

MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie
an **G**rundvorstellungen orientiert
nachhaltig **u**nterrichten

Verteilungen

durch Kernideen verstehen

Prof. Dr. Jürgen Roth

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

08.11.2026 MaTeGnu – K1 – M4, Bad Kreuznach

KMK-Bildungsstandards

Allgemeine Hochschulreife: Stochastik

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Leitidee L2: Messen

- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten

Leitidee L4: Funktionaler Zusammenhang

- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

Leitidee L5: Daten und Zufall (Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau)

- exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen
- die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Berlin

KMK-Bildungsstandards

Allgemeine Hochschulreife: Stochastik

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Leitidee L5: Daten und Zufall (Erhöhtes Anforderungsniveau)

- für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen (B1)
- Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (B2)
- exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Berlin

Lehrplanalternativen RLP

Grundkurs
(ca. 42 Stunden)

Stochastik 1

+ wahlweise

Stochastik 2 – B1
Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Stochastik 2 – B2
Testen von Hypothesen

Leistungskurs
(ca. 70 Stunden)

Stochastik

 MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe)

Kernideen der Stochastik

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kernidee Konditionale Denkfigur

„Wenn … , dann …"-Strukturen

Beispiel:
Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?

Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die …

- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

Kernidee hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Globale Muster in Daten …

- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten

„Gute" Zufallsstichproben

- Beschaffenheit und Generierung

Kernidee Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee Verteilungen

Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

RPTU



RPTU
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Verteilungen

durch Kernideen verstehen

1. Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
2. Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramme und Pfadregeln
3. Bedingte Wahrscheinlichkeit
4. **Verteilungen: Binomialverteilung & Co**
5. Beurteilende Statistik

mategnu.de

RPTU

MaTeGnu

4

Verteilungen – Binomialverteilung und Co

Lehrplan RLP: Leistungskurs

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
8.	Die Begriffe „Bernoullikette“, „Binomialverteilung“ verstehen und die Formel zur Berechnung der Werte einer Binomialverteilung herleiten (5.04g)	■ Die explizite Berechnung von Werten der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. ■ Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden i.d.R. Rechner benutzt. ■ Anknüpfend an vorangegangene Erfahrungen bietet es sich auch an, Bernoulliketten zu simulieren und Werte der Binomialverteilung auf diese Weise zu bestimmen.
9.	Die Formeln für Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomial-verteilung kennen und anwenden (5.04g)	■ Die Formeln können anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden; ■ ein Beweis ist nicht gefordert.
10.	Eigenschaften der Binomialverteilung kennen, begründen und anwenden (5.04g)	■ Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; ■ der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

Lehrplan RLP: Leistungskurs

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
11.	Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g, 4.12g)	Die SuS sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
12.	Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normal-verteilung) bestimmt (5.09e, 5.10e)	■ Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. ■ Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern. ■ Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können darauf aufbauend die Normalverteilung definiert & Anwendungsbeispiele behandelt werden.
13.	Funktionsterm, Graph und Eigen-schaften der Gaußfunktion Φ kennen (5.09e, 5.10e)	■ Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; ■ der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

Lehrplan RLP: Grundkurs

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
6.	Die Begriffe „Bernoullikette“ und „Binomialverteilung“ verstehen und wissen, wie man die Werte einer Binomialverteilung bestimmen kann (5.04g)	■ Eine explizite Berechnung der Werte der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. ■ Die Herleitung der entsprechenden Formel ist nicht gefordert. ■ Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden Tabellen für die Binomialverteilung benutzt. Binomialverteilungen sollen auch grafisch dargestellt werden (Histogramme).
7.	Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g)	■ Die Formeln sollen anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden. ■ Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die SuS verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann. ■ Hier bietet es sich an, exemplarisch eine statistische Erhebung zu planen und zu beurteilen.

Aufbau der beurteilenden Statistik
Grundkurs

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

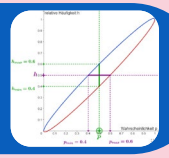
Kernidee: Verteilungen

Kernidee: Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Konfidenzintervall

Ellipsen-diagramm

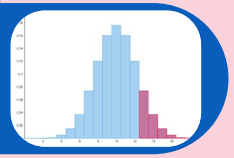


B 1

Testen von Hypothesen

Hypothesentest

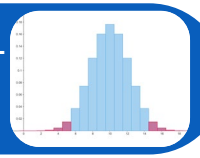
Histo-gramm



B 2

Verteilungsfunktion

Prognose-intervall



Normalverteilung
Näherung für große n

Binomialverteilung

Wahrscheinlich-keitsverteilung

Zufallsvariable

Erwartungswert

Standard-abweichung

Kernidee: Konditionale Denkfigur

Kernidee: Hypothetisch-prog-nostische Wahrscheinlichkeit

RPTU

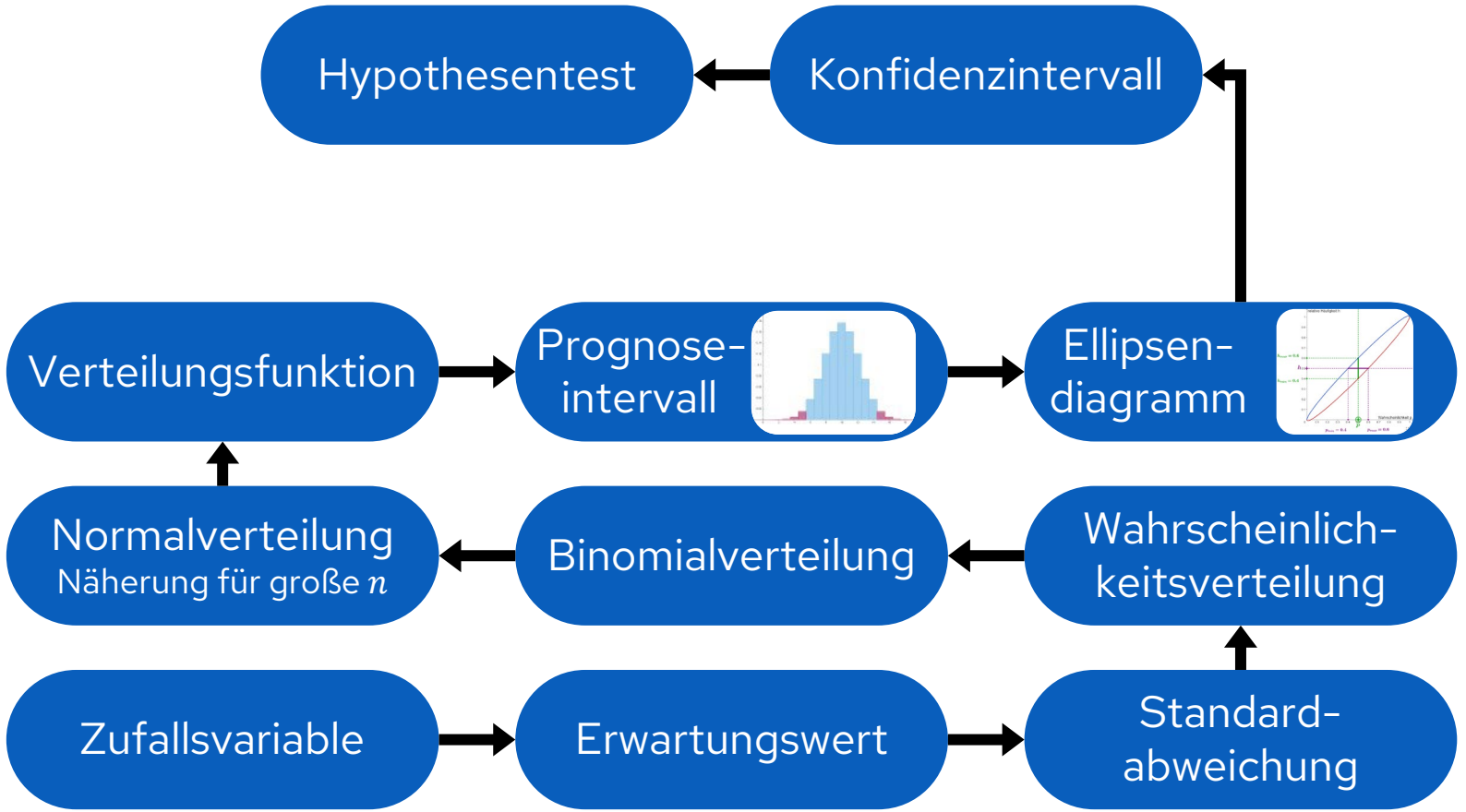
Aufbau der beurteilenden Statistik
Leistungskurs

Kernidee: Verteilungen

Kernidee: Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee: Konditionale Denkfigur

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit



Stochastik-Curriculum

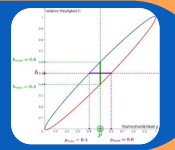
Sekundarstufen I und II

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Beschreibende Statistik

- Erhebung – Daten sammeln
- Graphische Darstellungsformen
- Mittelwerte & Streuungsmaße

Beurteilende Statistik

- Hypothesentest
- Konfidenzintervall
- Verteilungsfunktion
- Prognose-intervall 
- Ellipsen-diagramm 
- Normalverteilung
  Näherung für große n
- Binomialverteilung
- Wahrscheinlich-keitsverteilung
- Zufallsvariable
- Erwartungswert
- Standard-abweichung

Wahrscheinlich-keitsrechnung

- (Mehrstufige) Zufallsexperimente
- Stoch. (Un-)Abhängigkeit
- Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeit

RPTU

MaTeGnu

4.1 Kernidee Verteilungen

Kernideen der Stochastik

Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die …
- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

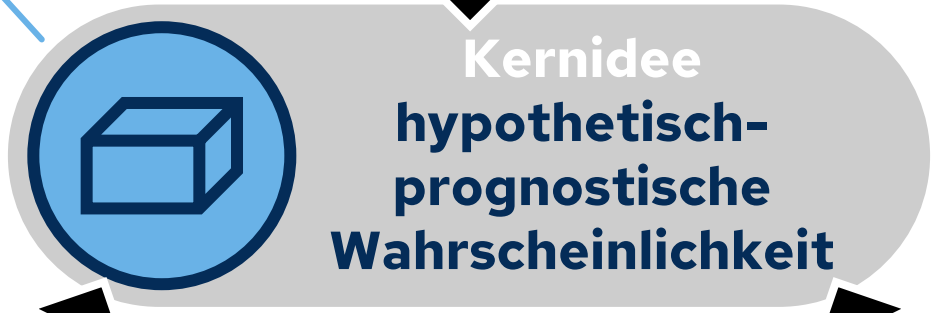
„Gute" Zufallsstichproben
- Beschaffenheit und Generierung



Kernidee
Konditionale Denkfigur

„Wenn … , dann …"-Strukturen

Beispiel:
Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?



Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Globale Muster in Daten …
- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten



Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten



Kernidee
Verteilungen

Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

Kernidee: Verteilungen

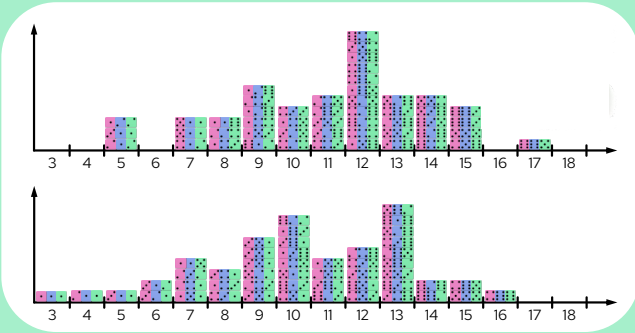
Kernidee
Verteilungen

Globale Muster in Daten …

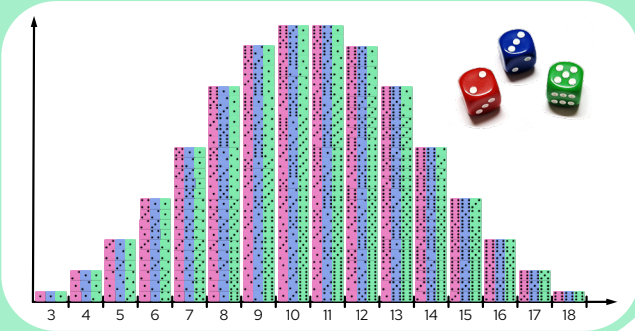
- als **Modell**-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als **Vergleich**selemente für die Struktur der Daten in Stichproben

Empirische Verteilung ↔ theoretische Verteilung

- **Empirische Verteilungen …**
  - basieren auf beobachteten Daten und beschreiben deren Variabilität
  - sind Verteilungen von Häufigkeiten bzw. relativen Häufigkeiten
  - dienen zum Vergleich der Struktur der Daten in verschiedenen Stichproben



- **Theoretische Verteilungen …**
  - modellieren und quantifizieren Variabilität
  - sind Verteilungen von Wahrscheinlichkeiten
  - sind Modelle zur Beschreibung der Realität



Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

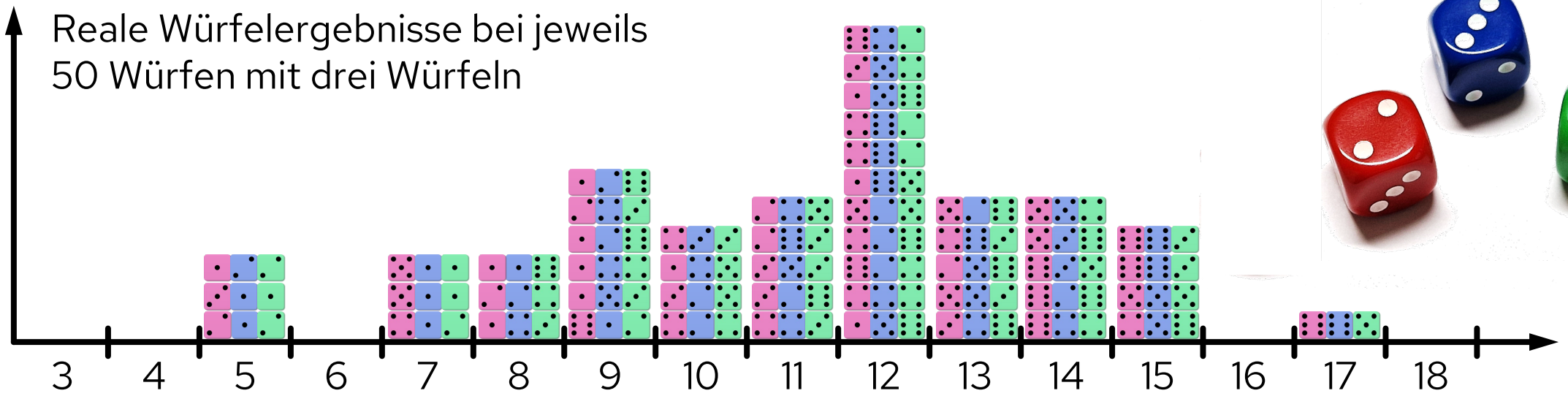
Würfeln mit drei Würfeln

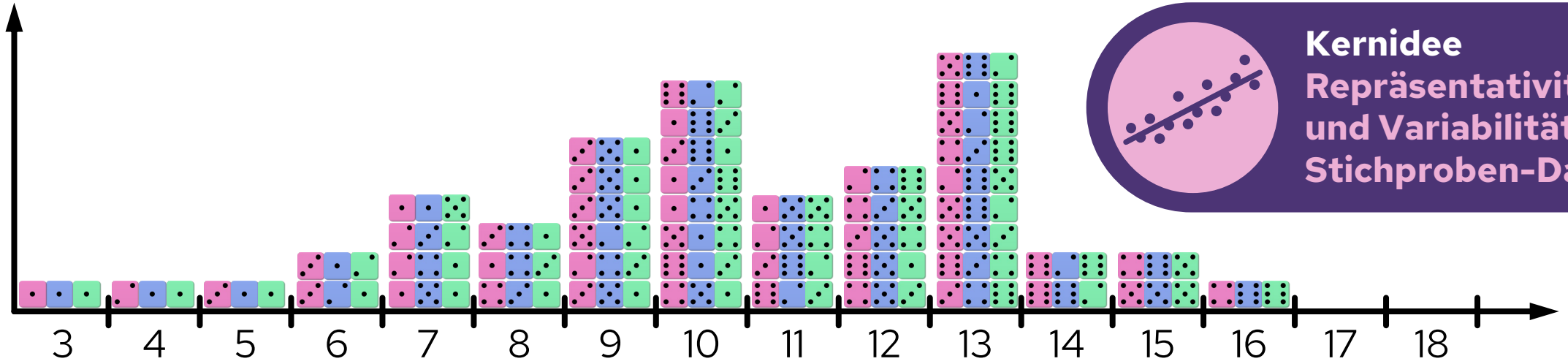
Theoretische Verteilung der Augensummen



Würfeln mit drei Würfeln

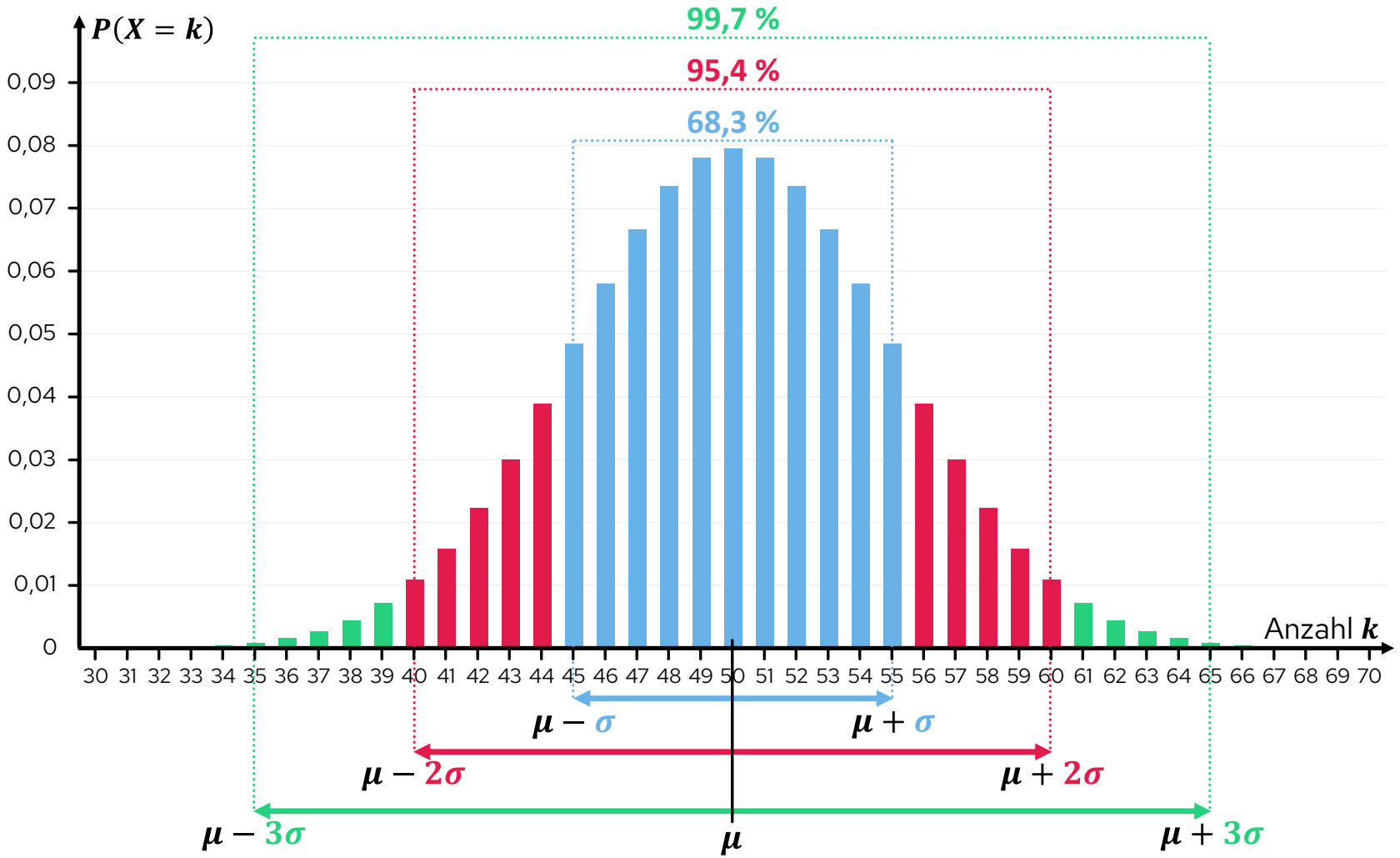
Empirische Verteilung der Augensummen





Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Ausblick: Beurteilende Statistik



MaTeGnu

4.2

Kernidee

Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernideen der Stochastik

Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle, die …
- relative Häufigkeiten in der Realität vorhersagen und
- bei schlechter Passung zur Realität modifiziert werden.

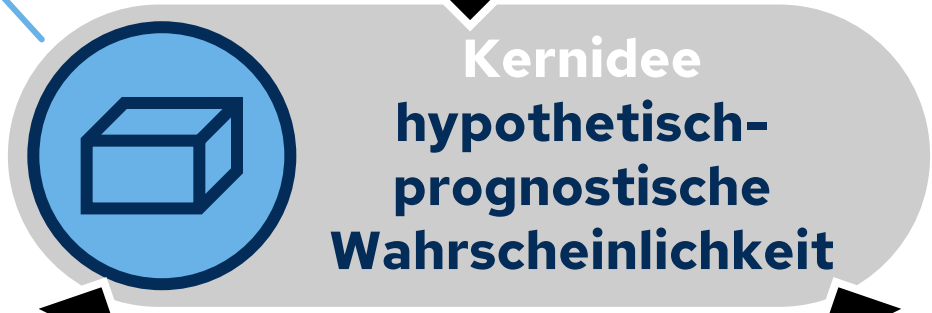
„Gute" Zufallsstichproben
- Beschaffenheit und Generierung



Kernidee
Konditionale Denkfigur

„Wenn … , dann …"-Strukturen

Beispiel:
Wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B?



Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Globale Muster in Daten …
- als Modell-Elemente zur Beschreibung der Realität
- als Vergleichselemente für die Struktur der Stichproben-Daten



Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten



Kernidee
Verteilungen

Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

Kernidee: Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Generierung und Beschaffenheit von „guten" Zufallsstichproben

Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- **Repräsentativität einer Stichprobe**
  - … bezüglich der Population reflektieren.
  - Entscheidet über die Generalisierbarkeit der Ergebnisse.
- **Akzeptanz der Variabilität von Stichprobendaten**
  - Verständnis dafür entwickeln, dass eine Stichprobe ein Element einer Menge von potenziellen anderen Stichproben ist.
  - Verständnis für das Gesetz der großen Zahlen anbahnen.



Ossadnik, H., Roth, J. & Engel, J. (2025). Kernideen zu Hypothesentests entwickeln und validieren. In L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2025 (S. 1062-1065). WTM-Verlag.

Ausblick: Beurteilende Statistik

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Prognoseintervall

Gläserne Urne



Bekannt:
Trefferwahr-scheinlichkeit p
in der
Grundgesamtheit

Modell (p)

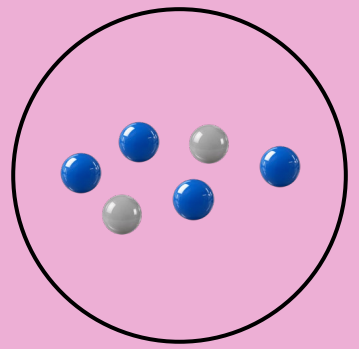
schließen auf



Gesucht:
Relative Häufigkeiten h
mit denen in einer
Stichprobe
zu rechnen ist.

