$	$H_{100}(\{4\})$	$H(\{4\})$	$h(\{4\})$	$H_{100}(\{5\})$	$H(\{5\})$	$h(\{5\})$	$H_{100}(\{6\})$	$H(\{6\})$	$h(\{6\})$											
100		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%											
200																													
300																													
400																													
500																													
600																													
700																													
800																													
900																													
1000																													
1100																													
1200																													
1300																													
1400																													
1500																													
1600																													
1700																													
1800																													
1900																													
2000																													
H_{100} : absolute Häufigkeit bei 100 Versuchen										H: summierte absolute Häufigkeit										$h = H / n$: relative Häufigkeit									
Datentabelle										Diagramm																			

2

Experimentieren

Den Quader-„Würfel“ 100-mal werfen und die Ergebnisse zusammentragen.

Aufgabe

Würfeln Sie 100-mal mit dem Riemer-Quader und halten Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle fest.

Quader-„Würfel“



Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

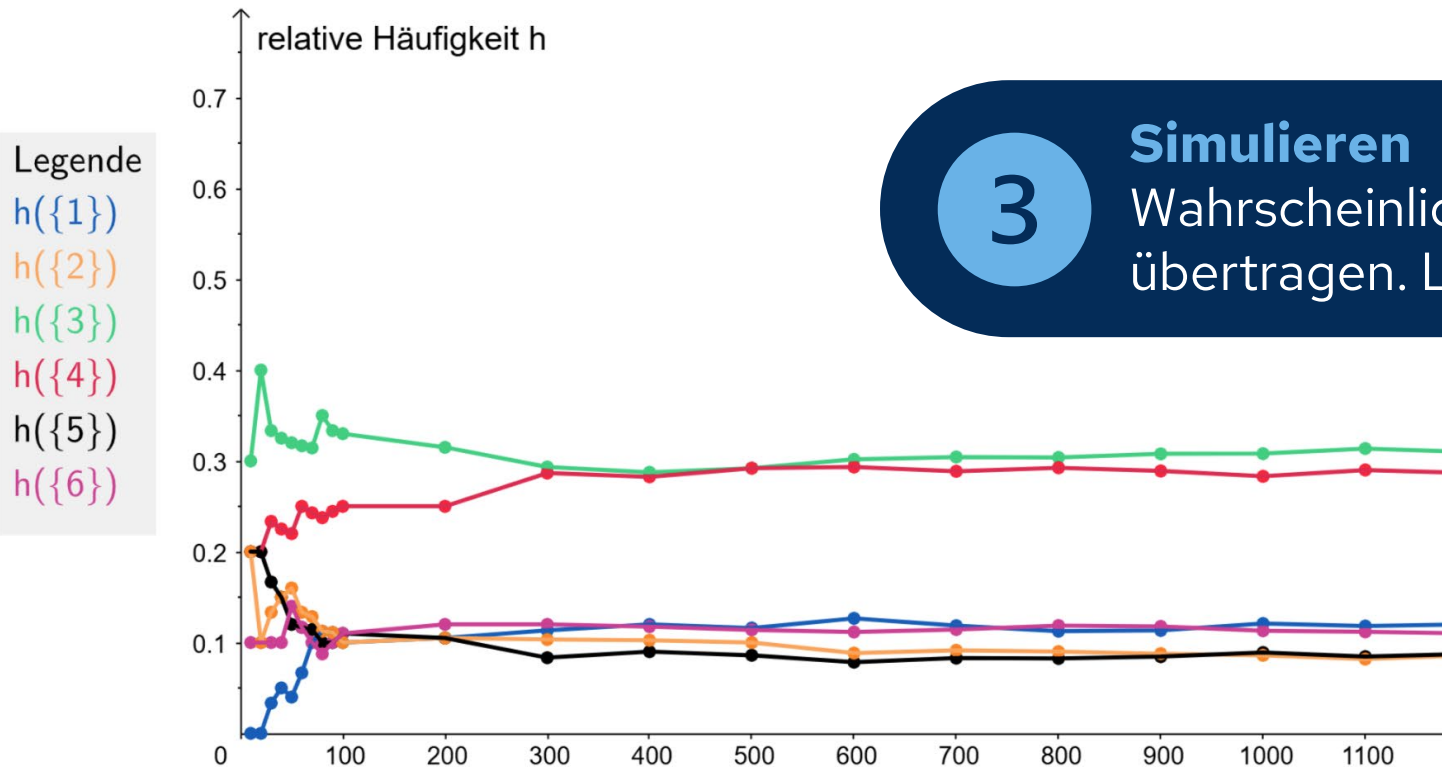
R
P TU

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

3

Simulieren

Wahrscheinlichkeitsmodell festlegen und in Simulation übertragen. Lange Versuchsreihen wiederholt simulieren.



Ziel der Nutzung der Simulation

Mit hypothetischen Wahrscheinlichkeiten sehr lange Versuchsreihen häufig hintereinander zu simulieren:

- Die zufallsbedingten Schwankungen der Versuchsausgänge (relative Häufigkeiten) und
- bei sehr vielen Versuchsdurchführungen, das „Einpendeln“ der relativen Häufigkeit, um einen festen Wert zu erfahren (**empirisches Gesetz der großen Zahlen**).

$P(\{1\}) = 0.11$ $P(\{4\}) = 0.31$
 $P(\{2\}) = 0.08$ $P(\{5\}) = 0.08$
 $P(\{3\}) = 0.31$ $P(\{6\}) = 0.11$

Anzahl der Würfe: 1600

Liniendiagramme ▼

Neu Würfeln

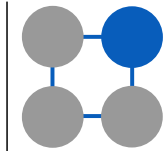


Quader-„Würfel“

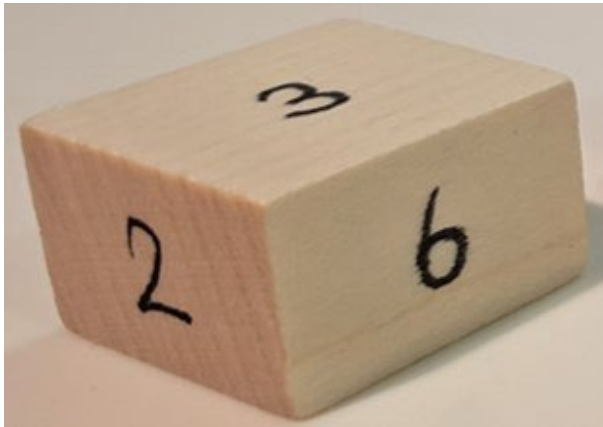


Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

R
P TU



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen



4

Reflektieren

Zusammenstellen und diskutieren der Erkenntnisse aus Hypothesen, Experimenten und Simulation.

Wahrscheinlichkeiten ...

- sagen relative Häufigkeiten auf lange Sicht voraus.
- sind gut gewählt, wenn die (durch Zufallseinflüsse schwankenden) relativen Häufigkeiten etwa gleich oft über und unter der Wahrscheinlichkeit liegen (zumindest bei nicht zu kleinen oder großen Wahrscheinlichkeiten).

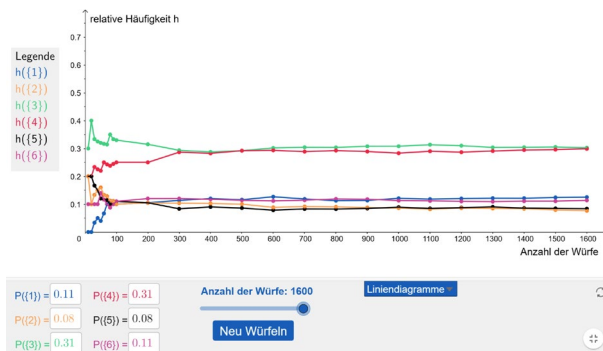
Wichtige Aspekte

- Unterschiede zwischen absoluter und relativer Häufigkeit sowie zwischen relativer Häufigkeit & Wahrscheinlichkeit herausarbeiten.
- Wahrscheinlichkeiten sind **nicht** Grenzwerte relativer Häufigkeiten im analytischen Sinn.
- Wahrscheinlichkeiten sind **Modelle** für die Realität.

Arbeitsblatt MaTeGnu Sechseites Zufallsgerät: Versuchsauswertung

n	1	2	3	4	5	6
100	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
200	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
300	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
400	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
500	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
600	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
700	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
800	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
900	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1000	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1100	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1200	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1300	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1400	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1500	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1600	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1700	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1800	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
1900	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
2000	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%

H: absolute Häufigkeit bei 100 Versuchen H: summierte absolute Häufigkeit h = H / n: relative Häufigkeit



1.3

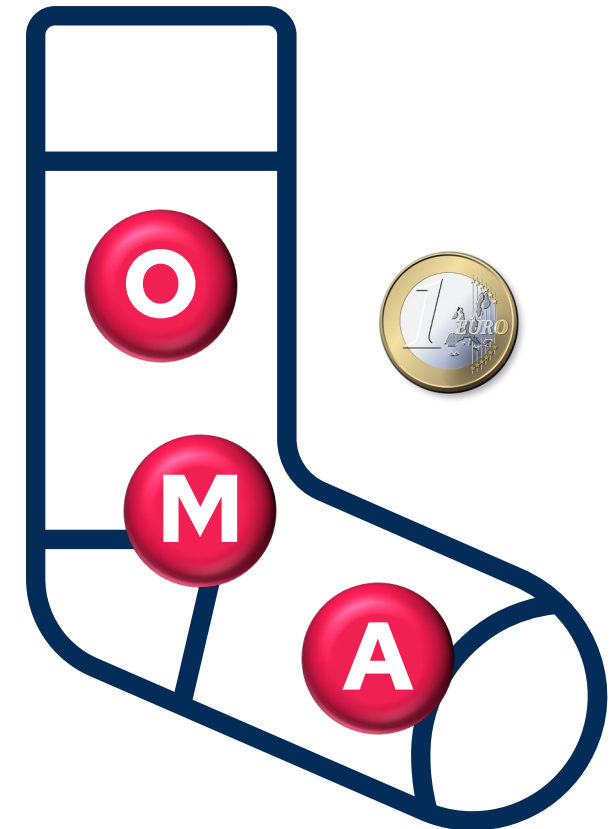
OMA aus der Socke Interessantes Unterrichtsbeispiel

Laplace-Experiment: Hol die OMA aus der Socke

Herausforderung: Wer beim blinden Hineingreifen in diese Socke nacheinander die Buchstaben **O-M-A** zieht, gewinnt einen Euro!

Bemerkungen

- In vielen Klassen muss die Frage nach der **Wahrscheinlichkeit** für **OMA** ($= \frac{1}{6}$) nicht gestellt werden. Die Lernenden beantworten sie von sich aus: Sie notieren die sechs Kombinationen ... oder übersetzen das Bauchgefühl in Zahlen und entdecken dabei die Pfadregel(n): In einem Drittel aller Fälle erwischt man das **O**. Dann sind nur noch zwei Buchstaben da, es steht für das **M** dann „fifty-fifty“ und die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist die Lösung: $\frac{1}{6}$
- Den **Erwartungswert** entdeckt man gleich mit: Wenn 30 Kinder in der Klasse sitzen, wird man im Schnitt 5 Münzen bereithalten müssen, wenn jeder einmal sein Glück probieren darf.
- Was ändert sich, wenn man die OMA zweimal in die Socke legt oder ein P hinzufügt und festlegt, dass man bei **OMA** und **OPA** gewinnt? Verdoppelt sich die Gewinnchance? Gute Frage!



Laplace-Experiment: Hol die OMA aus der Socke

Experimentieren und intuitiv arbeiten

Mögliche Versuchsausgänge:

OMA, OAM, MOA, MAO, AOM, AMO

Wahrscheinlichkeit für OMA:

1. Idee: Die Wahrscheinlichkeit für jeden Versuchsausgang ist gleich. Es gibt unter den sechs möglichen Ergebnissen nur eine OMA. → Wahrscheinlichkeit für OMA: $\frac{1}{6}$

2. Idee: Wahrscheinlichkeit für jeden Zug einzeln bestimmen und zusammensetzen:

- Wahrscheinlichkeit für O im ersten Zug: $\frac{1}{3}$
 - Wahrscheinlichkeit für M im zweiten Zug: „fifty-fifty“ also $\frac{1}{2}$
 - Wahrscheinlichkeit für A im dritten Zug: „sicher“ also 1
- Wahrscheinlichkeit für OMA: Die Hälfte von $\frac{1}{3}$ also $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



Reflektieren und Systematisieren

Ergebnisraum Ω :

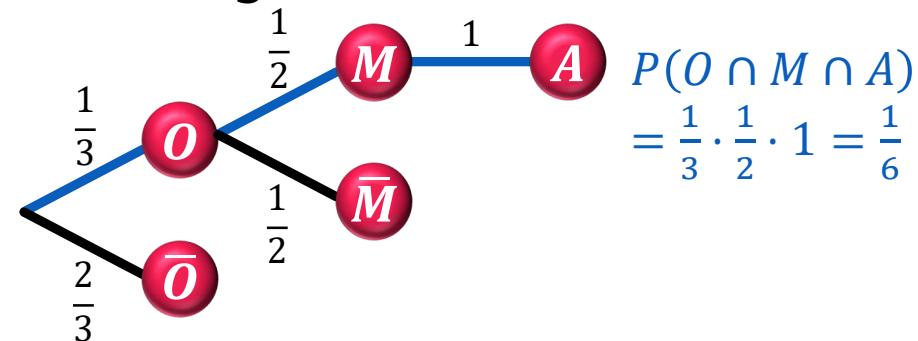
$\Omega = \{OMA, OAM, MOA, MAO, AOM, AMO\}$

Wahrscheinlichkeit für OMA:

Laplace-Annahme: Alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.

$$P(\{OMA\}) = \frac{|\{OMA\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

Baumdiagramm:



Laplace-Experiment: Hol die OMA aus der Socke

Experimentieren und intuitiv arbeiten

Mittlerer Gewinn:

Da die Wahrscheinlichkeit die OMA aus der Socke zu holen $\frac{1}{6}$ ist und man nur bei OMA 1€ erhält, ist der mittlere Gewinn pro Versuch:

$$1\text{€} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\text{€} \approx 0,17\text{€}$$

Wie viel Euros muss die Lehrkraft in einer Klasse mit 30 Schülerinnen und Schülern im Schnitt bereitlegen?

Wenn alle einmal ihr Glück versuchen, muss die Lehrkraft im Schnitt

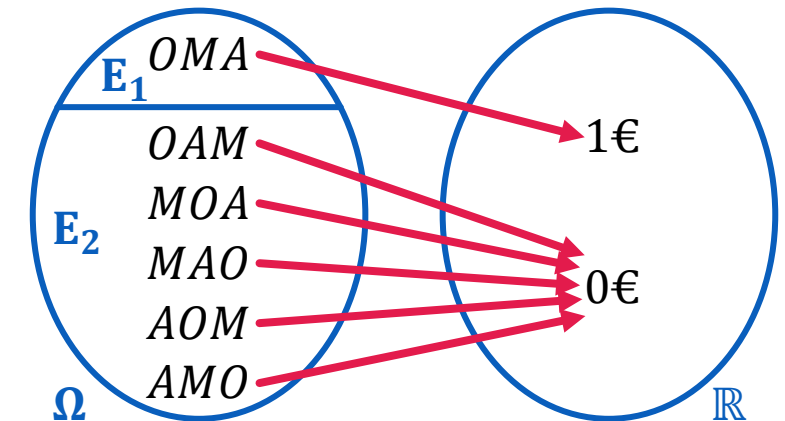
$$1\text{€} \cdot \frac{1}{6} \cdot 30 = 1\text{€} \cdot 5 = 5\text{€}$$

bereithalten.



Reflektieren und Systematisieren

Zufallsvariable X:



$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \omega \mapsto \begin{cases} 1\text{€}, & \text{falls } \omega = OMA \\ 0\text{€}, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \{OMA\} \end{cases}$$

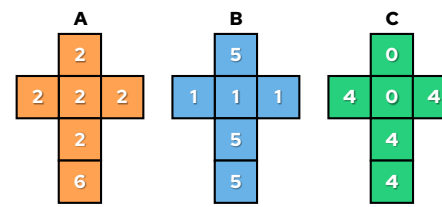
Erwartungswert $E(X)$ für Gewinn:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\text{€} \cdot P(X = 1\text{€}) + 0\text{€} \cdot P(X = 0\text{€}) \\ &= 1\text{€} \cdot \frac{1}{6} + 0\text{€} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\text{€} \approx 0,17\text{€} \end{aligned}$$

2

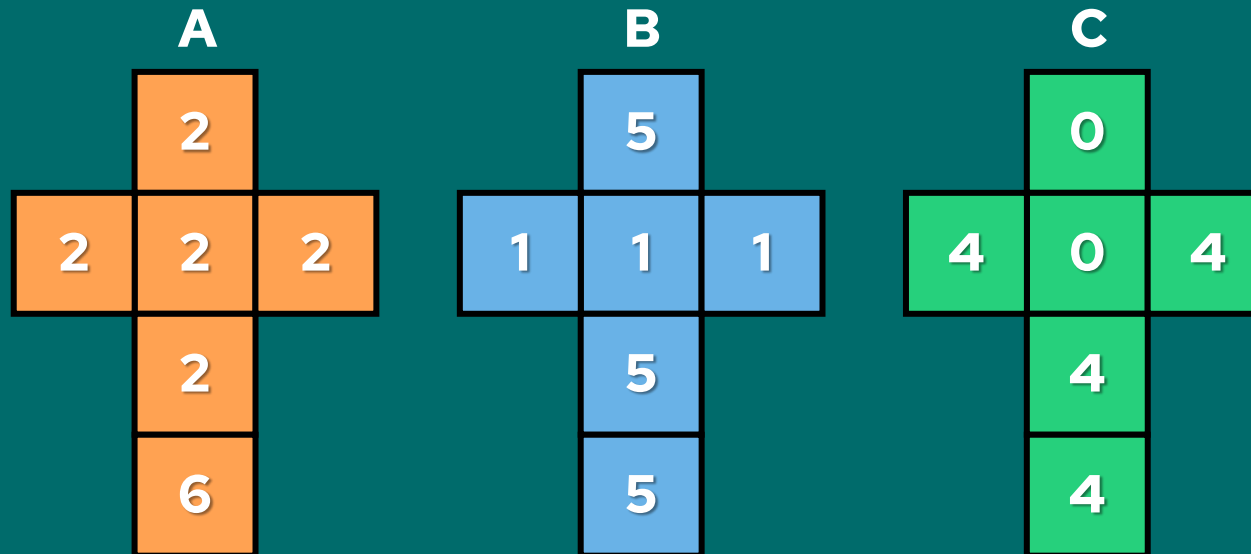
Mehrstufige Zufallsexperimente Baumdiagramme & Efron-Würfel

Sonderbare Würfel



Sonderbare Würfel

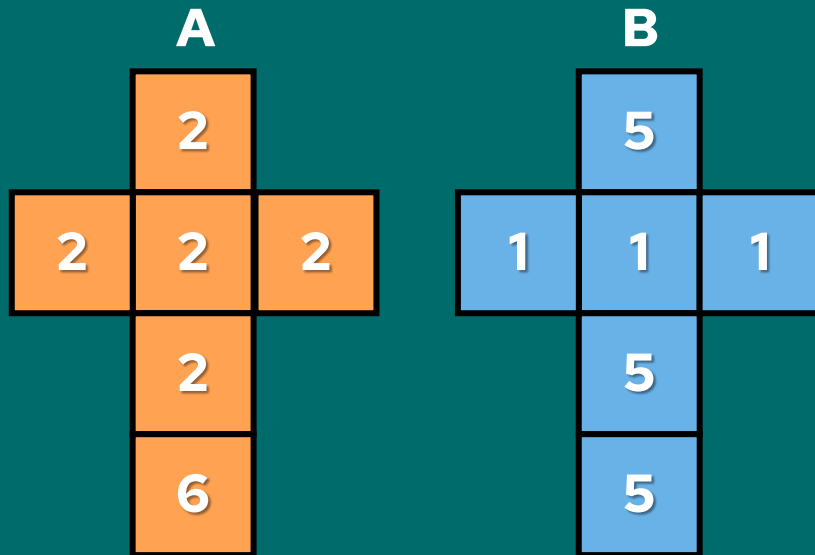
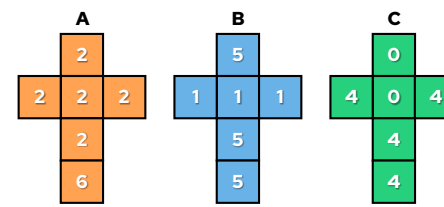
Gegeben sind
drei durch ihre
Netze beschrie-
bene Würfel.



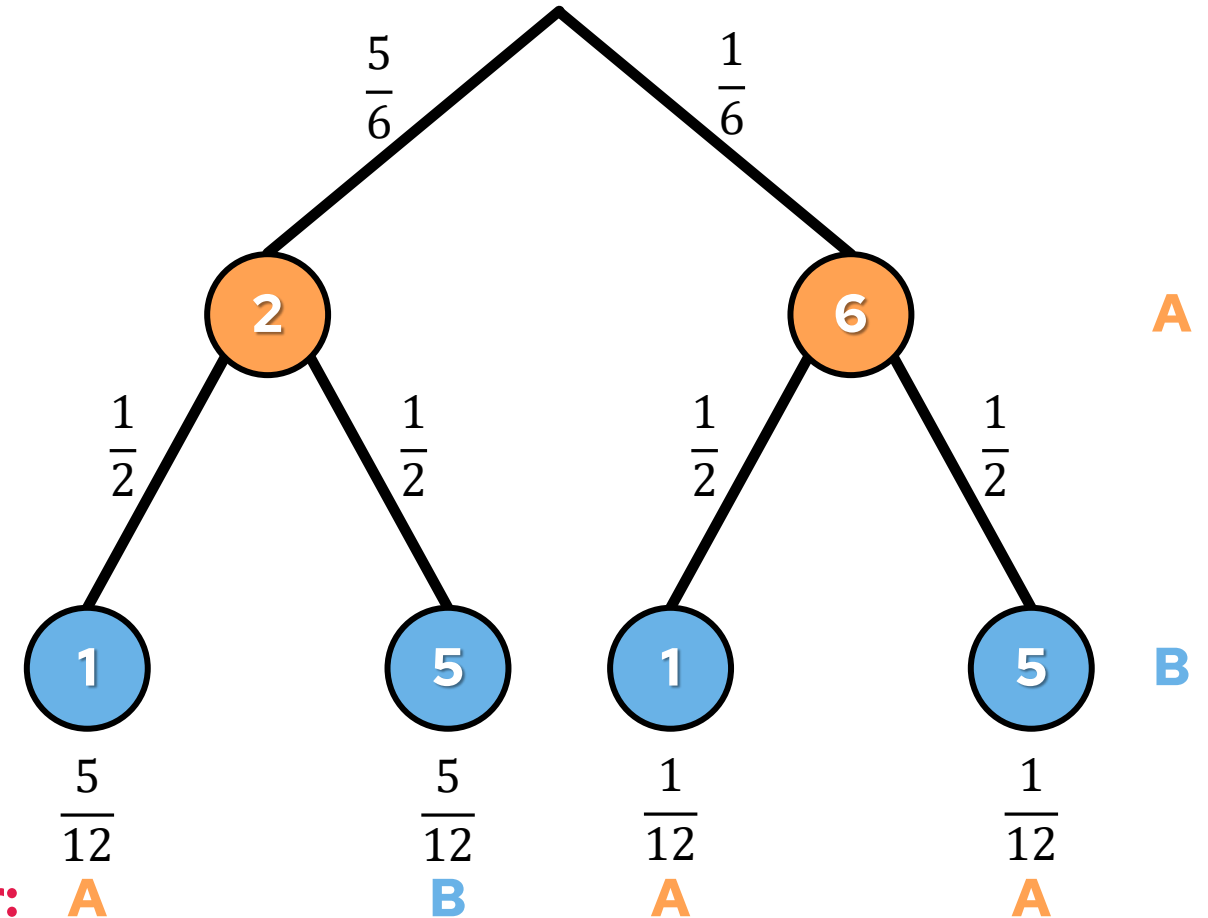
Aufgabe

Zwei Spieler wählen
nacheinander einen
Würfel. Danach würfelt
jeder einmal. Wer die
höhere Punktzahl hat,
gewinnt. Wie sind die
Gewinnchancen?

Sonderbare Würfel

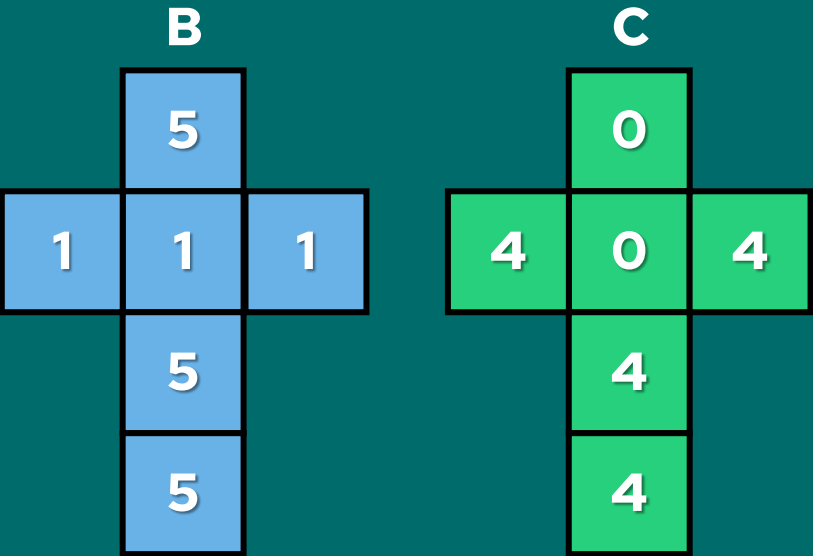
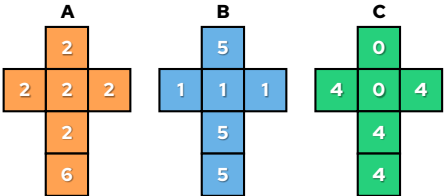


Der **Würfel A** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{7}{12}$ gegen Würfel **B**.

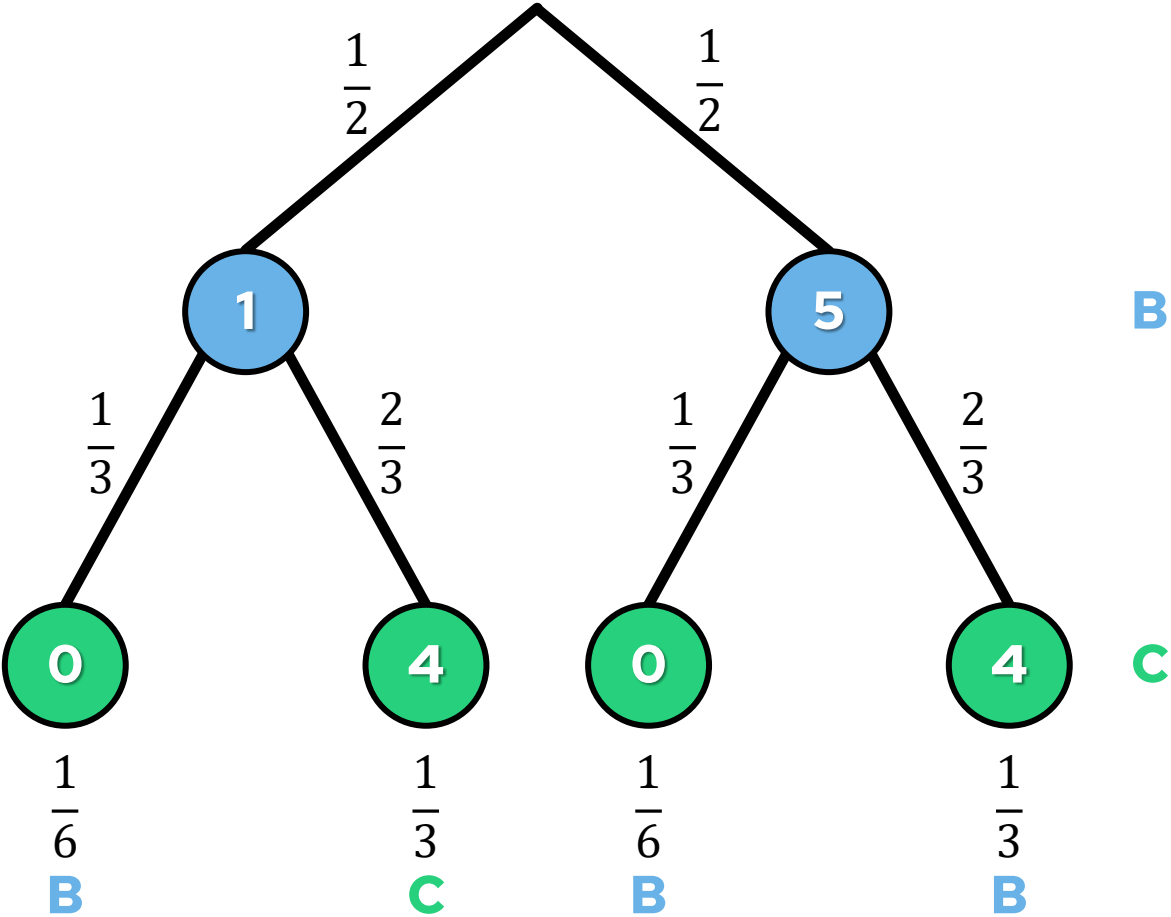


Gewinner: A

Sonderbare Würfel



Der Würfel **B** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **C**.



