

MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie
an **G**rundvorstellungen orientiert
nachhaltig **u**nterrichten

Wahrscheinlichkeiten
durch Kernideen verstehen

Prof. Dr. Jürgen Roth

14.11.2026 MaTeGnu – K1 – M4, Bad Kreuznach

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

KMK-Bildungsstandards

Allgemeine Hochschulreife: Stochastik

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Leitidee L2: Messen

- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten

Leitidee L4: Funktionaler Zusammenhang

- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

Leitidee L5: Daten und Zufall (Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau)

- exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen
- die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Berlin

KMK-Bildungsstandards

Allgemeine Hochschulreife: Stochastik

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Leitidee L5: Daten und Zufall (Erhöhtes Anforderungsniveau)

- für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen (B1)
- Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (B2)
- exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Berlin

Lehrplanalternativen RLP

Grundkurs
(ca. 42 Stunden)

Stochastik 1

+ wahlweise

Stochastik 2 – B1
Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Stochastik 2 – B2
Testen von Hypothesen

Leistungskurs
(ca. 70 Stunden)

Stochastik

Kernideen der Stochastik

Kernidee
Konditionale Denkfigur

„Wenn … , dann …"-Strukturen

Beispiel:
Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?

Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die …

- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Globale Muster in Daten …

- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten

„Gute" Zufallsstichproben

- Beschaffenheit und Generierung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee
Verteilungen

Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

Stochastik-Curriculum

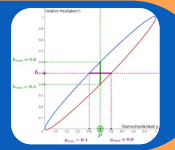
Sekundarstufen I und II

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Beschreibende Statistik

- Erhebung – Daten sammeln
- Graphische Darstellungsformen
- Mittelwerte & Streuungsmaße

Beurteilende Statistik

- Hypothesentest
- Konfidenzintervall
- Verteilungsfunktion
- Prognose-intervall 
- Ellipsen-diagramm 
- Normalverteilung
  Näherung für große n
- Binomialverteilung
- Wahrscheinlich-keitsverteilung
- Zufallsvariable
- Erwartungswert
- Standard-abweichung

Wahrscheinlich-keitsrechnung

- (Mehrstufige) Zufallsexperimente
- Stoch. (Un-)Abhängigkeit
- Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeit

RPTU



RPTU
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Wahrscheinlichkeiten
durch Kernideen verstehen

1. Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
2. Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramme und Pfadregeln
3. Bedingte Wahrscheinlichkeit
4. Verteilungen: Binomialverteilung & Co
5. Beurteilende Statistik

mategnu.de

RPTU

MaTeGnu

1 Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Lehrplan RLP: Leistungskurs

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
2.	Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	■ Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. ■ Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. ■ Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3.	Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen begründen und anwenden (5.02g, 5.03g)	z.B. ■ Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit d. Gegenereignisses, ■ Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge von Ereignissen
4.	Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallszahlen simulieren und die Ergebnisse der Simulation interpretieren (5.05g)	■ Für die Durchführung der Simulationen sollte der Computer benutzt werden. ■ Die SuS sollen erfahren, dass Simulationen dort sinnvoll eingesetzt werden, wo eine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung nicht möglich oder zu komplex ist. ■ Im Unterricht können durch Simulationen auch wahrscheinlichkeits-theoretische Aussagen und Formeln vorbereitet oder bestätigt werden.

 MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), S. 53f

Lehrplan RLP: Grundkurs

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
2.	Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	■ Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. ■ Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. ■ Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3.	Einfache Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen anwenden (5.02g)	z.B. ■ Pfadregeln (Summe, Produkt), ■ Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

MaTeGnu

1.1

Kernidee

Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Kernideen der Stochastik

Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die …
- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

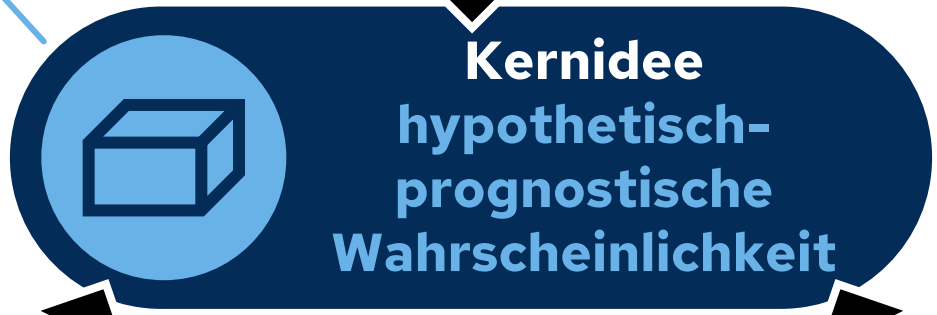
„Gute" Zufallsstichproben
- Beschaffenheit und Generierung



Kernidee
Konditionale Denkfigur

„Wenn … , dann …"-Strukturen

Beispiel:
Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?



Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Globale Muster in Daten …
- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten



Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten



Kernidee
Verteilungen

Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

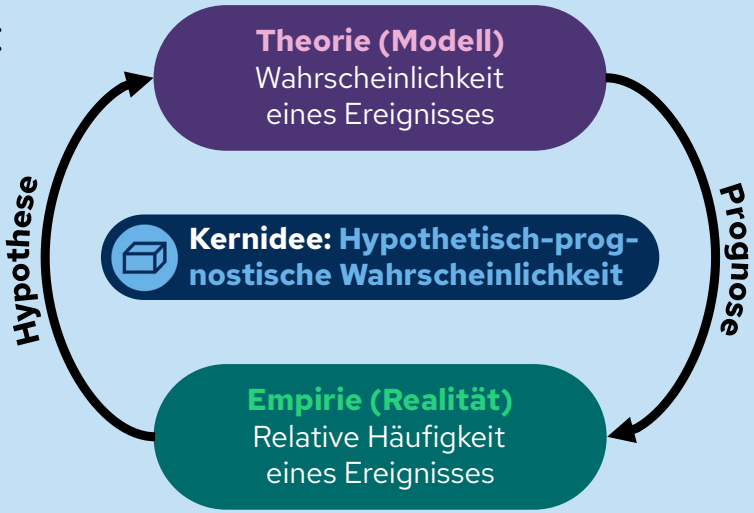
Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Kernidee
Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die
- ... relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- ... bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

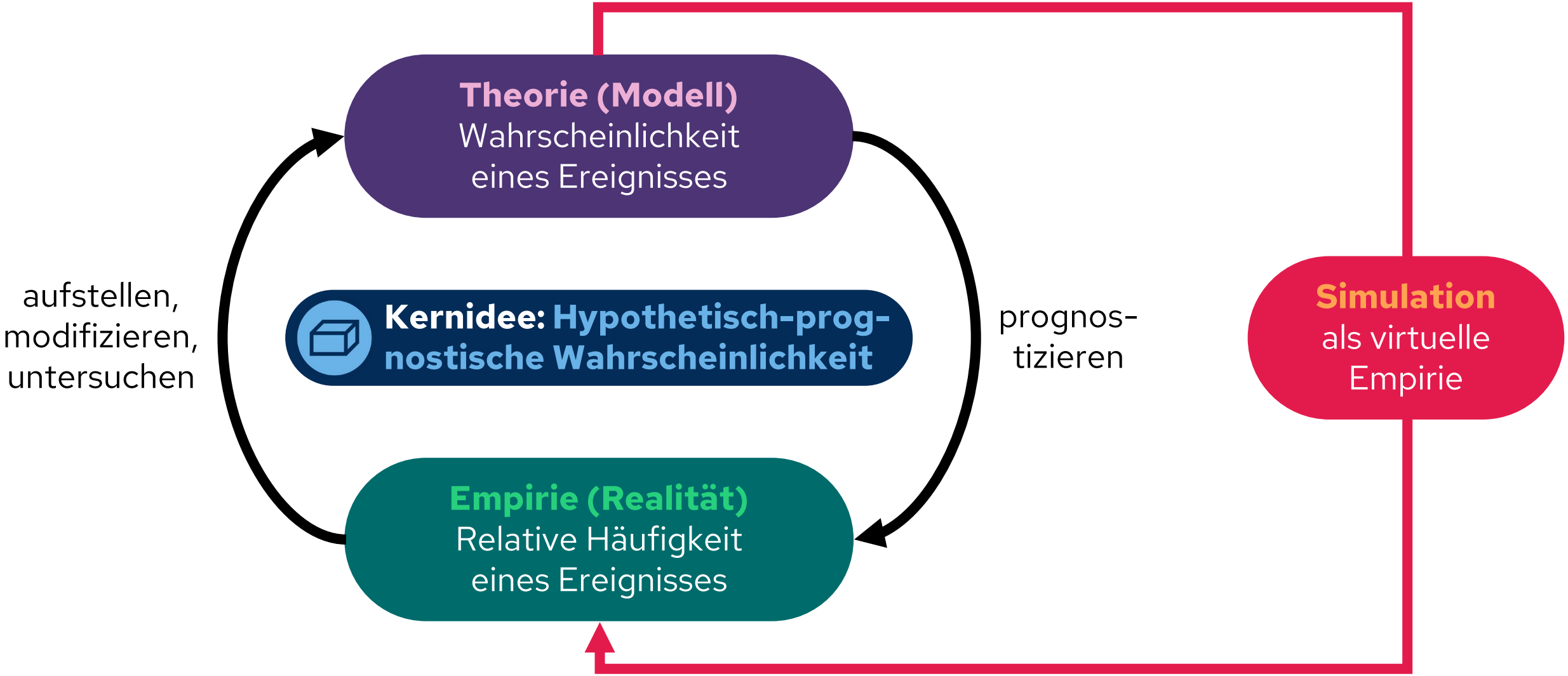
Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Diese Kernidee setzt Wahrscheinlichkeiten (Modelle) und relativen Häufigkeiten (Realität) durch zwei Perspektiven in Beziehung zueinander:
  - **Prognostisch:**
    Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die vorhersagen, um welchen Wert relative Häufigkeiten bei mehrfacher Versuchswiederholung in der Realität zufallsabhängig schwanken werden.
  - **Hypothetisch:**
    Modelle können angezweifelt und modifiziert werden, wenn sie die Realität bei mehrfacher Versuchswiederholung nicht gut abbilden.
- Diese Kernidee betont damit den Modellcharakter von Wahrscheinlichkeiten und die Tatsache, dass Modelle sich an der Realität messen lassen müssen.



Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit



Eichler, A. (2014). Simulation als Bindeglied zwischen der empirischen Welt der Daten und der theoretischen Welt des Zufalls. In T. Wassong et al. (Hrsg.). Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen (S. 251-265), Springer.
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Zugänge zur Wahrscheinlichkeit

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit



Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

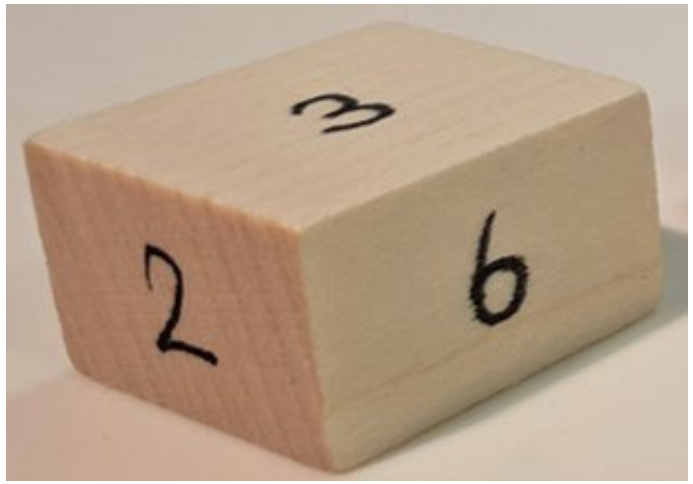
- Subjektive Wahrscheinlichkeit
- Frequentistische Wahrscheinlichkeit
- Laplace-Wahrscheinlichkeit
- Axiomatische Wahrscheinlichkeit

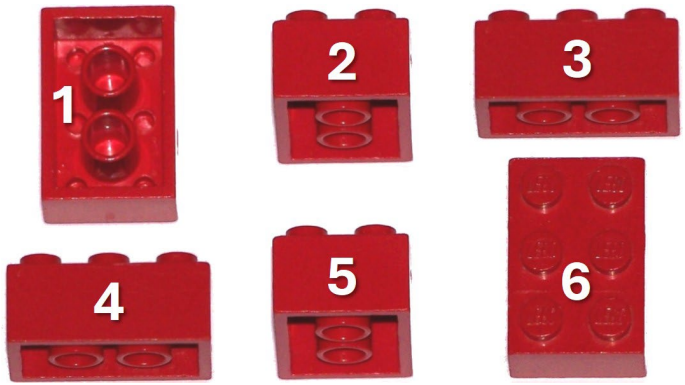
MaTeGnu

1.2 Quader-„Würfel“

Quader-„Würfel“

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit





1 Hypothesen aufstellen
Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen schätzen und tabellarisch festhalten.

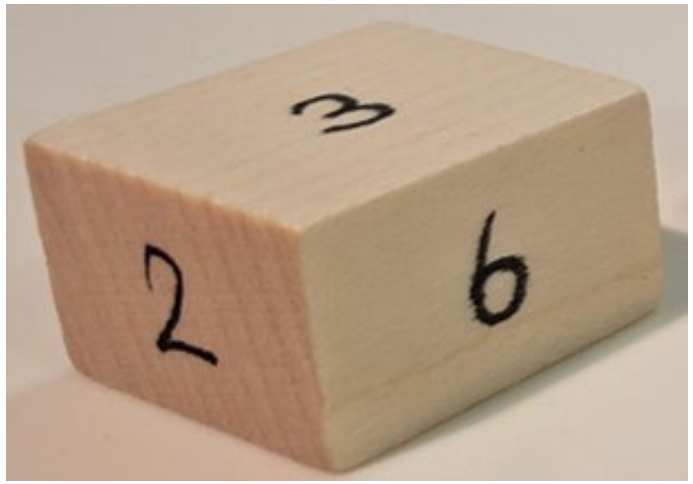
2 Experimentieren
Den Quader-“Würfel“ 100-mal werfen und die Ergebnisse zusammentragen.

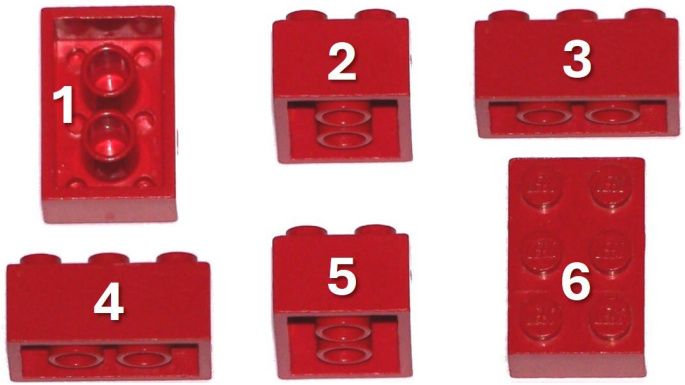
3 Simulieren
Wahrscheinlichkeitsmodell festlegen und in Simulation übertragen. Lange Versuchsreihen wiederholt simulieren.

4 Reflektieren
Zusammenstellen und diskutieren der Erkenntnisse aus Hypothesen, Experimenten und Simulation.

Quader-„Würfel“

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit





1 Hypothesen aufstellen

Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen schätzen und tabellarisch festhalten.

Aufgabe

Sehen Sie sich den Quader-„Würfel“ genau an und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten der 6 Augenzahlen.

Achtung: Nicht würfeln, nur schätzen!

Hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilung

Mögliche Überlegungen

- Gegenseiten haben gleiche Wahrscheinlichkeiten (ggf. abhängig von der unten liegenden Masse).
- Größere Seiten haben größere Wahrscheinlichkeiten.
- Alle Wahrscheinlichkeiten addieren sich zu 100% (bzw. 1).

Quader-„Würfel“

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Arbeitsblatt MaTeGnu **Sechsseitiges Zufallsgerät: Versuchsauswertung**

	1			2			3			4			5			6		
n	$H_{100}(\{1\})$	$H(\{1\})$	$h(\{1\})$	$H_{100}(\{2\})$	$H(\{2\})$	$h(\{2\})$	$H_{100}(\{3\})$	$H(\{3\})$	$h(\{3\})$	$H_{100}(\{4\})$	$H(\{4\})$	$h(\{4\})$	$H_{100}(\{5\})$	$H(\{5\})$	$h(\{5\})$	$H_{100}(\{6\})$	$H(\{6\})$	$h(\{6\})$
100		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%		0	0,0%
200																		
300																		
400																		
500																		
600																		
700																		
800																		
900																		
1000																		
1100																		
1200																		
1300																		
1400																		
1500																		
1600																		
1700																		
1800																		
1900																		
2000																		

H_{100}: absolute Häufigkeit bei 100 Versuchen | H: summierte absolute Häufigkeit | h = H / n: relative Häufigkeit

Datentabelle | Diagramm

2 Experimentieren

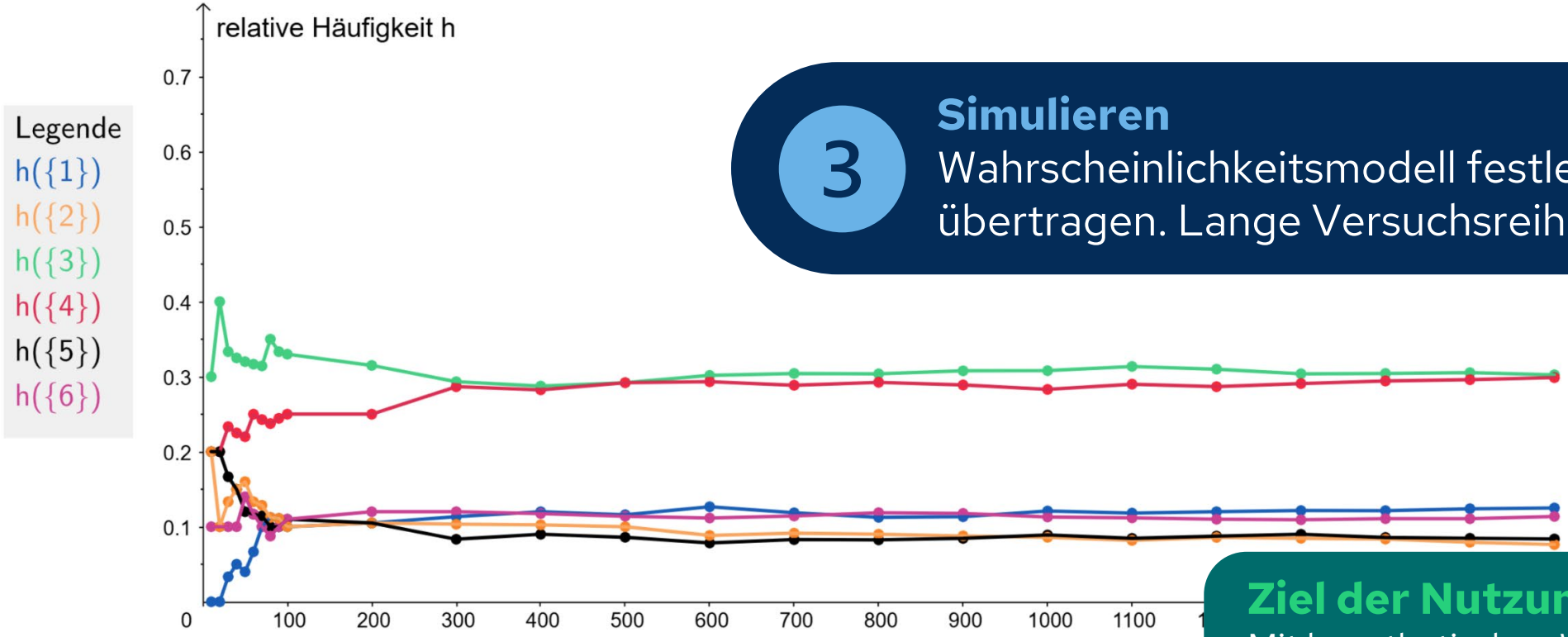
Den Quader-“Würfel“ 100-mal werfen und die Ergebnisse zusammentragen.

Aufgabe

Würfeln Sie 100-mal mit dem Riemer-Quader und halten Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle fest.

Quader-„Würfel“

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit



3 Simulieren

Wahrscheinlichkeitsmodell festlegen und in Simulation übertragen. Lange Versuchsreihen wiederholt simulieren.

P({1}) = 0.11 P({4}) = 0.31

P({2}) = 0.08 P({5}) = 0.08

P({3}) = 0.31 P({6}) = 0.11

Anzahl der Würfe: 1600

Neu Würfeln

Liniendiagramme

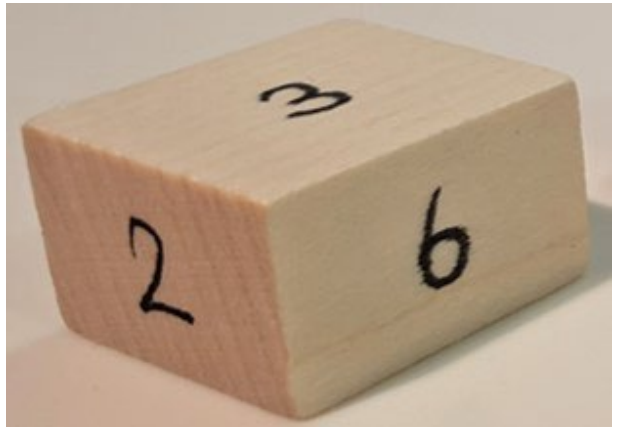
Ziel der Nutzung der Simulation

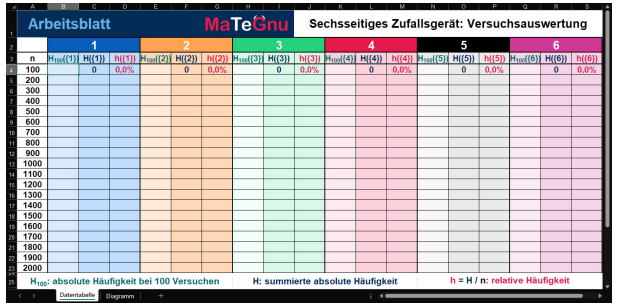
Mit hypothetischen Wahrscheinlichkeiten sehr lange Versuchsreihen häufig hintereinander simulieren, um

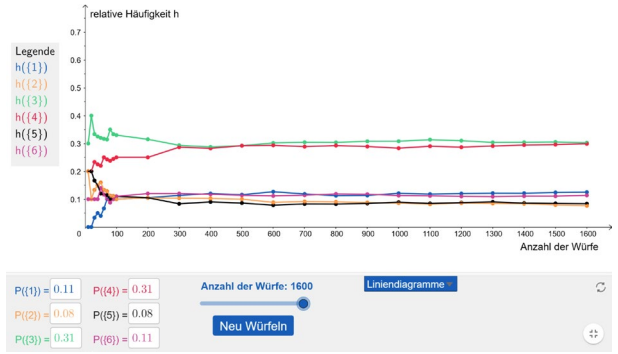
- die zufallsbedingten Schwankungen der Versuchsausgänge (relative Häufigkeiten) und,
- bei sehr vielen Versuchsdurchführungen, das „Einpendeln“ der relativen Häufigkeit, um einen festen Wert zu erfahren (**empirisches Gesetz der großen Zahlen**).

Quader-„Würfel“

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit







https://www.geogebra.org/mwbmhsnba#material/m5vfbkj3

4 Reflektieren

Zusammenstellen und diskutieren der Erkenntnisse aus Hypothesen, Experimenten und Simulation.

Wahrscheinlichkeiten ...

- sagen relative Häufigkeiten auf lange Sicht voraus.
- sind gut gewählt, wenn die (durch Zufallseinflüsse schwankenden) relativen Häufigkeiten etwa gleich oft über und unter der Wahrscheinlichkeit liegen (zumindest bei nicht zu kleinen oder großen Wahrscheinlichkeiten).

Wichtige Aspekte

- Unterschiede zwischen absoluter und relativer Häufigkeit sowie zwischen relativer Häufigkeit & Wahrscheinlichkeit herausarbeiten.
- Wahrscheinlichkeiten sind **nicht** Grenzwerte relativer Häufigkeiten im analytischen Sinn.
- Wahrscheinlichkeiten sind **Modelle** für die Realität.

RPTU

MaTeGnu

1.3 Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiele

- Die Wahrscheinlichkeit für Regen ist **unabhängig** von unseren Wünschen.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem Regenschirm aus dem Haus gehen ist **abhängig** von der Wettervorhersage.

Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B sind (stochastisch) unabhängig, wenn

- sie sich in Hinblick auf die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens nicht beeinflussen.
- $P(A) = P(A|B)$ bzw. $P(B) = P(B|A)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen **(stochastisch) unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

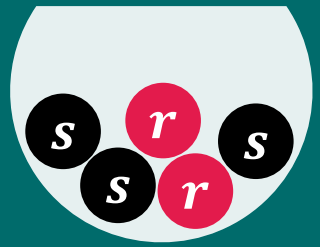
Wiesner, P. & Binder, K. (2024). Stochastische Unabhängigkeit: Die Rolle der gewählten Definition und verschiedener Visualisierungen. *Stochastik in der Schule, 44*(3), 21-29
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Urnenexperiment

Aus einer Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln wird zweimal nacheinander eine Kugel gezogen. Vor jedem Zug wird sorgfältig gemischt.



Ziehen mit Zurücklegen

Legt man die Kugel nach dem ersten Ziehen wieder zurück, so sind die Ereignisse

- S_1: „Schwarz beim ersten Zug“ und
- S_2: „Schwarz beim zweiten Zug“

voneinander **unabhängig**.

Ziehen ohne Zurücklegen

Legt man die Kugel nach dem ersten Ziehen nicht zurück, so sind die Ereignisse

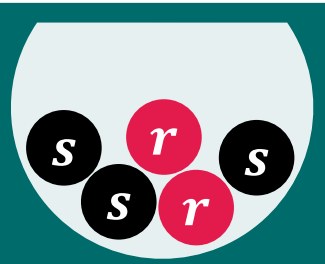
- S_1: „Schwarz beim ersten Zug“ und
- S_2: „Schwarz beim zweiten Zug“

voneinander **abhängig**.

Hinweis: Zeichnen Sie Baumdiagramme, um die Unterschiede zu sehen!

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

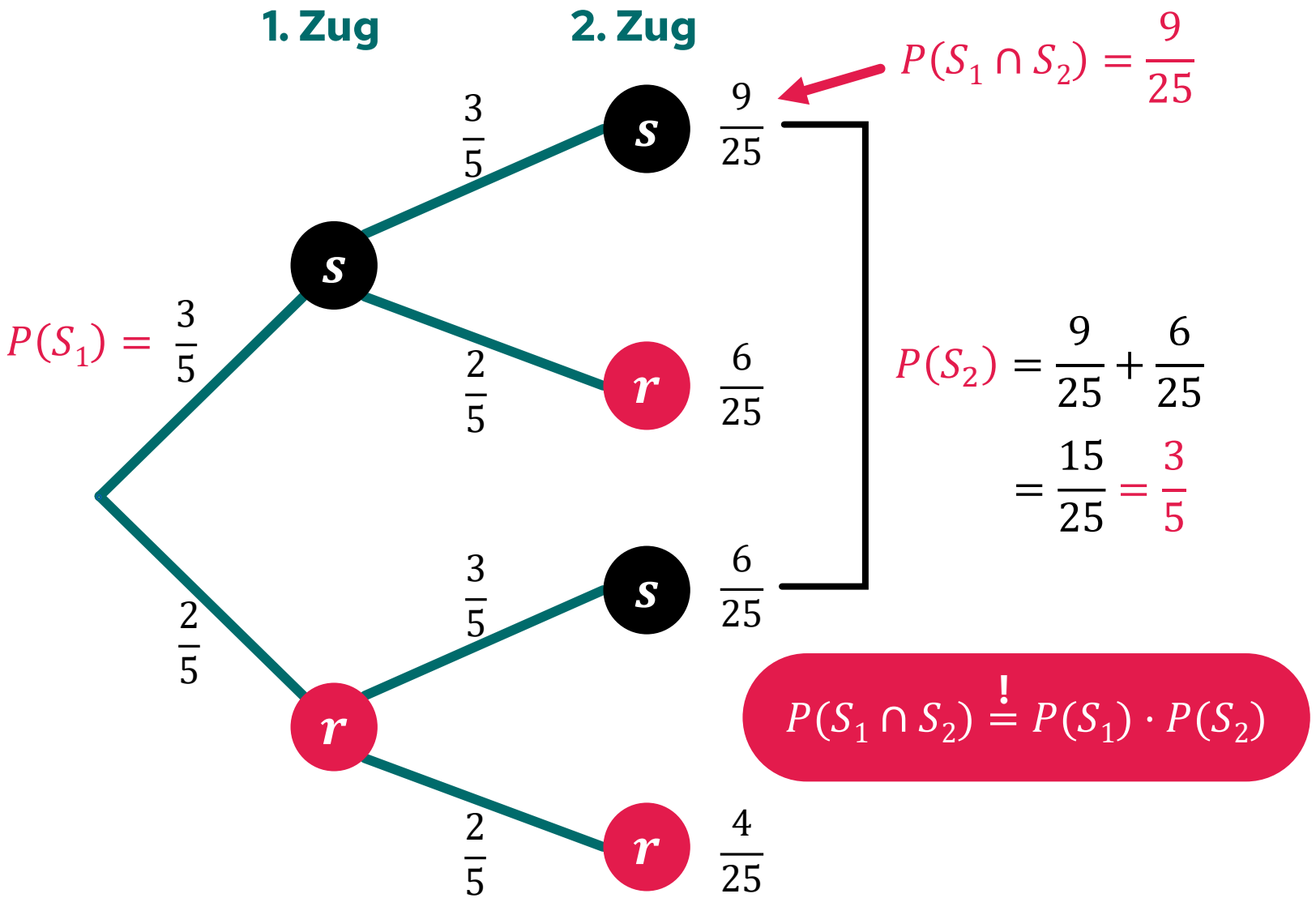
Stochastische Unabhängigkeit
Ziehen mit Zurücklegen



S_1 Ereignis: „Schwarz beim ersten Zug“

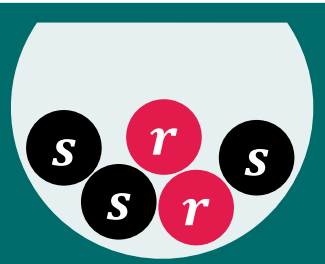
S_2 Ereignis: „Schwarz beim zweiten Zug“