Wirklichkeit (h)

Konfidenzintervall



Bekannt:
Relative Häufigkeit h
in der
Stichprobe

Wirklichkeit (h)

schließen auf

Schwarze Urne



Gesucht:
Wahrscheinlichkeiten p
in der
Grundgesamtheit
die zu h passen.

Modell (p)

Ossadnik, H. & Engelhardt, A. (2024). Konfidenzintervalle verstehensorientiert unterrichten – Das Urnenmodell als Verständnisanker in einer digital angereicherten Lernumgebung. Mathematik lehren, 247, 38-44.

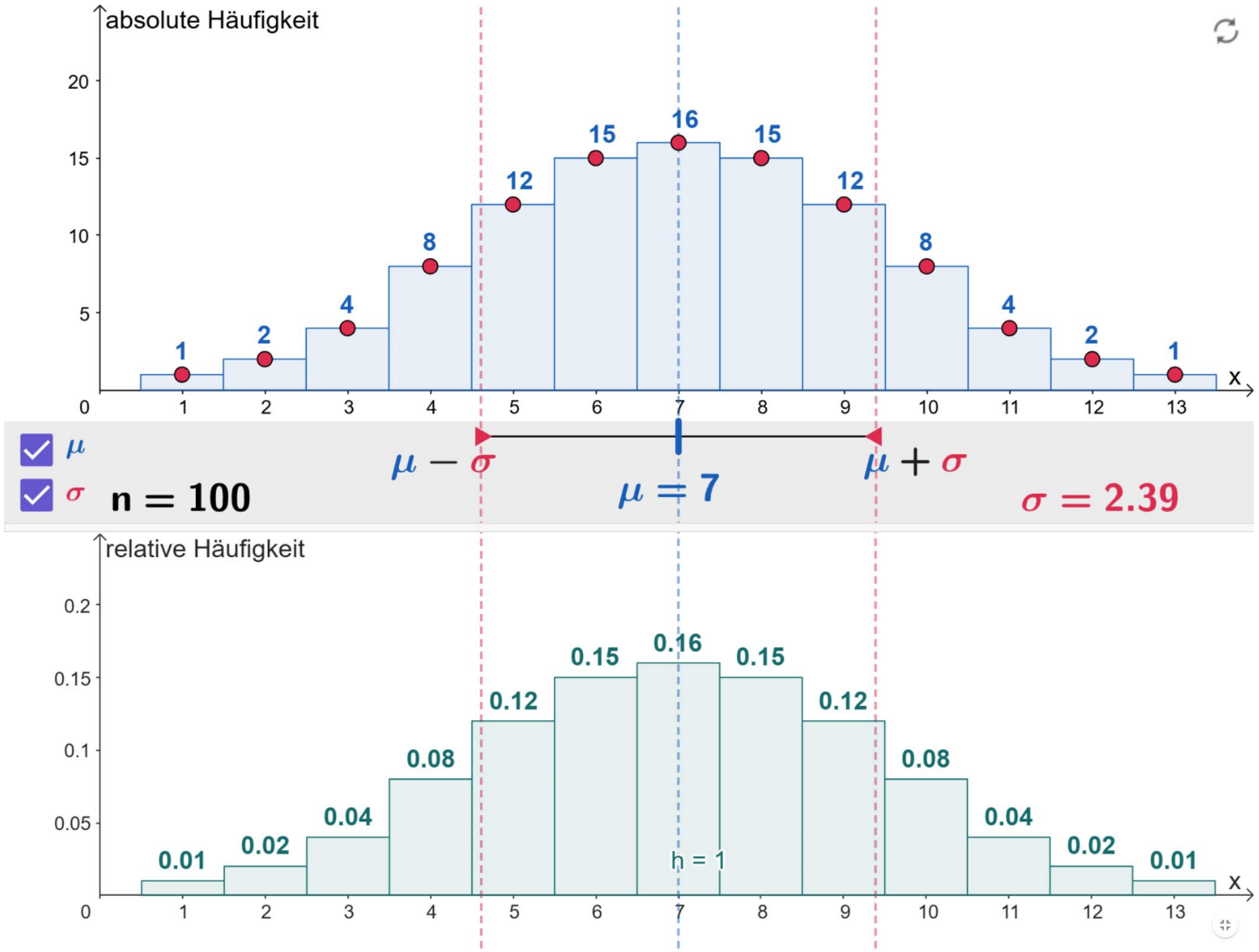
MaTeGnu

4.3 Das Konzept der Verteilung

Allgemeine Verteilungen

Bemerkung

- Kenngrößen von Verteilungen, Prognoseintervalle, Konfidenz-intervalle und Hypothesentests werden gewöhnlich nur für die Binomialverteilung und evtl. die Normalverteilung thematisiert.
- Für das Verständnis dieser Konzepte ist es hilfreich, auch allgemeine Verteilungen zu betrachten.



 https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/skrjhkaz

Binomialverteilung mit GeoGebra

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

w = false

BV = Binomial(n, p, w)
= 1

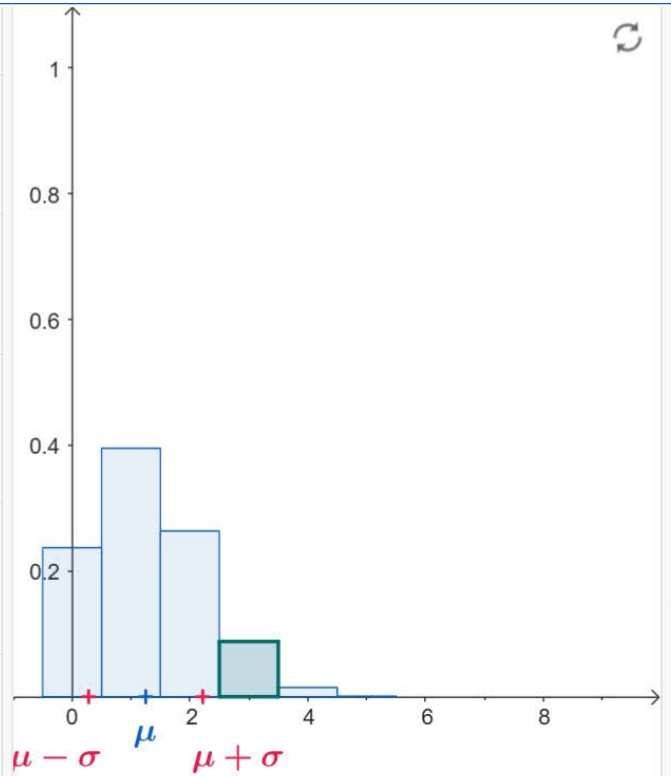
$p_{k,1}$ = Binomial(n, p, k, w)
= 0.0879

$p_{k,2} = nCr(n, k)\ p^k\ (1-p)^{n-k}$
= 0.0879

μ = Summe(i Binomial(n, p, i, false), i,
= 1.25

$\sigma = \sqrt{n\ p\ (1-p)}$
= 0.9682

NV(x) = Normal(μ, σ, x, w)
$= \frac{e^{\frac{-(x-1.25)^2}{0.9682^2 \cdot 2}}}{|0.9682|\ \sqrt{2\ \pi}}$





Normalverteilung:
Gute Näherung für große n

Aufgabe
Erkunden Sie Eigenschaften der Binomialverteilung anhand der GeoGebra-Datei.

https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/za3kuwrb

GeoGebra Rechner Suite: https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/nvbedwnq

RPTU

Normalverteilung mit GeoGebra

w = false

$$NV(x) = Normal(\mu, \sigma, x, w)$$

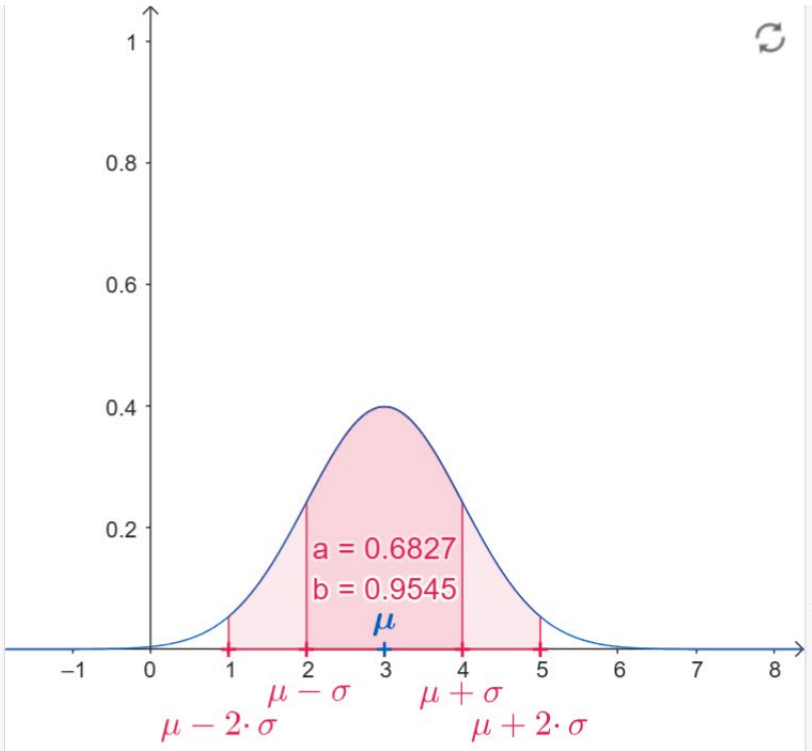
$$= \frac{e^{\frac{-(x-3)^2}{1^2 \cdot 2}}}{|1| \sqrt{2\pi}}$$

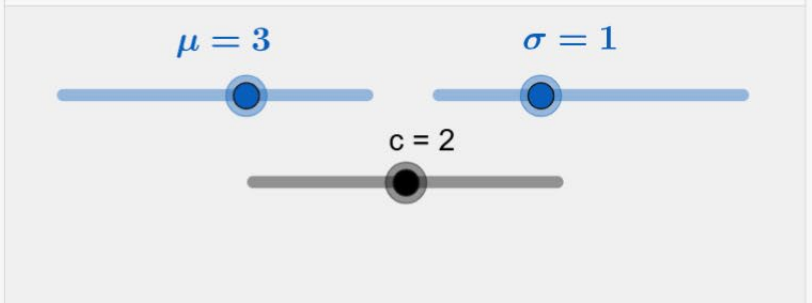
$$a = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} NV(x)\,dx$$