Gewinner: **B**

Baumdiagramm: Pfadregeln

Produktregel

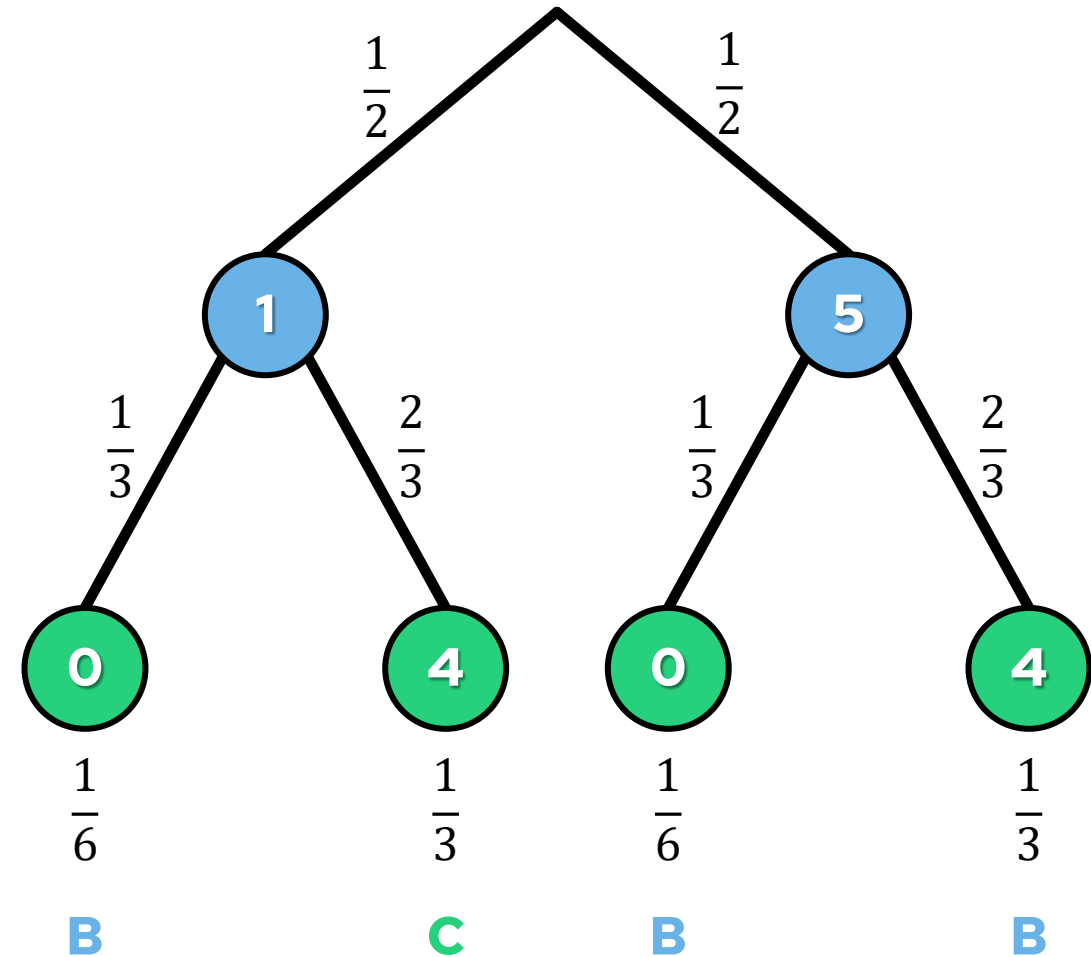
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm. $\left(\frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{2}\right)$

Summenregel

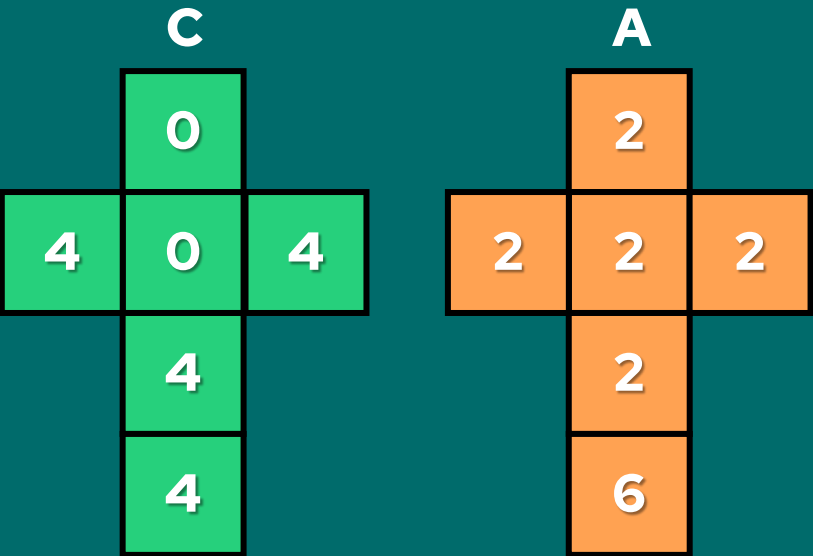
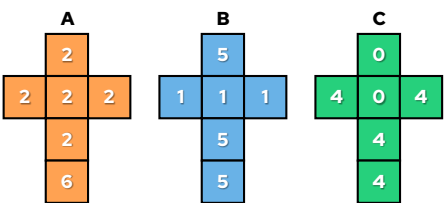
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die für dieses Ereignis günstig sind. (Additivität)

Verzweigungsregel

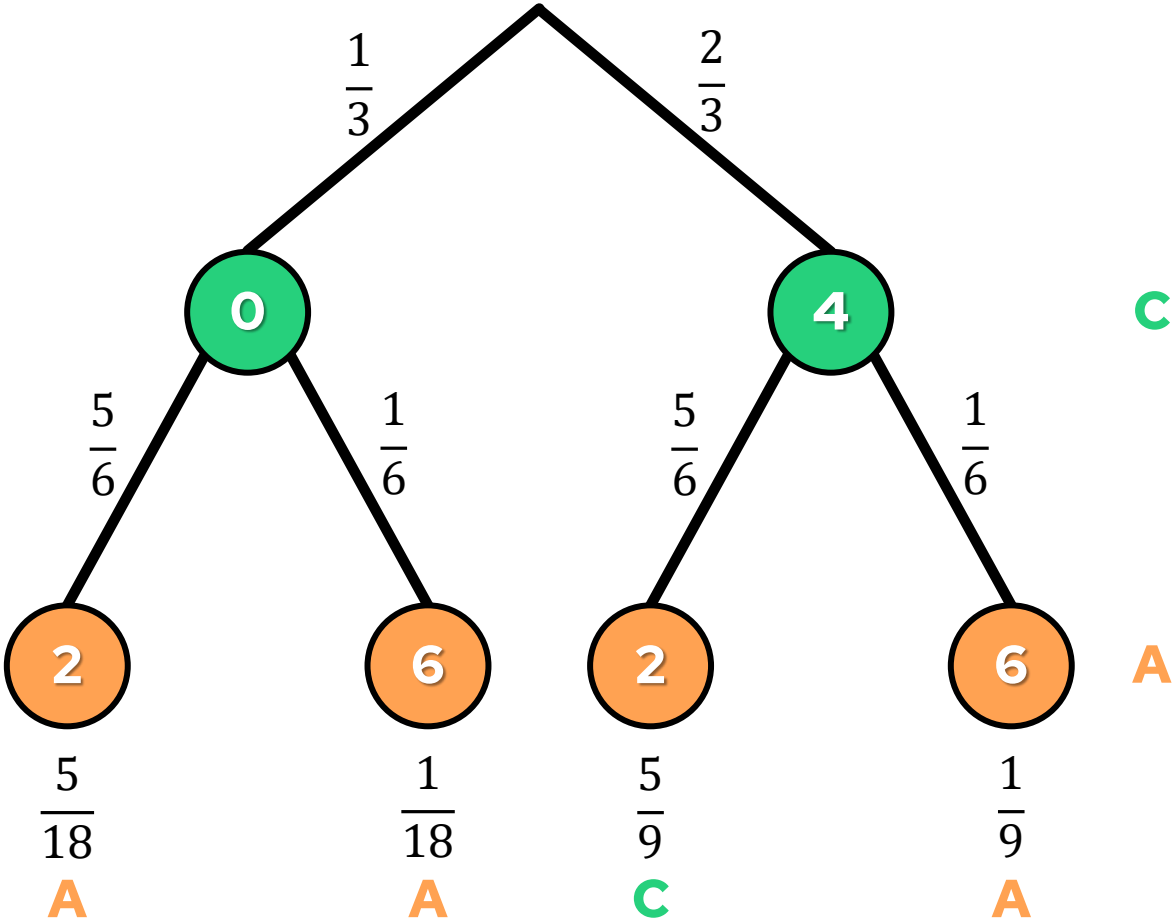
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen ist immer 1. (Normierung)



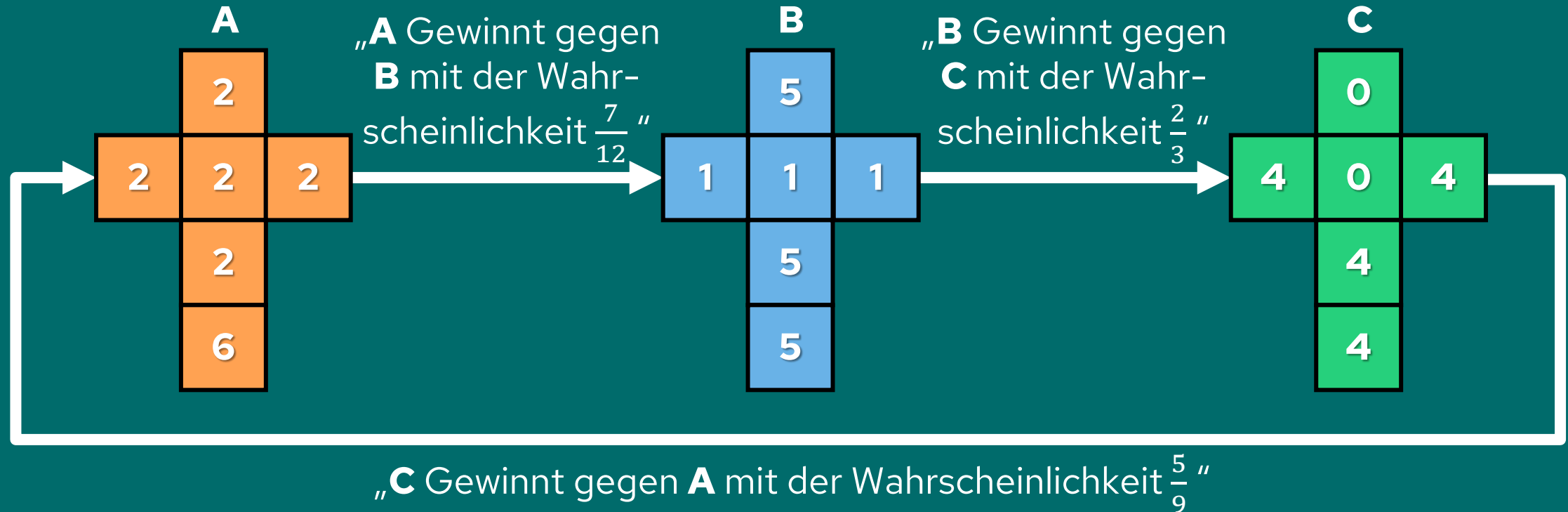
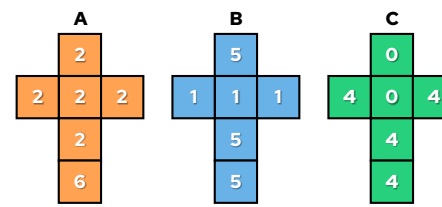
Sonderbare Würfel



Der Würfel C gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{9}$ gegen Würfel A.

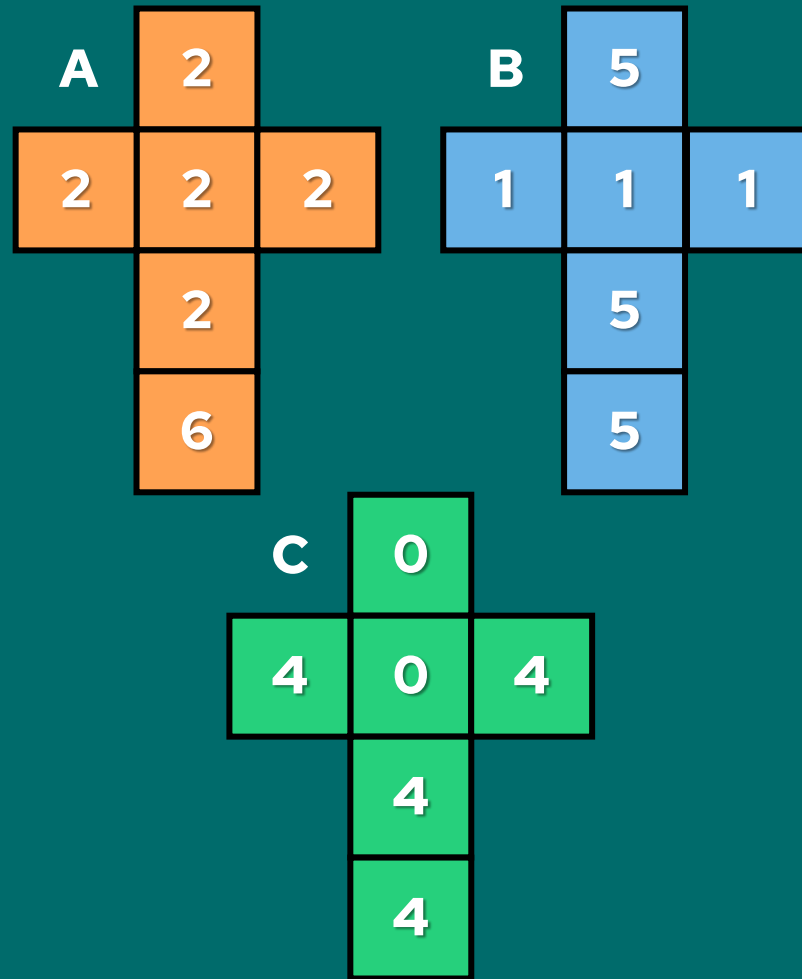
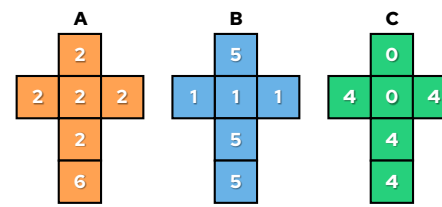


Sonderbare Würfel



- Ergebnis:**
- Es gibt keinen besten Würfel. Man findet zu jedem Würfel einen „besseren“.
 - Der Spieler, der die zweite Wahl hat, ist im Vorteil!

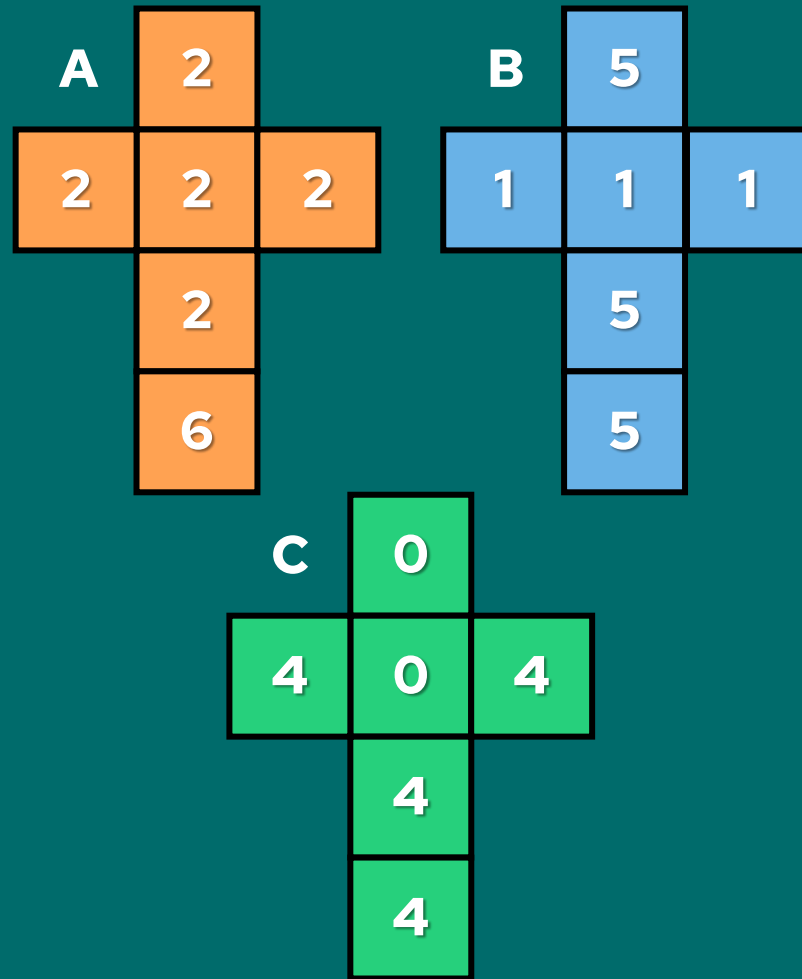
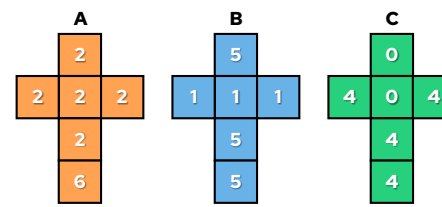
Sonderbare Würfel



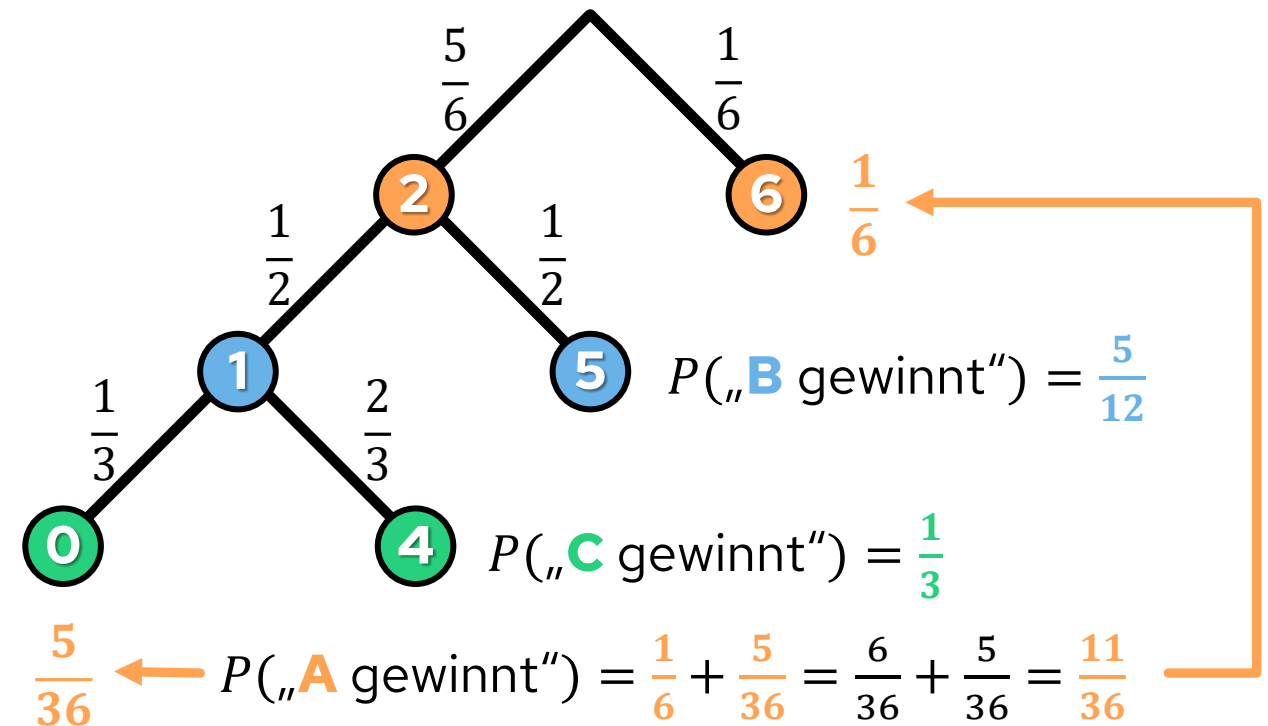
Aufgabe: Tragen Sie in die Tabellen-Zellen jeweils die Wahrscheinlichkeit ein, dass Zeile gegen Spalte gewinnt.

	A	B	C
A	-	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{9}$
B	$\frac{5}{12}$	-	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	-

Sonderbare Würfel



Aufgabe: Wie groß ist die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für jeden der Würfel, wenn alle drei Würfel geworfen werden?

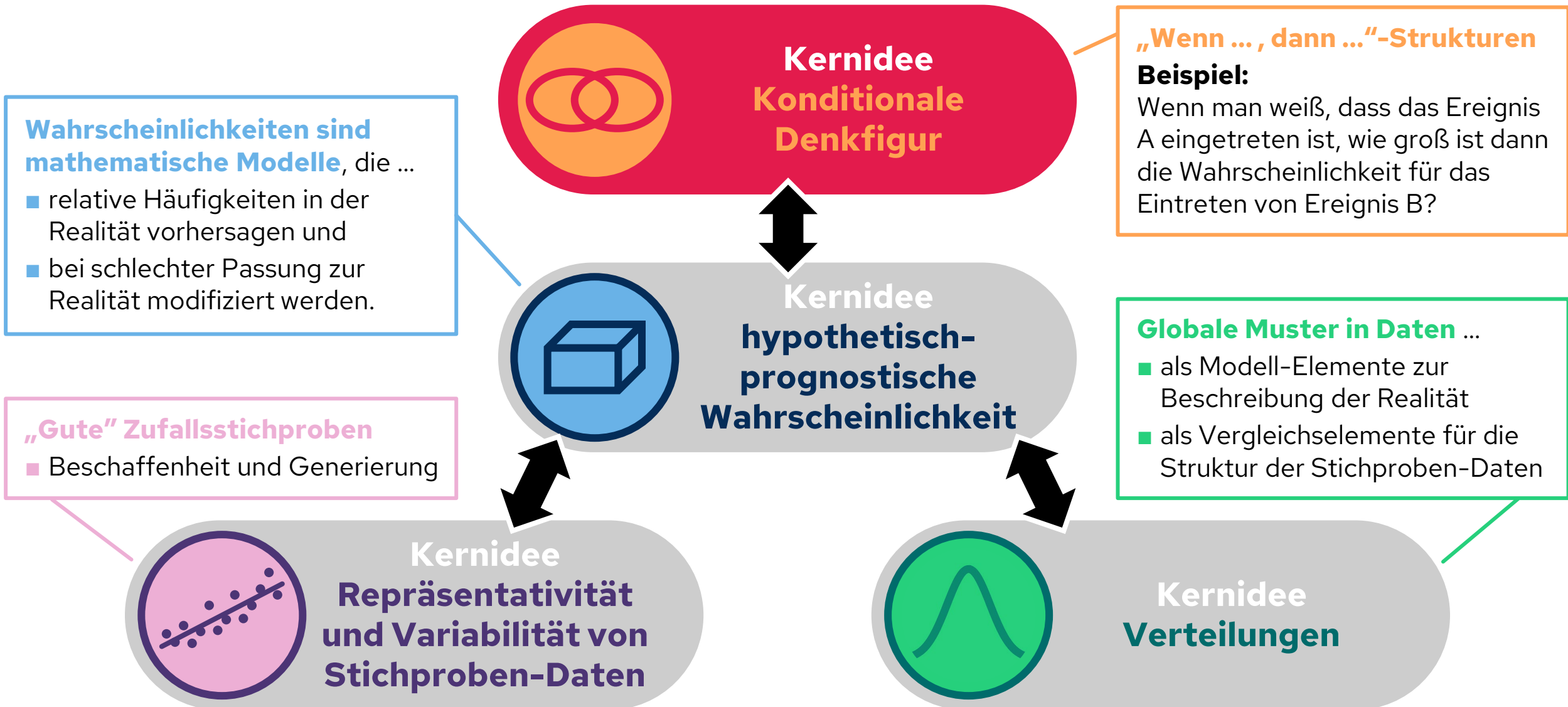


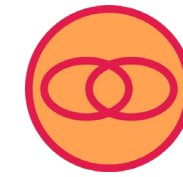
3

Stochastische (Un-)Abhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit

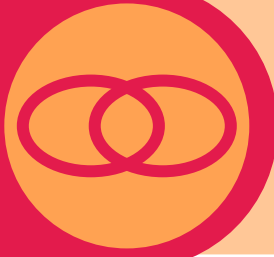
3.1

Kernidee Konditionale Denkfigur





Kernidee Konditionale Denkfigur



„Wenn ..., dann ...“-Strukturen

Beispiel: Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?

Wahrscheinlichkeit → Anteil (relative Häufigkeit)

- Übergehen von Wahrscheinlichkeiten zu Anteilen (relativen Häufigkeiten) und klären, was dabei das Ganze (die Bezugsgröße) und was der Teil ist.
- So kann z. B. zwischen
 - **totalen Wahrscheinlichkeiten** (das Ganze ist die Grundgesamtheit) und
 - **bedingten Wahrscheinlichkeiten** (das Ganze ist die Teilmenge der Grundgesamtheit, die die Bedingung charakterisiert) unterschieden werden.
- Eine bedingte Wahrscheinlichkeit wird hier im Sinne des Anteils der Teilgruppe A an der durch B eingeschränkten Bezugsgruppe aufgefasst.

Beispiel:

Das Ganze:
Mögl. Würfel-
Ergebnisse

2	4
3	6
5	1

Der Teil:
Primzahl

2	4
3	6
5	1

Das Ganze:
Primzahl

2	4
3	6
5	1

Der Teil:
Gerade Zahl

3.2

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiele

- Die Wahrscheinlichkeit für Regen ist **unabhängig** von unseren Wünschen.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem Regenschirm aus dem Haus gehen ist **abhängig** von der Wettervorhersage.

Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B sind (stochastisch) unabhängig, wenn

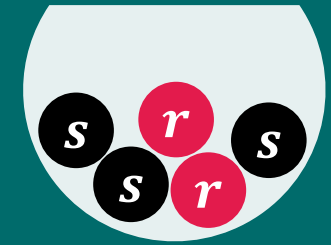
- sie sich in Hinblick auf die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens nicht beeinflussen.
- $P(A) = P(A|B)$ bzw. $P(B) = P(B|A)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen **(stochastisch) unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Urnenexperiment

Aus einer Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln wird zweimal nacheinander eine Kugel gezogen. Vor jedem Zug wird sorgfältig gemischt.



Ziehen mit Zurücklegen

Legt man die Kugel nach dem ersten Ziehen wieder zurück, so sind die Ereignisse

- S_1 : „Schwarz beim ersten Zug“ und
 - S_2 : „Schwarz beim zweiten Zug“
- voneinander **unabhängig**.

Ziehen ohne Zurücklegen

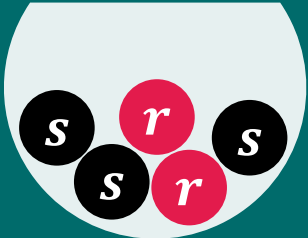
Legt man die Kugel nach dem ersten Ziehen **nicht** zurück, so sind die Ereignisse

- S_1 : „Schwarz beim ersten Zug“ und
 - S_2 : „Schwarz beim zweiten Zug“
- voneinander **abhängig**.

Hinweis: Zeichnen Sie Baumdiagramme, um die Unterschiede zu sehen!