$S_1 \cap S_2$ Ereignis: „Schwarz beim ersten und beim zweiten Zug“



Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

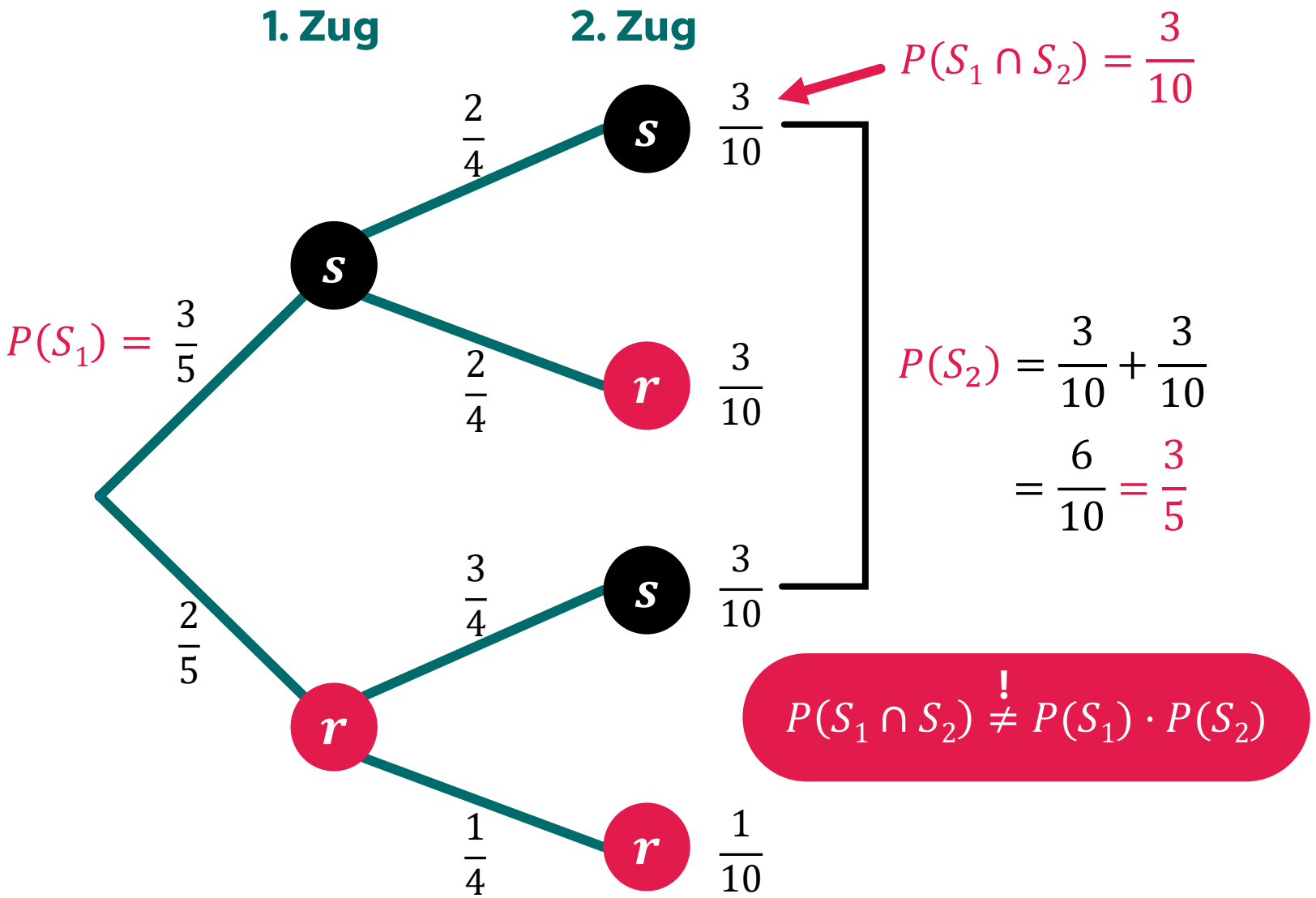
Stochastische Abhängigkeit
Ziehen ohne Zurücklegen



S_1 Ereignis: „Schwarz beim ersten Zug“

S_2 Ereignis: „Schwarz beim zweiten Zug“

$S_1 \cap S_2$ Ereignis: „Schwarz beim ersten und beim zweiten Zug“



Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

Zufallsexperiment

Es wird einmal mit einem fairen Würfel gewürfelt.

Dabei interessieren folgende Ergebnisse bzgl. der Augenzahl:

X „Gerade Zahl“	
2	4
3	6
5	1

Y „Zahl größer als 2“	
2	4
3	6
5	1

Z „Primzahl“	
2	4
3	6
5	1

Aufgabe

Wie kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass

- X und Y,
- Y und Z bzw.
- X und Z

$$P(X \cap Y) \overset{?}{=} P(X) \cdot P(Y)$$

gleichzeitig eintreten? Gesucht sind also die Wahrscheinlichkeiten $P(X \cap Y)$, $P(Y \cap Z)$ und $P(X \cap Z)$.



Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$X \cap Y$	Y	$\overline{Y}$
	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
X	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\overline{X}$	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

$X \cap Y$	$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(\overline{Y}) = \frac{1}{3}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Y) = \frac{1}{3}$ $= P(X) \cdot P(Y)$	$P(X \cap \overline{Y}) = \frac{1}{6}$
$P(\overline{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{X} \cap Y) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{X} \cap \overline{Y}) = \frac{1}{6}$

X: „Gerade Zahl“

unabhängig

Y: „Zahl größer als 2“

Z: „Primzahl“

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Tomlinson, S. & Quinn, R. (1998). Bedingte Wahrscheinlichkeit Verstehen. *Stochastik in der Schule, 18*(3), 27-40

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$Y \cap Z$	Z	$\overline{Z}$
	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
Y	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\overline{Y}$	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

$Y \cap Z$	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(Y \cap Z) = \frac{1}{3}$ $= P(Y) \cdot P(Z)$	$P(Y \cap \overline{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\overline{Y}) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{Y} \cap Z) = \frac{1}{6}$	$P(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = \frac{1}{6}$

X: „Gerade Zahl“

Y: „Zahl größer als 2“

unabhängig

Z: „Primzahl“

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Tomlinson, S. & Quinn, R. (1998). Bedingte Wahrscheinlichkeit Verstehen. *Stochastik in der Schule, 18*(3), 27-40

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$X \cap Z$	Z	$\overline{Z}$
	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
X	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\overline{X}$	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

$X \cap Z$	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Z) = \frac{1}{6}$ $\neq P(X) \cdot P(Z)$	$P(X \cap \overline{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\overline{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{X} \cap Z) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{X} \cap \overline{Z}) = \frac{1}{6}$

X: „Gerade Zahl“

abhängig

Y: „Zahl größer als 2“

Z: „Primzahl“

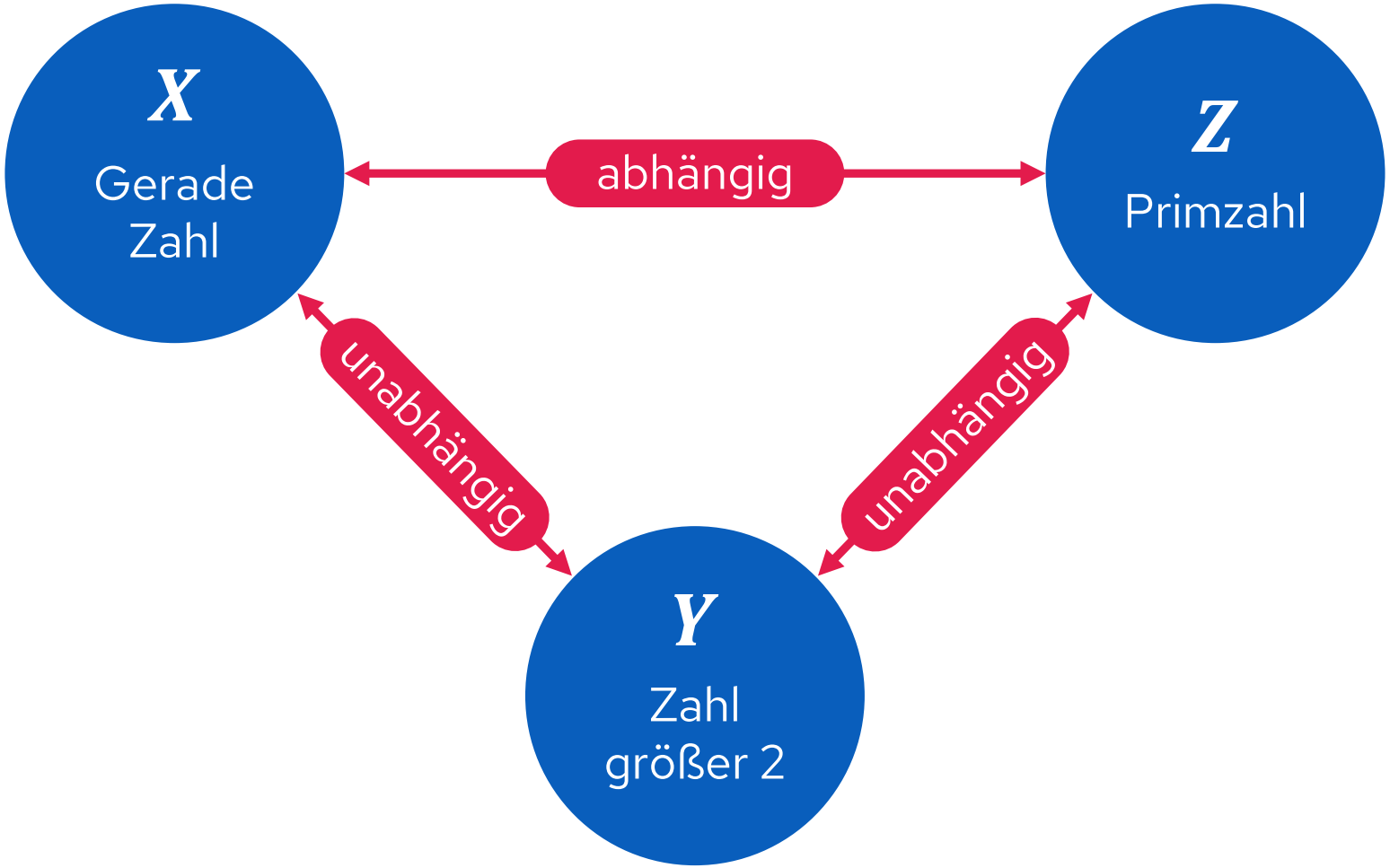
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

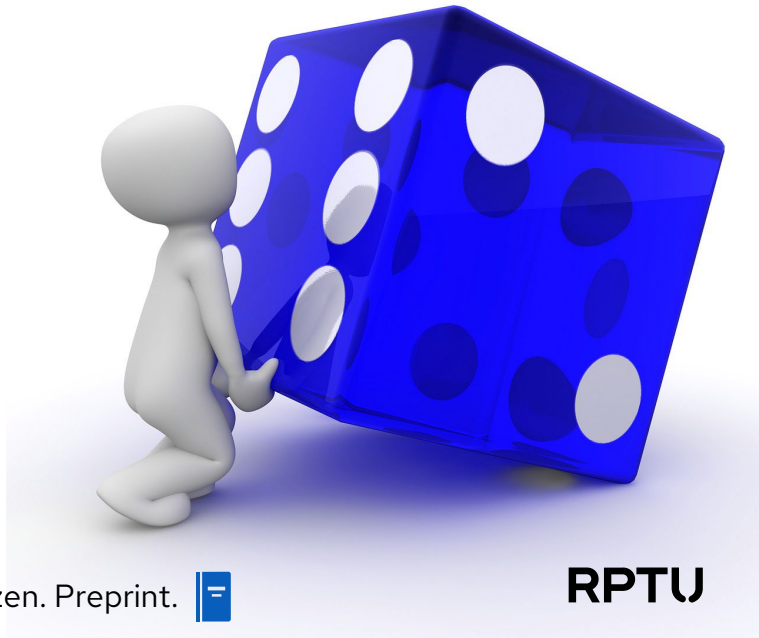
Tomlinson, S. & Quinn, R. (1998). Bedingte Wahrscheinlichkeit Verstehen. *Stochastik in der Schule, 18*(3), 27-40

Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel







Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

MaTeGnu

1.4

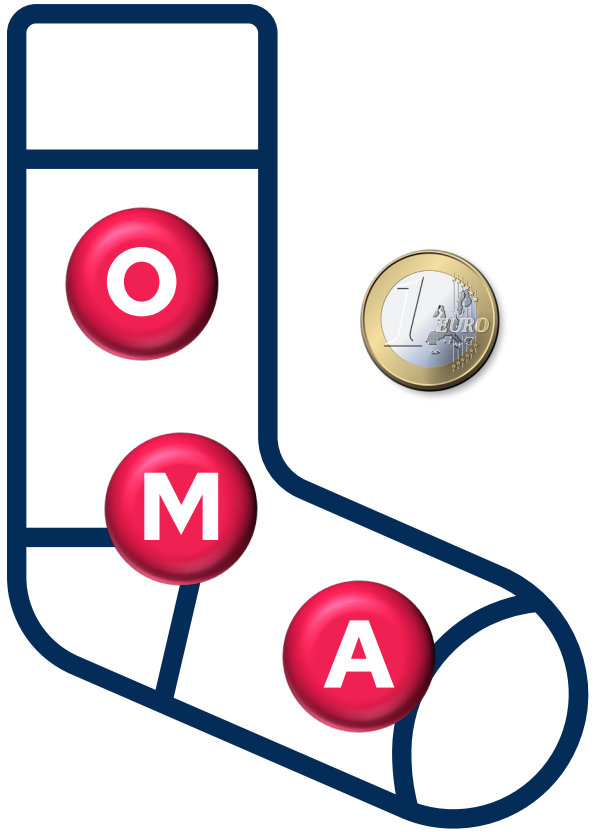
OMA aus der Socke
Interessantes Unterrichtsbeispiel

Laplace-Experiment:
Hol die OMA aus der Socke

Herausforderung: Wer beim blinden Hineingreifen in diese Socke nacheinander die Buchstaben **O-M-A** zieht, gewinnt einen Euro!

Bemerkungen

- In vielen Klassen muss die Frage nach der **Wahrscheinlichkeit** für **OMA** $\left(=\frac{1}{6}\right)$ nicht gestellt werden. Die Lernenden beantworten sie von sich aus: Sie notieren die sechs Kombinationen … oder übersetzen das Bauchgefühl in Zahlen und entdecken dabei die Pfadregel(n): In einem Drittel aller Fälle erwischt man das **O**. Dann sind nur noch zwei Buchstaben da, es steht für das **M** dann „fifty-fifty“ und die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist die Lösung: $\frac{1}{6}$
- Den **Erwartungswert** entdeckt man gleich mit: Wenn 30 Kinder in der Klasse sitzen, wird man im Schnitt 5 Münzen bereithalten müssen, wenn jeder einmal sein Glück probieren darf.
- Was ändert sich, wenn man die OMA zweimal in die Socke legt oder ein P hinzufügt und festlegt, dass man bei **OMA** und **OPA** gewinnt? Verdoppelt sich die Gewinnchance? Gute Frage!



Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 14

Laplace-Experiment:
Hol die OMA aus der Socke

Experimentieren und intuitiv arbeiten

Mögliche Versuchsausgänge:
OMA, OAM, MOA, MAO, AOM, AMO

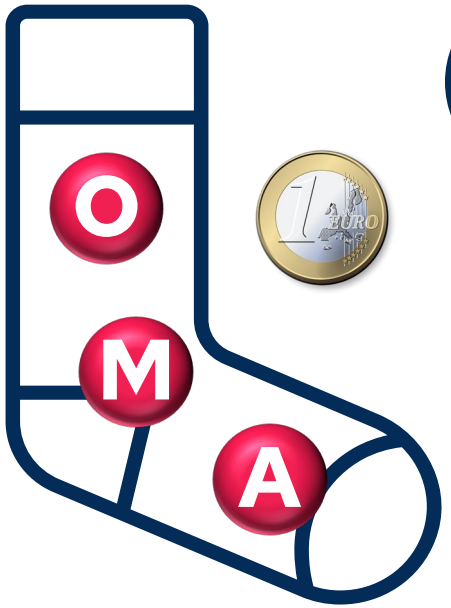
Wahrscheinlichkeit für OMA:

1. Idee: Die Wahrscheinlichkeit für jeden Versuchsausgang ist gleich. Es gibt unter den sechs möglichen Ergebnissen nur eine OMA. → Wahrscheinlichkeit für OMA: $\frac{1}{6}$

2. Idee: Wahrscheinlichkeit für jeden Zug einzeln bestimmen und zusammensetzen:

- Wahrscheinlichkeit für O im ersten Zug: $\frac{1}{3}$
- Wahrscheinlichkeit für M im zweiten Zug: „fifty-fifty“ also $\frac{1}{2}$
- Wahrscheinlichkeit für A im dritten Zug: „sicher“ also 1

→ Wahrscheinlichkeit für OMA: Die Hälfte von $\frac{1}{3}$ also $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



Reflektieren und Systematisieren

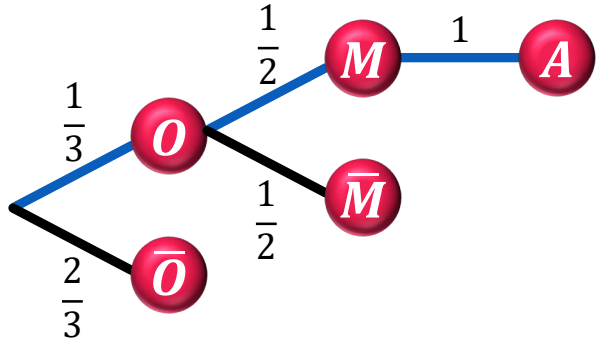
Ergebenisraum Ω:
$\Omega = \{OMA, OAM, MOA, MAO, AOM, AMO\}$

Wahrscheinlichkeit für OMA:

Laplace-Annahme: Alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.

$$P(\{OMA\}) = \frac{|\{OMA\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

Baumdiagramm:



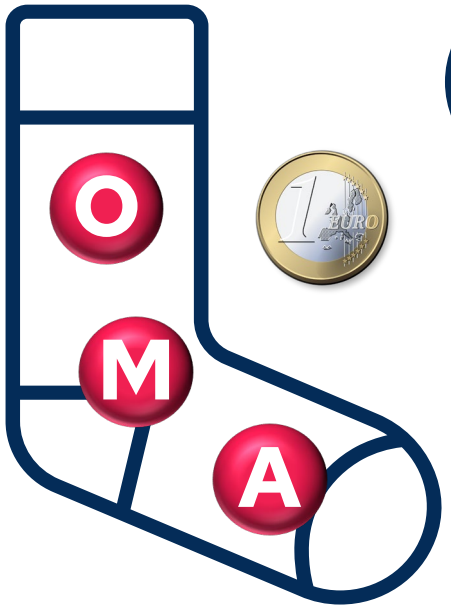
$$P(O \cap M \cap A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 14

Laplace-Experiment:
Hol die OMA aus der Socke

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Experimentieren und intuitiv arbeiten



Mittlerer Gewinn:

Da die Wahrscheinlichkeit die OMA aus der Socke zu holen $\frac{1}{6}$ ist und man nur bei OMA 1€ erhält, ist der mittlere Gewinn pro Versuch:

$$1€ \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}€ \approx 0{,}17€$$

Wie viel Euros muss die Lehrkraft in einer Klasse mit 30 Schülerinnen und Schülern im Schnitt bereitlegen?

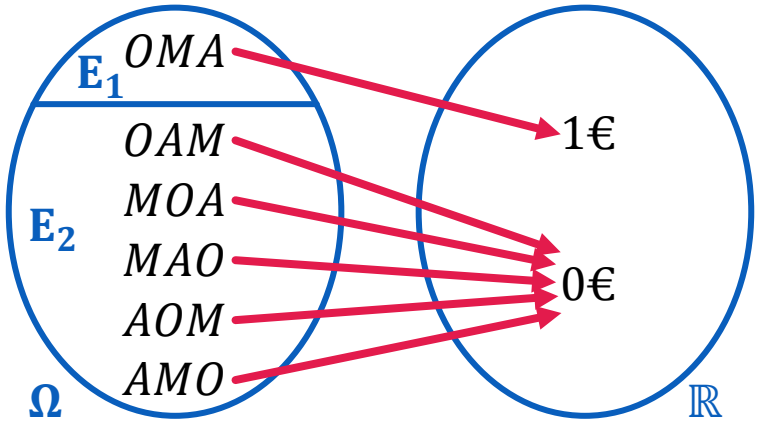
Wenn alle einmal ihr Glück versuchen, muss die Lehrkraft im Schnitt

$$1€ \cdot \frac{1}{6} \cdot 30 = 1€ \cdot 5 = 5€$$

bereithalten.

Reflektieren und Systematisieren

Zufallsvariable X:



$$X: \Omega \to \mathbb{R}; \omega \mapsto \begin{cases} 1€, \text{falls } \omega = OMA \\ 0€, \text{falls } \omega \in \Omega \backslash \{OMA\} \end{cases}$$

Erwartungswert $E(X)$ für Gewinn:

$$E(X) = 1€ \cdot P(X = 1€) + 0€ \cdot P(X = 0€)$$
$$= 1€ \cdot \frac{1}{6} + 0€ \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}€ \approx 0{,}17€$$

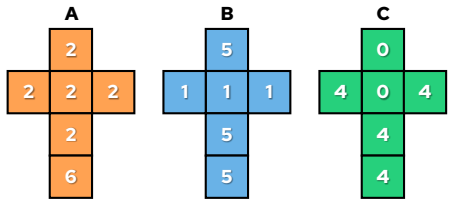
Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 14

MaTeGnu

2

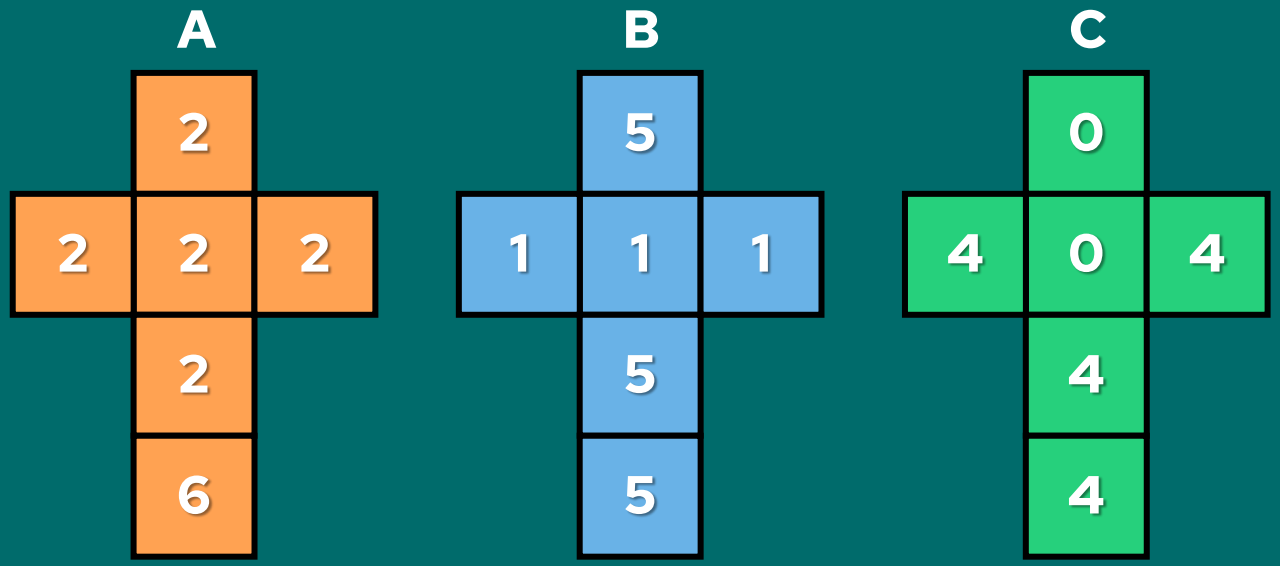
Mehrstufige Zufallsexperimente
Baumdiagramme & Pfadregeln

Sonderbare Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Sonderbare Würfel
Gegeben sind drei durch ihre Netze beschriebene Würfel.



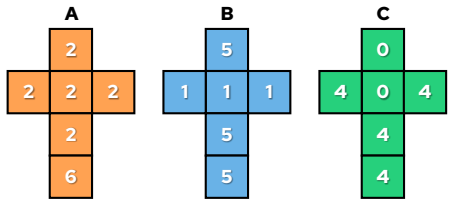
Aufgabe
Zwei Spieler wählen nacheinander einen Würfel. Danach würfelt jeder einmal. Wer die höhere Punktzahl hat, gewinnt. Wie sind die Gewinnchancen?

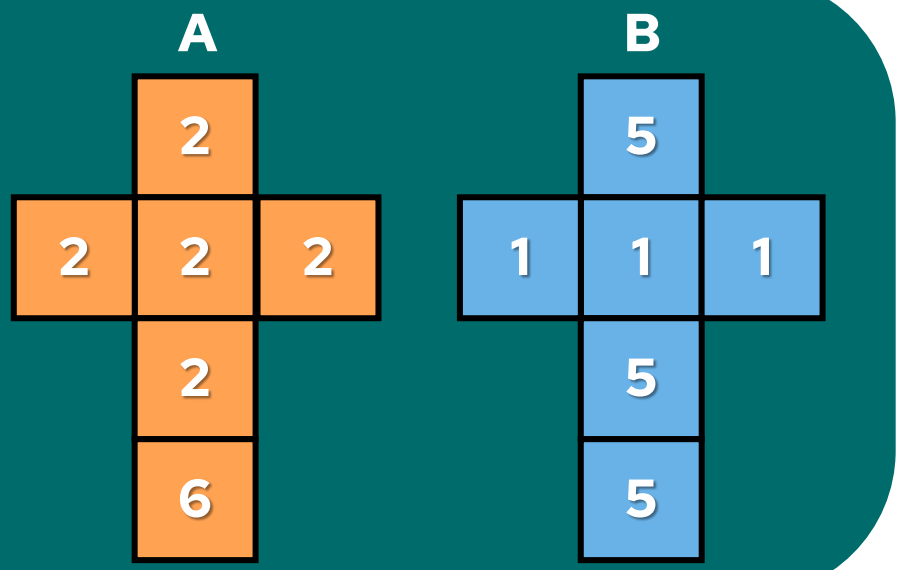
Glücksräder zu diesen Würfeln: https:/roth.tel/sonderbare_wuerfel

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

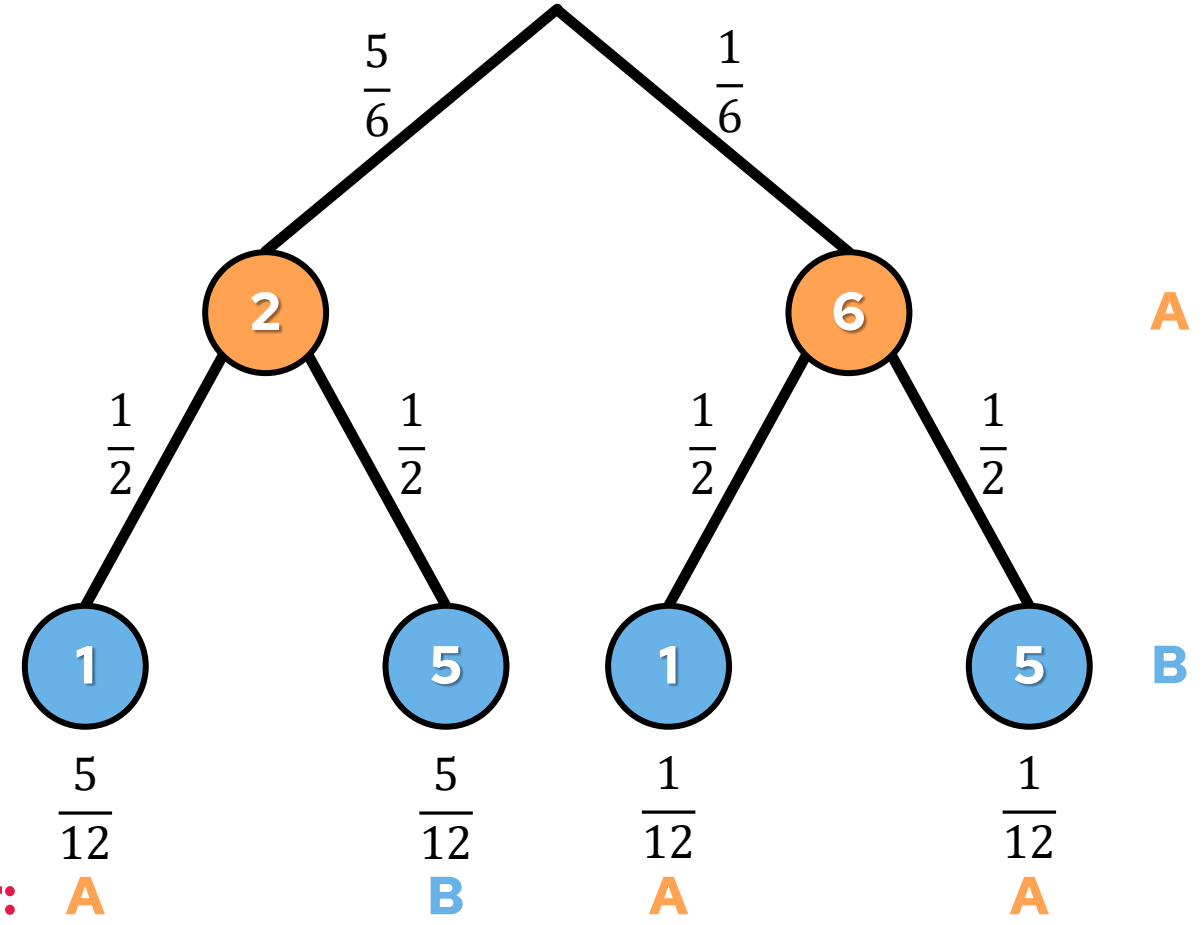
RPTU

Sonderbare Würfel





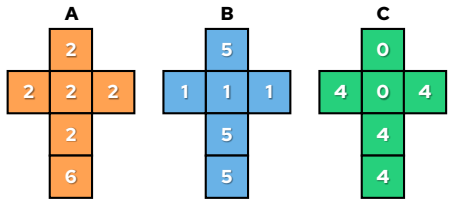
Der Würfel **A** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{7}{12}$ gegen Würfel **B**.