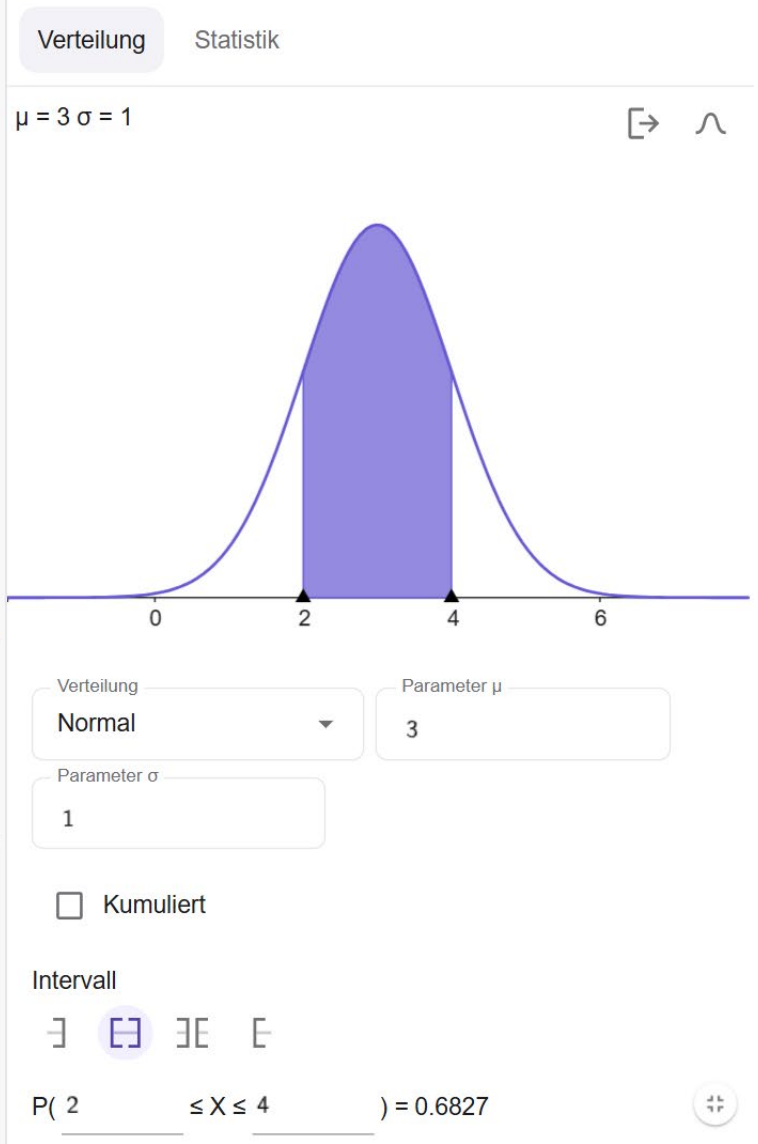
$$= 0.6827$$

$$b = \int_{\mu-c\sigma}^{\mu+c\sigma} NV(x)\,dx$$

$$= 0.9545$$







Aufgabe: Erkunden Sie Eigenschaften der Normalverteilung anhand der GeoGebra-Datei.

https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/afed3jme

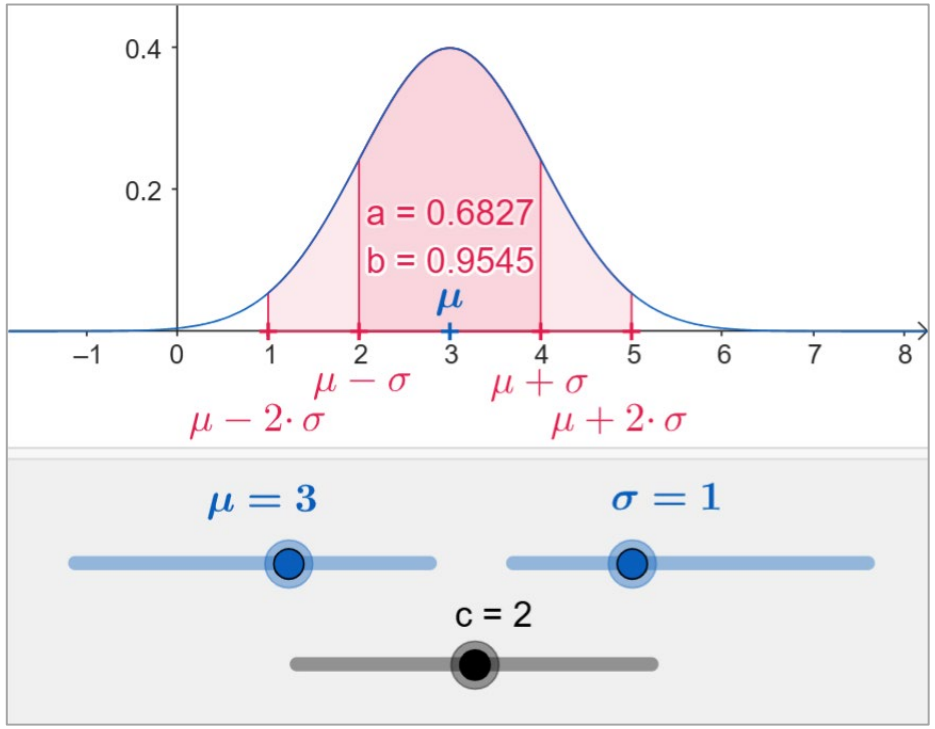
https://www.geogebra.org/m/j8peujcb

Sigma-Regeln (empirisch bestimmt)

Hier wird folgende Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von c untersucht:

$$P(\mu - c \cdot \sigma \leq X \leq \mu + c \cdot \sigma)$$

$$= \int_{\mu - c \cdot \sigma}^{\mu + c \cdot \sigma} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx$$



Sigma-Regeln: Ist X eine normalverteilte Zufallsgröße, mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ so gilt:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\ \%$
- $P(\mu - 1{,}64 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64 \cdot \sigma) \approx 90{,}0\ \%$
- $P(\mu - 1{,}96 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96 \cdot \sigma) \approx 95{,}0\ \%$
- $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 95{,}4\ \%$
- $P(\mu - 2{,}58 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58 \cdot \sigma) \approx 99{,}0\ \%$
- $P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 99{,}7\ \%$

Bemerkung

Die Laplace-Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$ muss erfüllt sein, damit man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung annähern kann. In diesem Fall gelten die Sigma-Regeln näherungsweise auch für die Binomialverteilung.

 https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/afed3jme

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion

Bemerkung

- $P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das zum Wert x der Zufallsvariable X gehört.
- Sprechweise: „$P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt."
- Notation

$$P(X = x) \coloneqq P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$$

Definition Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ist X eine Zufallsvariable, dann heißt $f\colon \mathbb{R} \to [0;1], x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) \coloneqq P(X = x) = P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X.

Definition Verteilungsfunktion

Ist X eine Zufallsvariable, dann heißt $F\colon \mathbb{R} \to [0;1], x \mapsto F(x)$ mit

$$F(x) \coloneqq P(X \leq x) = P(\{X \leq x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.

Bemerkung

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung verteilt Wahrscheinlichkeiten auf Ereignisse E_1 bis E_n. Dabei gilt:

(1) E_1 bis E_n sind paarweise disjunkt.

(2) $E_1 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$

(3) $P(E_1) + \cdots + P(E_n) = 1$

MaTeGnu

4.4

Zufallsvariablen

Funktionen, die Ergebnissen reelle Zahlen zuordnen

Zufallsvariable

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



Definition Zufallsvariable

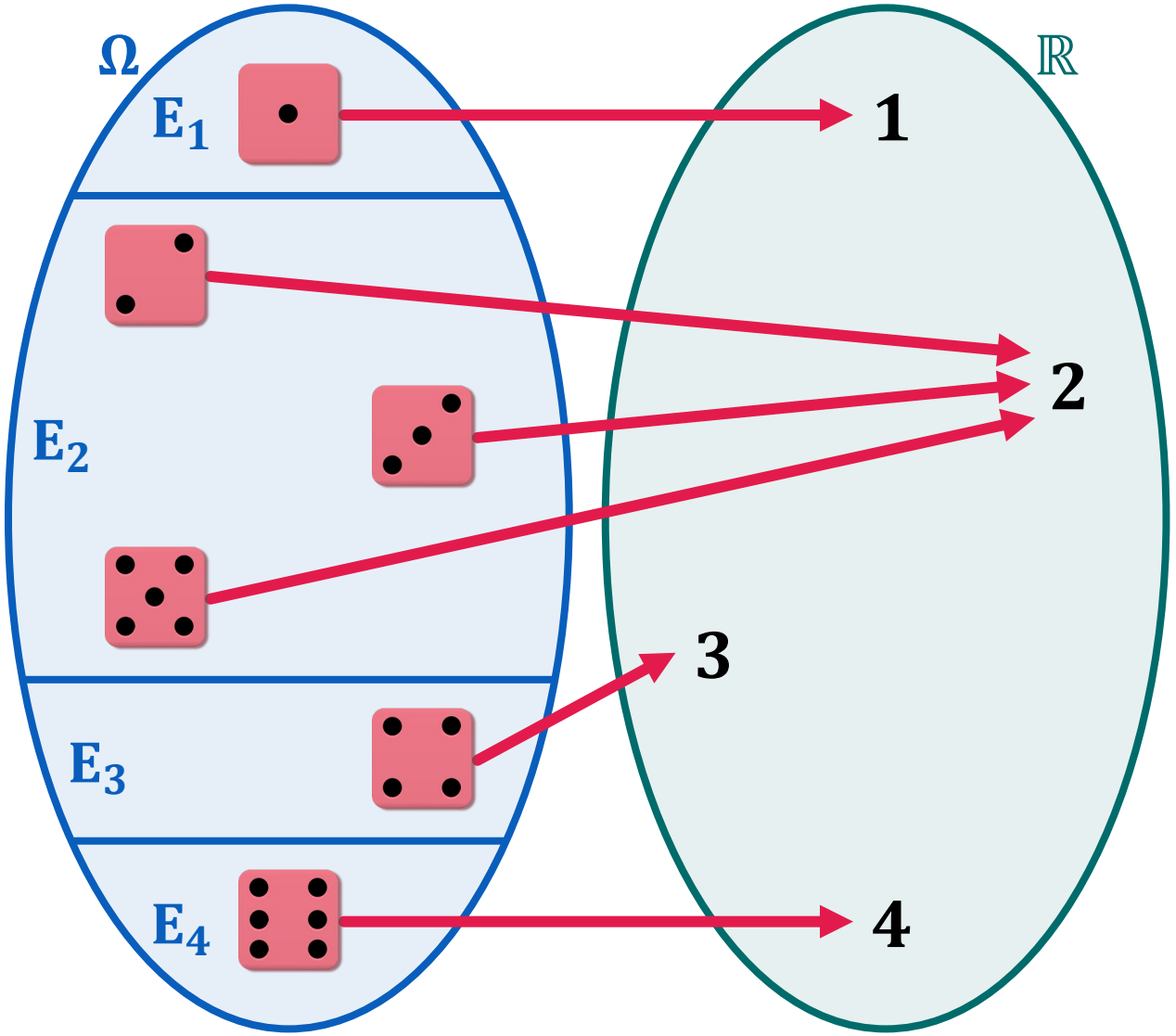
Eine Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **Zufallsvariable** (auch **Zufallsgröße**).

$$X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Anzahl x der Teiler der geworfenen Augenzahl zu: $X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

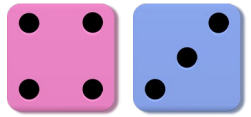
Bemerkung: Obige Zufallsvariable X ist nur eine von sehr vielen möglichen Zufallsvariablen zum Zufallsexperiment Würfeln mit einem Würfel. Man könnte z.B. auch die Zufallsvariable Y definieren, die der Augenzahl 6 den Wert 4 € und allen anderen Augenzahlen den Wert -1 € (als Gewinnausschüttung) zuordnet.