Stochastische Unabhängigkeit

Ziehen mit Zurücklegen



S_1

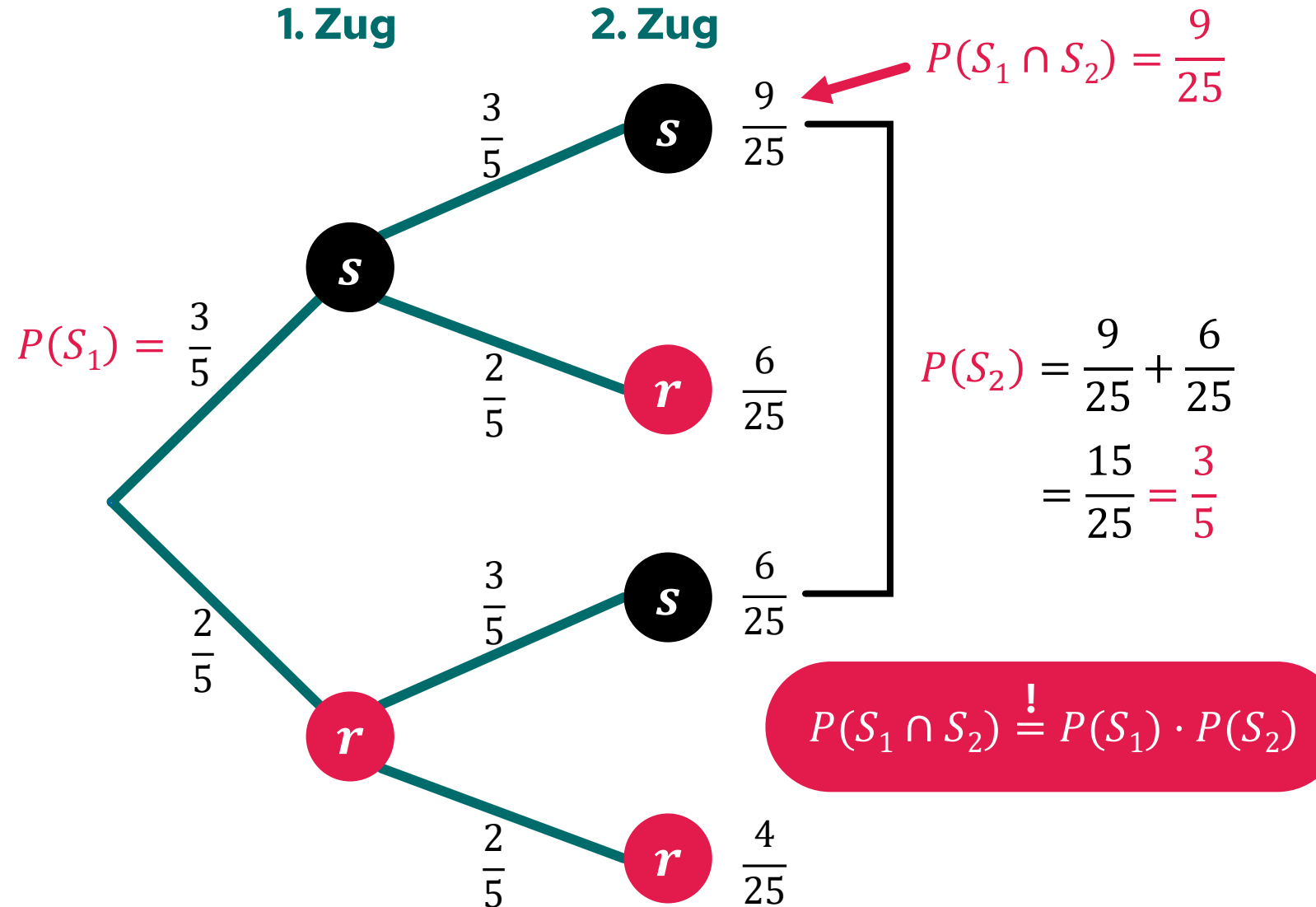
Ereignis: „Schwarz
beim ersten Zug“

S_2

Ereignis: „Schwarz
beim zweiten Zug“

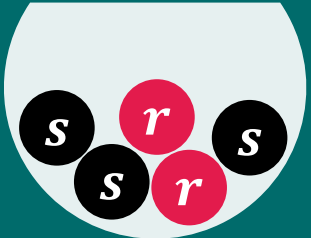
$S_1 \cap S_2$

Ereignis: „Schwarz
beim ersten und
beim zweiten Zug“



Stochastische Abhängigkeit

Ziehen **ohne** Zurücklegen



S_1

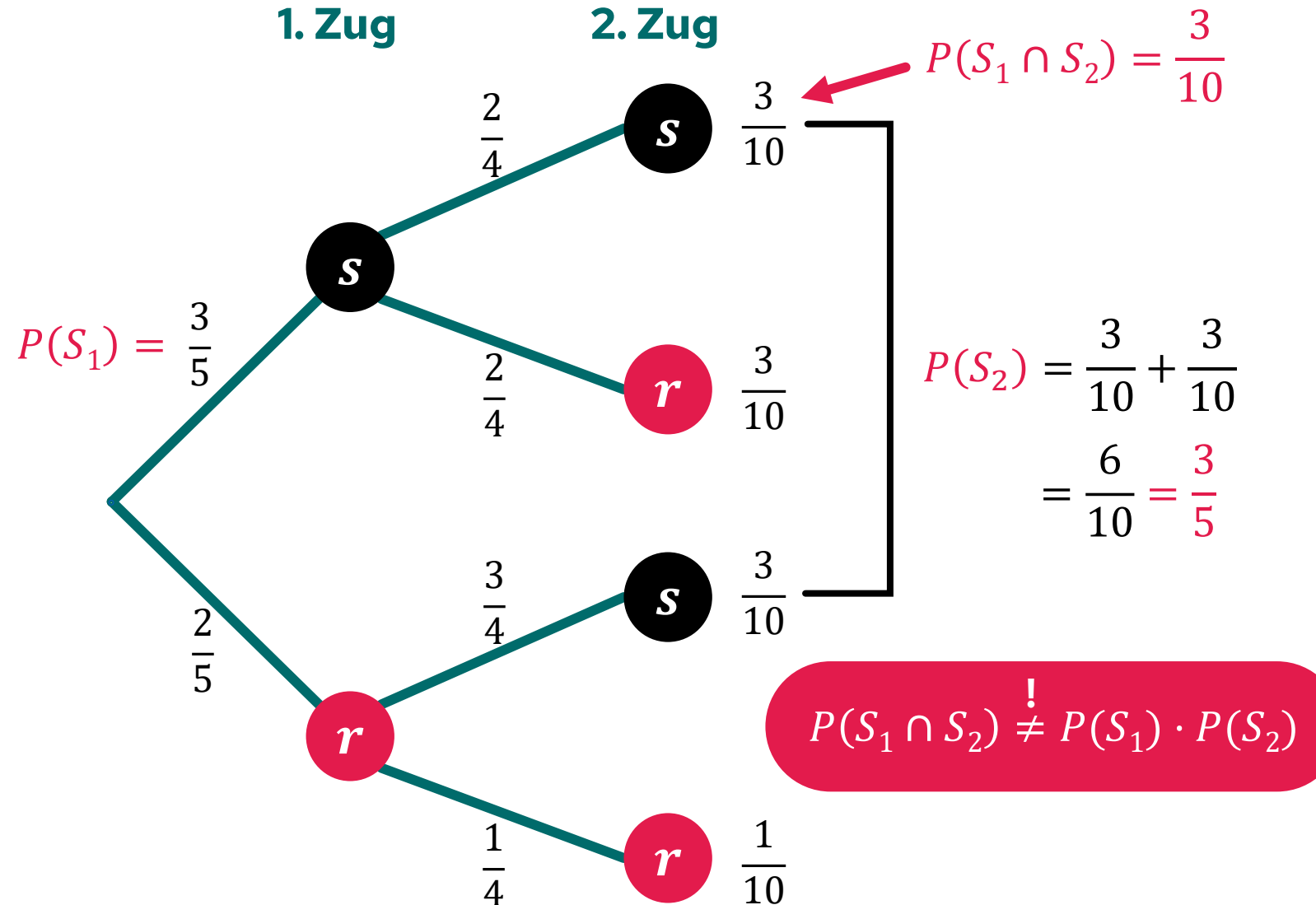
Ereignis: „Schwarz
beim ersten Zug“

S_2

Ereignis: „Schwarz
beim zweiten Zug“

$S_1 \cap S_2$

Ereignis: „Schwarz
beim ersten und
beim zweiten Zug“



Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

Zufallsexperiment

Es wird einmal mit einem fairen Würfel gewürfelt.

Dabei interessieren folgende Ergebnisse bzgl. der Augenzahl:

X
„Gerade Zahl“

2	4
3	6
5	1

Y
„Zahl größer als 2“

2	4
3	6
5	1

Z
„Primzahl“

2	4
3	6
5	1

Aufgabe

Wie kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass

- X und Y ,
- Y und Z bzw.
- X und Z

gleichzeitig eintreten? Gesucht sind also die Wahrscheinlichkeiten $P(X \cap Y)$, $P(Y \cap Z)$ und $P(X \cap Z)$.

$$P(X \cap Y) \stackrel{?}{=} P(X) \cdot P(Y)$$



Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



	Y	$\bar{Y}$
$X \cap Y$	24 36 51	24 36 51
X	24 36 51	24 36 51
$\bar{X}$	24 36 51	24 36 51

$X \cap Y$	$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(\bar{Y}) = \frac{1}{3}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Y) = \frac{1}{3}$ $= P(X) \cdot P(Y)$	$P(X \cap \bar{Y}) = \frac{1}{6}$
$P(\bar{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\bar{X} \cap Y) = \frac{1}{3}$	$P(\bar{X} \cap \bar{Y}) = \frac{1}{6}$



Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



	Z	$\bar{Z}$
$Y \cap Z$	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
Y	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\bar{Y}$	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\bar{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(Y \cap Z) = \frac{1}{3}$ $= P(Y) \cdot P(Z)$	$P(Y \cap \bar{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\bar{Y}) = \frac{1}{3}$	$P(\bar{Y} \cap Z) = \frac{1}{6}$	$P(\bar{Y} \cap \bar{Z}) = \frac{1}{6}$



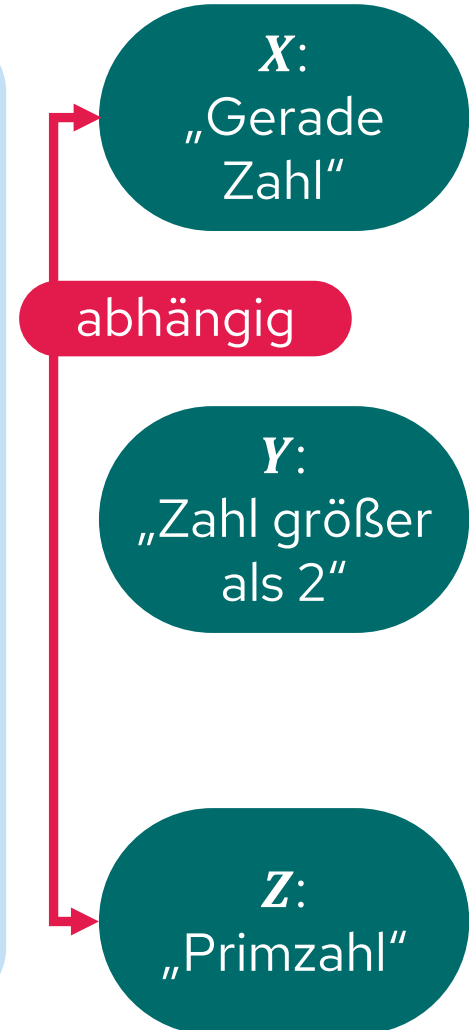
Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



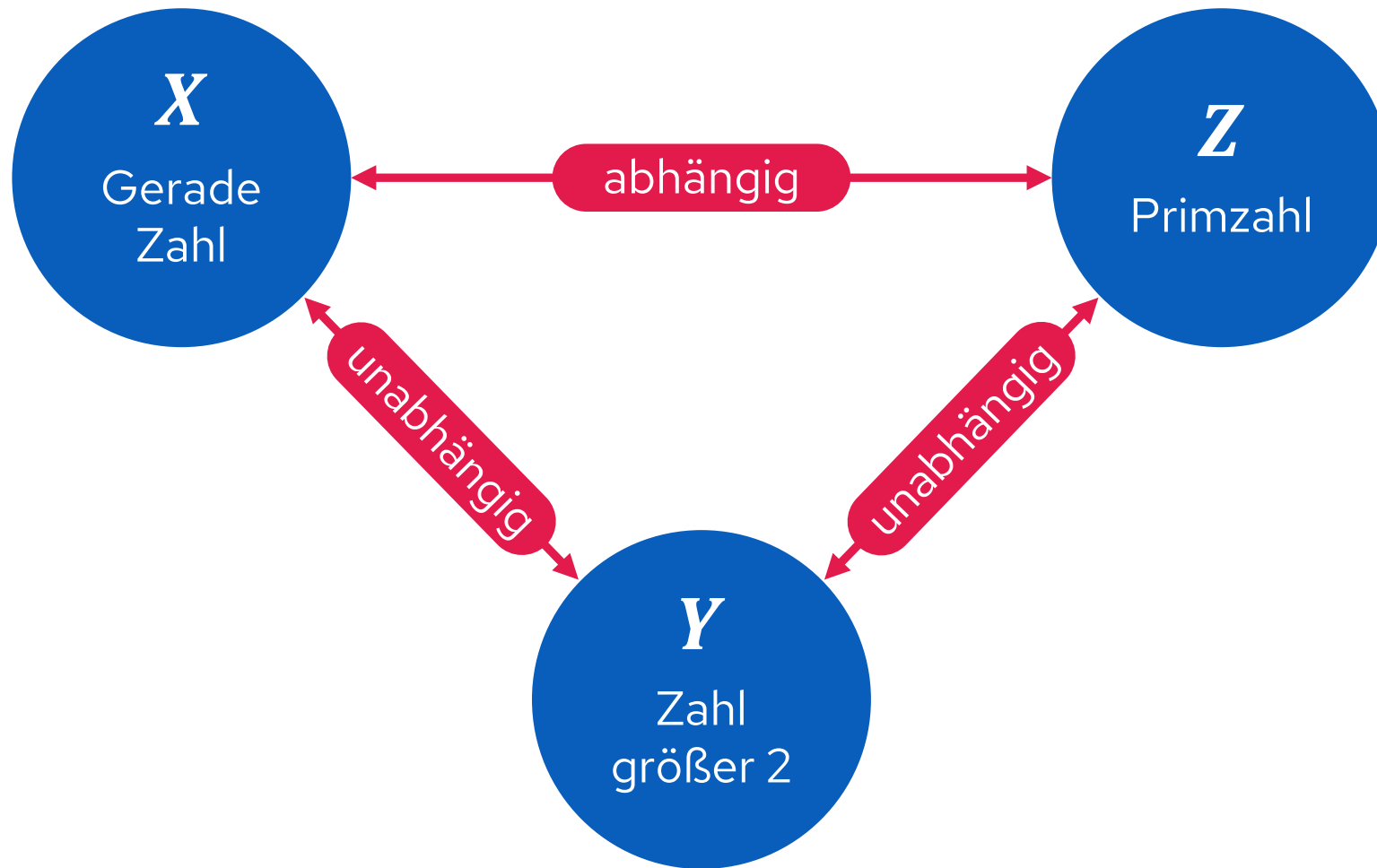
	Z	$\bar{Z}$												
$X \cap Z$	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr></table>	2	4	3	6	5	1	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr></table>	2	4	3	6	5	1
2	4													
3	6													
5	1													
2	4													
3	6													
5	1													
X	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr></table>	2	4	3	6	5	1	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr></table>	2	4	3	6	5	1
2	4													
3	6													
5	1													
2	4													
3	6													
5	1													
$\bar{X}$	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr></table>	2	4	3	6	5	1	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr></table>	2	4	3	6	5	1
2	4													
3	6													
5	1													
2	4													
3	6													
5	1													

$X \cap Z$	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\bar{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Z) = \frac{1}{6}$ $\neq P(X) \cdot P(Z)$	$P(X \cap \bar{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\bar{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\bar{X} \cap Z) = \frac{1}{3}$	$P(\bar{X} \cap \bar{Z}) = \frac{1}{6}$



Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: **Würfeln mit einem Würfel**



3.3

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe

- Es werden nacheinander zwei Karten aus einem verdeckten Kartenstapel mit 32 Karten gezogen.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte ein Ass ist, unter der Bedingung, dass die erste Karte ein Bube ist?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein Ass ist, unter der Bedingung, dass die zweite Karte ein Bube ist?

Bedingung:
Informationsstand, **nicht**
zeitliche Reihenfolge!

Bedingte Wahrscheinlichkeit



Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$...

- ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A , wenn man weiß, dass B eingetreten ist.
- ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetreten ist.

Sprechweise

- Der senkrechte Strich ist zu lesen als „unter der Bedingung/Voraussetzung“.
- Man sagt auch, $P(A|B)$ ist die „Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B “.

Alternative Schreibweisen

- Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B
- $P(A|B)$
- $P_B(A)$

3.1

Einstieg

Randomized-Response-Technik

Problem

- Direkte Fragen zu heiklen Themen (z. B. „Haben Sie schon einmal Cannabis konsumiert?“) werden in Umfragen oft nicht ehrlich beantwortet.
- „Naive“ Umfragen liefern deshalb keine verlässlichen Informationen.

Randomized-Response-Technik ...

- versucht mit geeigneten Methoden verlässliche Antworten auf heikle Fragen zu ermitteln.
- kann nur bei größeren Gruppen sinnvoll umgesetzt werden kann.

A

**Forschungs-
frage:**

Haben Sie schon
einmal Cannabis
konsumiert?

Ja / Nein

B

Sagen Sie
Ja!

C

Sagen Sie
Nein!

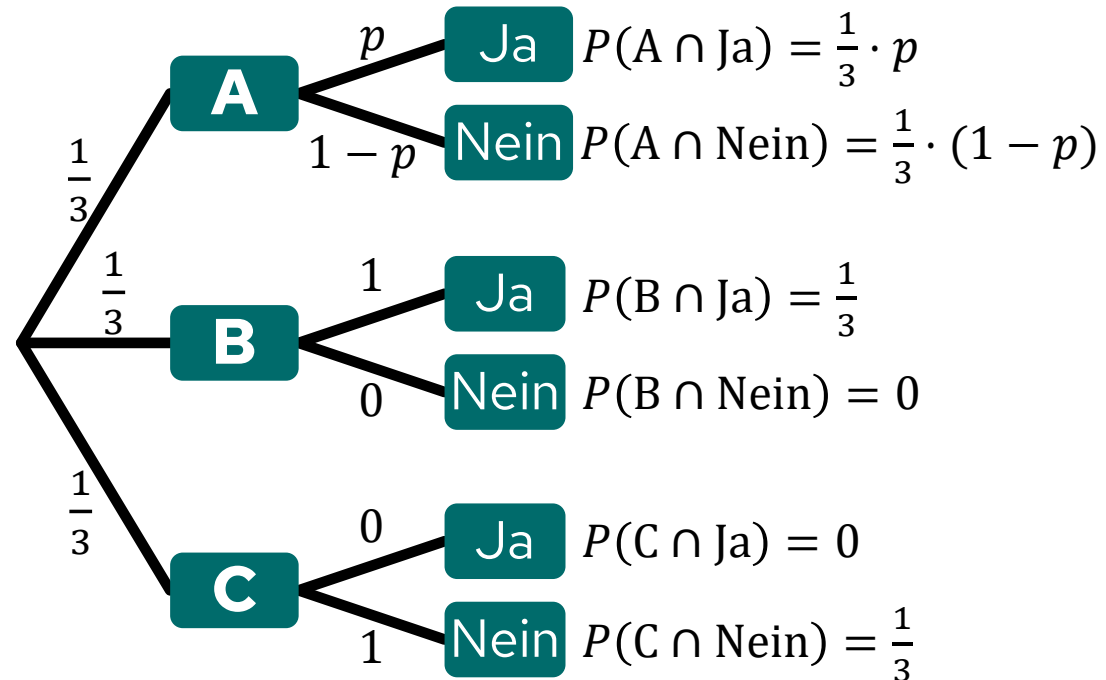
Vorgehen bei der Randomized-Response-Technik

Eine Person zieht aus einem verdeckten Stapel eine der obigen Karten A, B oder C und hält diese geheim. Anschließend beantwortet sie die auf der Karte stehende Frage wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“.

Datengewinnung bei heiklen Themen

Beispiel: Randomized-Response-Technik

Aufgabe: Erstellen Sie ein Baumdiagramm zu diesem Zufallsexperiment und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p für die Antwort „Ja“ nach ziehen von **A**, wenn insgesamt 43% aller Befragten mit „Ja“ antworten.



A
**Forschungs-
frage:**

Haben Sie schon
einmal Cannabis
konsumiert?

Ja / Nein

B
Sagen Sie
Ja!

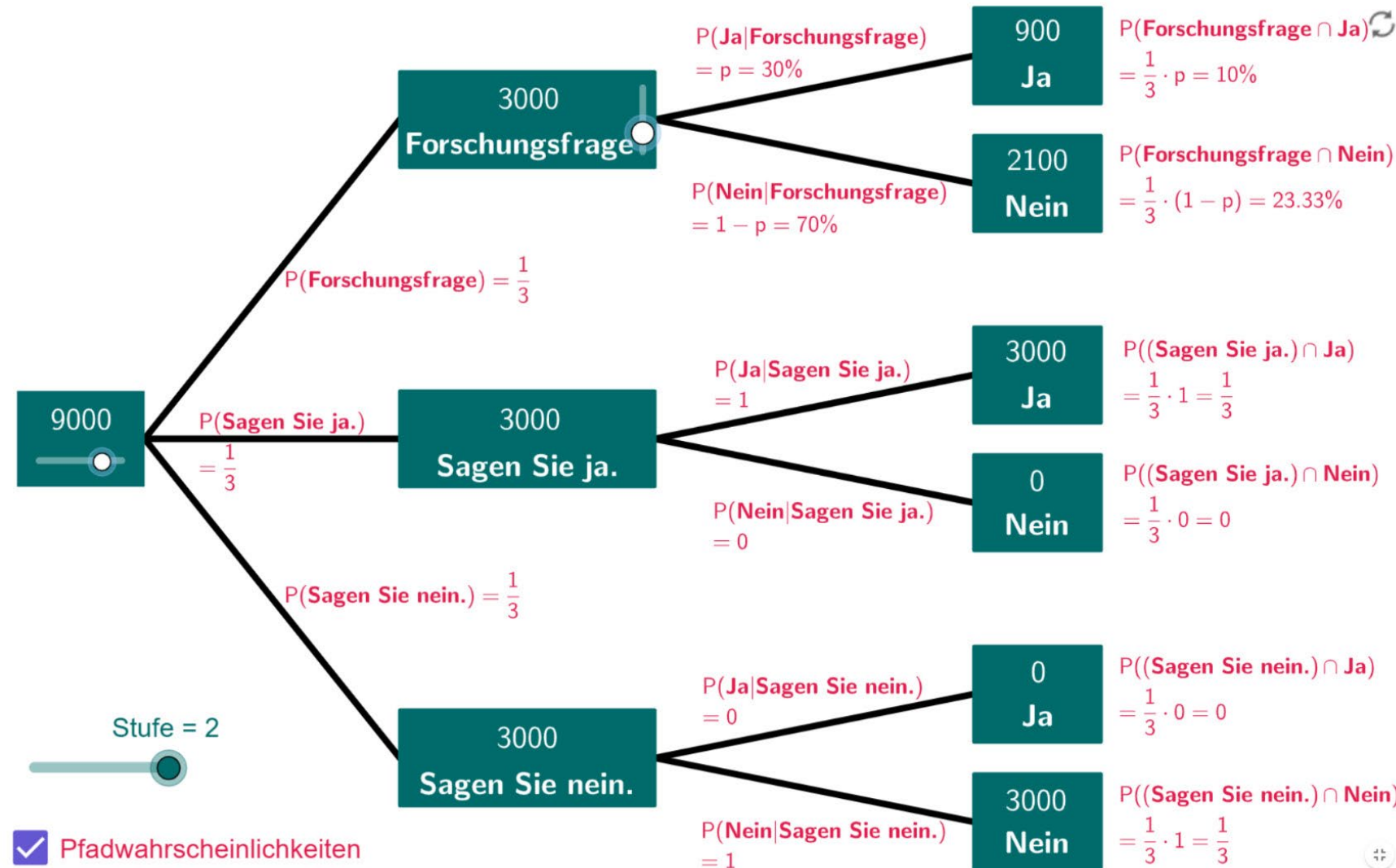
C
Sagen Sie
Nein!

Vorgehen bei der Randomized-Response-Technik

Eine Person zieht aus einem verdeckten Stapel eine der obigen Karten A, B oder C und hält diese geheim. Anschließend beantwortet sie die auf der Karte stehende Frage wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“.

Datengewinnung bei heiklen Themen

Beispiel: Randomized-Response-Technik



Pfadregel:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) \\
 &= P(\text{Forschungsfrage}) \\
 &\quad \cdot P(\text{Ja}|\text{Forschungsfrage}) = \frac{1}{3} \cdot p \\
 &P(\text{Sagen Sie ja.} \cap \text{Ja}) \\
 &= P(\text{Sagen Sie ja.}) \\
 &\quad \cdot P(\text{Ja}|\text{Sagen Sie ja.}) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\
 &P(\text{Sagen Sie nein.} \cap \text{Ja}) \\
 &= P(\text{Sagen Sie nein.}) \\
 &\quad \cdot P(\text{Ja}|\text{Sagen Sie nein.}) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Summenregel:

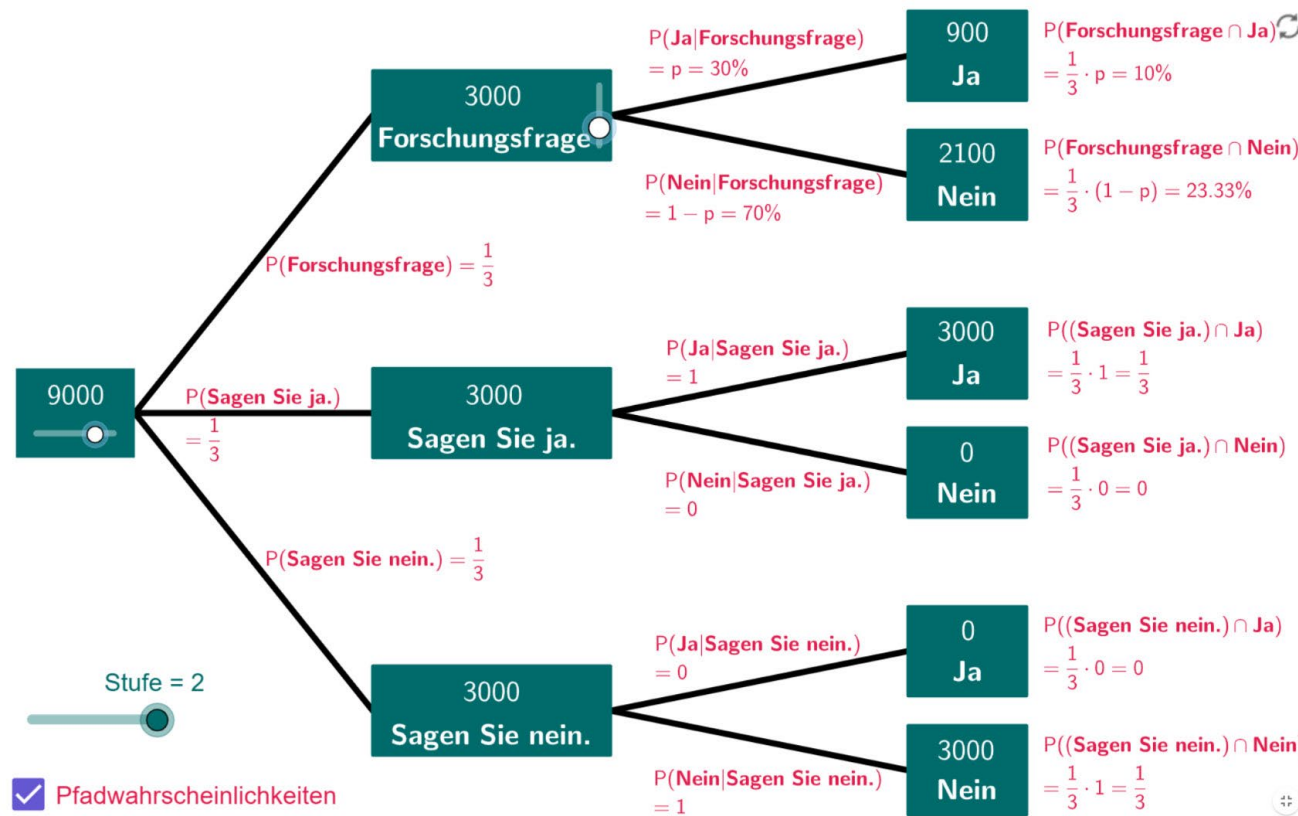
$$\begin{aligned}
 P(\text{Ja}) &= P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) \\
 &\quad + P(\text{Sagen Sie ja.} \cap \text{Ja}) \\
 &\quad + P(\text{Sagen Sie nein.} \cap \text{Ja}) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot p + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \cdot (p + 1)
 \end{aligned}$$

$$P(\text{Ja}) = \frac{\text{Anzahl der Ja-Antworten}}{\text{Anzahl der Teilnehmer}} = 43\%$$

$$\Rightarrow p = 3 \cdot 0,43 - 1 = 30\%$$

Datengewinnung bei heiklen Themen

Beispiel: Randomized-Response-Technik



Pfadregel:

$$P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja})$$

$$= P(\text{Forschungsfrage}) \cdot P(\text{Ja}|\text{Forschungsfrage}) = \frac{1}{3} \cdot p$$

$$P(\text{Sagen Sie ja.} \cap \text{Ja})$$

$$= P(\text{Sagen Sie ja.}) \cdot P(\text{Ja}|\text{Sagen Sie ja.}) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Sagen Sie nein.} \cap \text{Ja})$$

$$= P(\text{Sagen Sie nein.}) \cdot P(\text{Ja}|\text{Sagen Sie nein.}) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

Summenregel:

$$P(\text{Ja}) = P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja})$$

$$+ P(\text{Sagen Sie ja} \cap \text{Ja}) + P(\text{Sagen Sie nein} \cap \text{Ja})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot p + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \cdot (p + 1)$$

Aufgabe: Wie hoch ist der Anonymitätsgrad, also $P(\text{Forschungsfrage}|\text{Ja})$, bei dieser Fragetechnik?