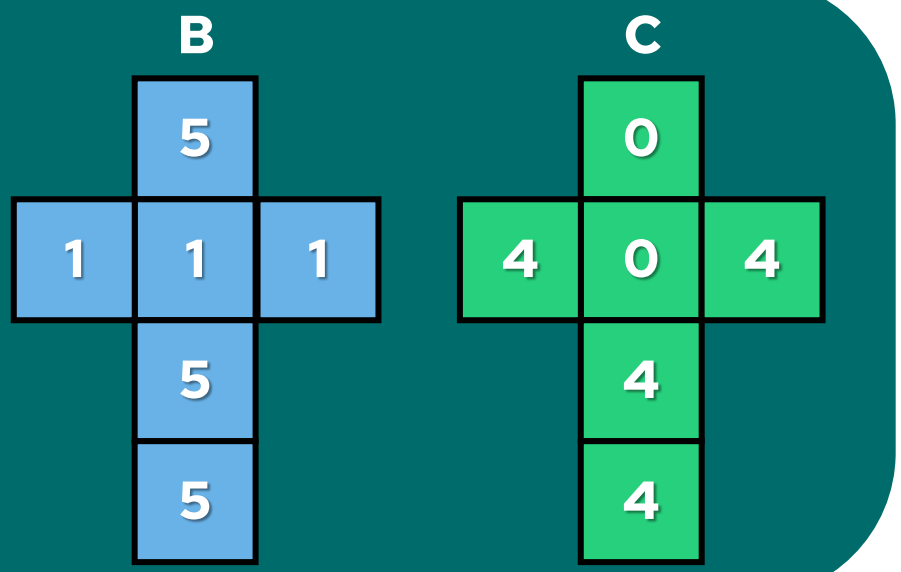


Glücksräder zu diesen Würfeln: https:/roth.tel/sonderbare_wuerfel

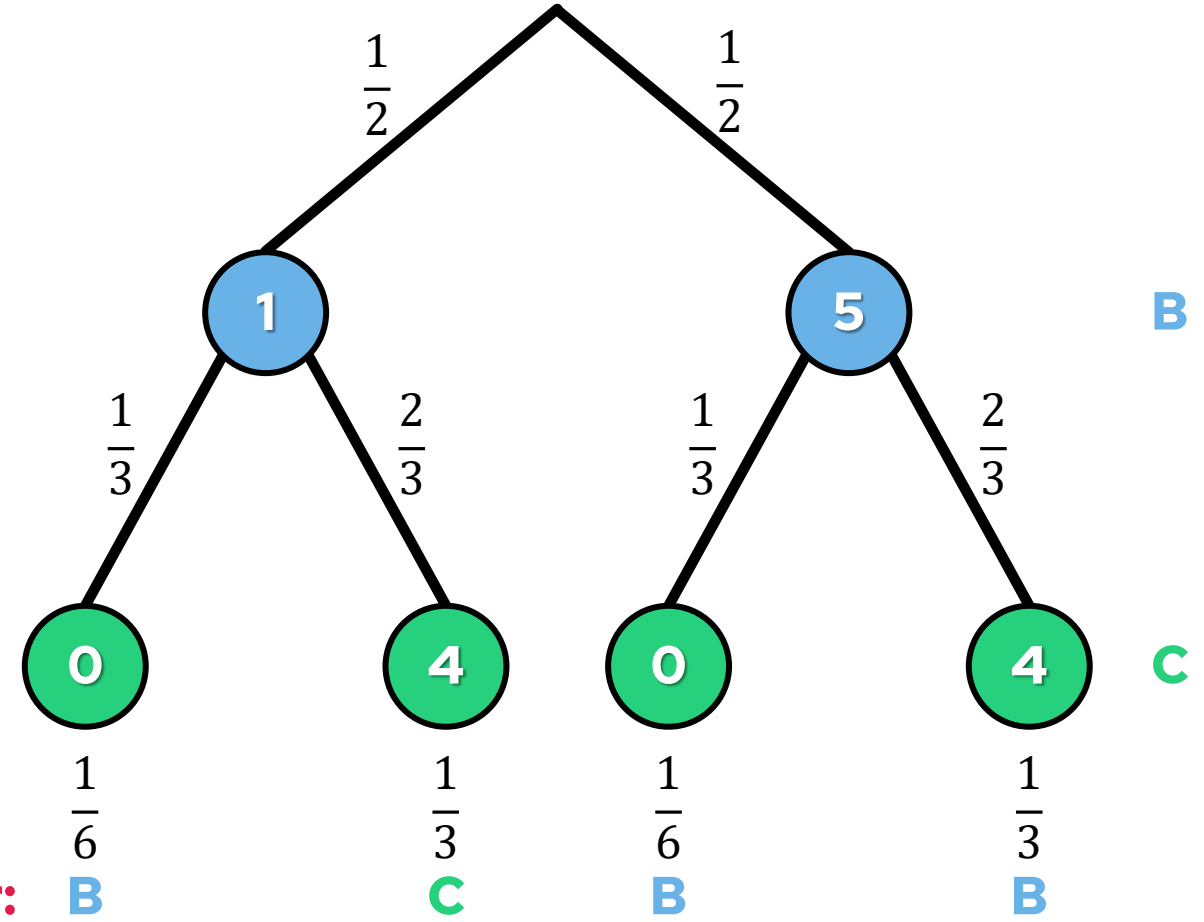
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Sonderbare Würfel





Der Würfel **B** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **C**.



Glücksräder zu diesen Würfeln: https:/roth.tel/sonderbare_wuerfel

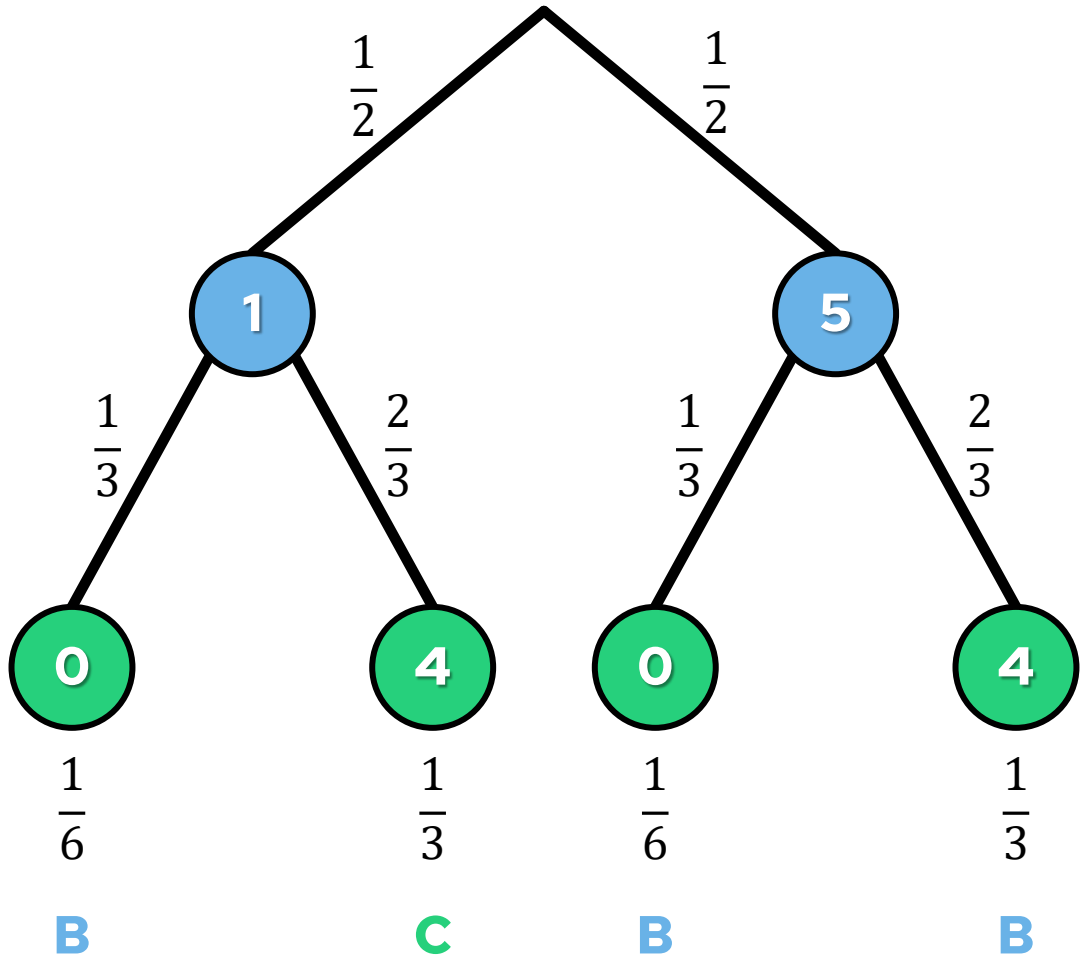
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Baumdiagramm: Pfadregeln

Produktregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm. $\left(\frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{2}\right)$

Summenregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die für dieses Ereignis günstig sind. (Additivität)

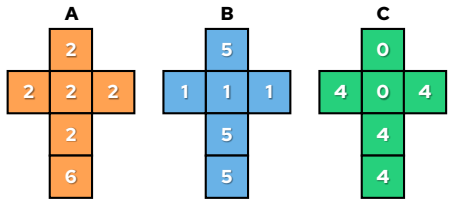
Verzweigungsregel
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen ist immer 1. (Normierung)

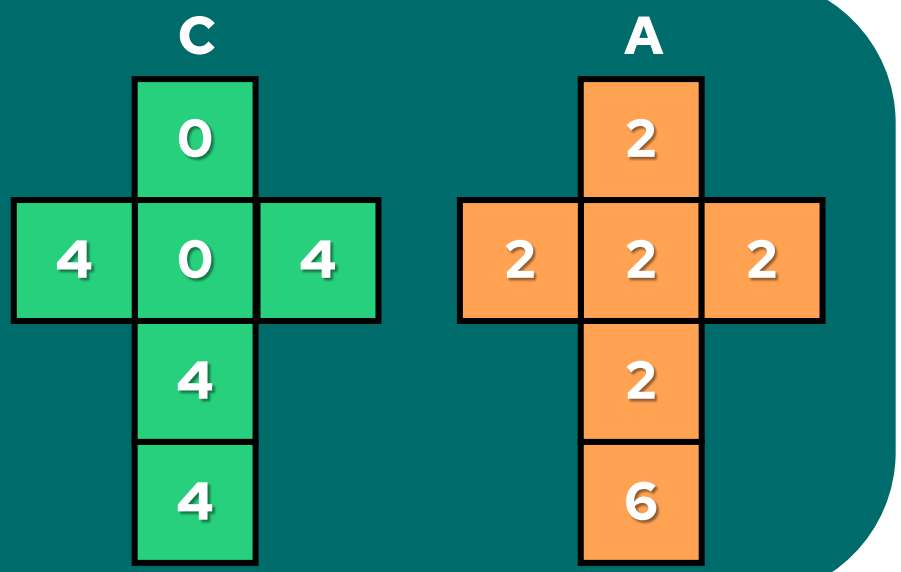


Glücksräder zu diesen Würfeln: https:/roth.tel/sonderbare_wuerfel

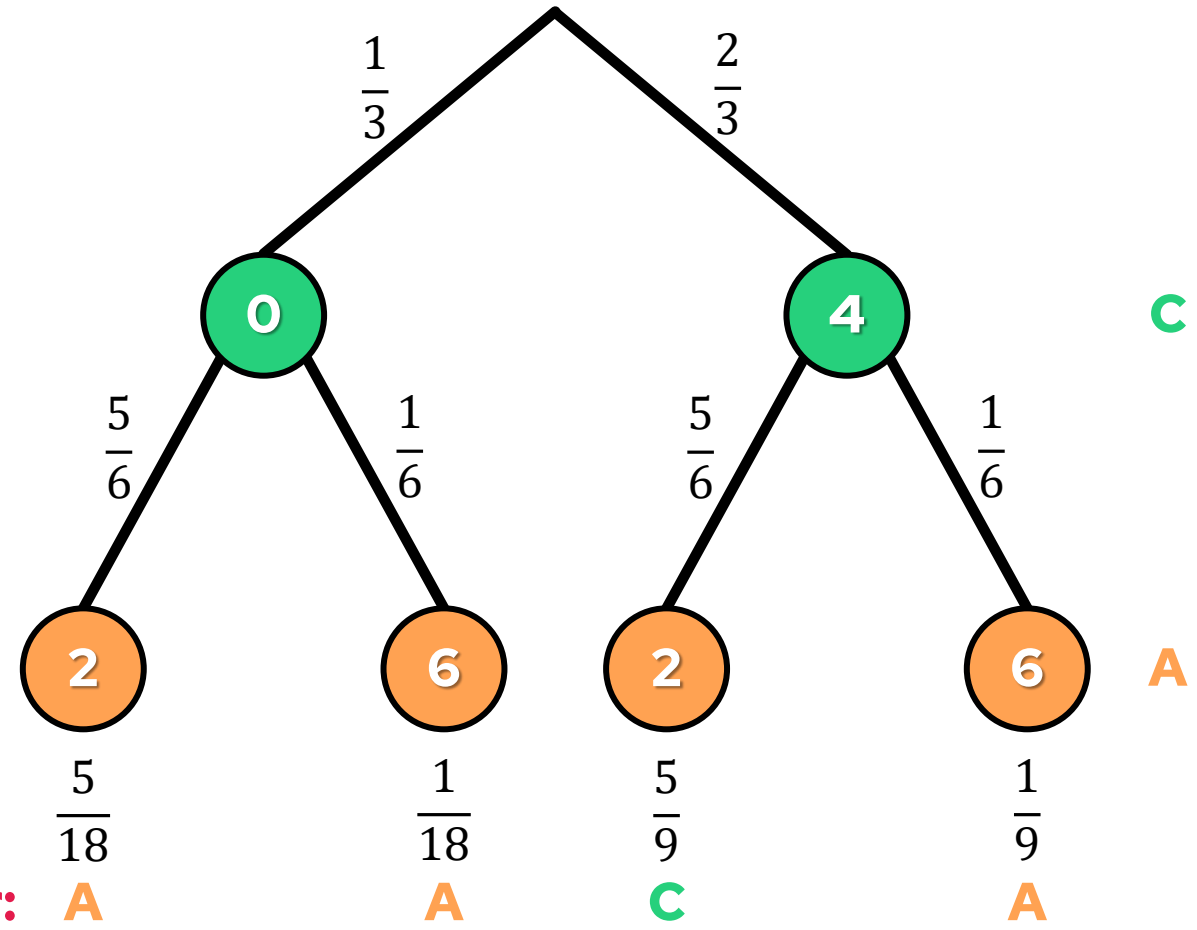
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Sonderbare Würfel





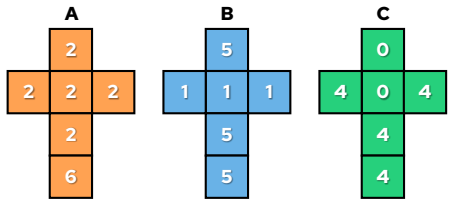
Der Würfel **C** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{9}$ gegen Würfel **A**.