Beispiel: $E_2 := \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 2\} =$ {⚁; ⚂; ⚄}

Zufallsvariable

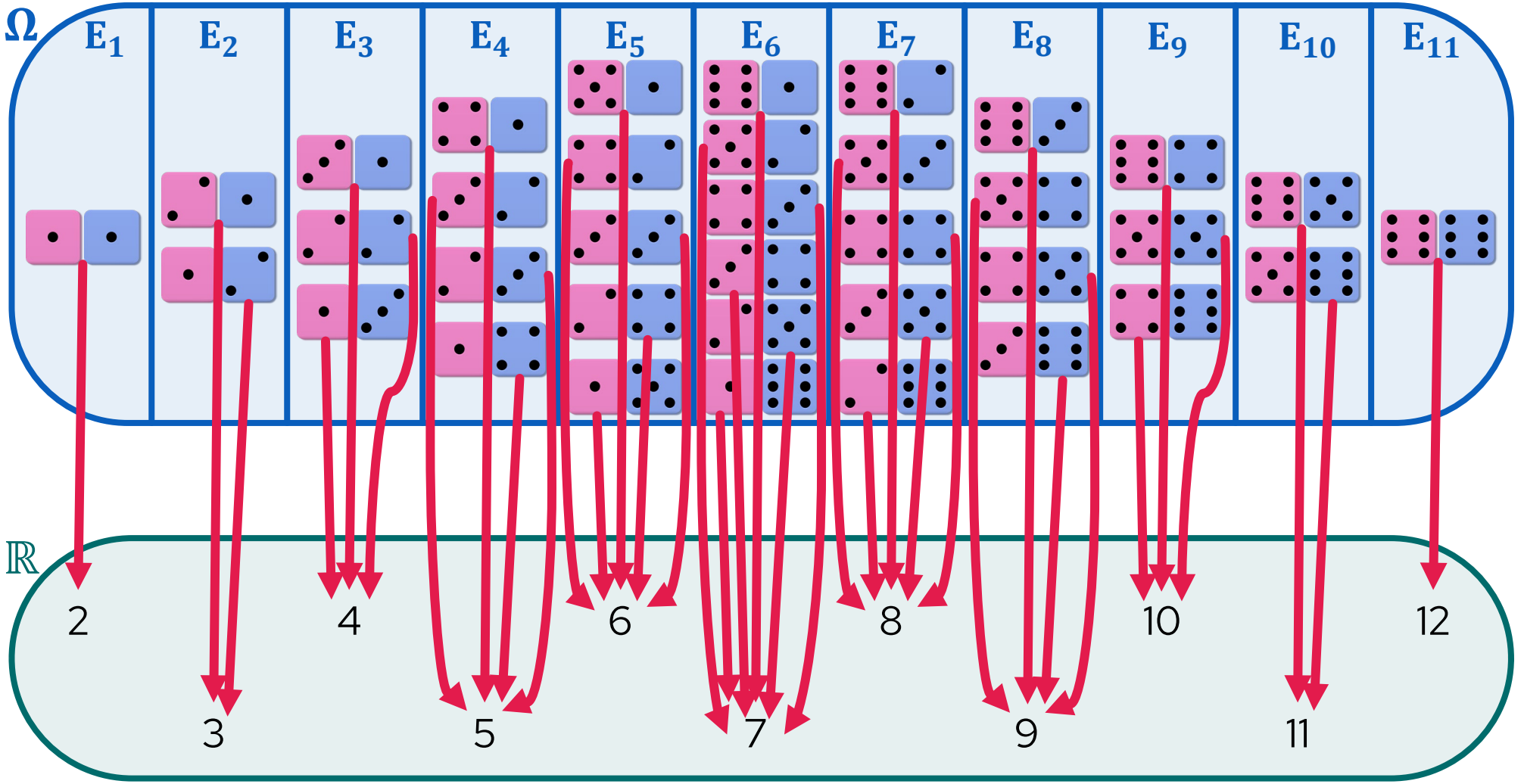
Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln



Beispiel:
Würfeln mit zwei Würfeln

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$



Beispiel: $E_3 := \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 4\} = \{(1;3); (2;2); (3;1)\}$

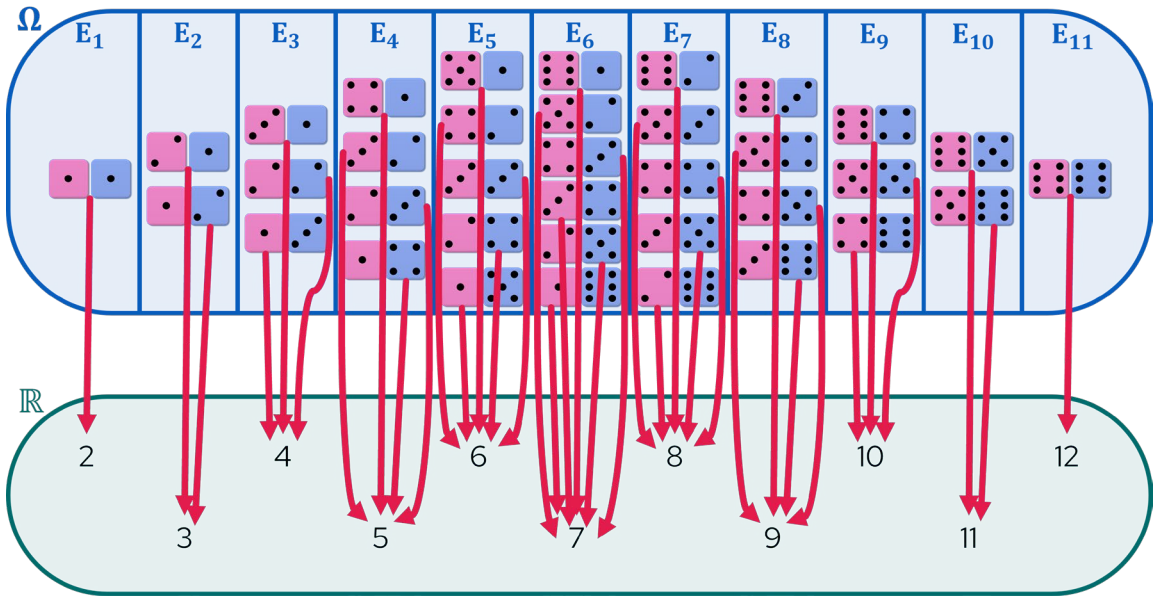
MaTeGnu

4.5 Erwartungswert und Standardabweichung

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:
$X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

Aufgabe: Welche mittlere Augensumme $\mu = E(X)$ ist beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erwarten?



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Idee: Die Augensummen treten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auf, sie sollten also gewichtet mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit in den im Mittel erwarteten Wert (**Erwartungswert**) eingehen.

$$\mu = E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Zusammenhang zwischen arithmetischem Mittel und Erwartungswert

Zufallsexperiment: Es wird 20-mal mit einem Spielwürfel gewürfelt. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \to \{1,2,3,4,5,6\}, \omega \mapsto x$

Ergebnis einer Versuchsreihe von $n = 20$ Würfelwürfen: $6, 3, 3, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 2, 3, 3, 3, 6, 5, 4, 6, 1, 5, 5$

Realität: Arithmetisches Mittel

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{6+3+3+3+5+4+3+1+6+2+3+3+3+6+5+4+6+1+5+5}{20}$$

$$= \frac{(1+1)+(2)+(3+3+3+3+3+3+3)+(4+4)+(5+5+5+5)+(6+6+6+6)}{20} = \frac{1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 7+4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 4}{20}$$

Mit $H_n(x) =$ „Absolute Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ ergibt sich:

$$\overline{x} = \frac{1\cdot H_n(1)+2\cdot H_n(2)+3\cdot H_n(3)+4\cdot H_n(4)+5\cdot H_n(5)+6\cdot H_n(6)}{n}$$

$$= 1 \cdot \frac{H_n(1)}{n} + 2 \cdot \frac{H_n(2)}{n} + 3 \cdot \frac{H_n(3)}{n} + 4 \cdot \frac{H_n(4)}{n} + 5 \cdot \frac{H_n(5)}{n} + 6 \cdot \frac{H_n(6)}{n}$$

Mit $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{n} =$ „Relative Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ folgt:

$$\overline{x} = x_1 \cdot h_n(x_1) + \cdots + x_k \cdot h_n(x_k)$$

Wechsel von der **Realität** zum **Modell**

Modell: Erwartungswert

$$\mu = E(X) := x_1 \cdot P(X = x_1) + \cdots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

Erwartungswert

Definition Erwartungswert

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ heißt

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \cdots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

der **Erwartungswert** von X.

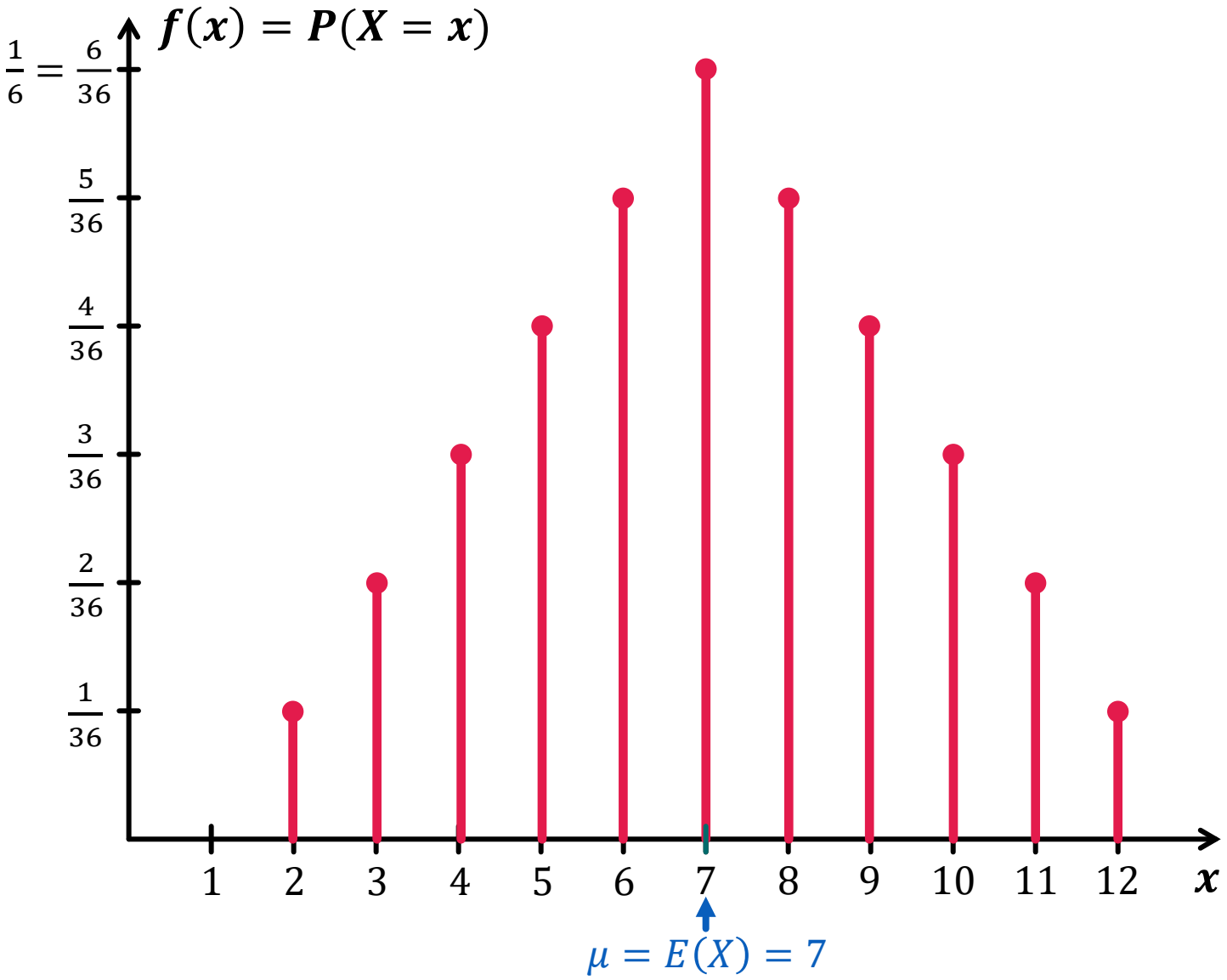
Ausgedrückt mit dem Summenzeichen:

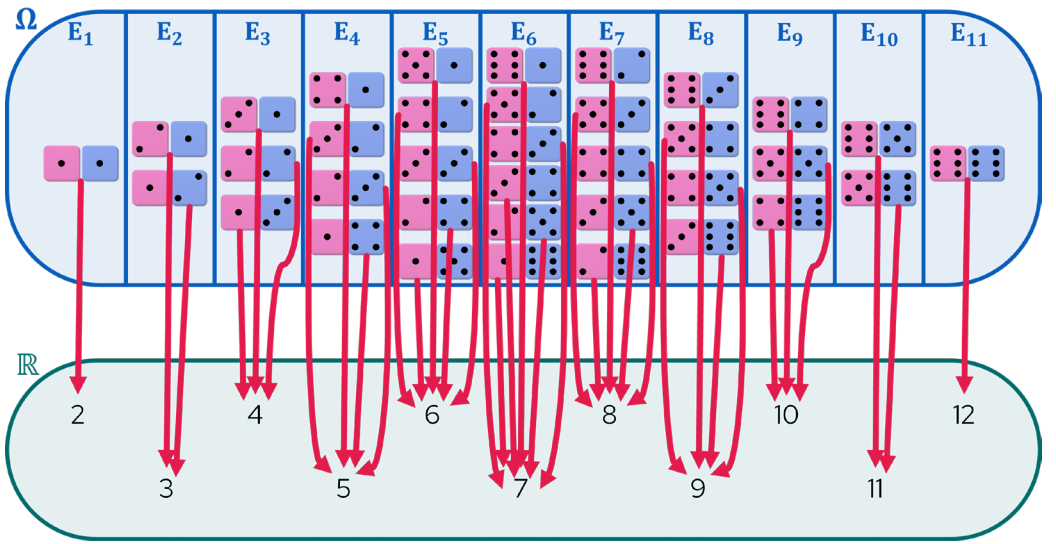
$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Bemerkungen

- Statt $E(X)$ schreibt man auch $\mu(X)$ bzw. nur μ, wenn man nur eine Zufallsvariable betrachtet.
- Bei mehreren Zufallsvariablen X_i werden die Erwartungswerte oft mit $E(X_i) = \mu_i$ bezeichnet.
- Interpretiert man die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Masseverteilung, mit den $P(X = x_i)$ als punktförmigen Massen, dann lässt sich $\mu = E(X)$ als die Stelle deuten, an der man unterstützen muss, damit die „Waage“ im Gleichgewicht bleibt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung



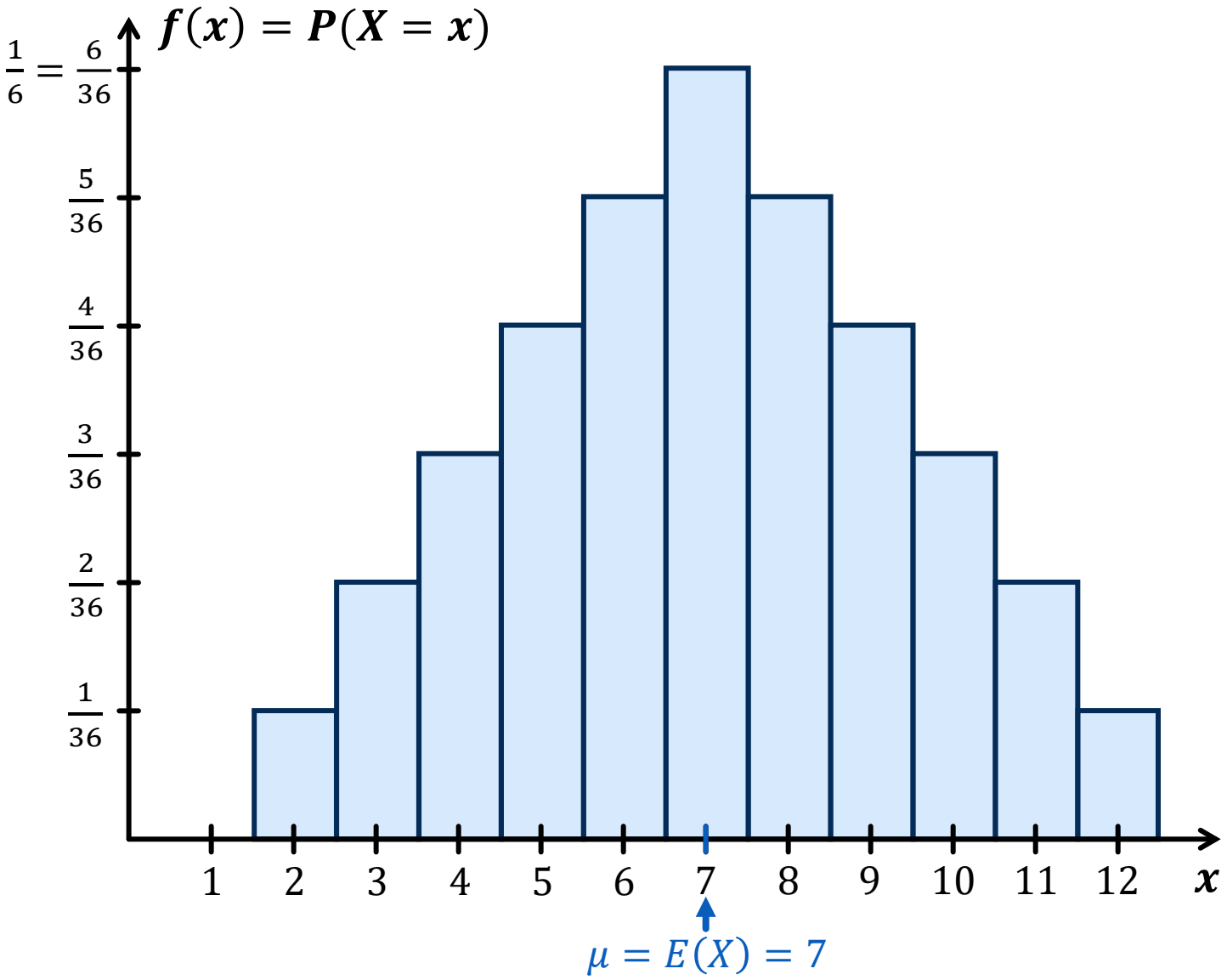


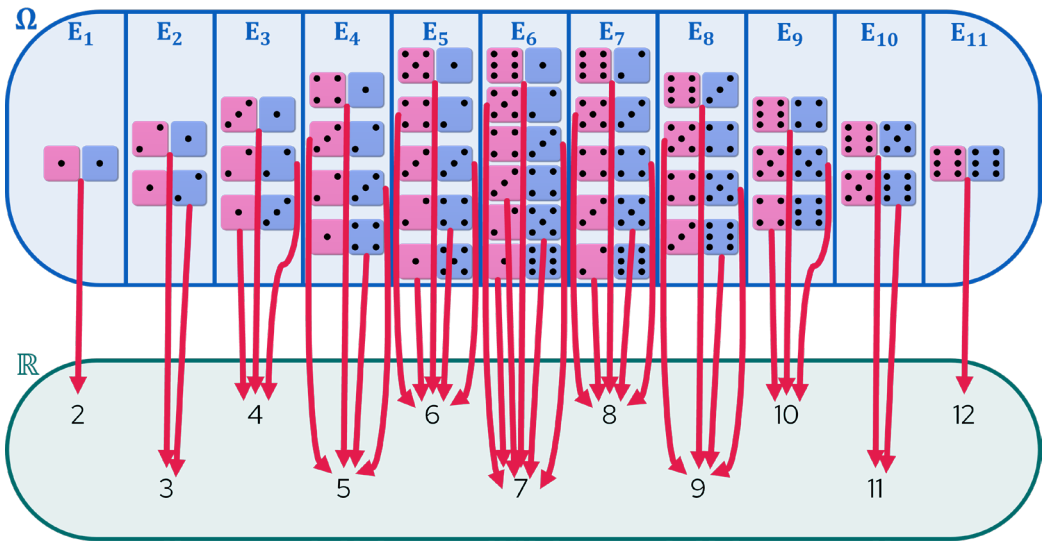
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung



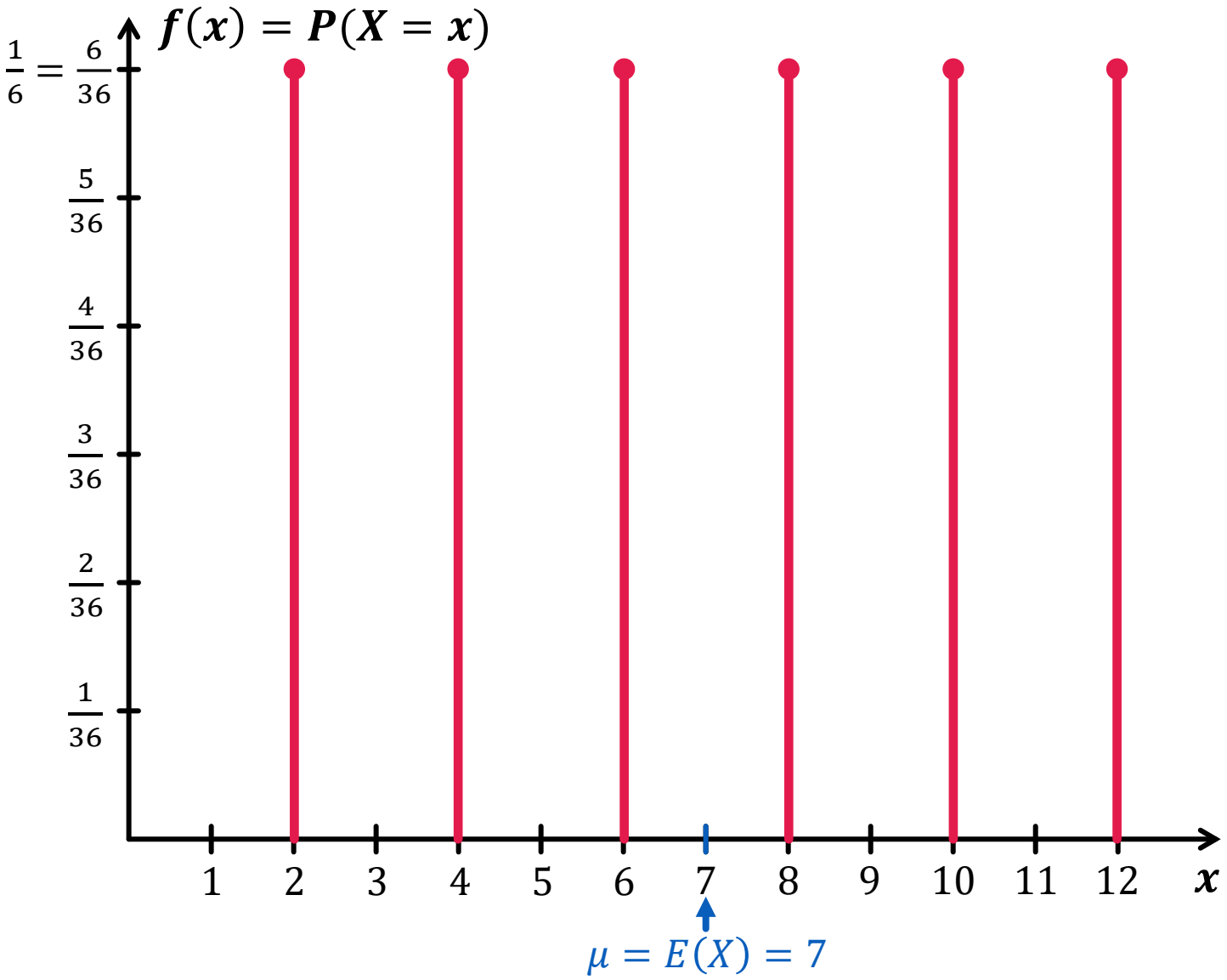


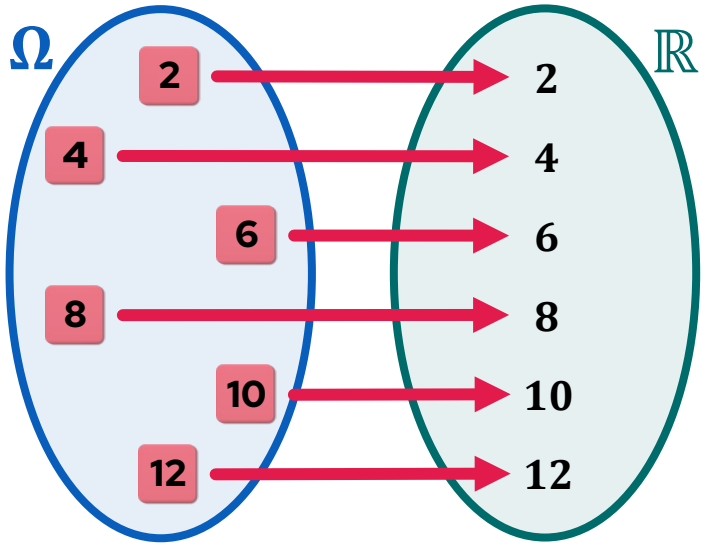
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