Pfadregel: $P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) = P(\text{Ja}) \cdot P(\text{Forschungsfrage}|\text{Ja})$

$$\Rightarrow P(\text{Forschungsfrage}|\text{Ja}) = \frac{P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja})}{P(\text{Ja})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot p}{\frac{1}{3} \cdot (p + 1)} = \frac{p}{p + 1}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



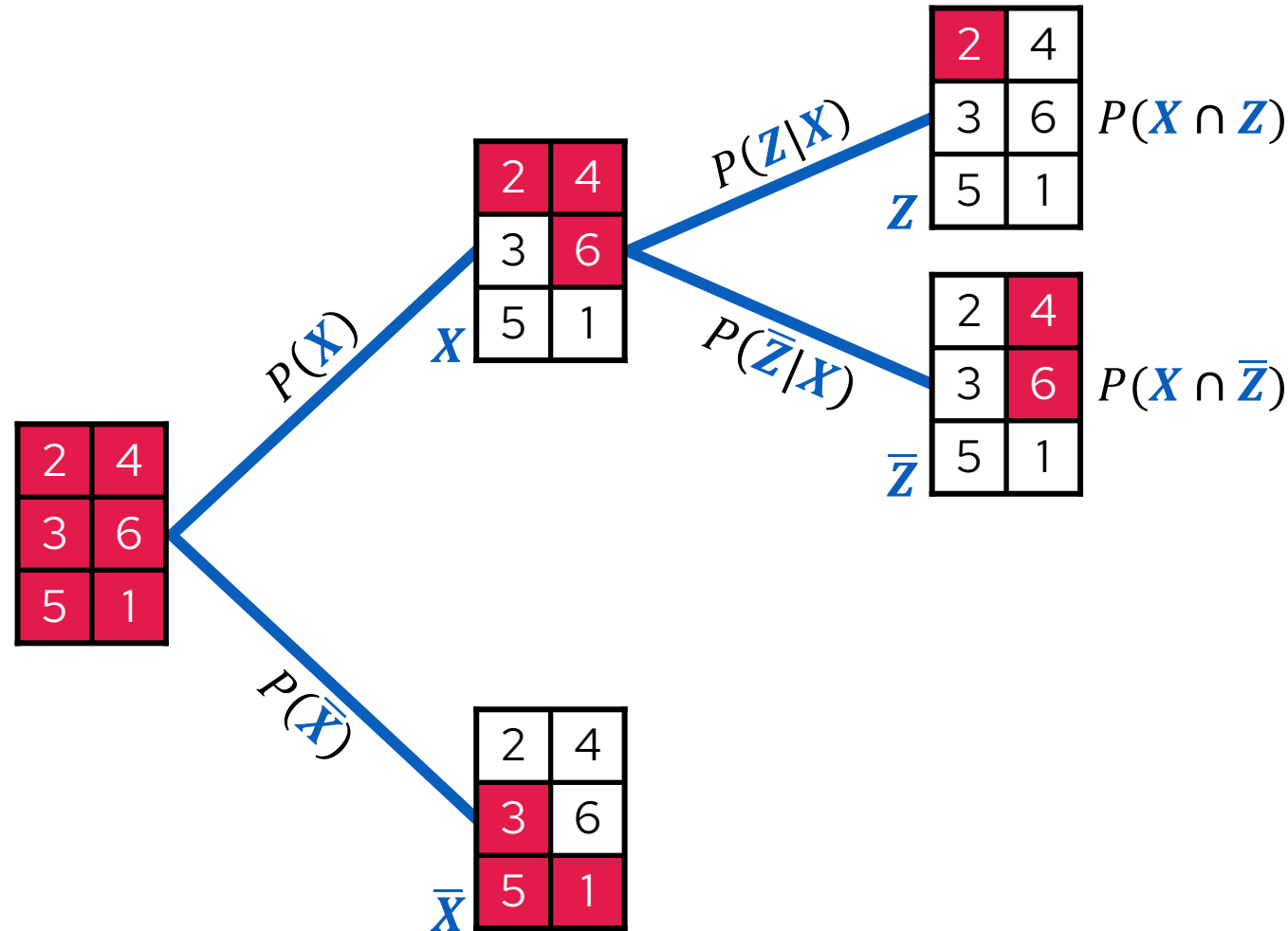
Kernidee:
Konditionale
Denkfigur

X : „Gerade Zahl“

2	4
3	6
5	1

Z : „Primzahl“

2	4
3	6
5	1



$$\begin{aligned} P(Z|X) &= \frac{P(X \cap Z)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{Z}|X) &= \frac{P(X \cap \bar{Z})}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

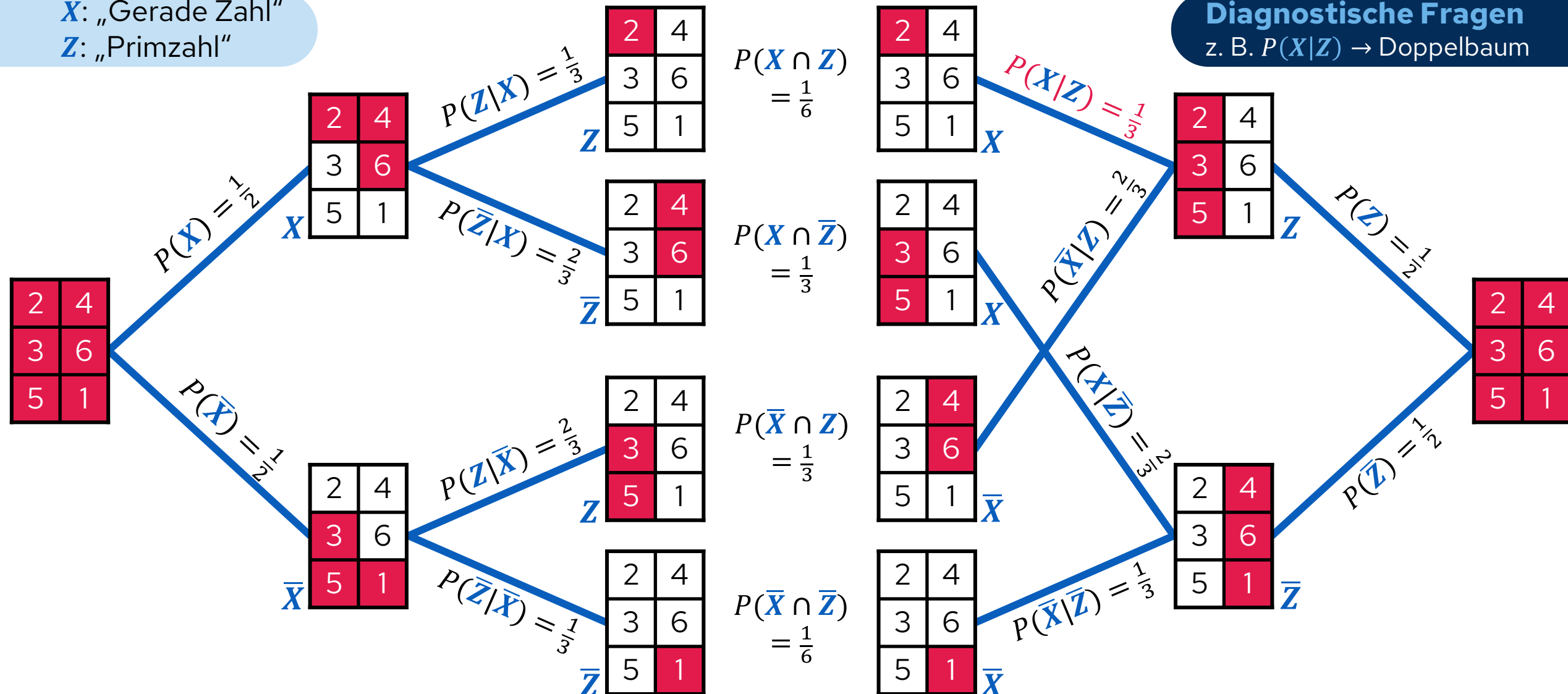
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Doppelbaum (doppeltes Baumdiagramm)



X : „Gerade Zahl“
 Z : „Primzahl“

Diagnostische Fragen
z. B. $P(X|Z) \rightarrow$ Doppelbaum



Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Taxi-Problem



Taxi-Problem

Ein alter Mann wird Zeuge eines Autounfalls mit Fahrerflucht und berichtet, dass das flüchtende Auto ein blaues Taxi gewesen sei (Behauptung b). Es gibt zwei Taxiunternehmen in der Stadt, die 15 blaue (B) bzw. 85 grüne (G) Taxis haben. In der Verhandlung wird die Sehfähigkeit des Mannes geprüft und man bekommt heraus, dass er in 80% der Fälle die richtige Farbe zuordnen kann, d. h.:

$$P(b|B) = P(g|G) = 0,8$$



Aufgabe

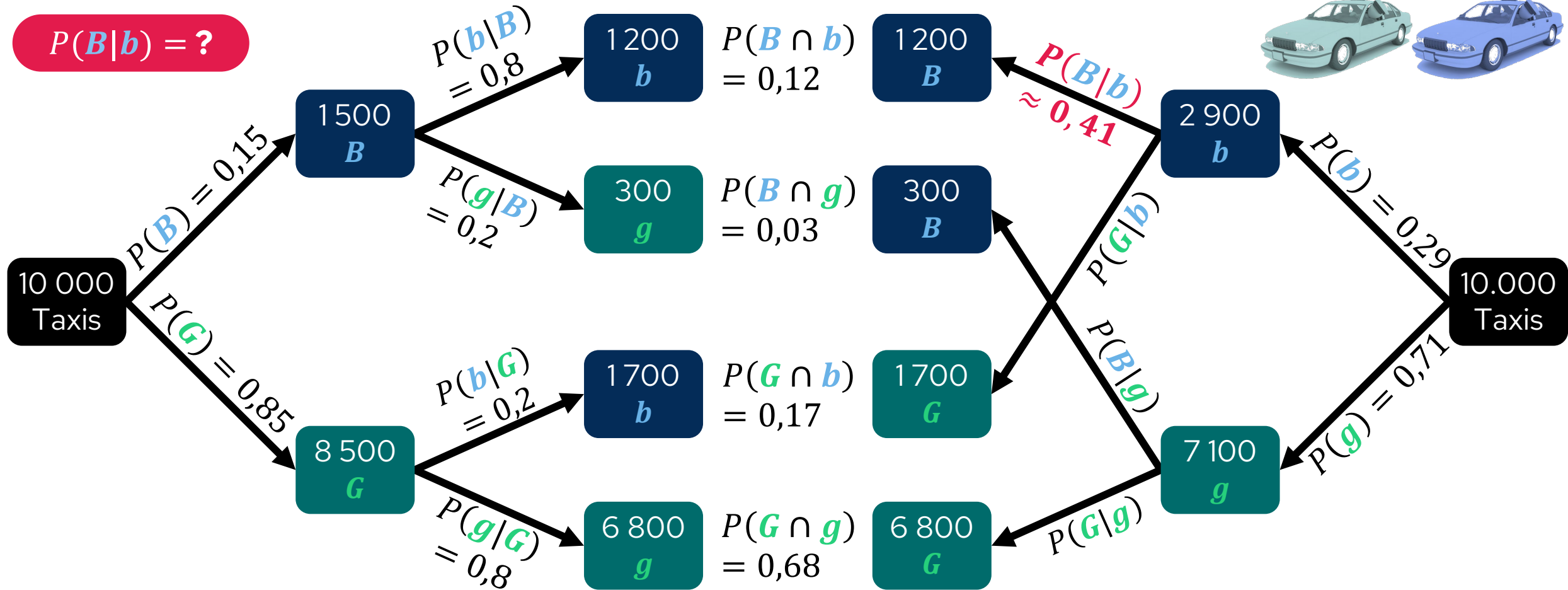
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich ein blaues Taxi in den Unfall verwickelt war?

$$P(B|b) = ?$$

Die meisten Befragten nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeit deutlich über 0,5 liegt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Taxi-Problem

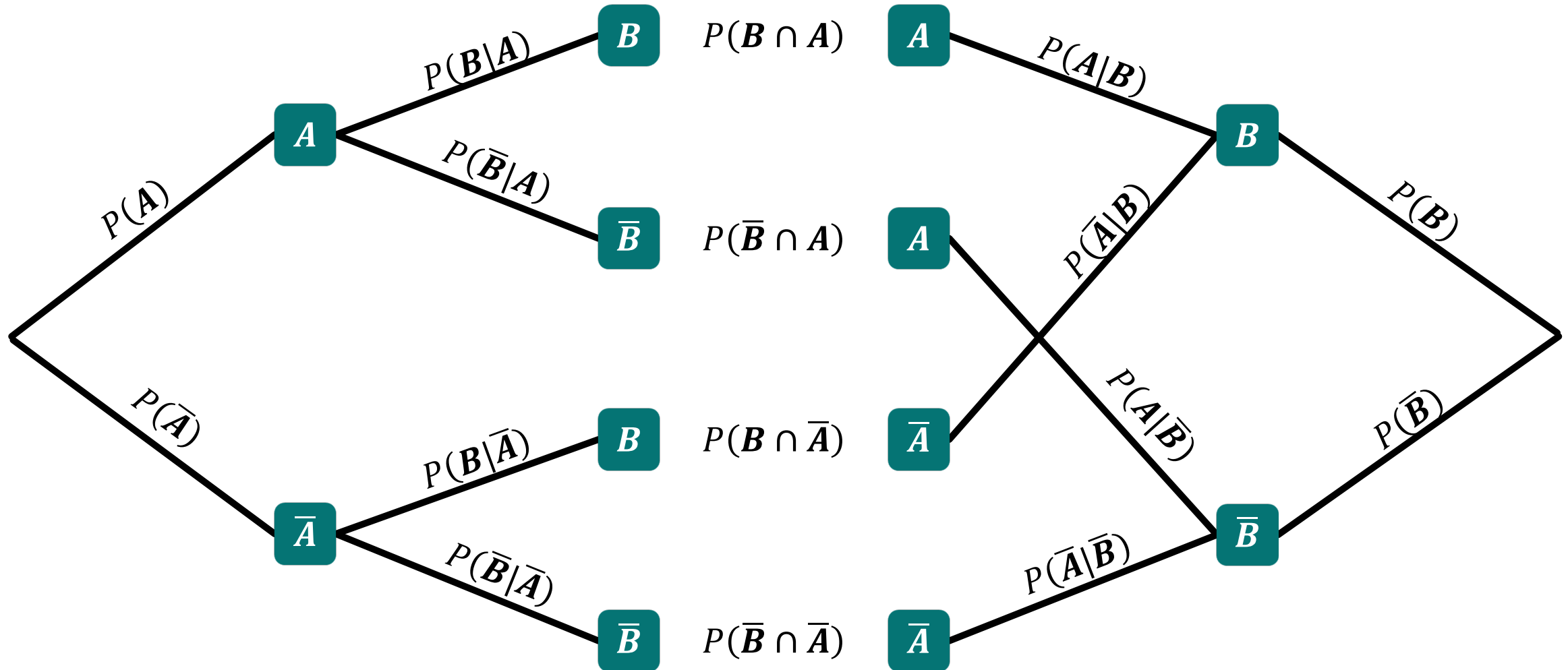


$$P(B|b) = \frac{P(B \cap b)}{P(b)} = \frac{0,12}{0,29} \approx 0,41$$

$$P(b) = P(B \cap b) + P(G \cap b) = 0,12 + 0,17 = 0,29$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Doppelbaum (doppeltes Baumdiagramm)



3.4

Anwendung
Medizinische Tests
→ Ärztliche Diagnosen

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Fachbegriffe

Prävalenz	Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung	auch: Verbreitung
Sensitivität eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein erkrankter Mensch positiv getestet wird	auch: Empfindlichkeit, Richtigpositiv-Rate
Spezifität eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein gesunder Mensch negativ getestet wird	auch: Richtignegativ-Rate
Positiver Vorhersagewert (pVW) eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Mensch tatsächlich krank ist	auch: positive predictive Value (ppV), positiver Prädiktionswert, Relevanz
Negativer Vorhersagewert (nVW) eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein negativ getesteter Mensch tatsächlich nicht krank ist	auch: negative predictive Value (npV), negativer Prädiktionswert

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie



Mammographie

Für die Mammographie als Diagnose-Methode für Brustkrebs sind folgende auf Grund von quantitativen Untersuchungen geschätzten Wahrscheinlichkeiten bekannt:

- 1% der weiblichen Bevölkerung einer bestimmten Altersgruppe hat Brustkrebs. (**Prävalenz**)
- Die **Sensitivität** der Mammographie beträgt 80%. (Hat eine Patientin Brustkrebs, so kommt es in 80% der Fälle auch zu einer positiven Diagnose.)
- Die **Spezifität** der Mammographie beträgt 90%. (Hat eine Patientin keinen Brustkrebs, so kommt es in 90% der Fälle auch zu einer negativen Diagnose.)



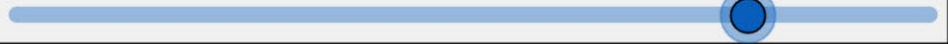
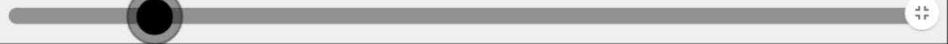
Aufgabe: Wie viel Prozent der bei einer Mammographie positiv getesteten Patientinnen sind tatsächlich krank?

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie → Vierfeldertafel

Gestaffelte Mehrfachtests sind sinnvoll!

Vier-Felder-Tafel	T Testergebnis positiv	$\bar{T}$ Testergebnis negativ	Σ 
K tatsächlich krank	24	6	30
$\bar{K}$ tatsächlich gesund	297	2673	2970
Σ	321	2679	3000

Prävalenz	Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung	 Prävalenz = 1%
Test-Sensitivität	Wahrscheinlichkeit, dass ein erkrankter Mensch positiv getestet wird.	 Sensitivität = 80%
Test-Spezifität	Wahrscheinlichkeit, dass ein gesunder Mensch negativ getestet wird.	 Spezifität = 90%
Gesamtanzahl	Anzahl der insgesamt getesteten Personen.	 Gesamtanzahl = 3000

$$P(K|T) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)} = \frac{24}{321} \approx 7,48\%$$

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie → Vierfeldertafel

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten

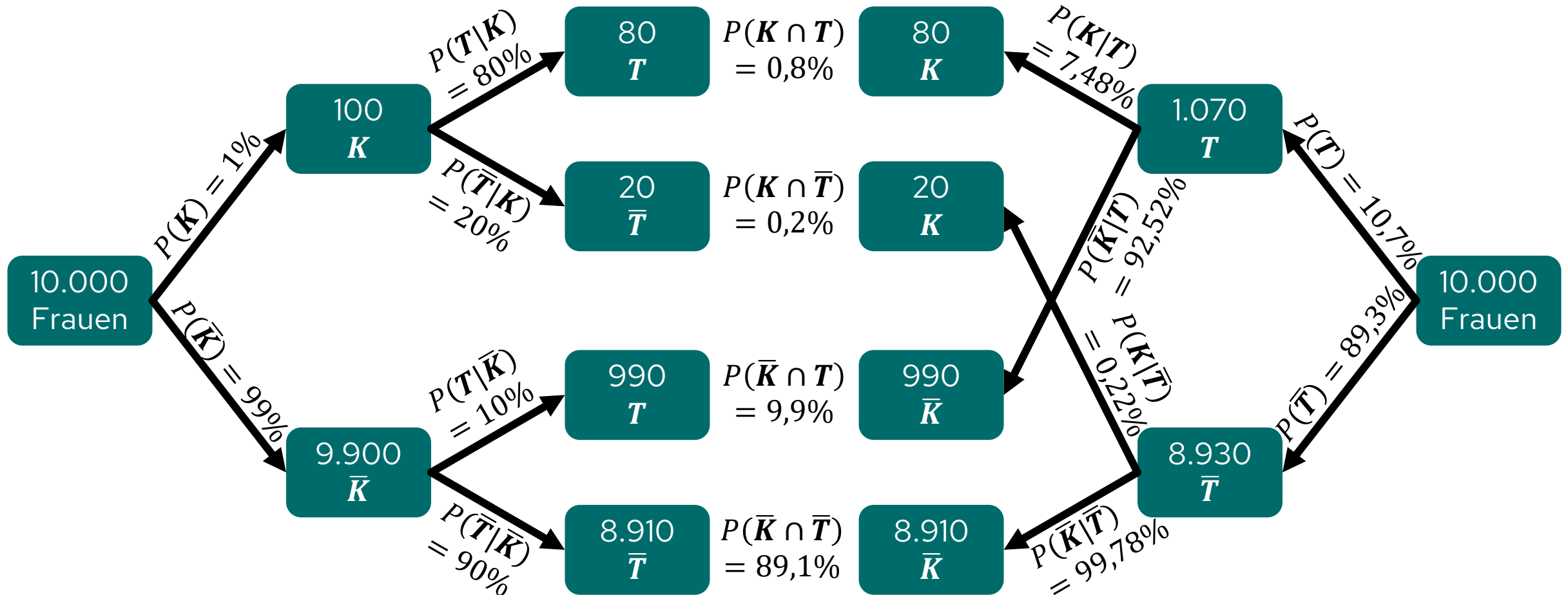
	T Testergebnis positiv	$\bar{T}$ Testergebnis negativ	
K tatsäch- lich krank	$P(K \cap T)$ = 0,8%	$P(K \cap \bar{T})$ = 0,2%	$P(K)$ = 1% = $P(K \cap T)$ + $P(K \cap \bar{T})$
$\bar{K}$ tatsäch- lich gesund	$P(\bar{K} \cap T)$ = 9,9%	$P(\bar{K} \cap \bar{T})$ = 89,1%	$P(\bar{K})$ = 99% = $P(\bar{K} \cap T)$ + $P(\bar{K} \cap \bar{T})$
	$P(T)$ = 10,7% = $P(K \cap T)$ + $P(\bar{K} \cap T)$	$P(\bar{T})$ = 89,3% = $P(K \cap \bar{T})$ + $P(\bar{K} \cap \bar{T})$	$P(\Omega)$ = 100% = $P(K) + P(\bar{K})$ = $P(T) + P(\bar{T})$

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	T Testergebnis positiv	$\bar{T}$ Testergebnis negativ	
K tatsäch- lich krank	$H(K \cap T)$ = 80	$H(K \cap \bar{T})$ = 20	$H(K)$ = 100 = $H(K \cap T)$ + $H(K \cap \bar{T})$
$\bar{K}$ tatsäch- lich gesund	$H(\bar{K} \cap T)$ = 990	$H(\bar{K} \cap \bar{T})$ = 8.910	$H(\bar{K})$ = 9.900 = $H(\bar{K} \cap T)$ + $H(\bar{K} \cap \bar{T})$
	$H(T)$ = 1.070 = $H(K \cap T)$ + $H(\bar{K} \cap T)$	$H(\bar{T})$ = 8.930 = $H(K \cap \bar{T})$ + $H(\bar{K} \cap \bar{T})$	$H(\Omega)$ = 10.000 = $H(K) + H(\bar{K})$ = $H(T) + H(\bar{T})$

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie → Doppelbaum



4

Verteilungen – Binomialverteilung und Co

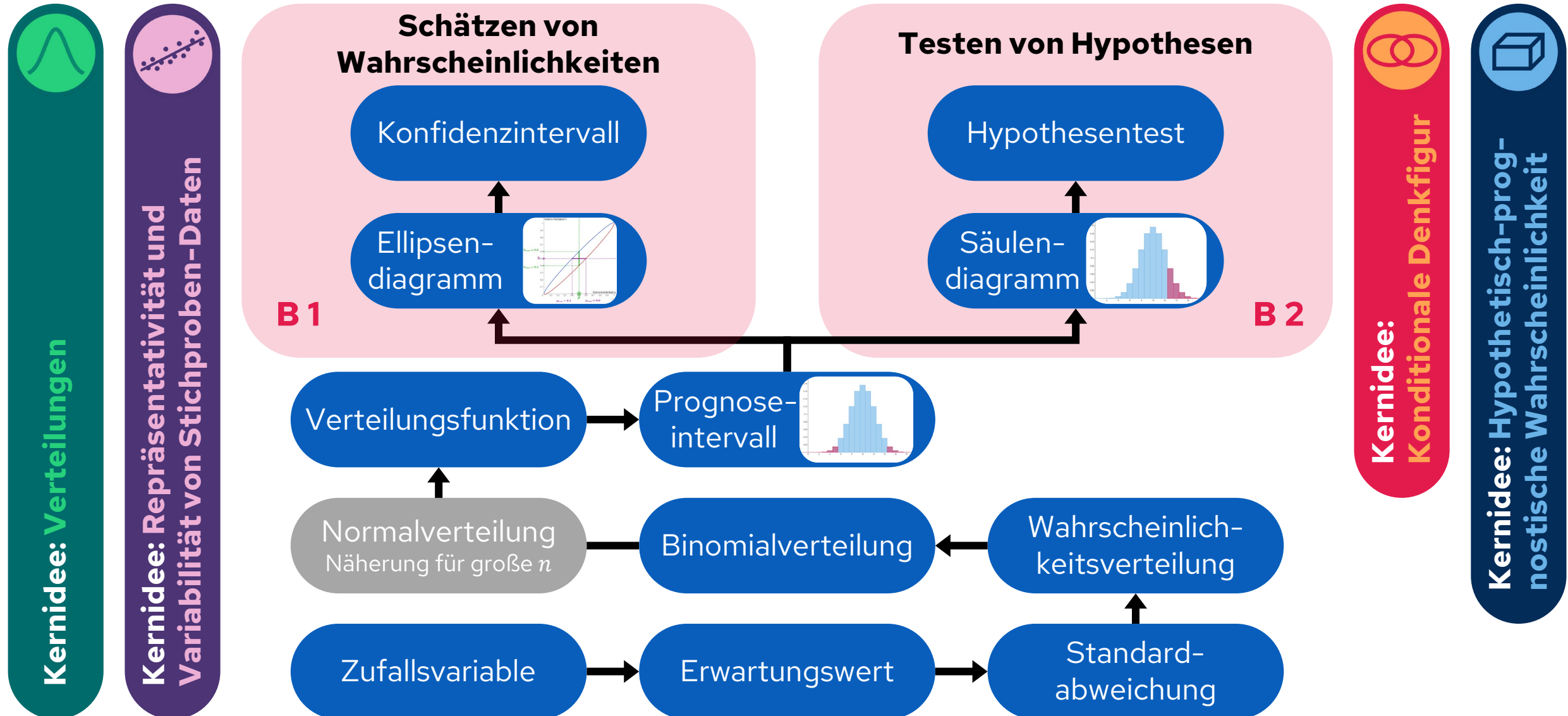
	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
8.	Die Begriffe „Bernoullikette“, „Binomialverteilung“ verstehen und die Formel zur Berechnung der Werte einer Binomialverteilung herleiten (5.04g)	■ Die explizite Berechnung von Werten der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. ■ Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden i.d.R. Rechner benutzt. ■ Anknüpfend an vorangegangene Erfahrungen bietet es sich auch an, Bernoulliketten zu simulieren und Werte der Binomialverteilung auf diese Weise zu bestimmen.
9.	Die Formeln für Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung kennen und anwenden (5.04g)	■ Die Formeln können anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden; ■ ein Beweis ist nicht gefordert.
10.	Eigenschaften der Binomialverteilung kennen, begründen und anwenden (5.04g)	■ Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; ■ der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
11.	Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g, 4.12g)	Die SuS sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
12.	Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normalverteilung) bestimmt (5.09e, 5.10e)	■ Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. ■ Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern. ■ Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können darauf aufbauend die Normalverteilung definiert & Anwendungsbeispiele behandelt werden.
13.	Funktionsterm, Graph und Eigenschaften der Gaußfunktion Φ kennen (5.09e, 5.10e)	■ Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; ■ der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
6.	Die Begriffe „Bernoullikette“ und „Binomialverteilung“ verstehen und wissen, wie man die Werte einer Binomialverteilung bestimmen kann (5.04g)	■ Eine explizite Berechnung der Werte der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. ■ Die Herleitung der entsprechenden Formel ist nicht gefordert. ■ Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden Tabellen für die Binomialverteilung benutzt. Binomialverteilungen sollen auch grafisch dargestellt werden (Histogramme).
7.	Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g)	■ Die Formeln sollen anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden. ■ Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die SuS verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann. ■ Hier bietet es sich an, exemplarisch eine statistische Erhebung zu planen und zu beurteilen.

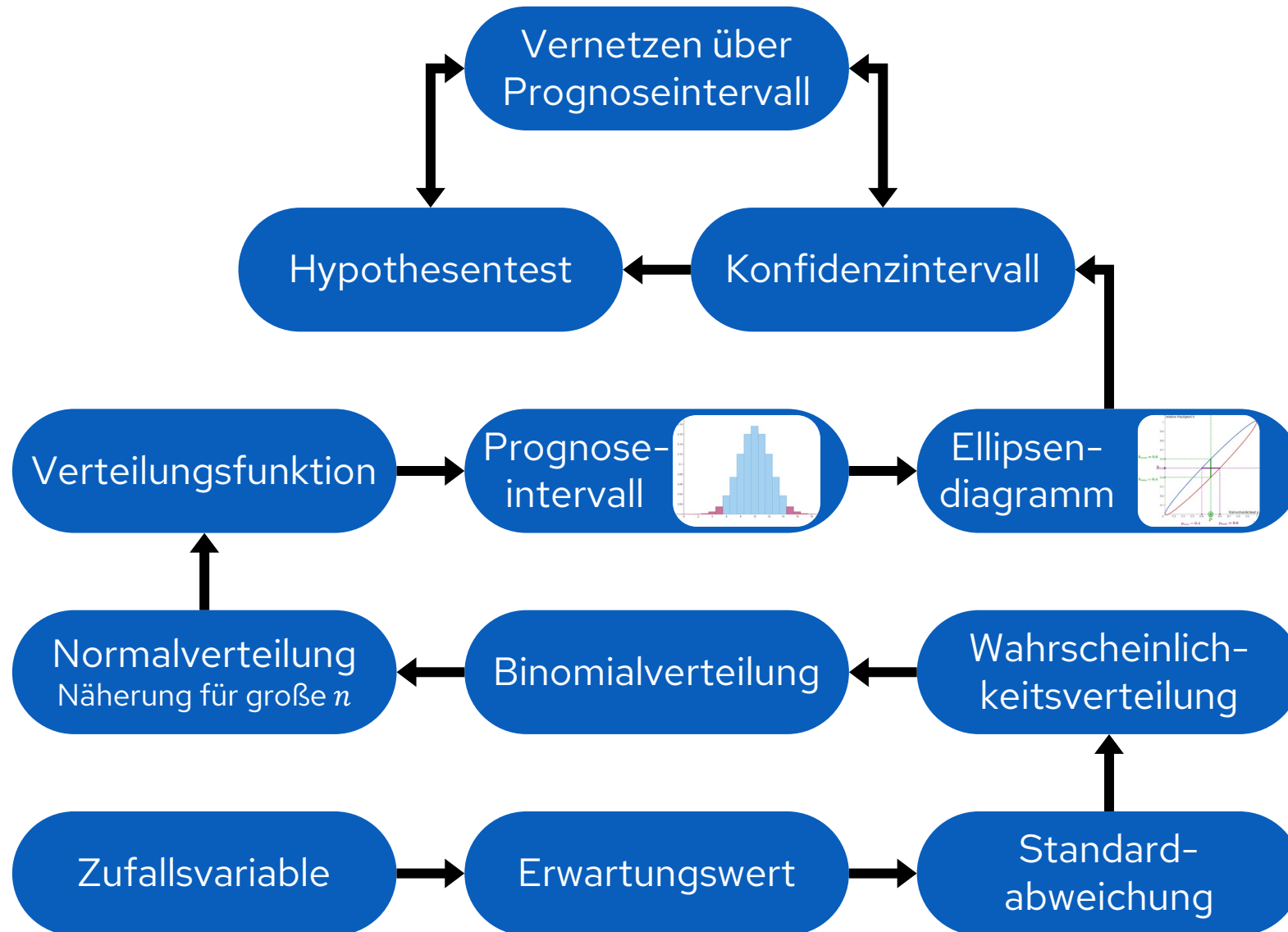
Aufbau der beurteilenden Statistik

Grundkurs



Aufbau der beurteilenden Statistik

Leistungskurs



Kernidee: Verteilungen

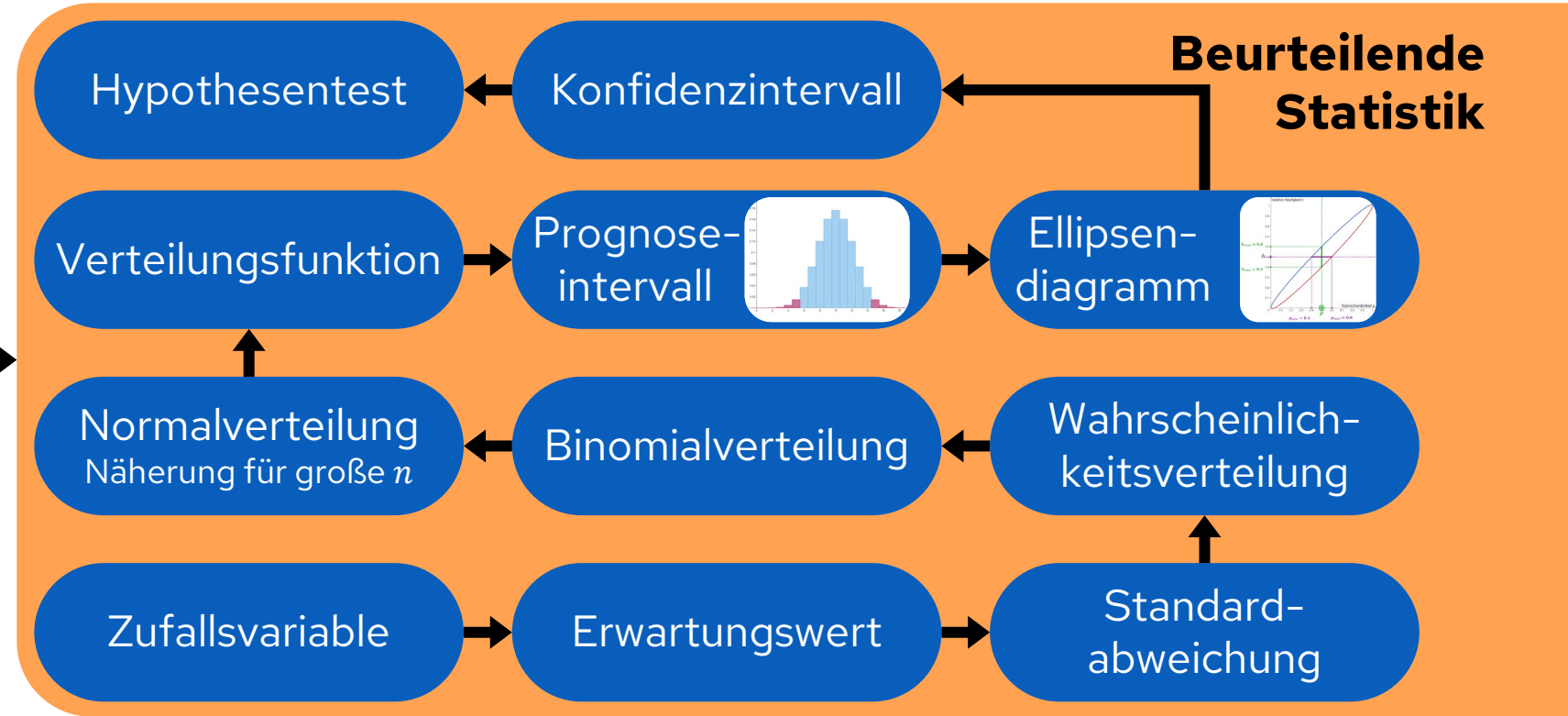
Kernidee: Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee: Konditionale Denkfigur

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Beschreibende Statistik

-  Erhebung – Daten sammeln
-  Graphische Darstellungsformen
-  Mittelwerte & Streuungsmaße



Wahrscheinlichkeitsrechnung

-  (Mehrstufige) Zufallsexperimente
-  Stoch. (Un-)Abhängigkeit
-  Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
-  Bedingte Wahrscheinlichkeit

4.1

Kernidee Verteilungen

Wahrscheinlichkeiten sind **mathematische Modelle**, die ...

- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

„Gute“ Zufallsstichproben

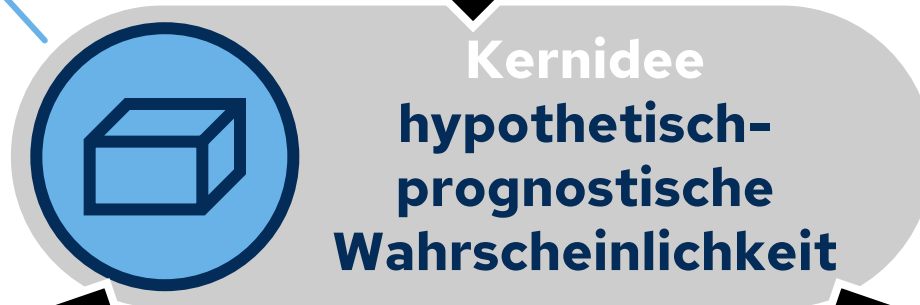
- Beschaffenheit und Generierung



„Wenn ..., dann ...“-Strukturen

Beispiel:

Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?



Globale Muster in Daten ...

- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten





Kernidee Verteilungen



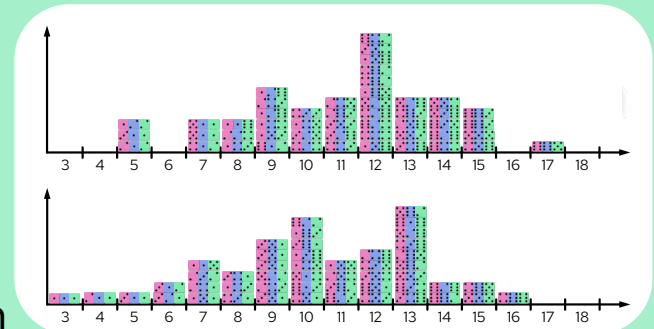
Globale Muster in Daten ...

- als **Modell**-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als **Vergleich**selemente für die Struktur der Daten in Stichproben

Empirische Verteilung ↔ theoretische Verteilung

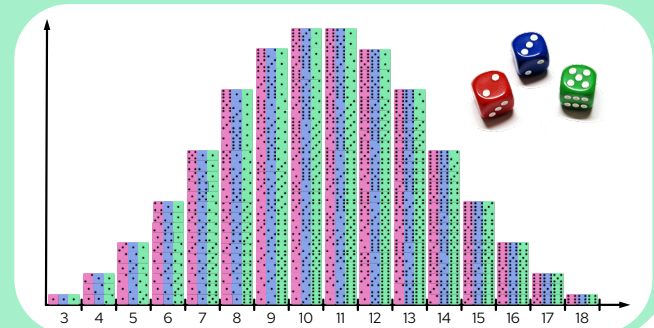
■ Empirische Verteilungen ...

- basieren auf beobachteten Daten und beschreiben deren Variabilität
- sind Verteilungen von Häufigkeiten bzw. relativen Häufigkeiten
- dienen zum Vergleich der Struktur der Daten in verschiedenen Stichproben



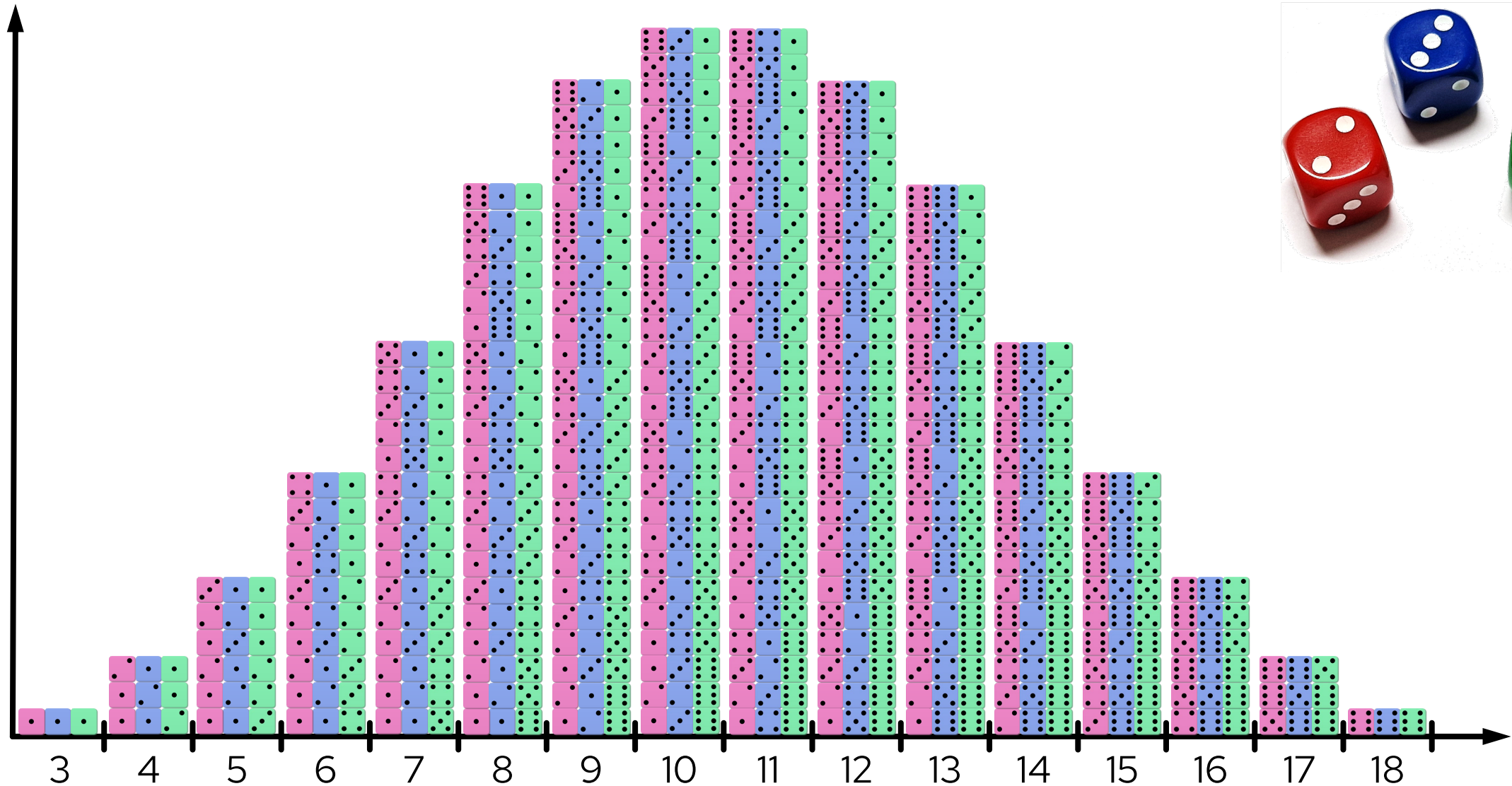
■ Theoretische Verteilungen ...

- modellieren und quantifizieren Variabilität
- sind Verteilungen von Wahrscheinlichkeiten
- sind Modelle zur Beschreibung der Realität



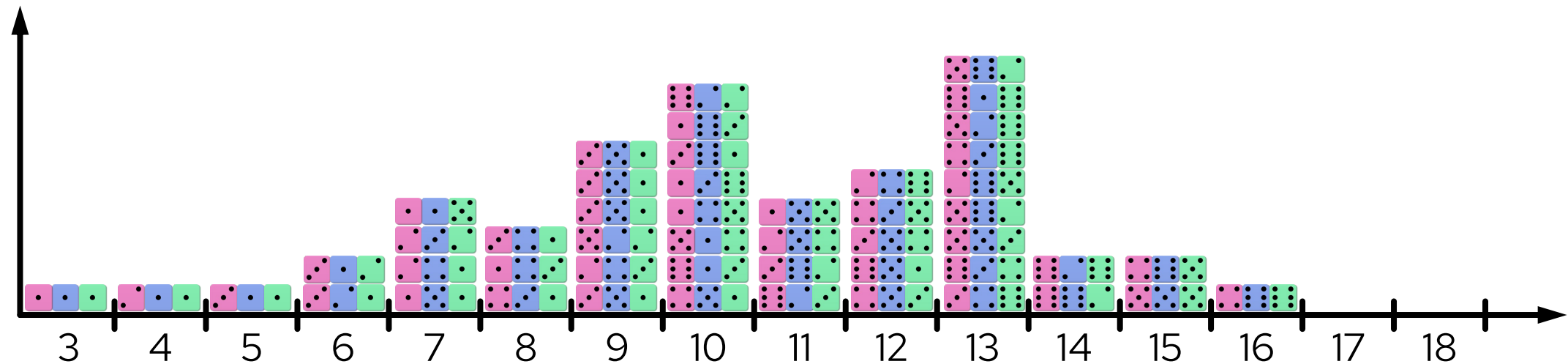
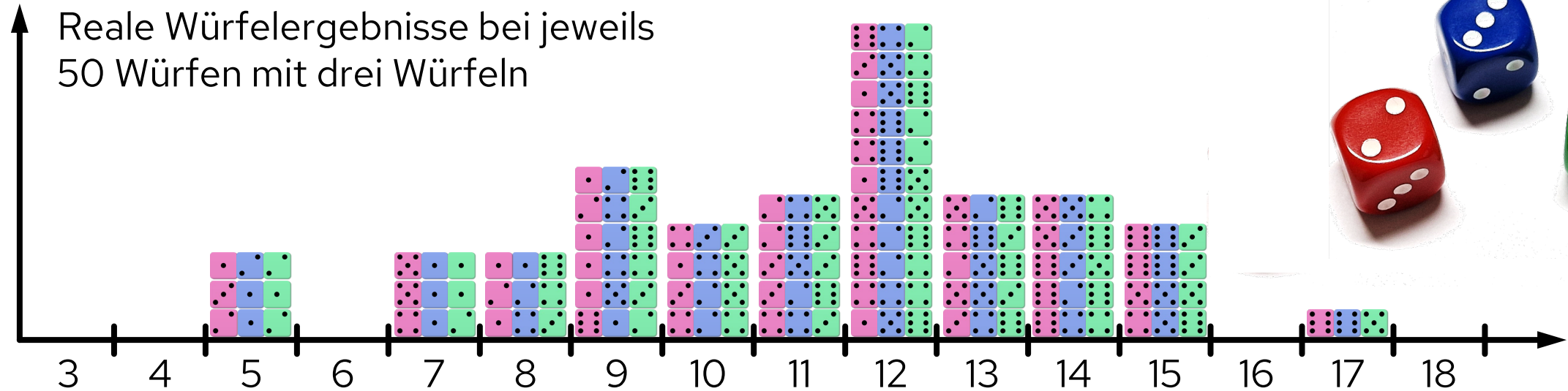
Würfel mit drei Würfeln

Theoretische Verteilung der Augensummen



Würfel mit drei Würfeln

Empirische Verteilung der Augensummen



4.2

Kernidee Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Wahrscheinlichkeiten sind **mathematische Modelle**, die ...

- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

„Gute“ Zufallsstichproben

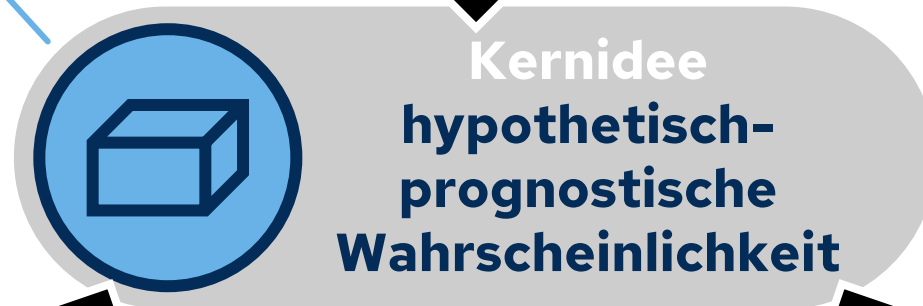
- Beschaffenheit und Generierung



„Wenn ..., dann ...“-Strukturen

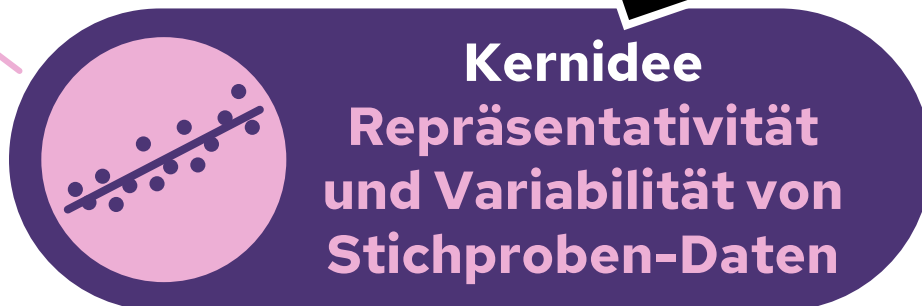
Beispiel:

Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?

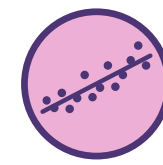


Globale Muster in Daten ...

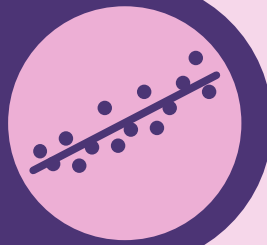
- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten



Kernidee: Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten



Kernidee Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten



Beschaffenheit und Generierung
von „guten“ Zufallsstichproben

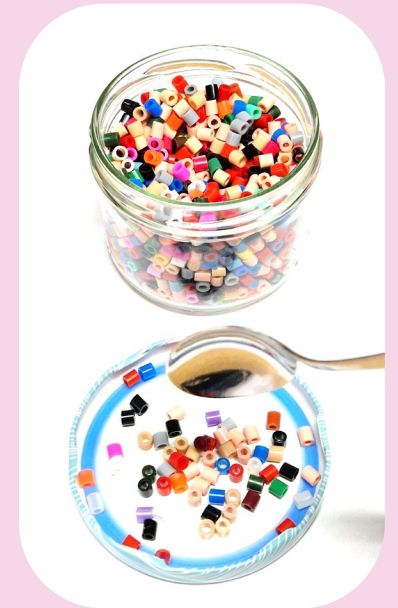
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

■ Repräsentativität einer Stichprobe

- ... bezüglich der Population reflektieren.
- Entscheidet über die Generalisierbarkeit der Ergebnisse.

■ Akzeptanz der Variabilität von Stichprobendaten

- Verständnis dafür entwickeln, dass eine Stichprobe ein Element einer Menge von potenziellen anderen Stichproben ist.
- Verständnis für das Gesetz der großen Zahlen anbahnen.



4.3

Zufallsvariablen
Funktionen, die Ergebnissen
reelle Zahlen zuordnen

Zufallsvariable

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



Definition Zufallsvariable

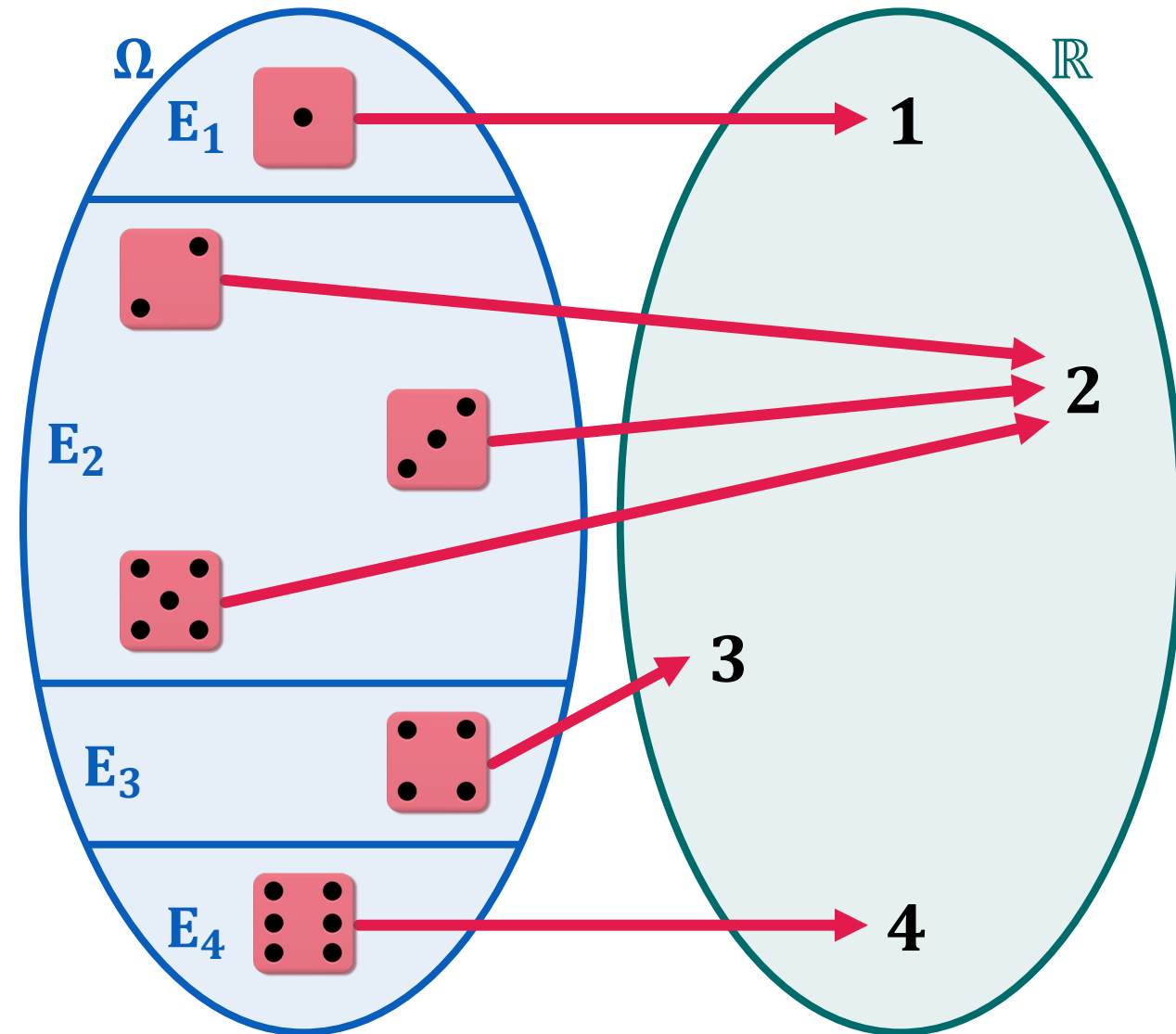
Eine Funktion X , die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **Zufallsvariable** (auch **Zufallsgröße**).

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Anzahl x der Teiler der geworfenen Augenzahl zu: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

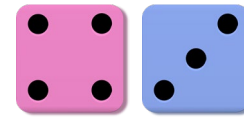
Bemerkung: Obige Zufallsvariable X ist nur eine von sehr vielen möglichen Zufallsvariablen zum Zufallsexperiment Würfeln mit einem Würfel. Man könnte z.B. auch die Zufallsvariable Y definieren, die der Augenzahl 6 den Wert 4 € und allen anderen Augenzahlen den Wert -1 € (als Gewinnausschüttung) zuordnet.



Beispiel: $E_2 := \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 2\} = \{\text{die with 2 dots}; \text{die with 3 dots}; \text{die with 4 dots}\}$ RPTU

Zufallsvariable

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

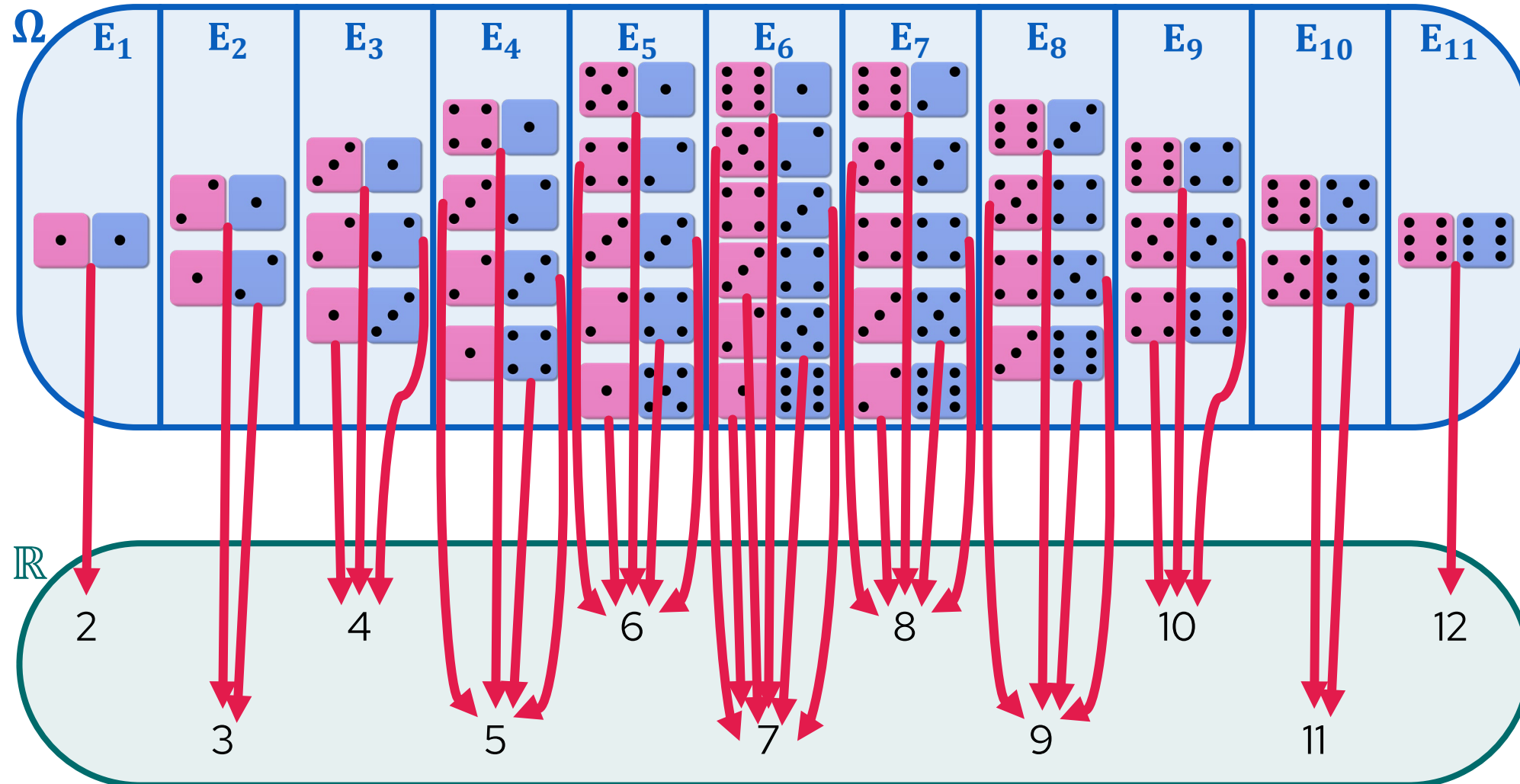


Beispiel:

Würfeln mit
zwei Würfeln

Die
Zufallsvariable X
ordnet jedem
Ergebnis ω die
Augensumme x
der geworfenen
Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$



Beispiel: $E_3 := \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 4\} = \{(1; 3); (2; 2); (3; 1)\}$

4.4

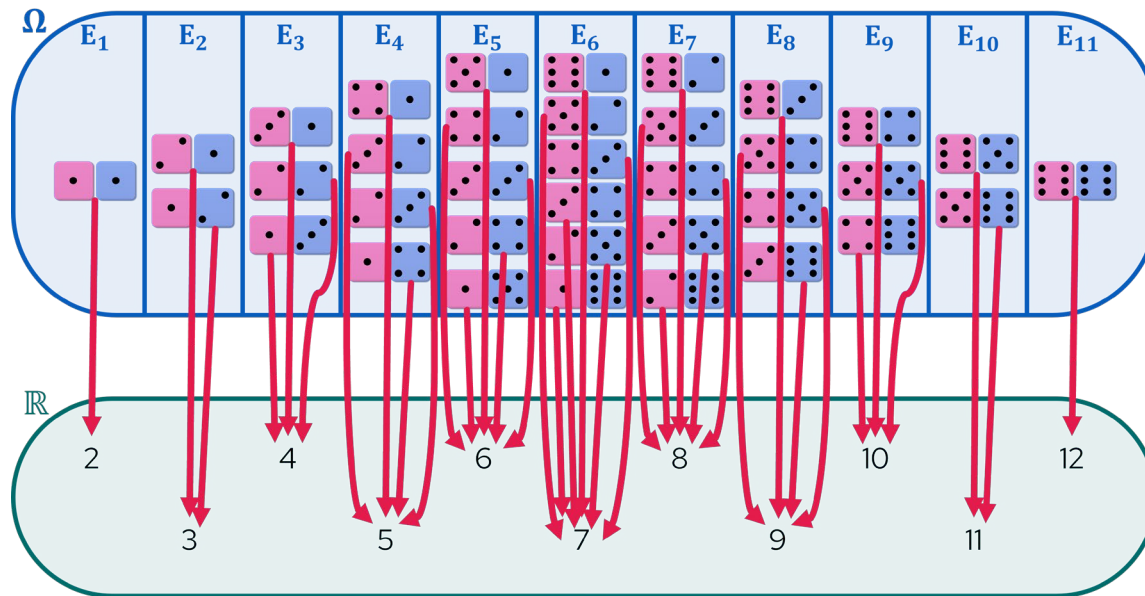
Erwartungswert und Standardabweichung

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Aufgabe: Welche mittlere Augensumme $\mu = E(X)$ ist beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erwarten?

Idee: Die Augensummen treten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auf, sie sollten also gewichtet mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit in den im Mittel erwarteten Wert (**Erwartungswert**) eingehen.

$$\begin{aligned}
 \mu = E(X) &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} \\
 &\quad + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} \\
 &\quad + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\
 &= \frac{252}{36} = 7
 \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen arithmetischem Mittel und Erwartungswert

Zufallsexperiment: Es wird 20-mal mit einem Spielwürfel gewürfelt. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}, \omega \mapsto x$

Ergebnis einer Versuchsreihe von $n = 20$ Würfelwürfen: 6, 3, 3, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 2, 3, 3, 3, 6, 5, 4, 6, 1, 5, 5

Realität: Arithmetisches Mittel

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{6+3+3+3+5+4+3+1+6+2+3+3+3+6+5+4+6+1+5+5}{20} \\ &= \frac{(1+1)+(2)+(3+3+3+3+3+3+3)+(4+4)+(5+5+5+5)+(6+6+6+6)}{20} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4}{20}\end{aligned}$$

Mit $H_n(x)$ = „Absolute Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 \cdot H_n(1) + 2 \cdot H_n(2) + 3 \cdot H_n(3) + 4 \cdot H_n(4) + 5 \cdot H_n(5) + 6 \cdot H_n(6)}{n} \\ &= 1 \cdot \frac{H_n(1)}{n} + 2 \cdot \frac{H_n(2)}{n} + 3 \cdot \frac{H_n(3)}{n} + 4 \cdot \frac{H_n(4)}{n} + 5 \cdot \frac{H_n(5)}{n} + 6 \cdot \frac{H_n(6)}{n}\end{aligned}$$

Mit $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{n}$ = „Relative Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ folgt:

$$\bar{x} = x_1 \cdot h_n(x_1) + \dots + x_k \cdot h_n(x_k)$$

Modell: Erwartungswert

$$\mu = E(X) := x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

Wechsel von der
Realität zum Modell

Definition Erwartungswert

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ heißt

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

der **Erwartungswert** von X .