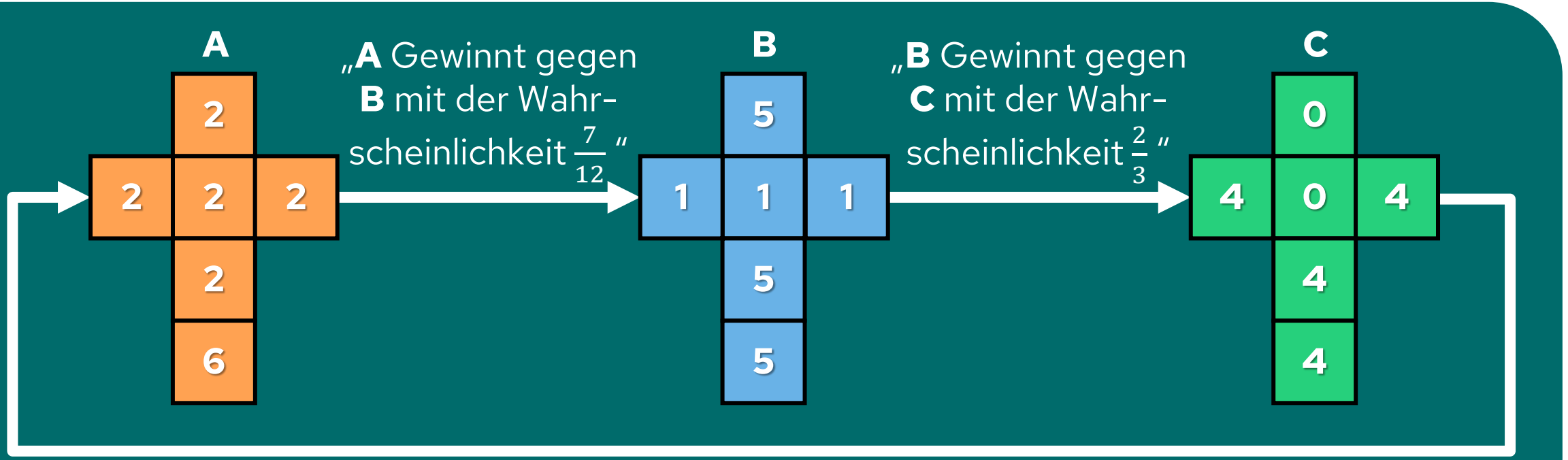
Glücksräder zu diesen Würfeln: https:/roth.tel/sonderbare_wuerfel

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Sonderbare Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Ergebnis:

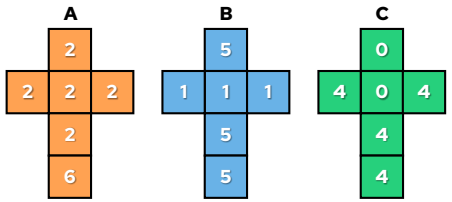
- Es gibt keinen besten Würfel. Man findet zu jedem Würfel einen „besseren“.
- Der Spieler, der die zweite Wahl hat, ist im Vorteil!

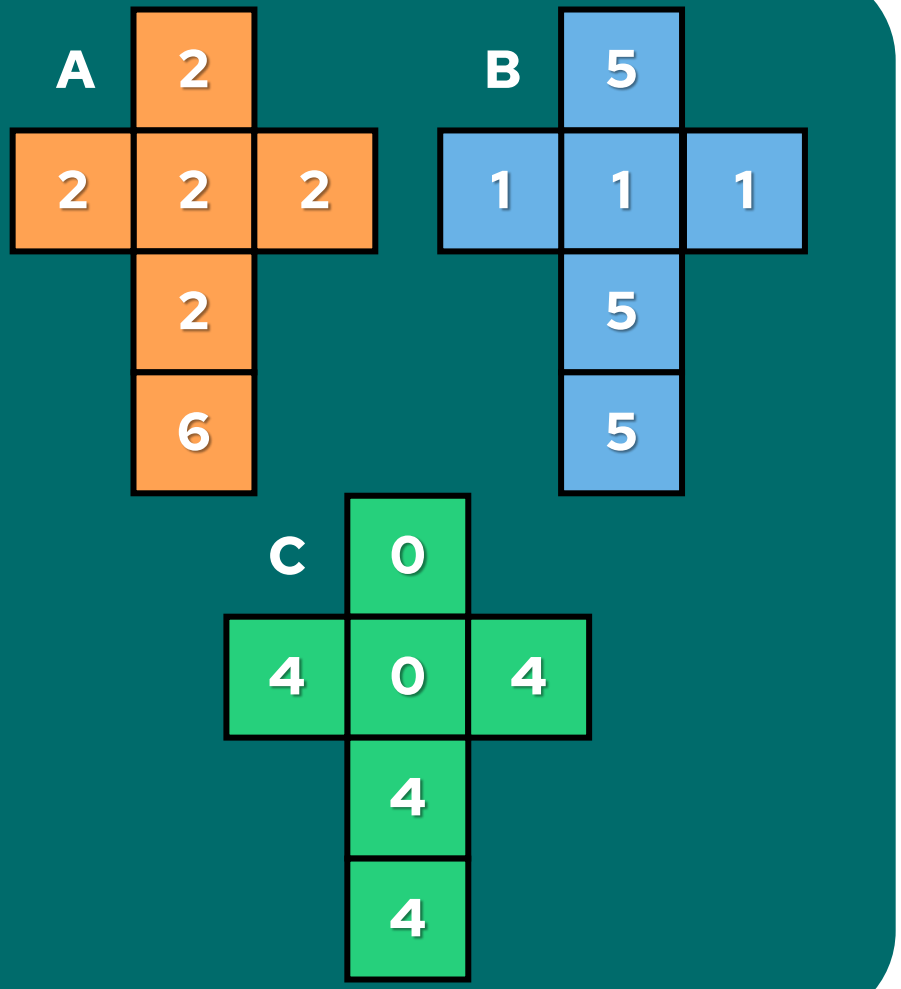
Glücksräder zu diesen Würfeln: https:/roth.tel/sonderbare_wuerfel

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

RPTU

Sonderbare Würfel



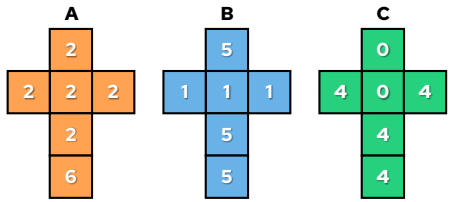


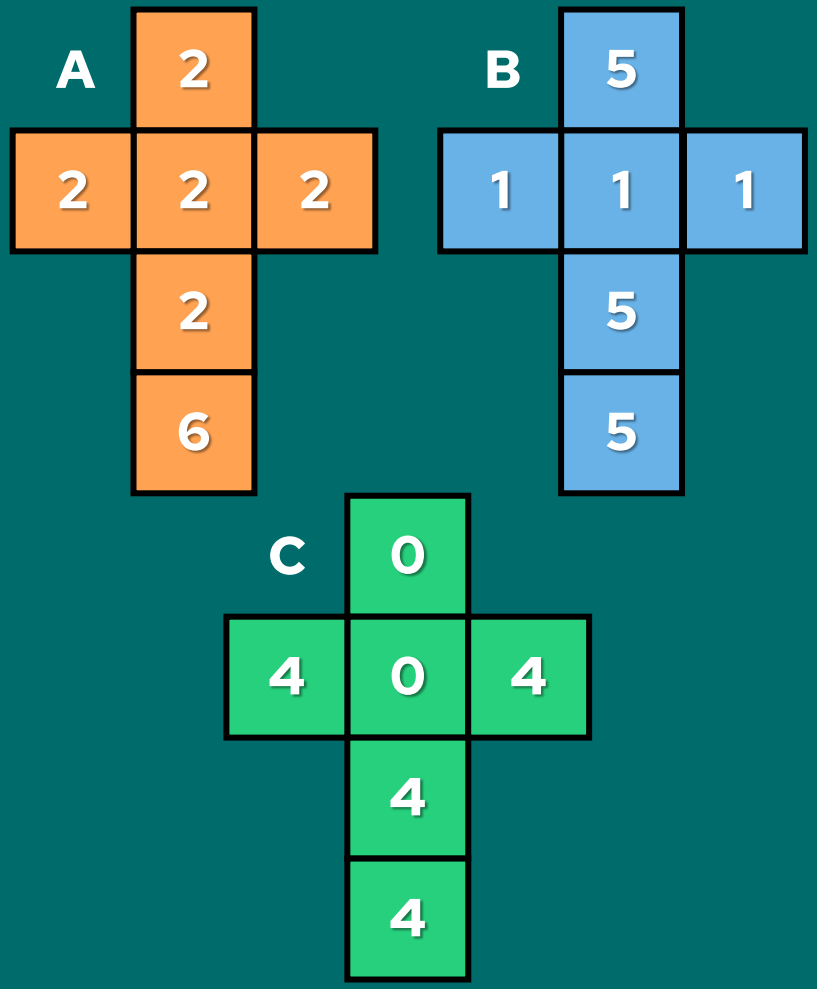
Aufgabe: Tragen Sie in die Tabellen-Zellen jeweils die Wahrscheinlichkeit ein, dass Zeile gegen Spalte gewinnt.

	A	B	C
A	-	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{9}$
B	$\frac{5}{12}$	-	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	-

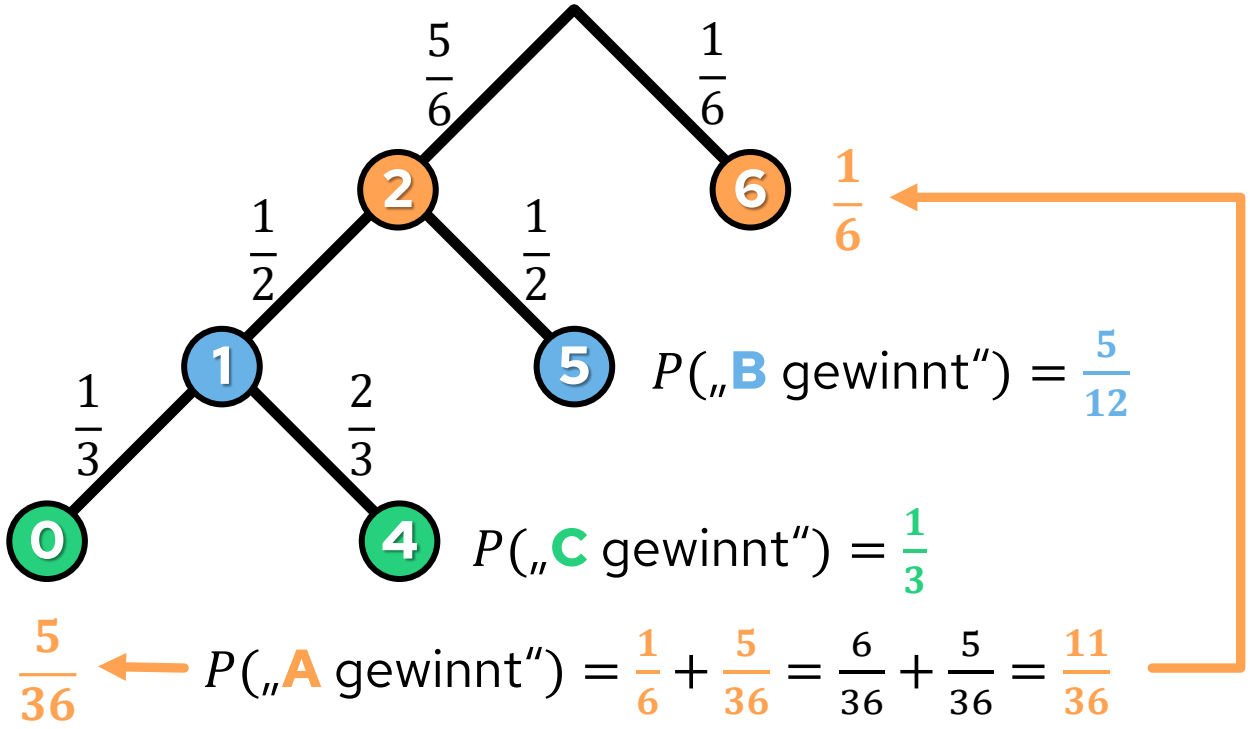
 Glücksräder zu diesen Würfeln: https:/roth.tel/sonderbare_wuerfel

Sonderbare Würfel





Aufgabe: Wie groß ist die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für jeden der Würfel, wenn alle drei Würfel geworfen werden?



Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

MaTeGnu

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

MaTeGnu

3.1

Kernidee

Konditionale Denkfigur

Kernideen der Stochastik

Kernidee
Konditionale Denkfigur

„Wenn … , dann …"-Strukturen

Beispiel:
Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?

Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die …

- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Globale Muster in Daten …

- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten

„Gute" Zufallsstichproben

- Beschaffenheit und Generierung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee
Verteilungen

Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

Kernidee: Konditionale Denkfigur

Kernidee
Konditionale Denkfigur

„Wenn … , dann …"-Strukturen

Beispiel: Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?

Wahrscheinlichkeit → Anteil (mit natürlichen Häufigkeiten)

- Übergehen von Wahrscheinlichkeiten zu Anteilen und klären, was dabei das Ganze (die Bezugsgröße) und was der Teil ist.
- So kann z. B. zwischen
  - totalen Wahrscheinlichkeiten (das Ganze ist die Grundgesamtheit) und
  - bedingten Wahrscheinlichkeiten (das Ganze ist die Teilmenge der Grundgesamtheit, die die Bedingung charakterisiert)

  unterschieden werden.
- Eine bedingte Wahrscheinlichkeit wird hier im Sinne des Anteils der Teilgruppe A an der durch B eingeschränkten Bezugsgruppe aufgefasst.

Beispiel:

Das Ganze: Mögl. Würfel-Ergebnisse

2	4
3	6
5	1

Der Teil: Primzahl

2	4
3	6
5	1

Das Ganze: Primzahl

2	4
3	6
5	1

Der Teil: Gerade Zahl

Post, M. & Prediger, S. (2020). „Nur das ‚und' ist anders, sonst ist es gleich". Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten sprachsensibel umgehen. Mathematik 5-10, 14(53), 38–41.
Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

MaTeGnu

3.2 Grundsätzliches

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Kernidee:
Konditionale Denkfigur

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ ...

- ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\boldsymbol{B}$, wenn man weiß, dass $\boldsymbol{A}$ eingetreten ist.
- ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $\boldsymbol{B}$ unter der Bedingung, dass das Ereignis $\boldsymbol{A}$ eingetreten ist.

Sprechweise

- Der senkrechte Strich ist zu lesen als „unter der Bedingung/Voraussetzung“.
- Man sagt auch, $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$ ist die „Wahrscheinlichkeit für $\boldsymbol{B}$ unter der Bedingung $\boldsymbol{A}$“.

Schreibweise: $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$ oder $P_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B})$

Erarbeitung über Pfadregeln



$$P(\boldsymbol{A}) \cdot P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$$

$$\Rightarrow P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \frac{P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{P(\boldsymbol{A})}$$

RPTU

Bedingten Wahrscheinlichkeit

Probleme und Lösungsansätze

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Typische Probleme

Unverständnis für bed. Wahrscheinlichkeit

- **Schwierigkeit:** Inhaltliche Deutung bedingter Wahrscheinlichkeiten
- **Bedingung:** Informationsstand (**!**) ↔ **Nicht** zeitliche Reihenfolge

Was ist der Anteil und was ist das Ganze?

- Inhaltlich gesucht: $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) \leftrightarrow \frac{|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}|}$
- Verwechslung mit $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) \leftrightarrow \frac{|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{B}|}$
- Verwechslung mit $P(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{A}) \leftrightarrow \frac{|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{\Omega}|}$
- Verwechslung mit $P(\boldsymbol{B}) \leftrightarrow \frac{|\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{\Omega}|}$

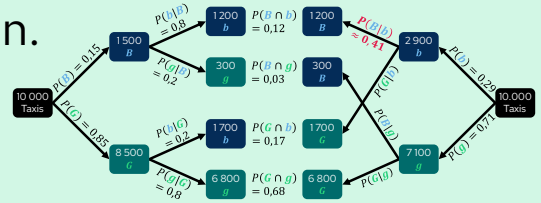
Lösungsansätze

Absolute und natürliche Häufigkeiten nutzen

- Auf **absolute Häufigkeiten** setzen.
- **(Erwartete) natürliche Häufigkeiten** zum Argumentieren nutzen („a von b“).
- Mit Wahrscheinlichkeiten verknüpfen.