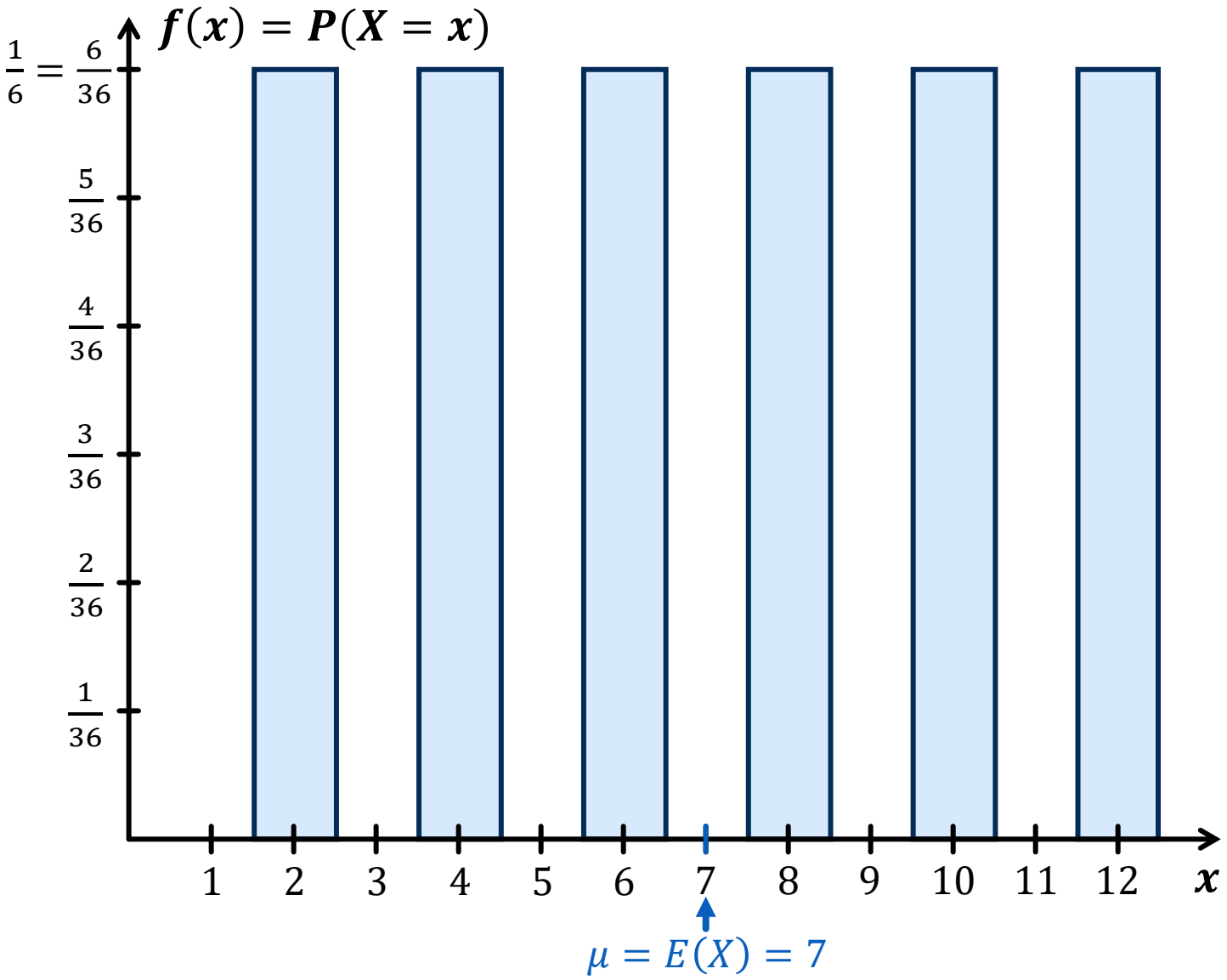


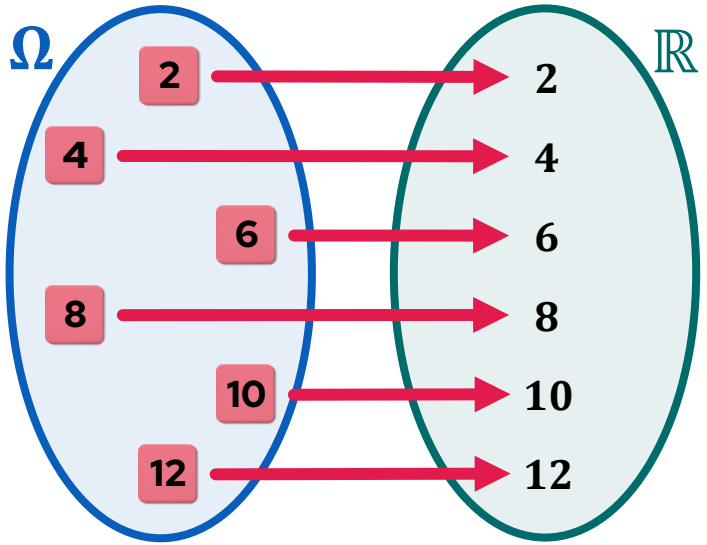


x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel mit den Augenzahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

Wahrscheinlichkeitsverteilung





x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

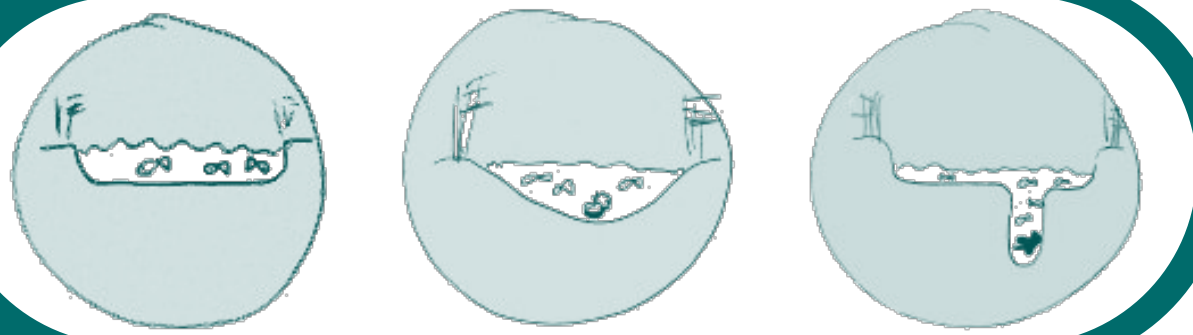
Beispiel: Würfeln mit einem Würfel mit den Augenzahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

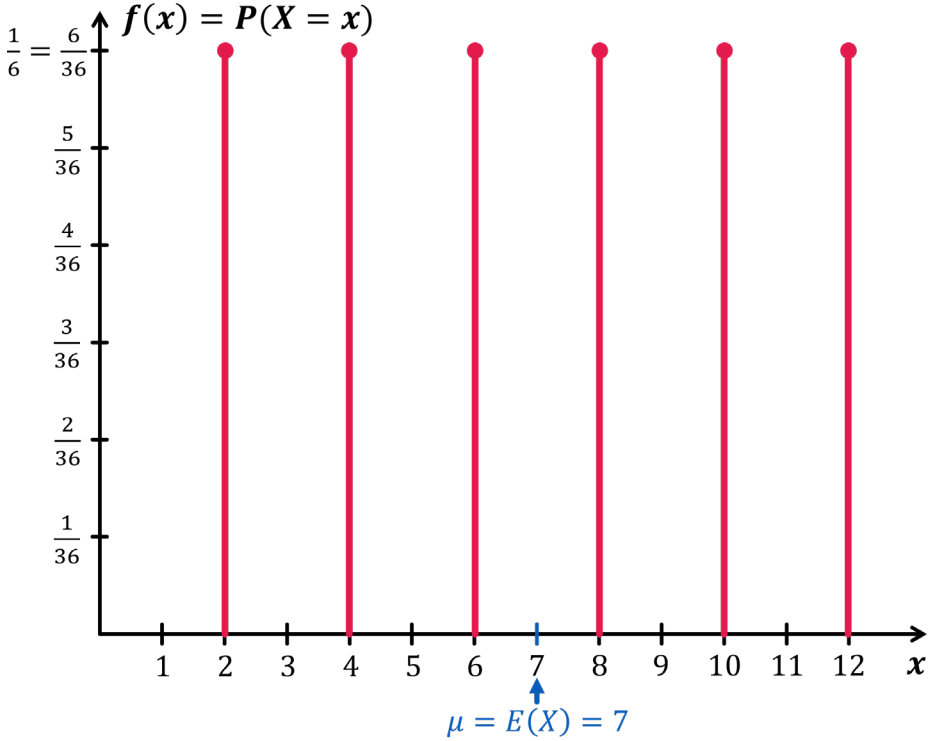
Warum Streuungsmaße?

Durchschnitte (Erwartungswerte) **allein machen nicht glücklich!**

Krämer, W. (2006). So lügt man mit Statistik. Piper

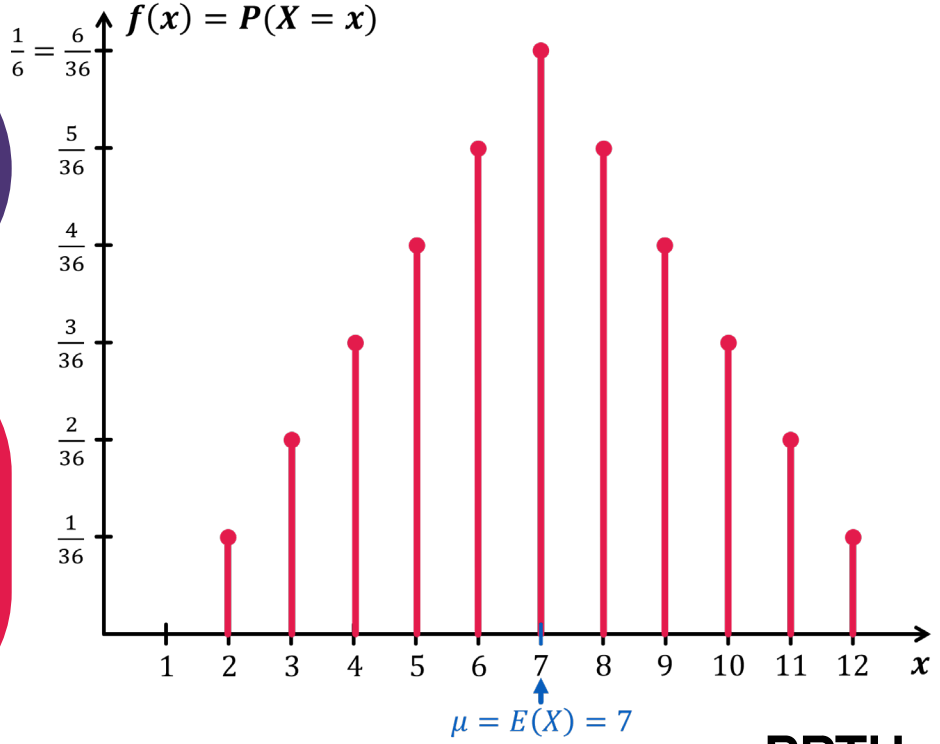
Beispiel: Flussquerschnitte gleicher mittlerer Tiefe





Wahrscheinlichkeits-verteilungen mit demselben Erwartungswert $E(X)$.