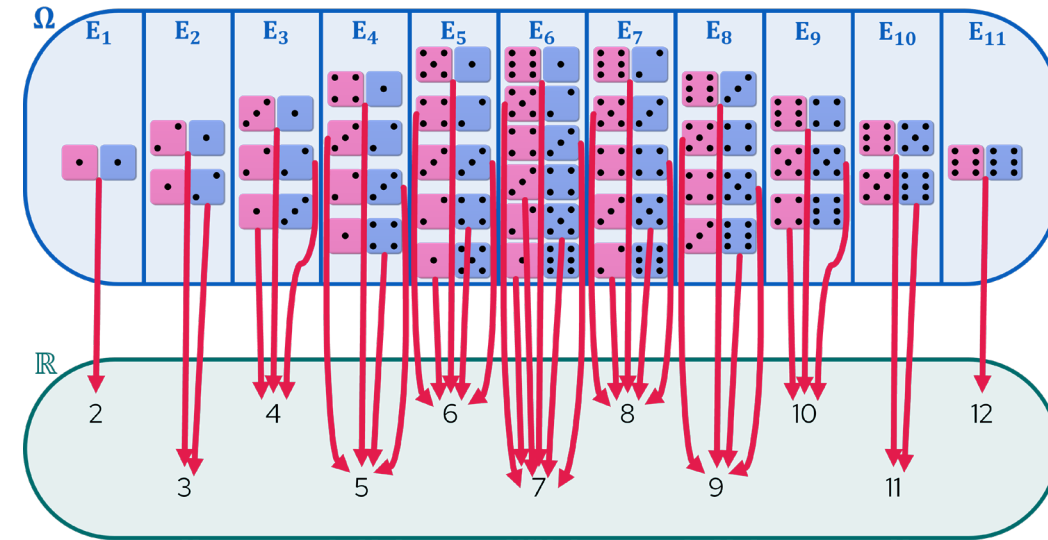
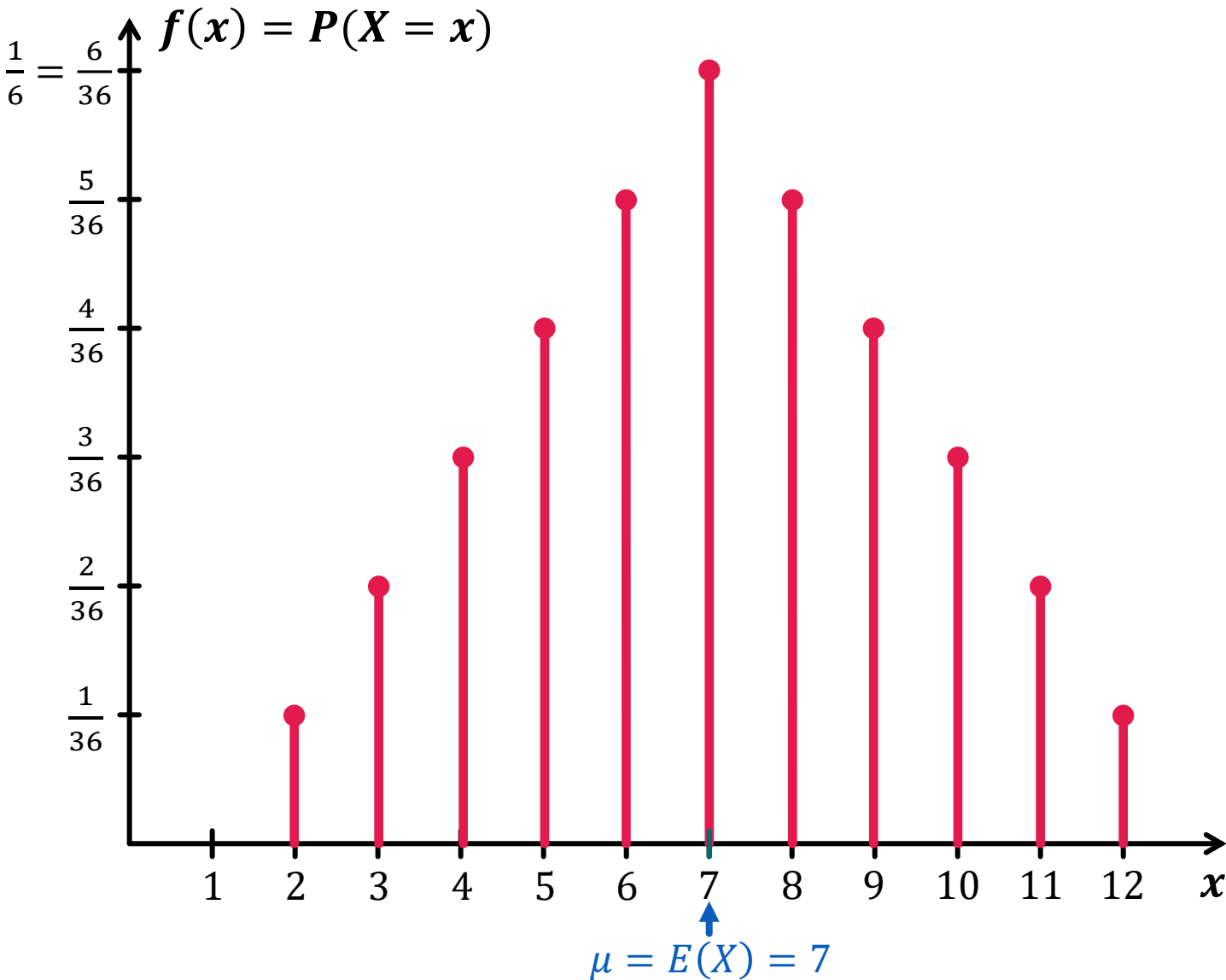
Ausgedrückt mit dem Summenzeichen:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(X = x_i)$$

Bemerkungen

- Statt $E(X)$ schreibt man auch $\mu(X)$ bzw. nur μ , wenn man nur eine Zufallsvariable betrachtet.
- Bei mehreren Zufallsvariablen X_i werden die Erwartungswerte oft mit $E(X_i) = \mu_i$ bezeichnet.
- Interpretiert man die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Masseverteilung, mit den $P(X = x_i)$ als punktförmigen Massen, dann lässt sich $\mu = E(X)$ als die Stelle deuten, an der man unterstützen muss, damit die „Waage“ im Gleichgewicht bleibt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

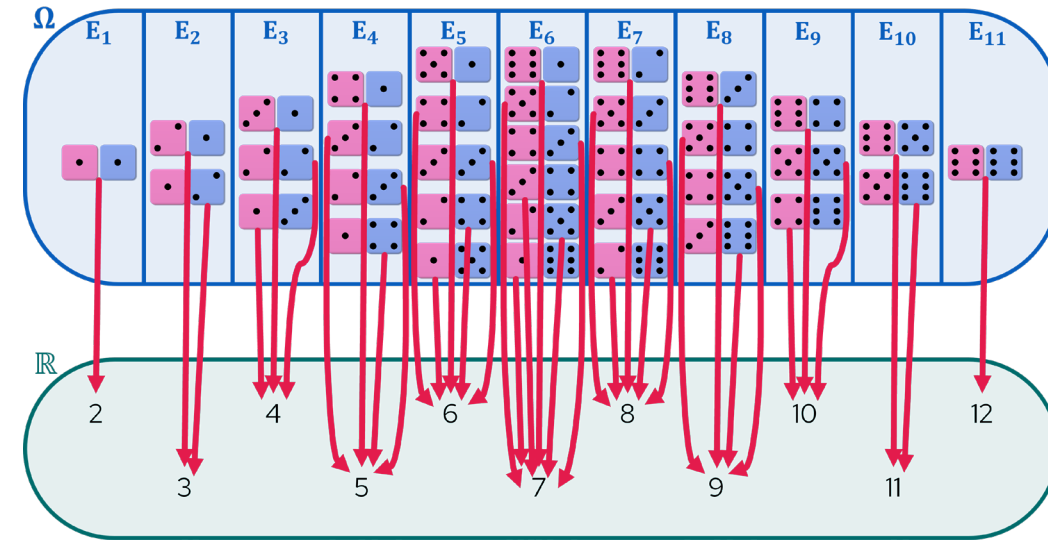
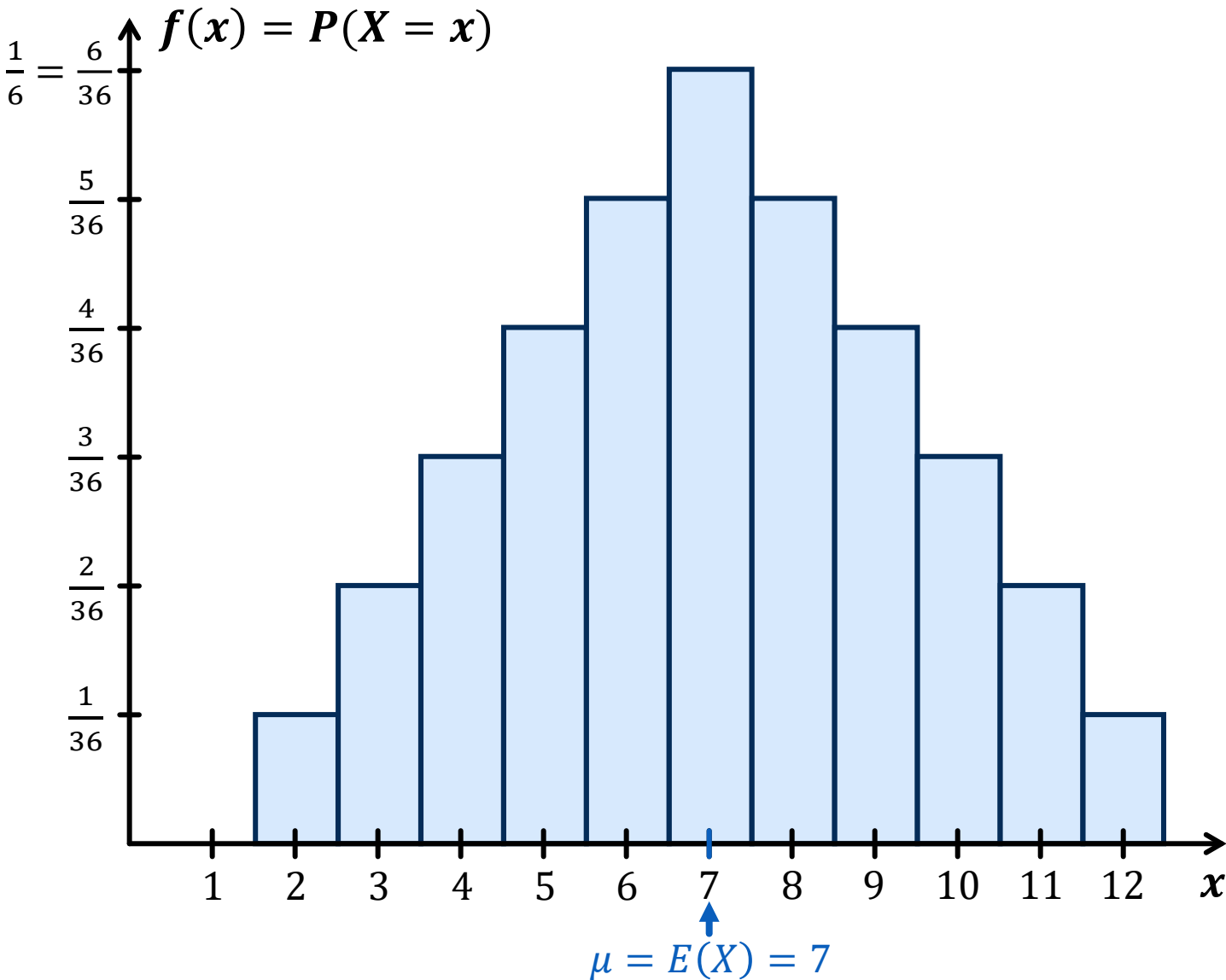


x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

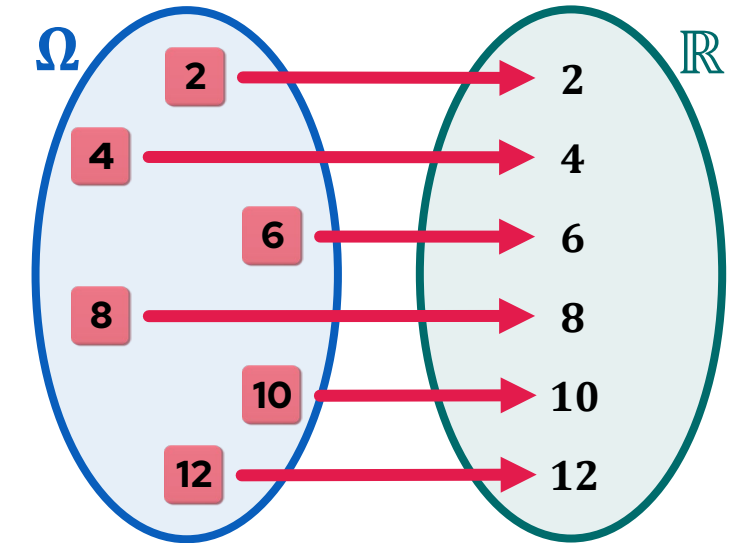
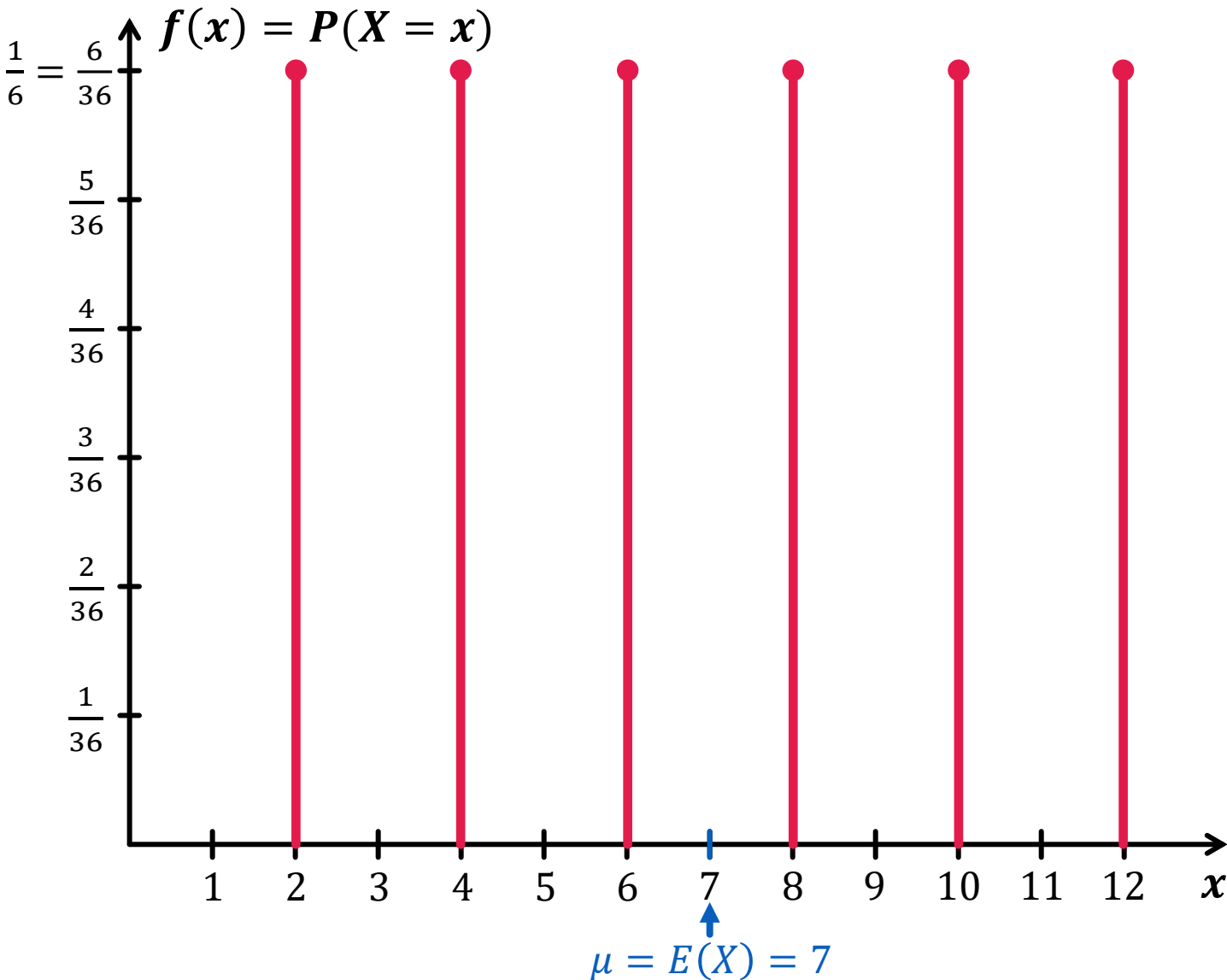


x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

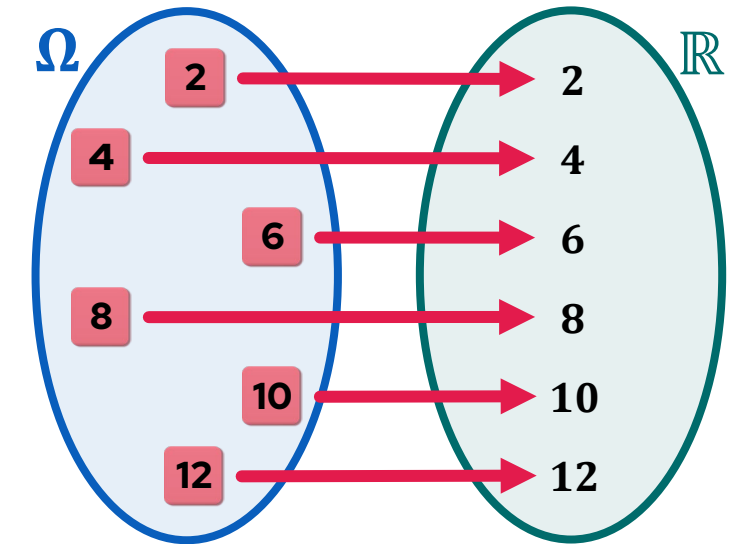
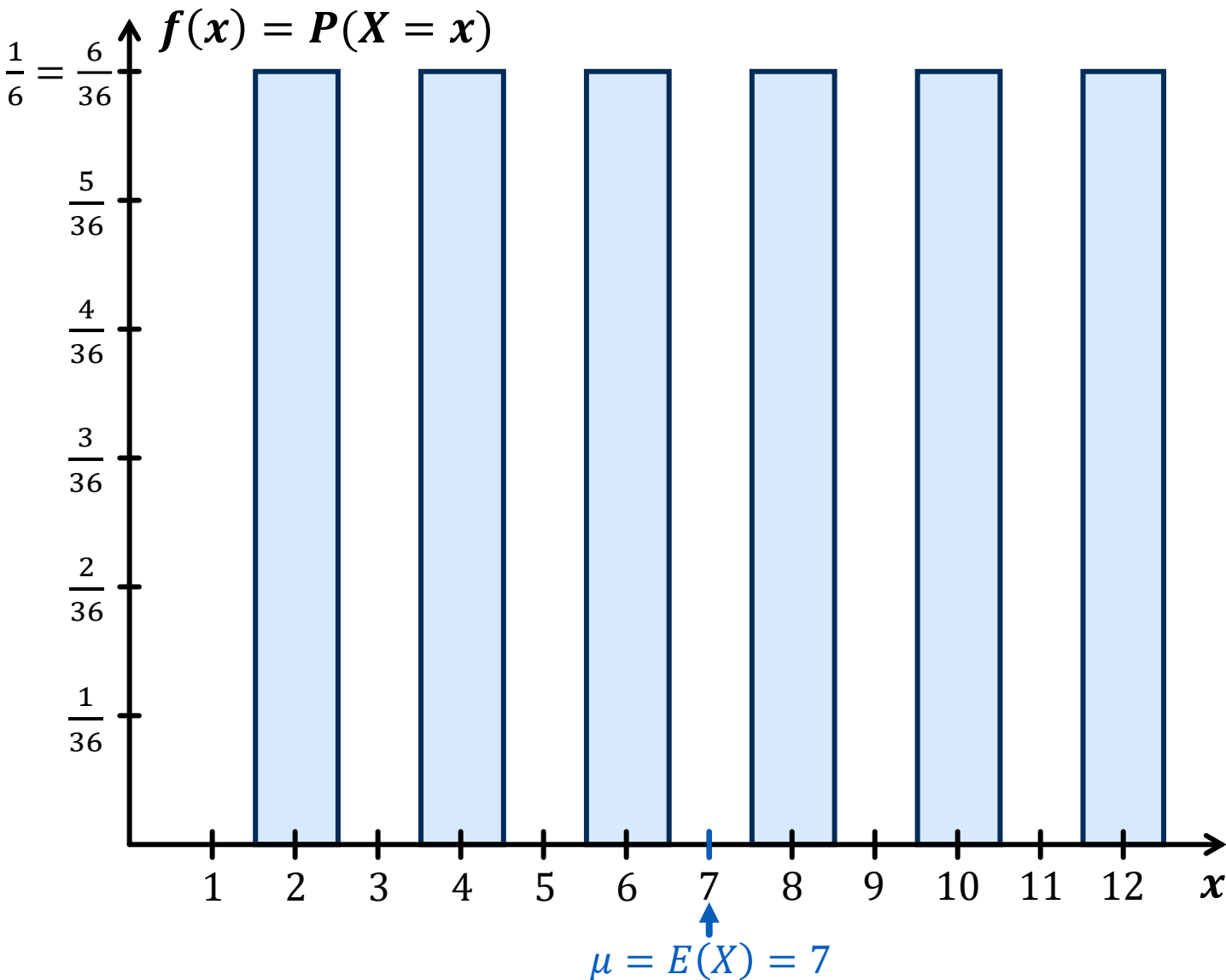
Wahrscheinlichkeitsverteilung



x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel mit den Augenzahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu:
 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

Wahrscheinlichkeitsverteilung



x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

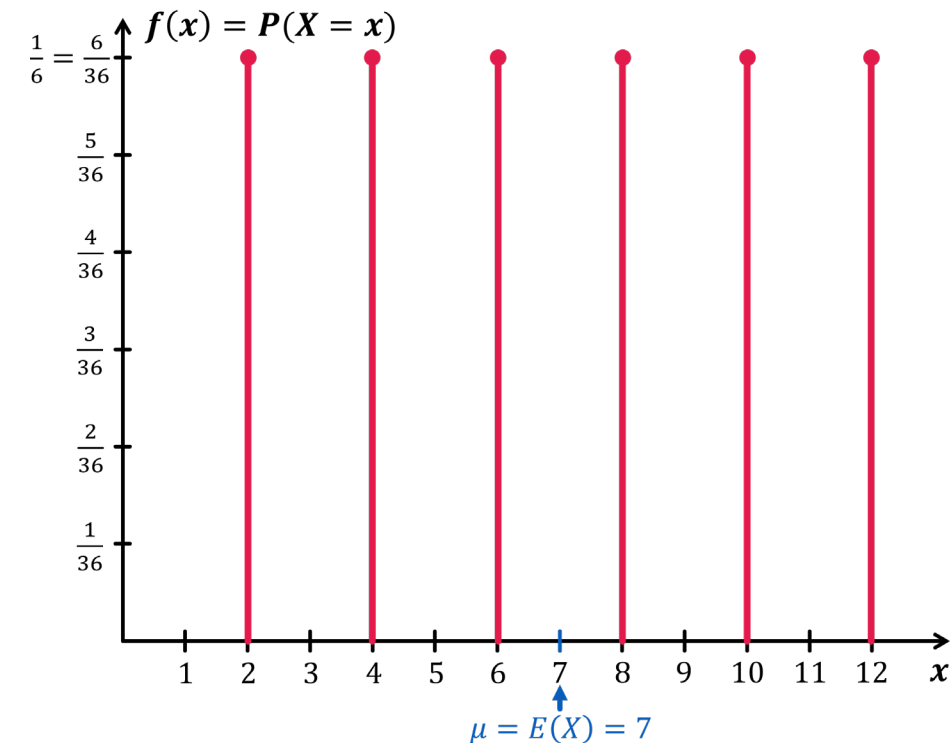
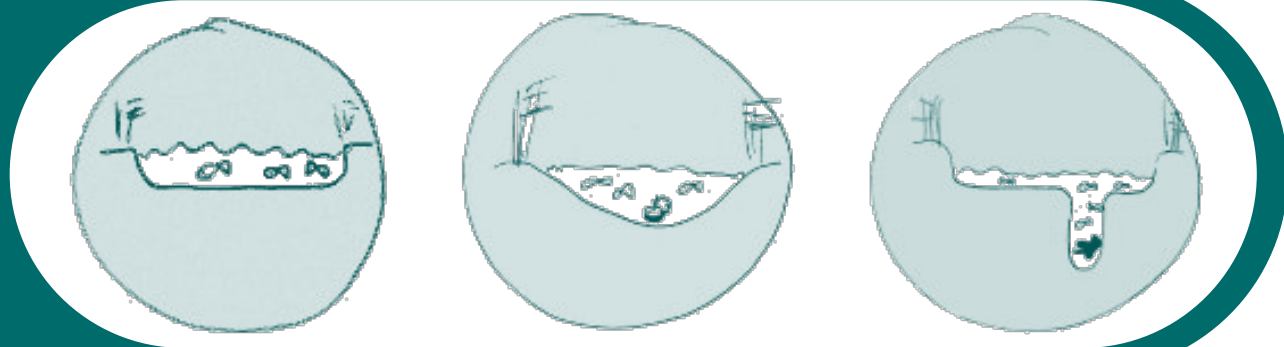
Beispiel: Würfeln mit einem Würfel mit den Augenzahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu:
 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

Warum Streuungsmaße?

Durchschnitte (Erwartungswerte) allein machen nicht glücklich!

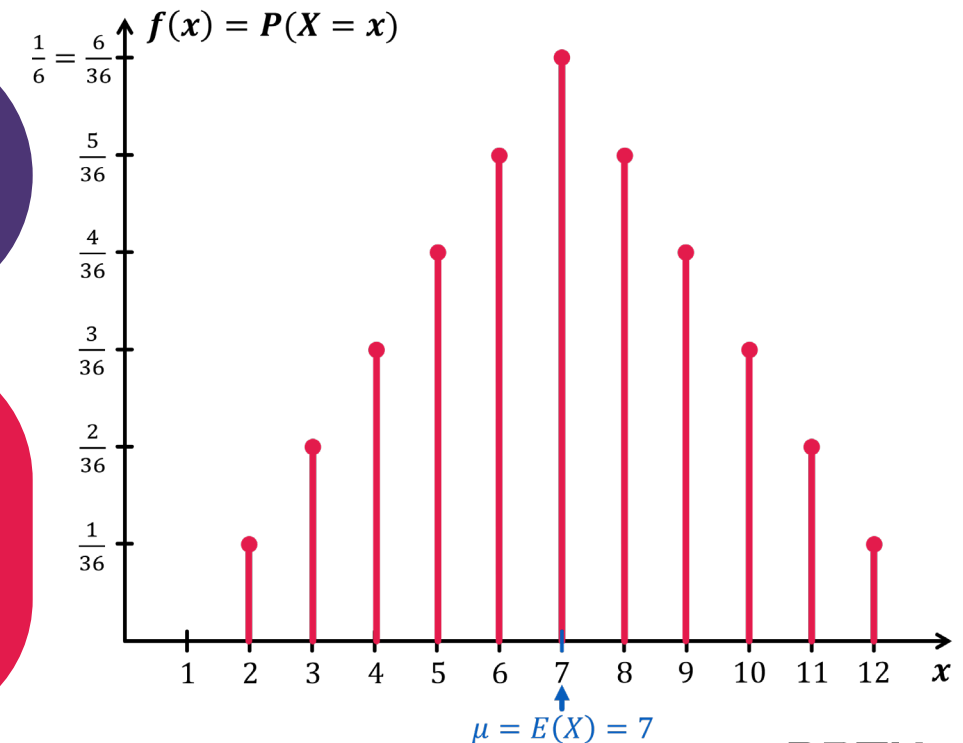
Krämer, W. (2006). So lügt man mit Statistik. Piper

Beispiel: Flussquerschnitte
gleicher mittlerer Tiefe



Wahrscheinlichkeits-
verteilungen
mit demselben
Erwartungswert $E(X)$.

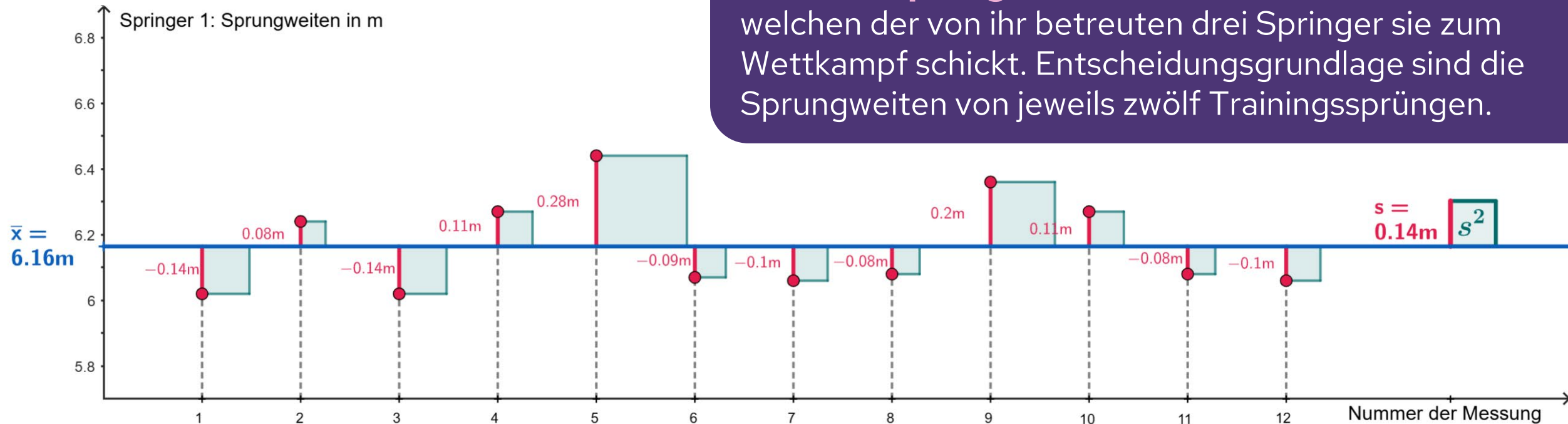
Gesucht:
Mittlere Abweichung
der Ausprägungen der
Zufallsvariable vom
Erwartungswert als Maß
für die Streuung.