Geeignete Darstellung nutzen → Doppelbaum

- Wahrscheinlichkeiten und absolute sowie (erwartete) natürliche Häufigkeiten verbinden.
- Alle relevanten Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten darstellen.
- Darstellungen inhaltlich erarbeiten. (Pfadregeln)



Binder, K., Blum, W. & Krauss, S. (2022). Gesichtserkennung – Wie verlässlich sind die Ergebnisse? Mathematik lehren, 232, 23-27.
Binder, K., Steib, N. & Krauss, S. (2023). Von Baumdiagrammen über Doppelbäume zu Häufigkeitsnetzen – kognitive Überlastung oder didaktische Unterstützung? *Journal für Mathematik-Didaktik, 44*, 471-503.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Taxi-Problem

Kernidee: Konditionale Denkfigur

Taxi-Problem

Ein alter Mann wird Zeuge eines Autounfalls mit Fahrerflucht und berichtet, dass das flüchtende Auto ein blaues Taxi gewesen sei (Behauptung b). Es gibt zwei Taxiunternehmen in der Stadt, die 15 blaue (B) bzw. 85 grüne (G) Taxis haben. In der Verhandlung wird die Sehfähigkeit des Mannes geprüft und man bekommt heraus, dass er in 80% der Fälle die richtige Farbe zuordnen kann, d. h.:

$$P(b|B) = P(g|G) = 0{,}8$$





Aufgabe

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich ein blaues Taxi in den Unfall verwickelt war?

$$P(B|b) = ?$$

Die meisten Befragten nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeit deutlich über 0,5 liegt.

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Wahrscheinlichkeit ↔ natürliche Häufigkeit

Beispiel: Taxi-Problem

Wahrscheinlichkeit	(Erwartete) natürliche Häufigkeit
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein in der Stadt angetroffenes Taxi ein blaues Taxi ($\boldsymbol{B}$) ist, beträgt 15%. $P(\boldsymbol{B})$	Unter $\mathbf{10000}$ in der Stadt beobachteten Taxis erwarten wir im Durchschnitt $\mathbf{1500}$ blaue Taxis ($\boldsymbol{B}$).
Die Wahrscheinlichkeit, dass der alte Mann ein blaues Taxi als blaues Taxi erkennt ($\boldsymbol{b}$) ist 80%. $P(\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{B})$	Im Durchschnitt erkennt der alte Mann $\mathbf{1200}$ von $\mathbf{1500}$ blauen Taxis als blaue Taxis ($\boldsymbol{b}$).
Die Wahrscheinlichkeit, dass der alte Mann ein grünes Taxi falsch als blaues Taxi erkennt ist 20%. $P(\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{G})$	Im Durchschnitt erkennt der alte Mann $\mathbf{1700}$ von $\mathbf{8500}$ grünen Taxis falsch als blaue Taxis ($\boldsymbol{b}$).
Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taxi, das der alte Mann als blaues Taxi erkennt, wirklich ein blaues Taxi ist? $P(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{b})$	**Frage:** Wie viele der Taxis, die der alte Mann als blaues Taxi erkennt, sind wirklich blaue Taxis?
Lösung: $\mathrm{P}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{b}) = \frac{P(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{b})}{P(\boldsymbol{b})} = \frac{P(\boldsymbol{B})\cdot P(\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{B})}{P(\boldsymbol{B})\cdot P(\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{B}) + P(\boldsymbol{G})\cdot P(\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{G})} \approx 41\%$	**Lösung:** $1200 \text{ von } (1200+1700) = 1200 \text{ von } 2900 \approx 41\%$

Krauss, S., Weber, P., Binder, K., & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. Journal für Mathematik-Didaktik, 38(1), 407.

Sowohl die absoluten Zahlen als auch deren Verhältnis sind jeweils inhaltl. interpretierbar!

MaTeGnu

3.3

Komplexität strukturieren
Doppelbaum

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Taxi-Problem

Kernidee:
Konditionale Denkfigur

Taxi-Problem

Ein alter Mann wird Zeuge eines Autounfalls mit Fahrerflucht und berichtet, dass das flüchtende Auto ein blaues Taxi gewesen sei (Behauptung b). Es gibt zwei Taxiunternehmen in der Stadt, die 15 blaue (B) bzw. 85 grüne (G) Taxis haben. In der Verhandlung wird die Sehfähigkeit des Mannes geprüft und man bekommt heraus, dass er in 80% der Fälle die richtige Farbe zuordnen kann, d. h.:

$$P(b|B) = P(g|G) = 0{,}8$$





Aufgabe

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich ein blaues Taxi in den Unfall verwickelt war?

$P(B|b) = ?$

Die meisten Befragten nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeit deutlich über 0,5 liegt.

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Taxi-Problem



$P(B|b) = ?$

$$P(B|b) = \frac{P(B \cap b)}{P(b)} = \frac{0{,}12}{0{,}29} \approx 0{,}41$$

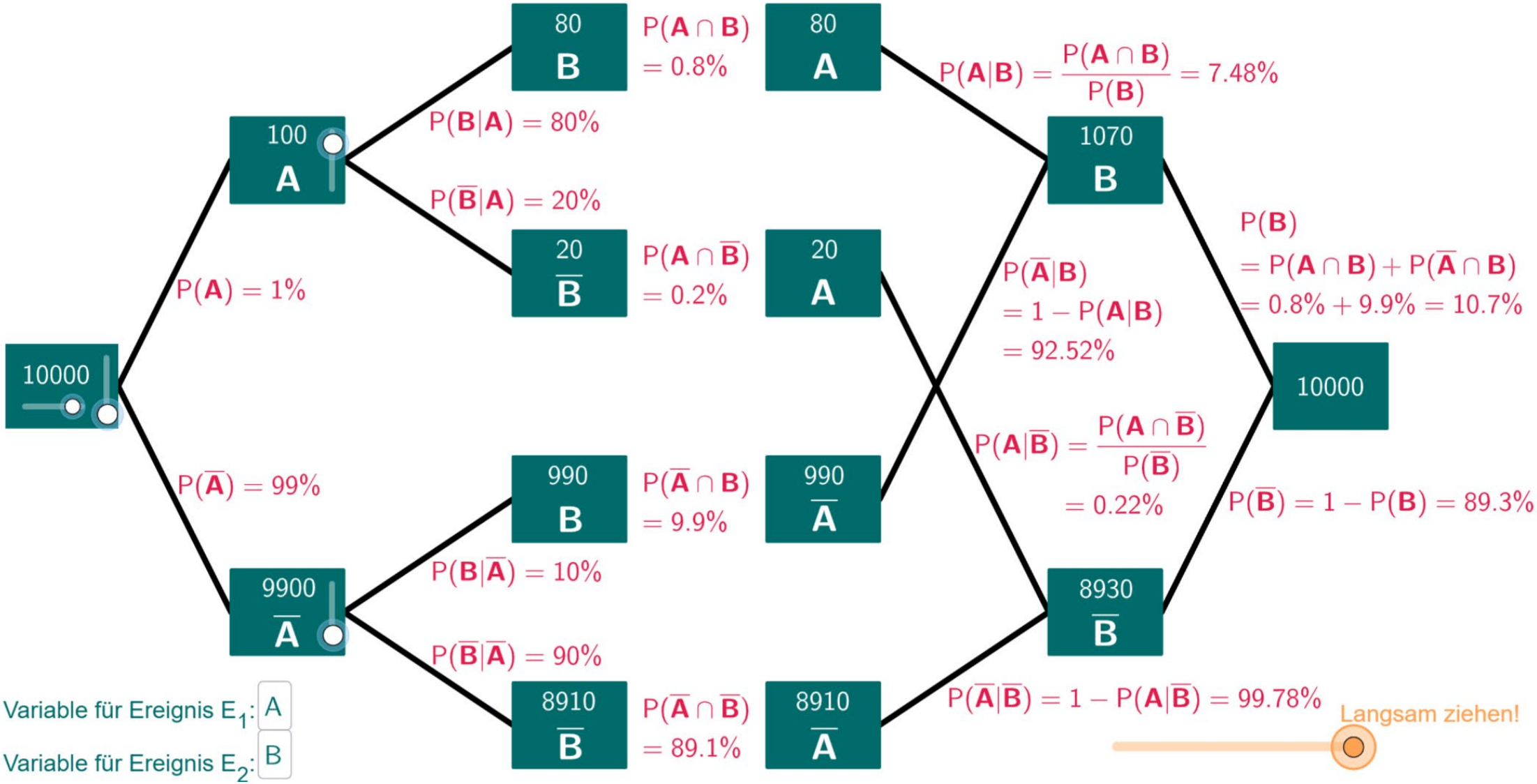
$$P(b) = P(B \cap b) + P(G \cap b) = 0{,}12 + 0{,}17 = 0{,}29$$

https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/dbstyj36

https://roth.tel/doppelbaum/video

Roth, J. (2026). Wahrscheinlichkeiten verstehen: Kernideen und geeignete Baumdiagramme nutzen. Preprint.

M4.I.6b App Doppelbaum



MaTeGnu

3.3

Anwendung
Randomized-Response-Technik

Datengewinnung bei heiklen Themen

Beispiel: Randomized-Response-Technik

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Problem

- Direkte Fragen zu heiklen Themen (z. B. „Haben Sie schon einmal in einer Kursarbeit bei mir von Nachbarn abgeschrieben?“) werden in Umfragen oft nicht ehrlich beantwortet.
- „Naive“ Umfragen liefern deshalb keine verlässlichen Informationen.

Randomized-Response-Technik …

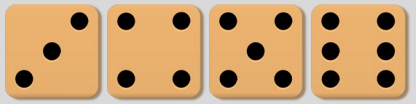
- versucht mit geeigneten Methoden verlässliche Antworten auf heikle Fragen zu ermitteln.
- kann nur bei größeren Gruppen sinnvoll umgesetzt werden kann.



Sagen Sie **Nein**!



Sagen Sie **Ja**!



Forschungsfrage
Haben Sie in der Prüfung abgeschrieben?
Ja / **Nein**

Vorgehen bei der Randomized-Response-Technik

Eine Person würfelt verdeckt mit einen Spielwürfel und sagt, abhängig von der geworfenen Augenzahl, entsprechend der Anweisung wahrheitsgemäß „Ja“ oder „Nein“.

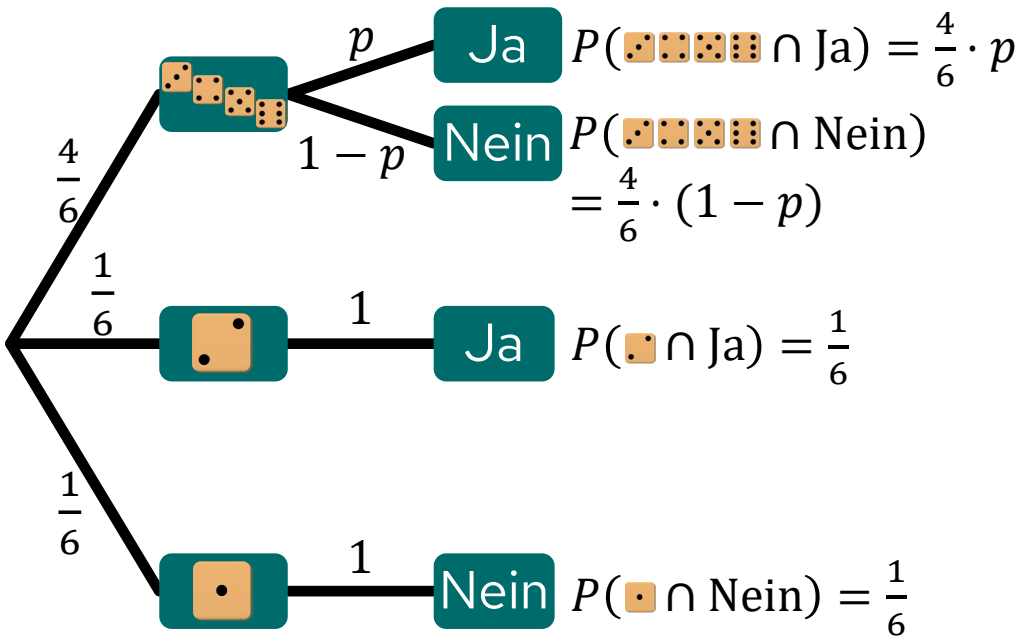
Krüger, K. (2004): Wahrheit oder Pflicht. Die Methode der Zufallsantworten bei sensitiven Umfragen. *Mathematik lehren, 125*, 50-54
https://o-mathe.de/stochastik/wahrscheinlichkeit/mehrstufige_ze/anwendung/lernstrecke Ω-mathe

Datengewinnung bei heiklen Themen

Beispiel: Randomized-Response-Technik

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe: Erstellen Sie ein Baumdiagramm zu diesem Zufallsexperiment und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p für die Antwort „Ja“ nach würfeln von ⚀⚁⚂⚃⚄⚅, wenn insgesamt 43% aller Befragten mit „Ja“ antworten.

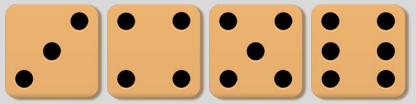




Sagen Sie **Nein**!



Sagen Sie **Ja**!



Forschungsfrage
Haben Sie in der Prüfung abgeschrieben?

Ja / Nein

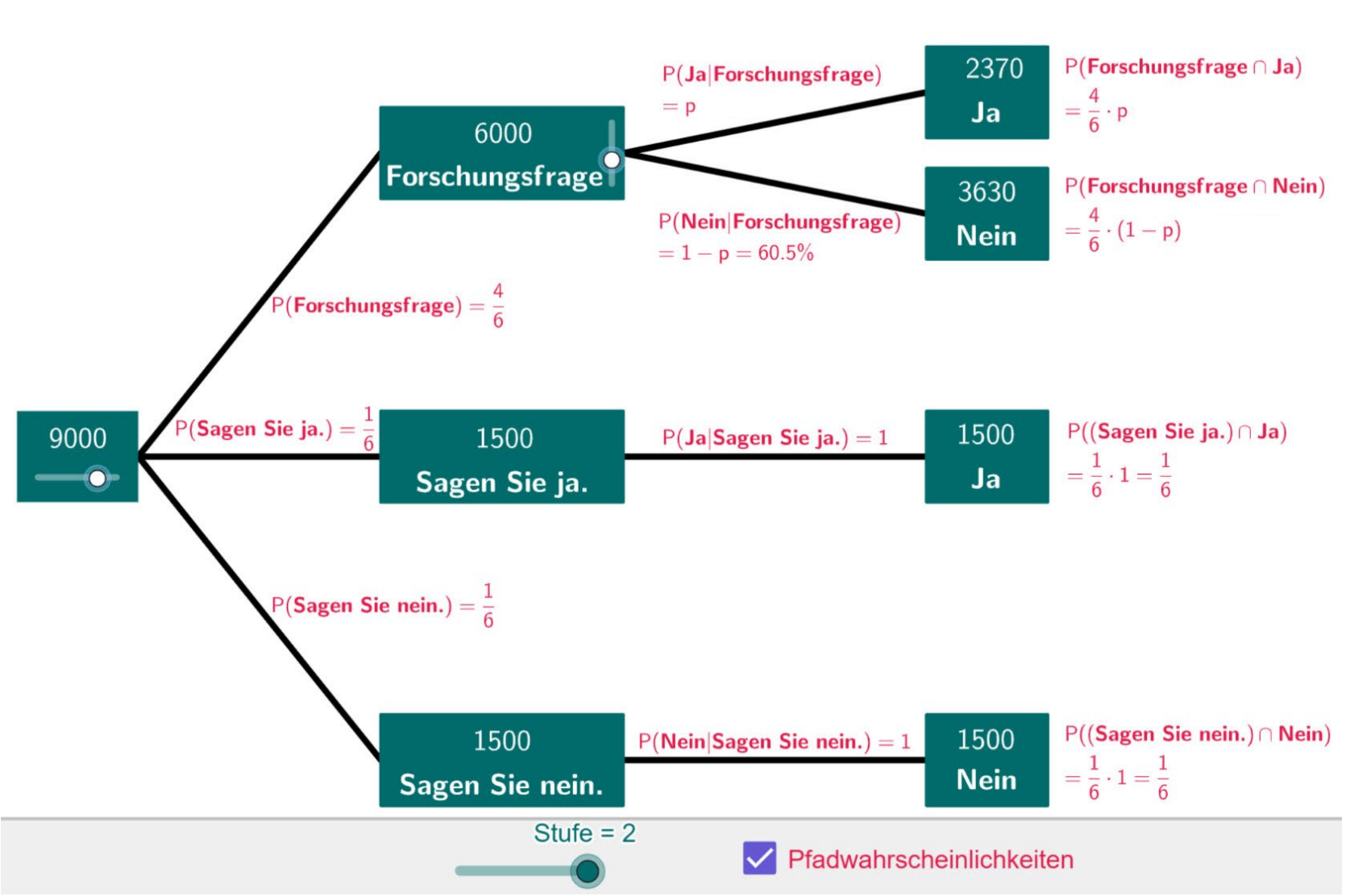
Vorgehen bei der Randomized-Response-Technik

Eine Person würfelt verdeckt mit einen Spielwürfel und sagt, abhängig von der geworfenen Augenzahl, entsprechend der Anweisung wahrheitsgemäß „Ja“ oder „Nein“.