Streuungsmaße

Beispiel: Weitsprung

Eine **Weitsprung-Trainerin** muss entscheiden, welchen der von ihr betreuten drei Springer sie zum Wettkampf schickt. Entscheidungsgrundlage sind die Sprungweiten von jeweils zwölf Trainingsprüngen.



Springer 1

☒ $\bar{x}$ ☒ $x - \bar{x}$ ☒ $(x - \bar{x})^2$

Springer 2

☒ mittlere absolute Abweichung vom Mittelwert

Springer 3

$$\frac{1}{12} \cdot ((x_1 - \bar{x}) + \dots + (x_{12} - \bar{x})) = 0\text{m}$$

Weiter

☒ mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert (empirische Varianz s^2)

$$s^2 = \frac{1}{12} \cdot ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2) = 0.02\text{m}^2$$

☒ empirische Standardabweichung s

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2)} = 0.14\text{m}$$

Zusammenhang: Empirische Standardabweichung s und Standardabweichung σ

Zufallsexperiment: Es wird 20-mal mit einem Spielwürfel gewürfelt. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}, \omega \mapsto x$

Ergebnis einer Versuchsreihe von $n = 20$ Würfelwürfen: 6, 3, 3, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 2, 3, 3, 3, 6, 5, 4, 6, 1, 5, 5

Realität: Arithm. Mittel s^2 der quadratischen Abweichungen vom arithm. Mittel $\bar{x} = 3,5$

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3,5)^2 \cdot 2 + (2-3,5)^2 \cdot 1 + (3-3,5)^2 \cdot 7 + (4-3,5)^2 \cdot 2 + (5-3,5)^2 \cdot 4 + (6-3,5)^2 \cdot 4}{20}$$

Mit $H_n(x)$ = „Absolute Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ ergibt sich:

$$s^2 = \frac{(1-\bar{x})^2 \cdot H_n(1) + (2-\bar{x})^2 \cdot H_n(2) + (3-\bar{x})^2 \cdot H_n(3) + (4-\bar{x})^2 \cdot H_n(4) + (5-\bar{x})^2 \cdot H_n(5) + (6-\bar{x})^2 \cdot H_n(6)}{n}$$
$$= (1 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(1)}{n} + (2 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(2)}{n} + (3 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(3)}{n} + (4 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(4)}{n} + (5 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(5)}{n} + (6 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(6)}{n}$$

Mit $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{n}$ = „Relative Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ folgt:

$$s^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_1) + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_k) \Rightarrow s = \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_1) + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_k)}$$

Modell: Varianz: $\sigma^2 := (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} := \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)}$

Wechsel von der
Realität zum Modell

Streuungsmaße

Varianz und Standardabweichung

Bemerkung: Würden zur Messung der mittleren Abweichung vom Erwartungswert nur die Differenzen $x_i - \mu$ gebildet, dann würden sich Abweichungen nach unten und oben über die unterschiedlichen Vorzeichen gegenseitig aufheben.

Durch das Quadrieren der Terme $(x_i - \mu)^2$ entfällt dieser Effekt.

Bemerkung: Die Maßeinheit der Varianz $\text{Var}(X)$ ist das Quadrat der Einheit, in der die Zufallsvariable X gemessen wird. Zur leichteren Interpretierbarkeit wurde deshalb mit der Standardabweichung $\sigma(X)$ eine Maßzahl konstruiert, die dieselbe Einheit wie X hat.

Für die Varianz schreibt man auch σ^2 .

Definition Varianz

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ und dem Erwartungswert $E(X) = \mu$ heißt

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E((X - \mu)^2) \\ &= (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)\end{aligned}$$

die **Varianz** von X .

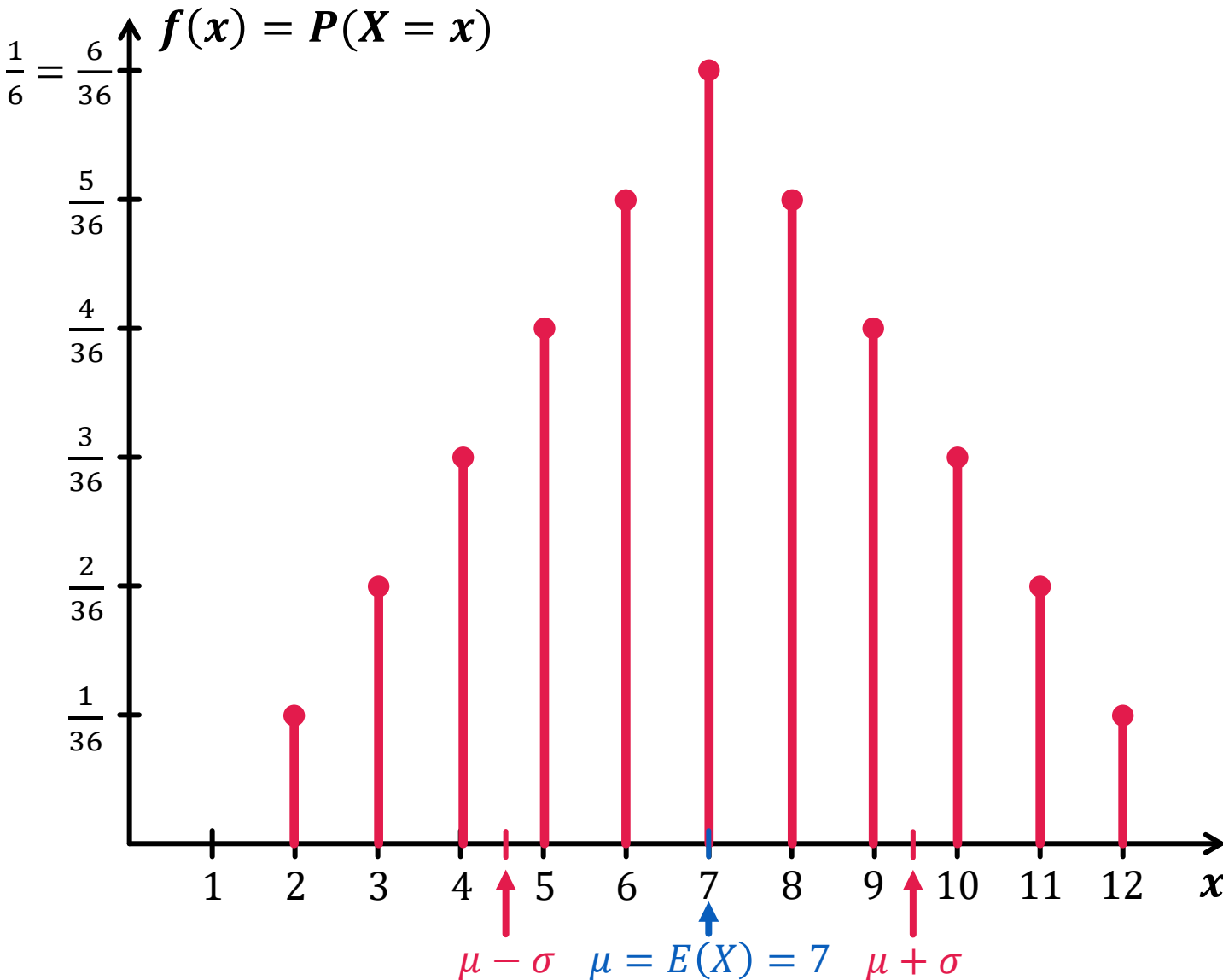
Definition Standardabweichung

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ und dem Erwartungswert $E(X) = \mu$ heißt

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sqrt{\text{Var}(X)} \\ &= \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)}\end{aligned}$$

die **Standardabweichung** von X .

Streuungsmaß: Standardabweichung



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Varianz σ^2

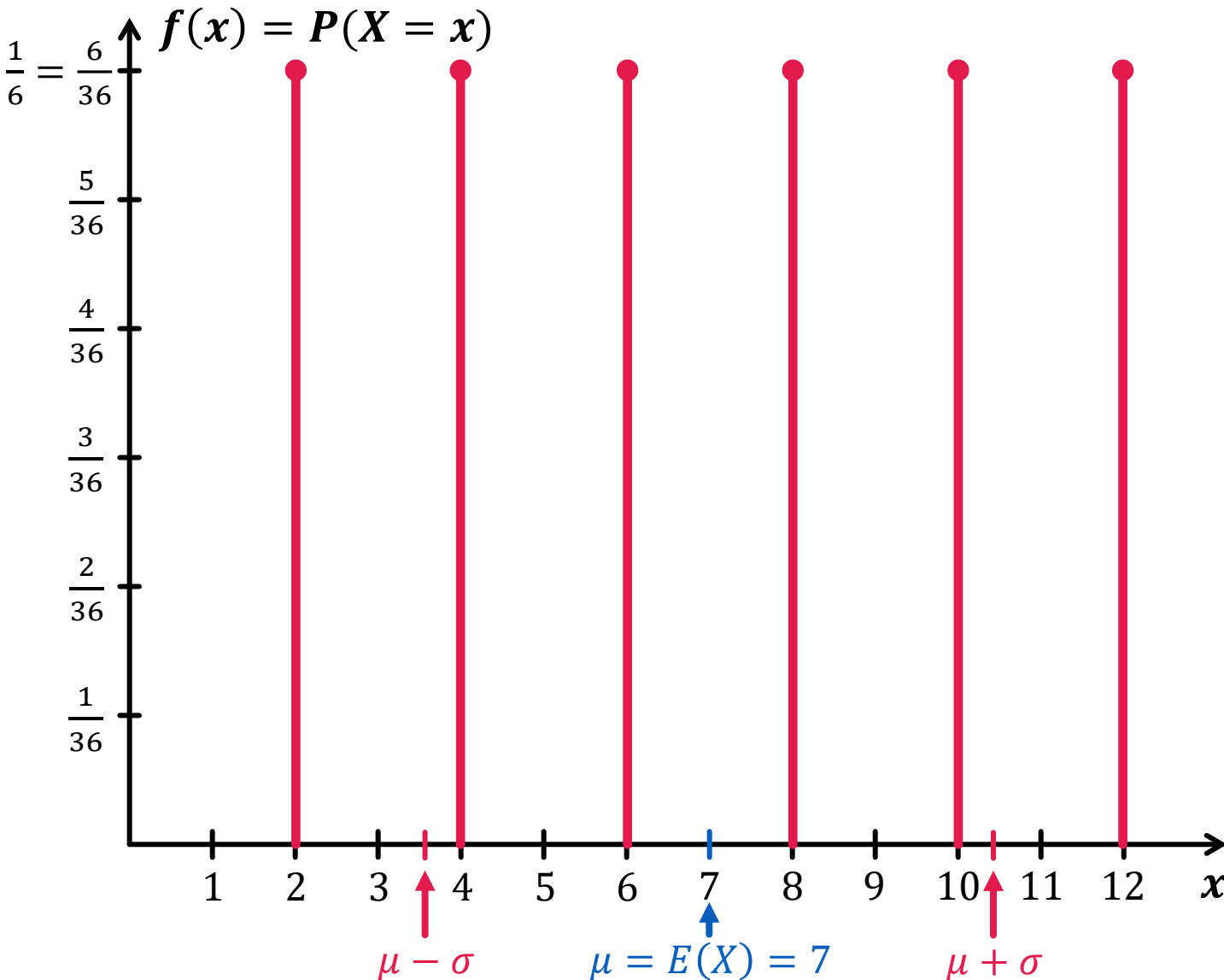
$$\sigma^2 = \text{Var}(X)$$

$$\begin{aligned} &= (2 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} \\ &\quad + (5 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (6 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7 - 7)^2 \cdot \frac{6}{36} \\ &\quad + (8 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (10 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} \\ &\quad + (11 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{210}{36} \approx 5,8333 \end{aligned}$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{210}{36}} \approx 2,4152$$

Streuungsmaß: Standardabweichung



x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Varianz σ^2

$$\sigma^2 = \text{Var}(X)$$

$$\begin{aligned} &= (2 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (6 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (8 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (10 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (12 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{70}{6} \approx 11,6667 \end{aligned}$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{70}{6}} \approx 3,4157$$

4.5

Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Aufgabe

Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?

水	☐ Geld	☐ Liebe	☐ Hund	☐ Wasser
目	☐ Ding	☐ Auge	☐ Katze	☐ See
木	☐ Abstand	☐ Mund	☐ Pferd	☐ Baum
羊	☐ Familie	☐ Ohr	☐ Schaf	☐ Blume
女	☐ Frau	☐ Respekt	☐ Hase	☐ Luft

T: Richtige Antwort (Treffer)

$$P(\textcolor{brown}{T}) = p = \frac{1}{4}$$

N: Falsche Antwort (Niete)

$$P(\textcolor{blue}{N}) = 1 - P(\textcolor{brown}{T}) = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Aufgabe

Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?

水 目 木 羊 女

Sind die **Modell-Annahmen** gerechtfertigt?

(1) Wahrscheinlichkeitsmodell

Laplace-Wahrscheinlichkeit, da – wegen des durch Unwissen erzwungenen Ratens – alle Kreuze gleichwahrscheinlich sind.

(2) Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Einzelfragen werden unabhängig voneinander beantwortet (unterschiedliche Zeichen).

(3) Trefferwahrscheinlichkeit p

Die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer ist bei jeder Frage gleich (unterschiedliche Zeichen & gleiche Anzahl von Auswahlantworten).

T: Richtige Antwort (Treffer)

$$P(\textcolor{brown}{T}) = p = \frac{1}{4}$$

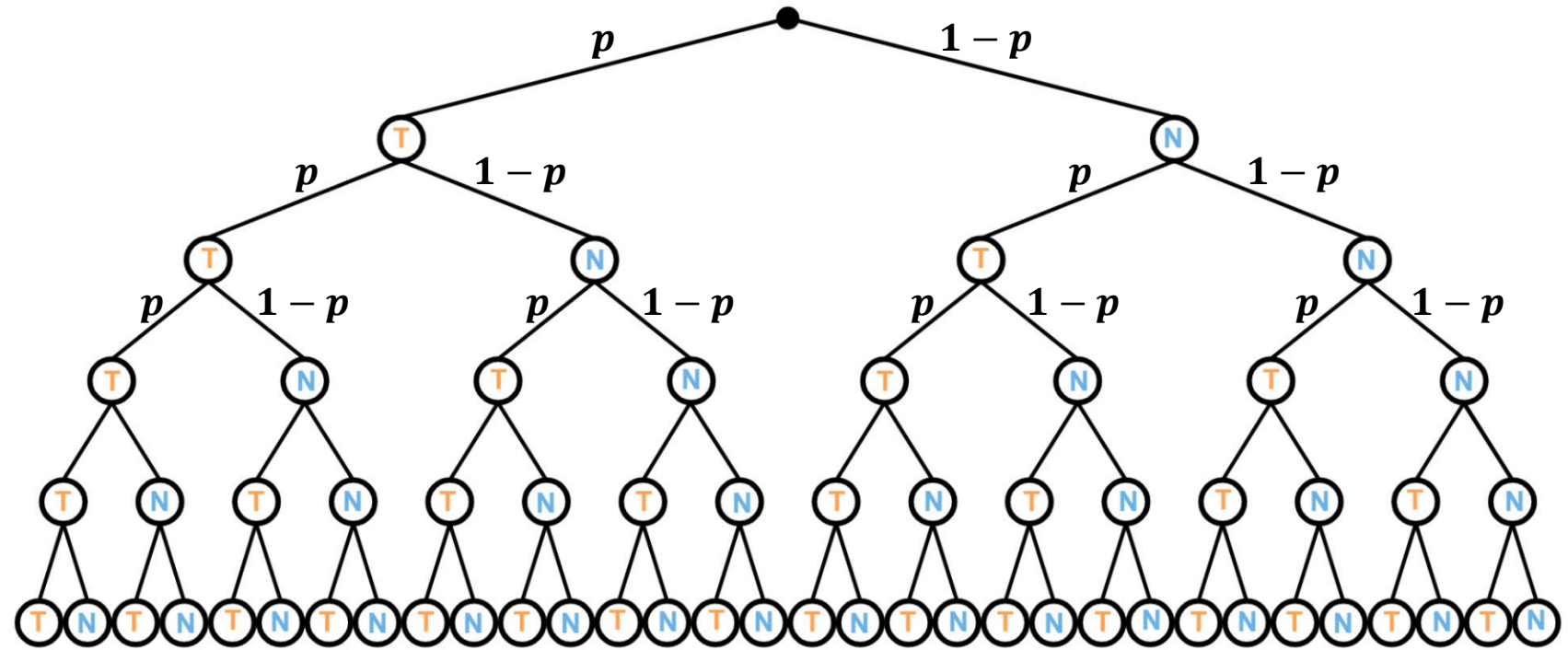
N: Falsche Antwort (Niete)

$$P(\textcolor{blue}{N}) = 1 - P(\textcolor{brown}{T}) = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Aufgabe

Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?

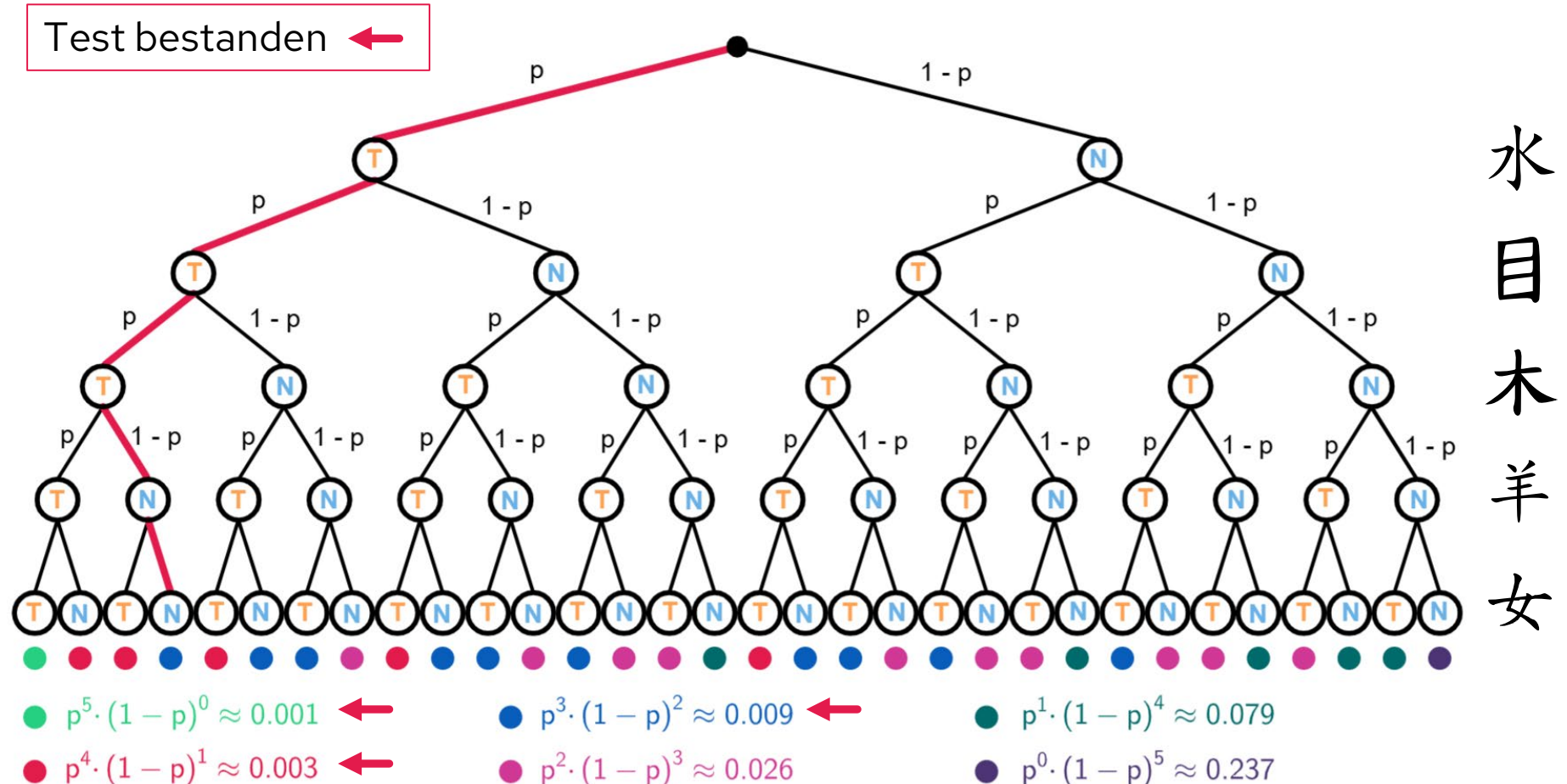


水
目
木
羊
女

Aufgabe

Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?



Der Test wurde bestanden, wenn für die Trefferanzahl k gilt: $k \geq 3$

Lösung: <https://www.geogebra.org/m/kvrn9uup>

Herkunft der chinesischen Schriftzeichen: https://de.wikipedia.org/wiki/Sechs_Kategorien_chinesischer_Schriftzeichen

Bernoulli-Experiment¹

- Ein Zufallsexperiment bei dem nur interessiert, ob ein bestimmter Ausgang vorliegt oder nicht, man also nur die beiden Ergebnisse „Treffer“ T oder „Niete“ N hat, nennt man **Bernoulli-Experiment**.
- Ein passender Ergebnisraum ist $\Omega = \{0,1\}$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $P(\{1\}) = p$ und der Nietenwahrscheinlichkeit $P(\{0\}) = 1 - p$.



Bernoulli-Kette: Ein n -stufiges Zufallsexperiment mit Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^n$, bei dem (für $i = 1, \dots, n$) die Ereignisse E_i : „Menge aller n -Tupel mit der 1 an der i -ten Stelle“ („Treffer in der i -ten Stufe des Experiments“)

- unabhängig sind und
 - die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(E_i) = p$ haben,
- heißt **Bernoulli-Kette** mit den Parametern n und p . Der Parameter n heißt Länge der Bernoulli-Kette.

Aufgabe: Ist die Voraussetzung für eine Bernoulli-Kette jeweils erfüllt?

- a) Eine Person, die bisher nicht Basketball gespielt hat, wirft zehnmal hintereinander auf einen Basketballkorb.
- b) Zehn zufällig gewählte Personen werfen je einmal auf einen Basketballkorb.
- c) Eine Person wirft während zehn Wochen immer Montags in der Pause einmal auf einen Basketballkorb.

Binomialverteilung

Herleitung: Wahrscheinlichkeit $B(n; p; k)$

Gesucht: Wahrscheinlichkeit für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n

$$B(n; p; k)$$

$$= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Summenregel:
Anzahl aller
Pfade mit
 k Treffern

Produktregel:
Wahrscheinlich-
keit eines Pfades
der Länge n mit
 k Treffern

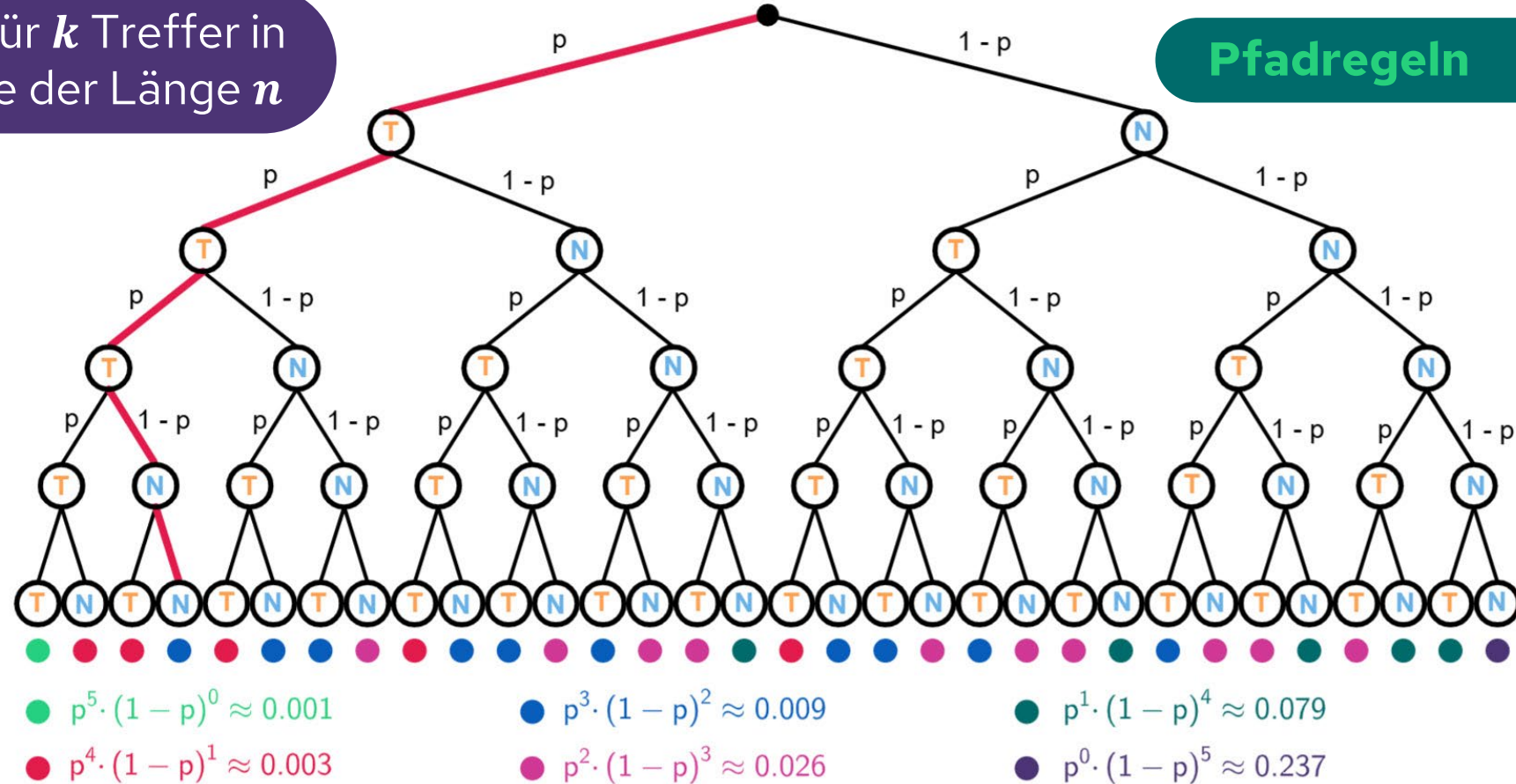
Länge der Kette: $n = 5$

Treffer: T

Trefferanzahl: $k = 3$

Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{4}$

Pfadregeln



Wahrscheinlichkeit
für $k = 3$ Treffer:

$$B\left(5; \frac{1}{4}; 3\right) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{3^2}{4^5} \approx 0,088$$

Satz: Trefferwahrscheinlichkeit in einer Bernoulli-Kette¹

Für ein Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p \in]0; 1[$ ist die Wahrscheinlichkeit $B(n; p; k)$ für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n gegeben durch ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$):

$$B(n; p; k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Beweisidee 

Definition: Binomialverteilung

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$B(n; p): k \mapsto B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

mit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $p \in]0; 1[$ heißt **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p .

- Eine Zufallsgröße X mit $P(X = k) = B(n; p; k)$ heißt binomial verteilt nach der Binomialverteilung $B(n; p)$.



Binomialverteilung mit GeoGebra

☐ w = false

BV = Binomial(n, p, w)
= 1

$p_{k,1} = \text{Binomial}(n, p, k, w)$
= 0.0879

$p_{k,2} = nCr(n, k) p^k (1 - p)^{n-k}$
= 0.0879

$\mu = \text{Summe}(i \text{ Binomial}(n, p, i, \text{false}), i, 1)$
= 1.25

$\sigma = \sqrt{n p (1 - p)}$
= 0.9682

☐ NV(x) = Normal(μ, σ, x, w)
= $\frac{e^{-\frac{(x-1.25)^2}{0.9682^2 \cdot 2}}}{|0.9682| \sqrt{2 \pi}}$

Verteilung Statistik

$\mu = 1.25 \sigma = 0.9682$

k	P(X = k)
0	0.2373
1	0.3955
2	0.2637
3	0.0879
4	0.0146
5	0.001

Verteilung: Binomial
Parameter n: 5
Parameter p: 0.25

☐ Kumuliert

Intervall: $P(3 \leq X) = 0.1035$

Aufgabe
Erkunden Sie Eigenschaften der Binomialverteilung anhand der GeoGebra-Datei.

Normalverteilung:
Gute Näherung für große n

Aufgabe: Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl (absolute Häufigkeit) k der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p .

- Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n ordnet die Zufallsvariable X_i dem i -ten Bernoulli-Experiment der Kette den Wert 0 für Niete und den Wert 1 für Treffer mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung zu:

x_i	0	1
$P(X_i = x_i)$	$1 - p$	p

- Die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ beschreibt also die Anzahl (absolute Häufigkeit) der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern n und p , wobei die X_i unabhängig sind.

- Da für die Erwartungswerte $E(X_i)$ gilt

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) \\ &= 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p \end{aligned}$$

folgt für den **Erwartungswert** $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &\stackrel{*}{=} E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ &= \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot p \end{aligned}$$

Satz: Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable „absolute Trefferhäufigkeit“ X
Für den **Erwartungswert** $E(X)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable „absolute Trefferhäufigkeit“ X gilt:

$$E(X) = n \cdot p$$

Satz: Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable „relative Trefferhäufigkeit“ h
Für den **Erwartungswert** $E(h)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable „relative Trefferhäufigkeit“ h gilt:

$$E(h) = \frac{E(X)}{n} = \frac{n \cdot p}{n} = p$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Standardabweichung für die Anzahl k der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p .

- Die Varianz der Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ lässt sich ebenfalls über die Varianzwerte der unabhängigen Zufallsgrößen X_i bestimmen:
- Mit $\mu_i = E(X_i) = p$ gilt für die Varianzen $\text{Var}(X_i)$:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_i) &= (0 - \mu_i)^2 \cdot P(X_i = 0) + (1 - \mu_i)^2 \cdot P(X_i = 1) \\ &= (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p \\ &= p^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p \\ &= p \cdot (1 - p) \cdot \underbrace{[p + (1 - p)]}_{=1} \\ &= p \cdot (1 - p)\end{aligned}$$

Daraus folgt für die **Varianz $\text{Var}(X)$** :

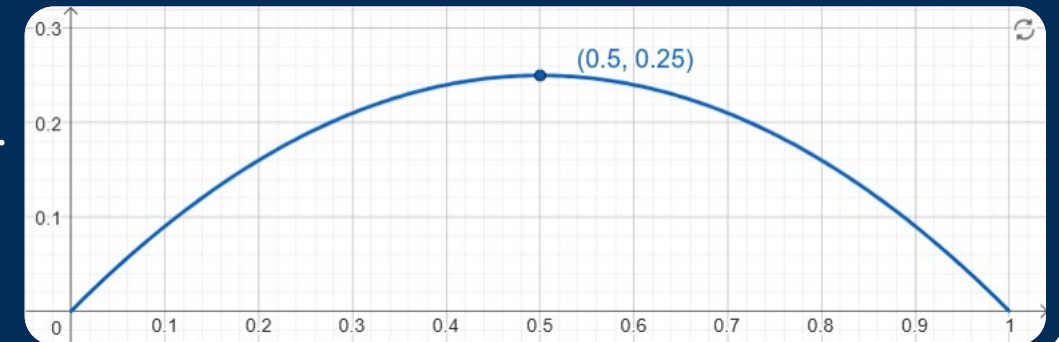
$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &\stackrel{*}{=} \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) \\ &= \underbrace{p \cdot (1 - p) + \dots + p \cdot (1 - p)}_{n \text{ Summanden}} \\ &= n \cdot p \cdot (1 - p) \\ \Rightarrow \sigma(X) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}\end{aligned}$$

Satz: Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable X

Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Bemerkung: Für die Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ einer Binomialverteilung lässt sich eine obere Abschätzung angeben, die unabhängig von p ist:

- Der Term $p \cdot (1 - p)$ unter der Wurzel kann wegen $0 \leq p \leq 1$ nicht größer als $\frac{1}{4}$ werden. Man sieht das, wenn man die Funktion $p \mapsto p \cdot (1 - p) = -p^2 + p$ im Definitionsbereich $0 \leq p \leq 1$ betrachtet.
- Der Graph dieser quadratischen Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
- Damit folgt:
$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \leq \sqrt{n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

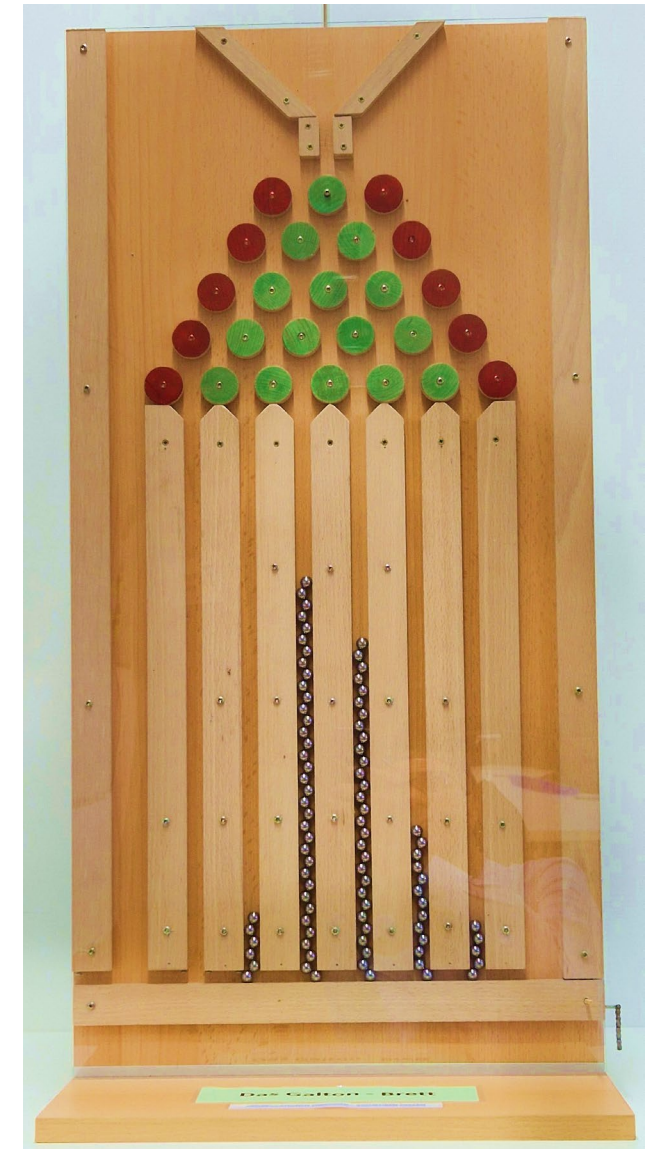
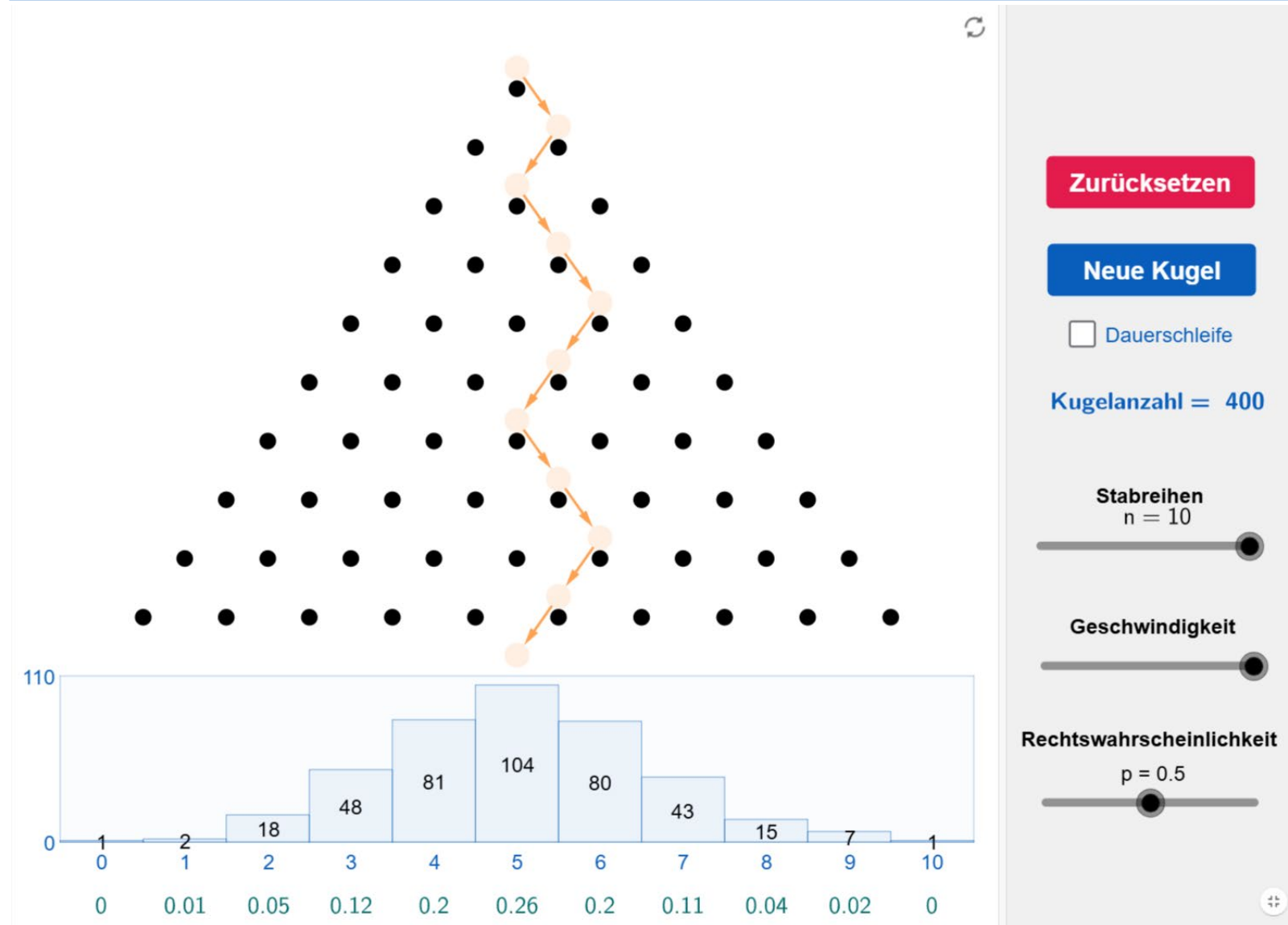


Satz: Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable X
Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt:

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

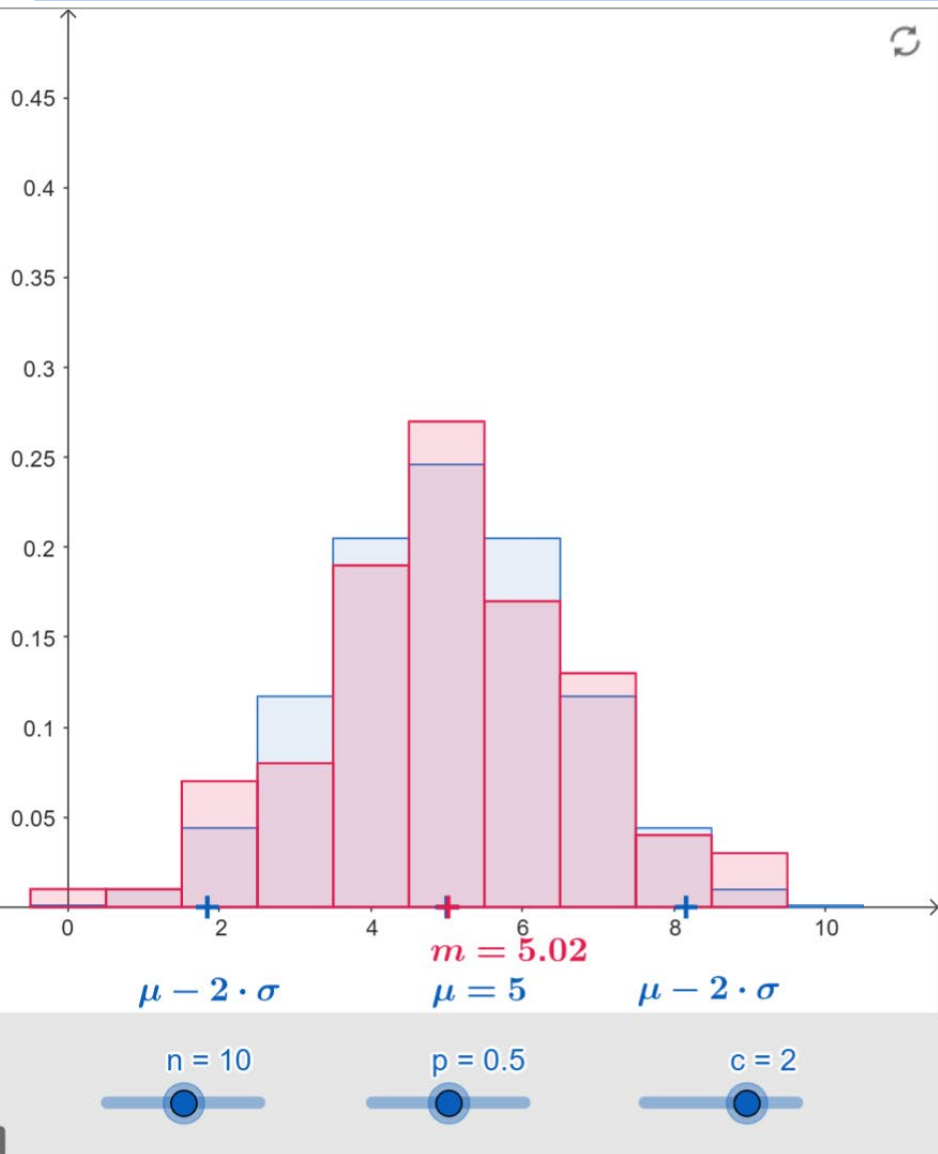
Galton-Brett

https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_all.html?locale=de

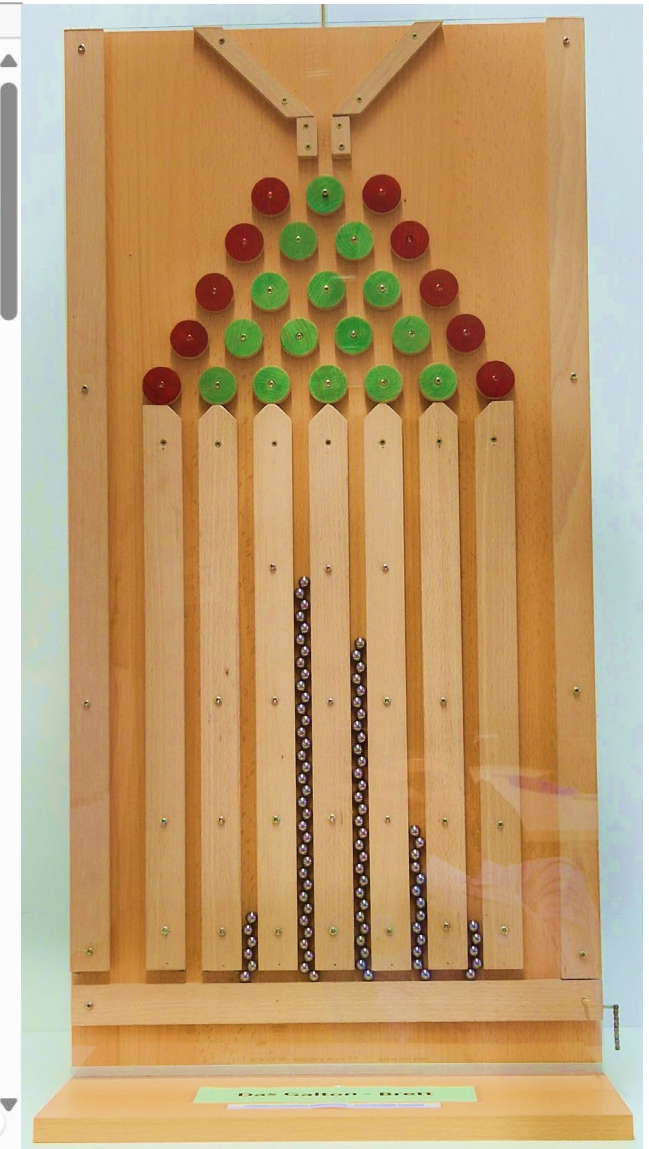


Binomialverteilung

Vergleich Modell ↔ Wirklichkeit



	A	B	C	D
1		Anzahl der Kugeln		
2		100		
3				
4	k	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	B(n,p)
5	0	1	0.01	0
6	1	1	0.01	0.01
7	2	7	0.07	0.04
8	3	8	0.08	0.12
9	4	19	0.19	0.21
10	5	27	0.27	0.25
11	6	17	0.17	0.21
12	7	13	0.13	0.12
13	8	4	0.04	0.04
14	9	3	0.03	0.01
15	10	0	0	0
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				



Bemerkung

- $P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das zum Wert x der Zufallsvariable X gehört.
- Sprechweise: „ $P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt.“
- Notation
$$P(X = x) := P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$$

Definition Verteilungsfunktion

Ist X eine Zufallsvariable, dann heißt
 $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], x \mapsto F(x)$ mit

$$\begin{aligned} F(x) &:= P(X \leq x) \\ &= P(\{X \leq x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X .

Definition Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ist X eine Zufallsvariable, dann heißt
 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], x \mapsto f(x)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &:= P(X = x) \\ &= P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

der Zufallsvariable X .

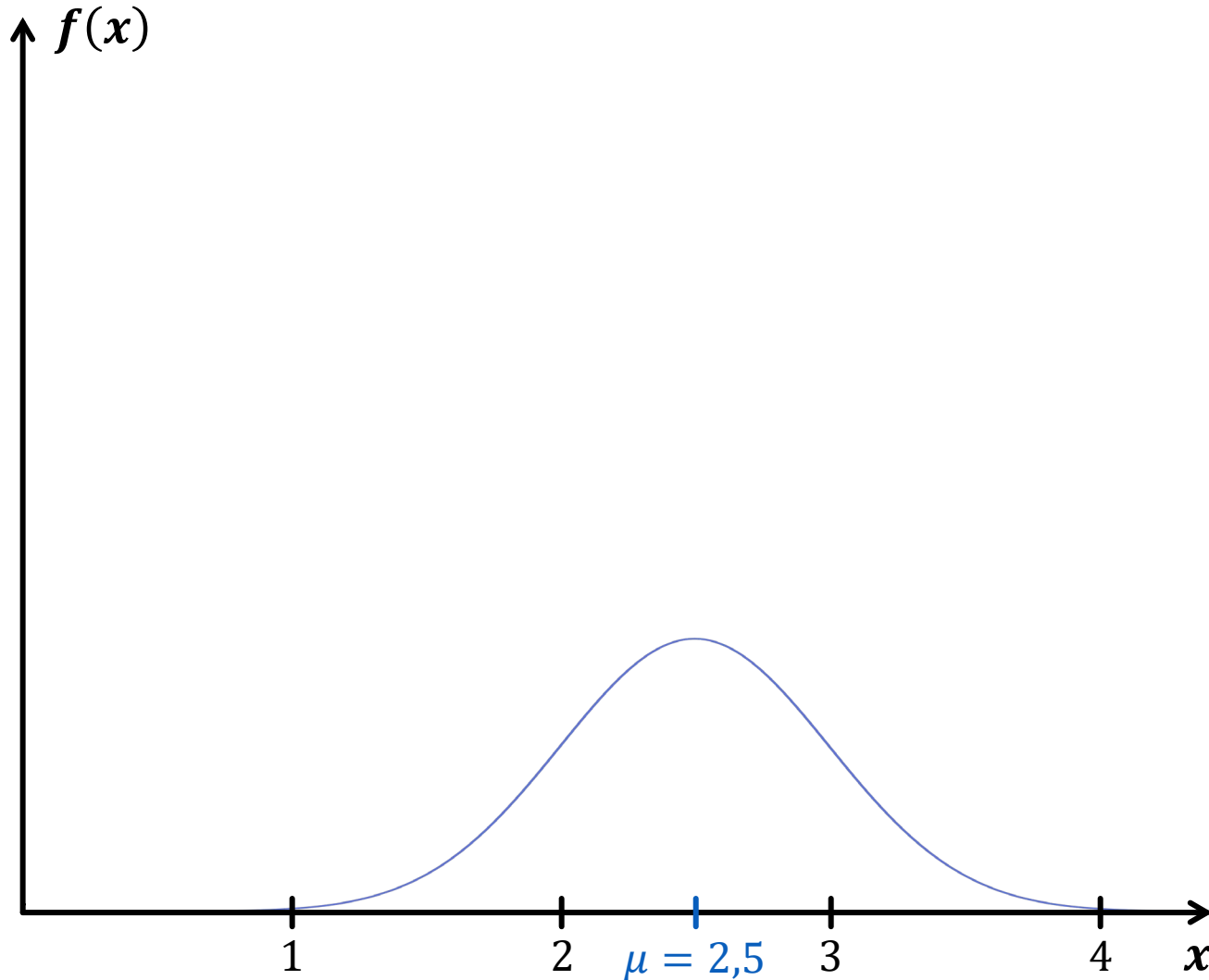
Bemerkung

Durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung werden die Wahrscheinlichkeiten so auf disjunkte Ereignisse E_1 bis E_n verteilt, dass gilt:

- (1) $E_1 \cup \dots \cup E_n = \Omega$
- (2) $P(E_1) + \dots + P(E_n) = 1$

4.5

Normalverteilung und Sigma-Regeln



Bemerkung

- Hier ist der Graph der Dichtefunktion f einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung, konkret einer Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit $\mu = 2,5$ und $\sigma = 0,5$ dargestellt.

- Für eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung f gilt:

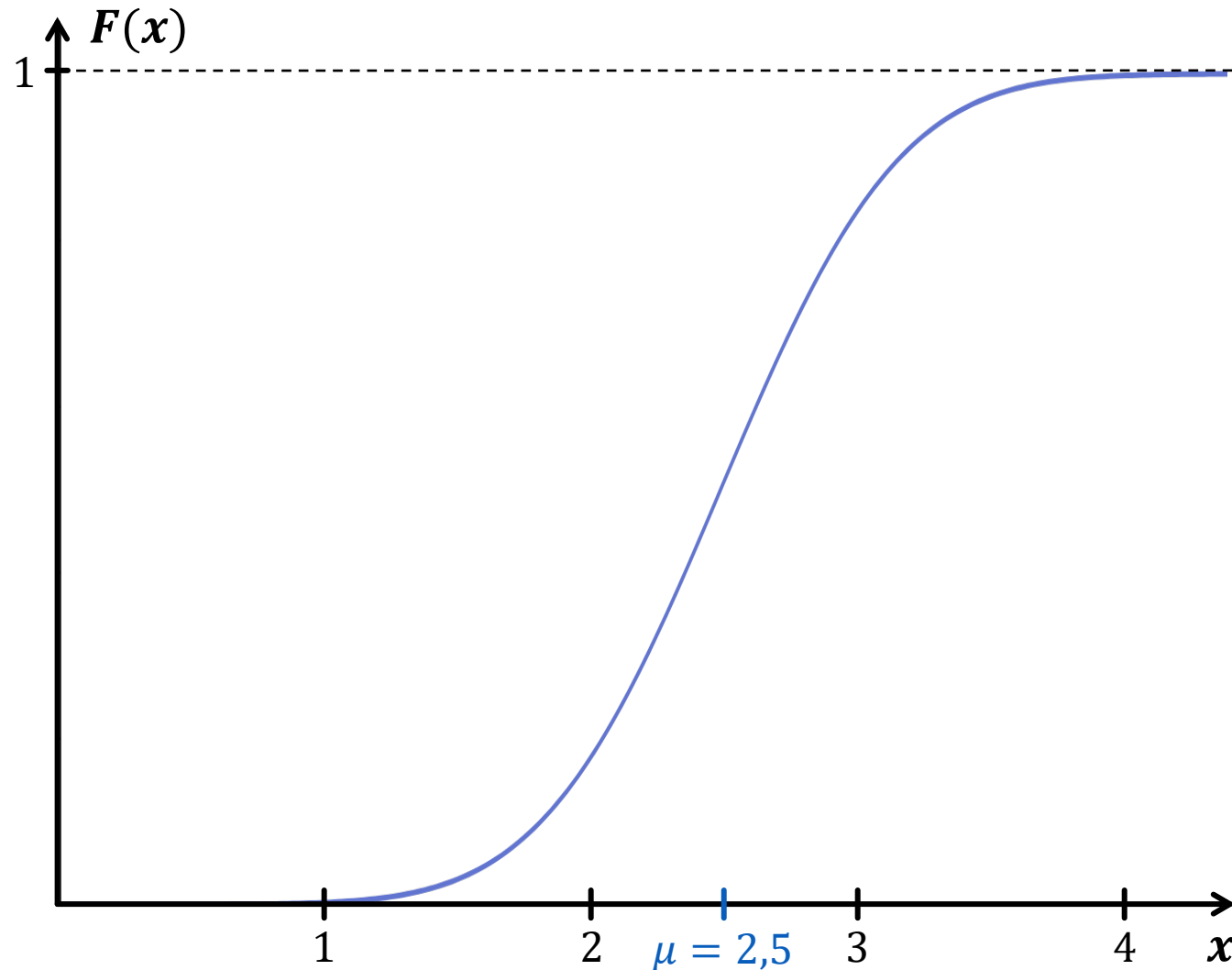
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Bemerkung

Eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt auch φ .

Unnötig!

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Bemerkung

- Hier ist der Graph der Verteilungsfunktion F einer Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit $\mu = 2,5$ und $\sigma = 0,5$ dargestellt.

- Für solche Verteilungsfunktionen F gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Bemerkung

Die Verteilungsfunktion zur Normalverteilung φ mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt auch Φ .

Unnötig! $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Normalverteilung mit GeoGebra

☐ ☐ w = false

NV(x) = Normal(μ, σ, x, w)

$$= \frac{e^{\frac{-(x-3)^2}{1^2 \cdot 2}}}{|1| \sqrt{2\pi}}$$

$$a = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} NV(x) dx$$

$$= 0.6827$$

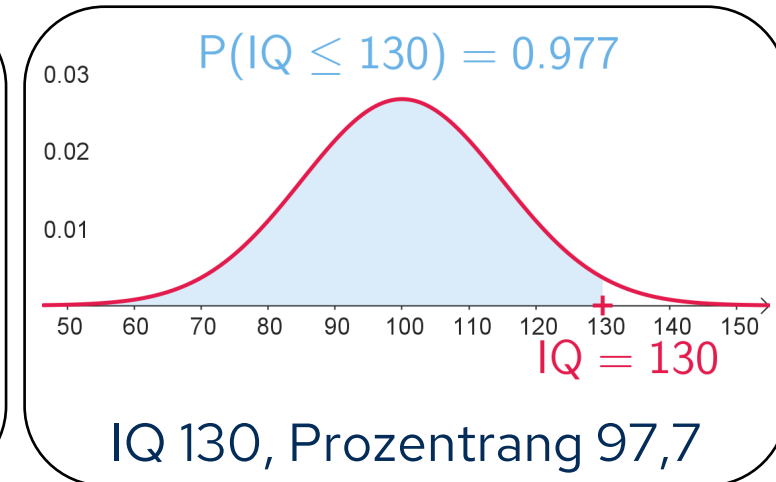
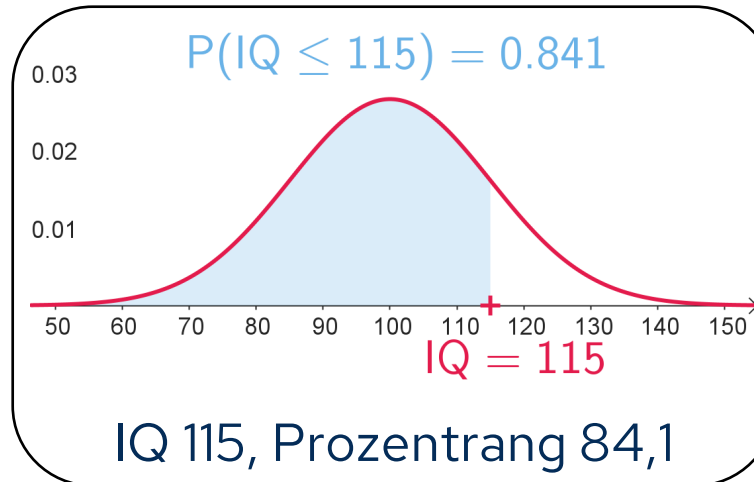
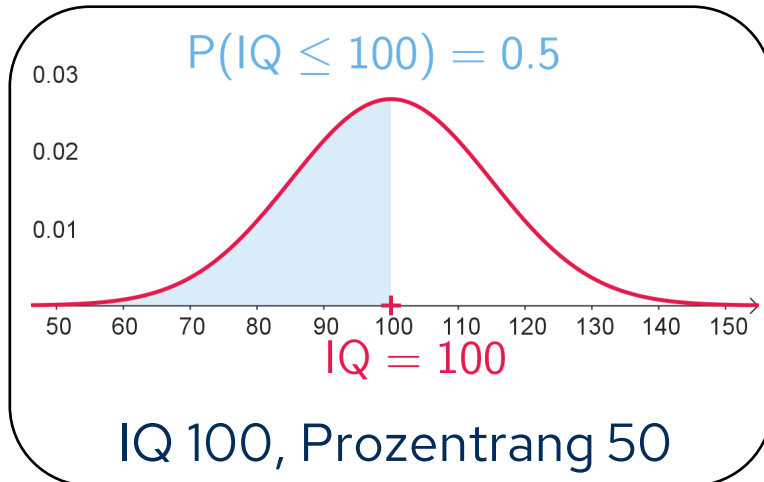
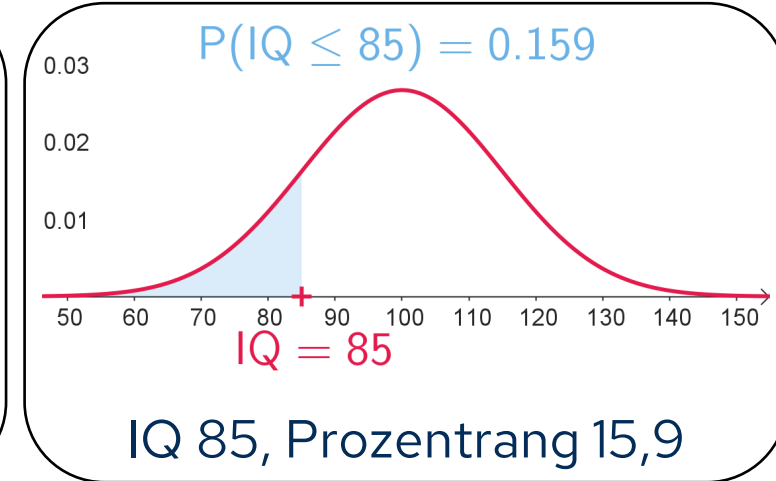
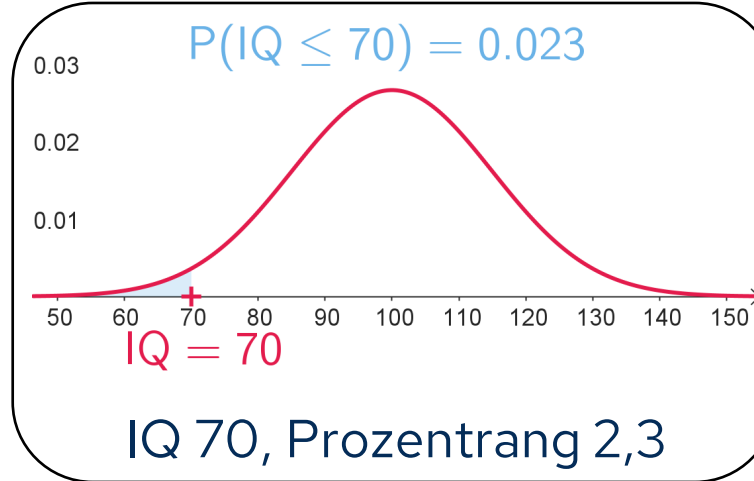
$$b = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} NV(x) dx$$

$$= 0.9545$$

Aufgabe: Erkunden Sie Eigenschaften der Normalverteilung anhand der GeoGebra-Datei.

Exkurs: Intelligenztests

Bei Intelligenztests, die eine IQ-Norm verwenden, wird anhand der Verteilung der Testergebnisse einer großen Stichprobe der Normwert unter **Annahme einer Normalverteilung der Intelligenz** ermittelt und in eine Skala mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ und der Standardabweichung $\sigma = 15$ umgerechnet.



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.math.rptu.de
mategnu.de



RPTU