Krüger, K. (2004): Wahrheit oder Pflicht. Die Methode der Zufallsantworten bei sensitiven Umfragen. *Mathematik lehren, 125*, 50-54
https://o-mathe.de/stochastik/wahrscheinlichkeit/mehrstufige_ze/anwendung/lernstrecke Ω-mathe

Datengewinnung bei heiklen Themen

Beispiel: Randomized-Response-Technik



Produktregel:

$$P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) = P(\text{Forschungsfrage}) \cdot P(\text{Ja}|\text{Forschungsfrage}) = \frac{4}{6} \cdot p$$

$$P(\text{Sagen Sie ja.} \cap \text{Ja}) = P(\text{Sagen Sie ja.}) \cdot P(\text{Ja}|\text{Sagen Sie ja.}) = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Summenregel:

$$P(\text{Ja}) = P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) + P(\text{Sagen Sie ja.} \cap \text{Ja}) = \frac{4}{6} \cdot p + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot (4p + 1)$$

$$P(\text{Ja}) \approx \frac{\text{Anzahl der Ja-Antworten}}{\text{Anzahl der Teilnehmenden}} = 43\%$$

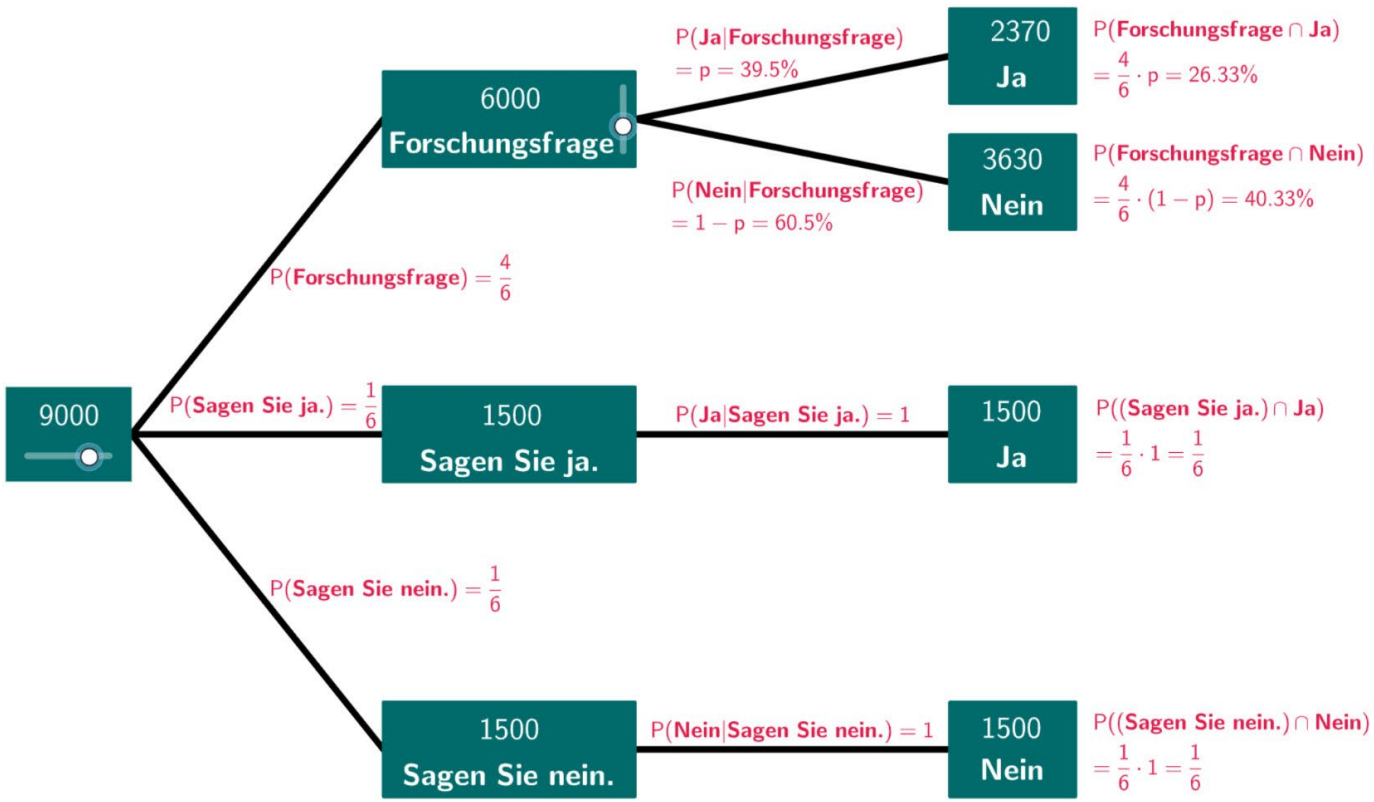
$$\Rightarrow p = \frac{1}{4} \cdot (6 \cdot 0{,}43 - 1) = 39{,}5\%$$

 https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/bcbnc49c

Datengewinnung bei heiklen Themen

Beispiel: Randomized-Response-Technik

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Produktregel:

$$P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) = P(\text{Forschungsfrage}) \cdot P(\text{Ja}|\text{Forschungsfrage}) = \frac{4}{6} \cdot p$$

$$P(\text{Sagen Sie ja.} \cap \text{Ja}) = P(\text{Sagen Sie ja.}) \cdot P(\text{Ja}|\text{Sagen Sie ja.}) = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Summenregel:

$$P(\text{Ja}) = P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) + P(\text{Sagen Sie ja.} \cap \text{Ja}) = \frac{4}{6} \cdot p + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot (4p + 1)$$

Aufgabe: Wie hoch ist der Anonymitätsgrad, also $P(\text{Forschungsfrage}|\text{Ja})$, bei dieser Fragetechnik?



$P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) = \frac{4}{6} \cdot p$

Pfadregel: $P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja}) = P(\text{Ja}) \cdot P(\text{Forschungsfrage}|\text{Ja})$

$$\Rightarrow P(\text{Forschungsfrage}|\text{Ja}) = \frac{P(\text{Forschungsfrage} \cap \text{Ja})}{P(\text{Ja})} = \frac{\frac{4}{6} \cdot p}{\frac{1}{6} \cdot (4p + 1)} = \frac{4p}{4p + 1}$$

MaTeGnu

3.5

Anwendung
Medizinische Tests
→ Ärztliche Diagnosen

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Fachbegriffe

Prävalenz	Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung	auch: Verbreitung
Sensitivität eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein erkrankter Mensch positiv getestet wird	auch: Empfindlichkeit, Richtigpositiv-Rate
Spezifität eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein gesunder Mensch negativ getestet wird	auch: Richtignegativ-Rate
Positiver Vorhersagewert (pVW) eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Mensch tatsächlich krank ist	auch: positive predictive Value (ppV), positiver Prädiktionswert, Relevanz
Negativer Vorhersagewert (nVW) eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein negativ getesteter Mensch tatsächlich nicht krank ist	auch: negative predictive Value (npV), negativer Prädiktionswert

Wichtig: Ein **positives Testergebnis bedeutet**, dass der Test die **Krankheit** feststellt**!**

Pinkernell, G. (2006). Test positiv – Diagnose negativ. Medizinische Testergebnisse richtig interpretieren. *Mathematik lehren, 138*, 50-55

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie

Kernidee: Konditionale Denkfigur

Mammographie

Für die Mammographie als Diagnose-Methode für Brustkrebs sind folgende auf Grund von quantitativen Untersuchungen geschätzten Wahrscheinlichkeiten bekannt:

- 1% der weiblichen Bevölkerung einer bestimmten Altersgruppe hat Brustkrebs. (**Prävalenz**)
- Die **Sensitivität** der Mammographie beträgt 80%. (Hat eine Patientin Brustkrebs, so kommt es in 80% der Fälle auch zu einer positiven Diagnose.)
- Die **Spezifität** der Mammographie beträgt 90%. (Hat eine Patientin keinen Brustkrebs, so kommt es in 90% der Fälle auch zu einer negativen Diagnose.)



Aufgabe: Wie viel Prozent der bei einer Mammographie positiv getesteten Patientinnen sind tatsächlich krank?

Pinkernell, G. (2006). Test positiv – Diagnose negativ. Medizinische Testergebnisse richtig interpretieren. *Mathematik lehren, 138*, 50-55

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie → Vierfeldertafel

Gestaffelte Mehrfach-tests sind sinnvoll!

Vier-Felder-Tafel	T Testergebnis positiv **Test ergibt:** Patientin ist krank.	$\overline{T}$ Testergebnis negativ **Test ergibt:** Patientin ist **nicht** krank.	Σ
K tatsächlich krank	24	6	30
$\overline{K}$ tatsächlich gesund	297	2673	2970
Σ	321	2679	3000

Prävalenz	Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung	Prävalenz = 1%
Test-Sensitivität	Wahrscheinlichkeit, dass ein erkrankter Mensch positiv getestet wird.	Sensitivität = 80%
Test-Spezifität	Wahrscheinlichkeit, dass ein gesunder Mensch negativ getestet wird.	Spezifität = 90%
Gesamtanzahl	Anzahl der insgesamt getesten Personen.	Gesamtanzahl = 3000

$$P(K|T) = \frac{\mathrm{P}(T \cap K)}{\mathrm{P}(T)} = \frac{24}{321} \approx 7{,}48\%$$

https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/wydqry3m

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie → Vierfeldertafel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten

	T Testergebnis positiv	$\overline{T}$ Testergebnis negativ	
K tatsächlich krank	$P(K \cap T) = 0{,}8\%$	$P(K \cap \overline{T}) = 0{,}2\%$	$P(K) = 1\%$ $= P(K \cap T) + P(K \cap \overline{T})$
$\overline{K}$ tatsächlich gesund	$P(\overline{K} \cap T) = 9{,}9\%$	$P(\overline{K} \cap \overline{T}) = 89{,}1\%$	$P(\overline{K}) = 99\%$ $= P(\overline{K} \cap T) + P(\overline{K} \cap \overline{T})$
	$P(T) = 10{,}7\%$ $= P(K \cap T) + P(\overline{K} \cap T)$	$P(\overline{T}) = 89{,}3\%$ $= P(K \cap \overline{T}) + P(\overline{K} \cap \overline{T})$	$P(\Omega) = 100\%$ $= P(K) + P(\overline{K})$ $= P(T) + P(\overline{T})$

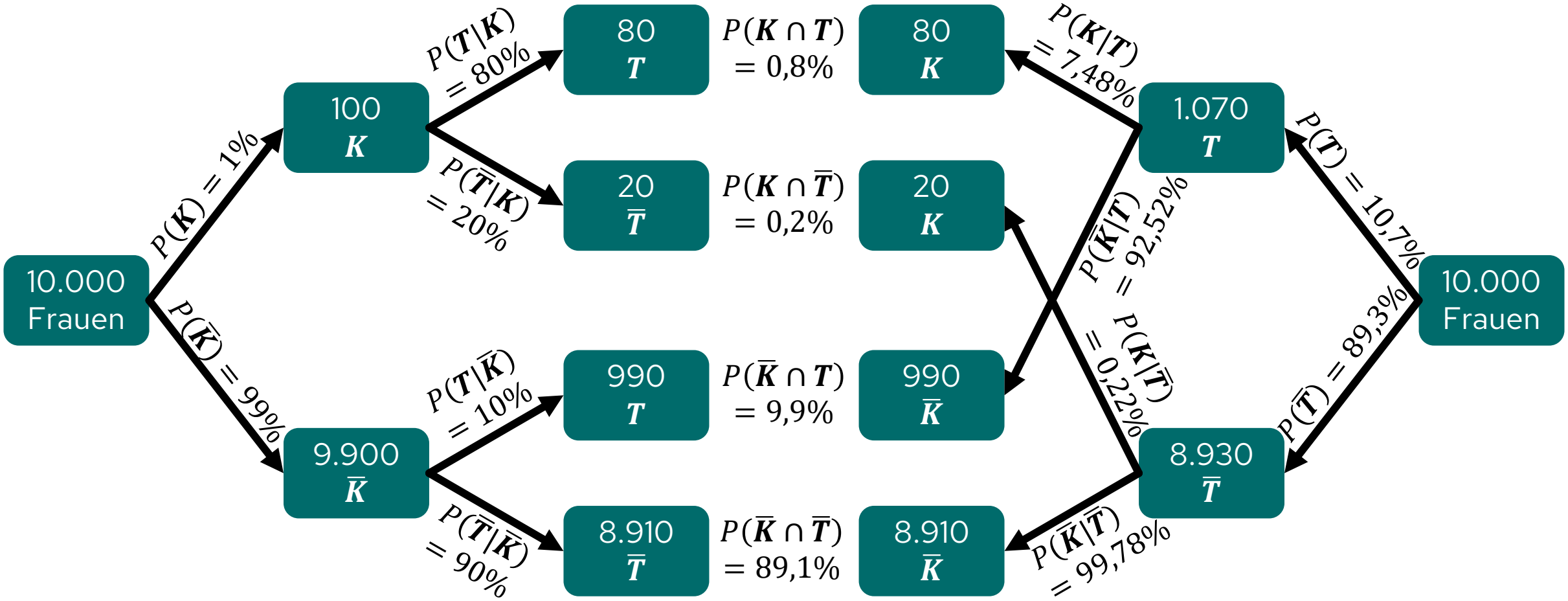
Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	T Testergebnis positiv	$\overline{T}$ Testergebnis negativ	
K tatsächlich krank	$H(K \cap T) = 80$	$H(K \cap \overline{T}) = 20$	$H(K) = 100$ $= H(K \cap T) + H(K \cap \overline{T})$
$\overline{K}$ tatsächlich gesund	$H(\overline{K} \cap T) = 990$	$H(\overline{K} \cap \overline{T}) = 8.910$	$H(\overline{K}) = 9.900$ $= H(\overline{K} \cap T) + H(\overline{K} \cap \overline{T})$
	$H(T) = 1.070$ $= H(K \cap T) + H(\overline{K} \cap T)$	$H(\overline{T}) = 8.930$ $= H(K \cap \overline{T}) + H(\overline{K} \cap \overline{T})$	$H(\Omega) = 10.000$ $= H(K) + H(\overline{K})$ $= H(T) + H(\overline{T})$

RPTU

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Beispiel: Mammographie → Doppelbaum



Kontakt



Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.math.rptu.de
mategnu.de

RPTU