Gesucht:
Mittlere Abweichung der Ausprägungen der Zufallsvariable vom Erwartungswert als Maß für die Streuung.



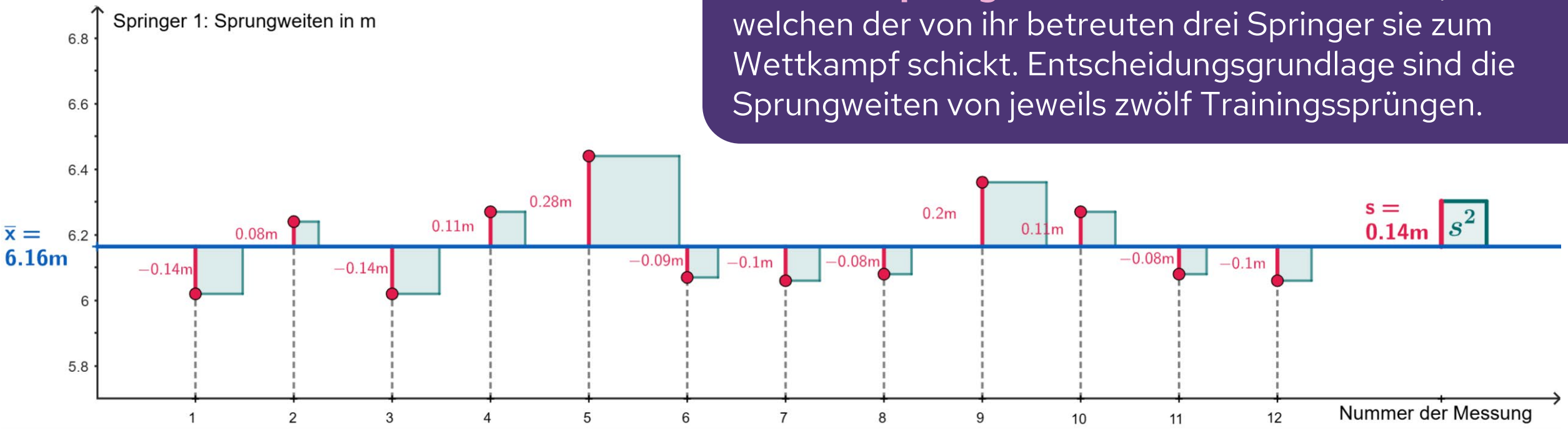
https://www.geogebra.org/m/wzm6mwpt

https://www.geogebra.org/m/zahmzfqx

Streuungsmaße
Beispiel: Weitsprung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Eine **Weitsprung-Trainerin** muss entscheiden, welchen der von ihr betreuten drei Springer sie zum Wettkampf schickt. Entscheidungsgrundlage sind die Sprungweiten von jeweils zwölf Trainingssprüngen.



Springer 1

Springer 2

Springer 3

Weiter

☑ $\bar{x}$ ☑ $x - \bar{x}$ ☑ $(x - \bar{x})^2$

☑ mittlere absolute Abweichung vom Mittelwert

$$\frac{1}{12} \cdot \left((x_1 - \bar{x}) + \ldots + (x_{12} - \bar{x})\right) = 0\text{m}$$

☑ mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert (empirische Varianz s²)

$$s^2 = \frac{1}{12} \cdot \left((x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_{12} - \bar{x})^2\right) = 0.02\text{m}^2$$

☑ empirische Standardabweichung s

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot \left((x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_{12} - \bar{x})^2\right)} = 0.14\text{m}$$

Zusammenhang: Empirische Standard-abweichung s und Standardabweichung σ

Zufallsexperiment: Es wird 20-mal mit einem Spielwürfel gewürfelt. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \to \{1,2,3,4,5,6\}, \omega \mapsto x$

Ergebnis einer Versuchsreihe von $n = 20$ Würfelwürfen: $6, 3, 3, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 2, 3, 3, 3, 6, 5, 4, 6, 1, 5, 5$

Realität: Arithm. Mittel s^2 der quadratischen Abweichungen vom arithm. Mittel $\bar{x} = 3,5$

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3{,}5)^2\cdot 2+(2-3{,}5)^2\cdot 1+(3-3{,}5)^2\cdot 7+(4-3{,}5)^2\cdot 2+(5-3{,}5)^2\cdot 4+(6-3{,}5)^2\cdot 4}{20}$$

Mit $H_n(x) =$ „Absolute Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ ergibt sich:

$$s^2 = \frac{(1-\bar{x})^2\cdot H_n(1)+(2-\bar{x})^2\cdot H_n(2)+(3-\bar{x})^2\cdot H_n(3)+(4-\bar{x})^2\cdot H_n(4)+(5-\bar{x})^2\cdot H_n(5)+(6-\bar{x})^2\cdot H_n(6)}{n}$$

$$= (1-\bar{x})^2\cdot\frac{H_n(1)}{n}+(2-\bar{x})^2\cdot\frac{H_n(2)}{n}+(3-\bar{x})^2\cdot\frac{H_n(3)}{n}+(4-\bar{x})^2\cdot\frac{H_n(4)}{n}+(5-\bar{x})^2\cdot\frac{H_n(5)}{n}+(6-\bar{x})^2\cdot\frac{H_n(6)}{n}$$

Mit $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{n} =$ „Relative Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ folgt:

$$s^2 = (x_1-\bar{x})^2\cdot h_n(x_1)+\cdots+(x_k-\bar{x})^2\cdot h_n(x_k) \Rightarrow s = \sqrt{(x_1-\bar{x})^2\cdot h_n(x_1)+\cdots+(x_k-\bar{x})^2\cdot h_n(x_k)}$$

Wechsel von der **Realität** zum **Modell**

Modell: **Varianz:** $\sigma^2 := (x_1-\mu)^2\cdot P(X=x_1)+\cdots+(x_k-\mu)^2\cdot P(X=x_k)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} := \sqrt{(x_1-\mu)^2\cdot P(X=x_1)+\cdots+(x_k-\mu)^2\cdot P(X=x_k)}$

Streuungsmaße
Varianz und Standardabweichung

Bemerkung: Würden zur Messung der mittleren Abweichung vom Erwartungswert nur die Differenzen $x_i - \mu$ gebildet, dann würden sich Abweichungen nach unten und oben über die unterschiedlichen Vorzeichen gegenseitig aufheben.

Durch das Quadrieren der Terme $(x_i - \mu)^2$ entfällt dieser Effekt.

Definition Varianz

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ und dem Erwartungswert $E(X) = \mu$ heißt

$$\mathbf{Var}(X) = E\big((X - \mu)^2\big)$$
$$= (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \cdots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)$$

die **Varianz** von X.

Bemerkung: Die Maßeinheit der Varianz $\mathrm{Var}(X)$ ist das Quadrat der Einheit, in der die Zufallsvariable X gemessen wird.

Zur leichteren Interpretierbarkeit wurde deshalb mit der Standardabweichung $\sigma(X)$ eine Maßzahl konstruiert, die dieselbe Einheit wie X hat.

Für die Varianz schreibt man auch σ^2.

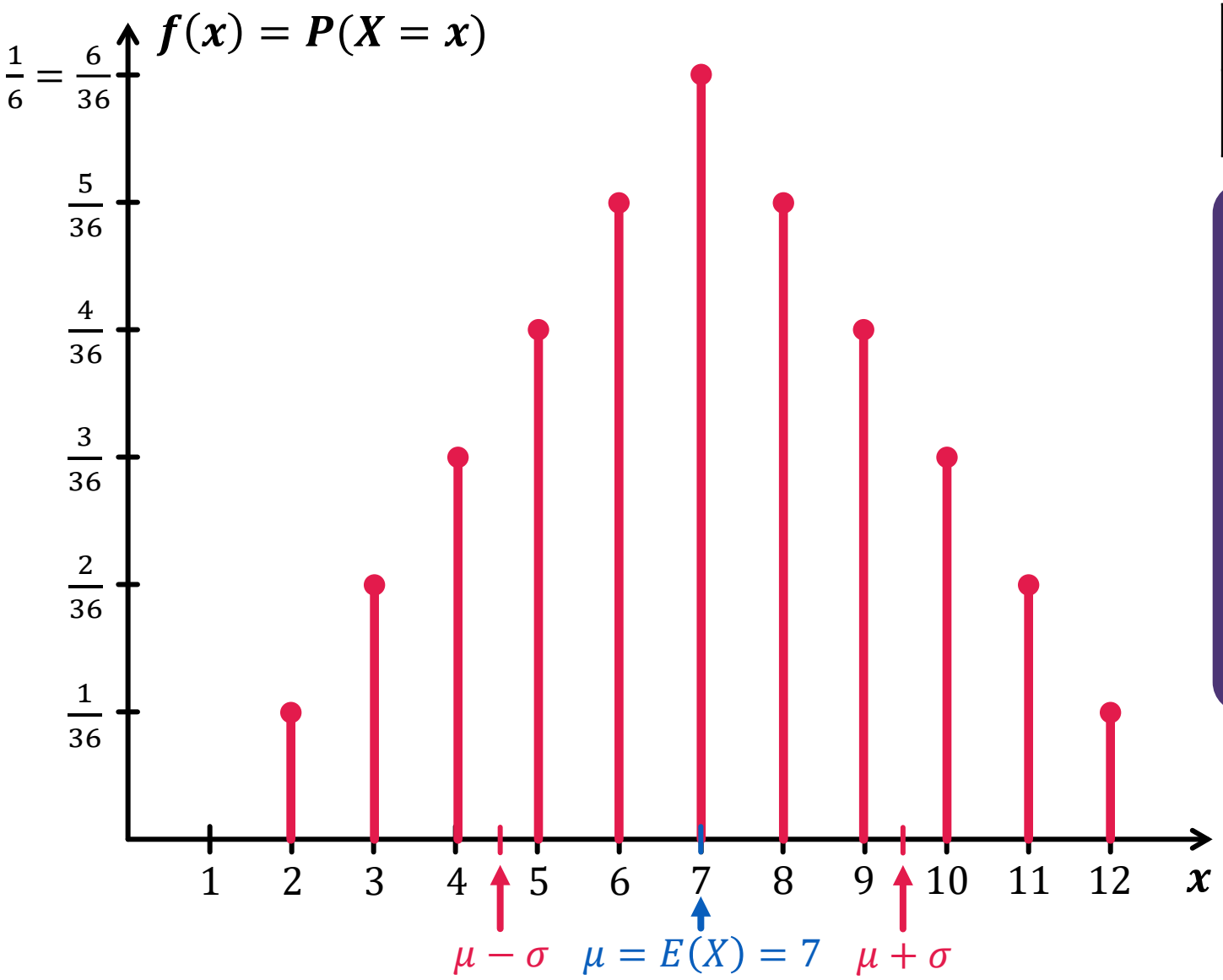
Definition Standardabweichung

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ und dem Erwartungswert $E(X) = \mu$ heißt

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$
$$= \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \cdots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)}$$

die **Standardabweichung** von X.

Streuungsmaß: Standardabweichung



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Varianz σ^2

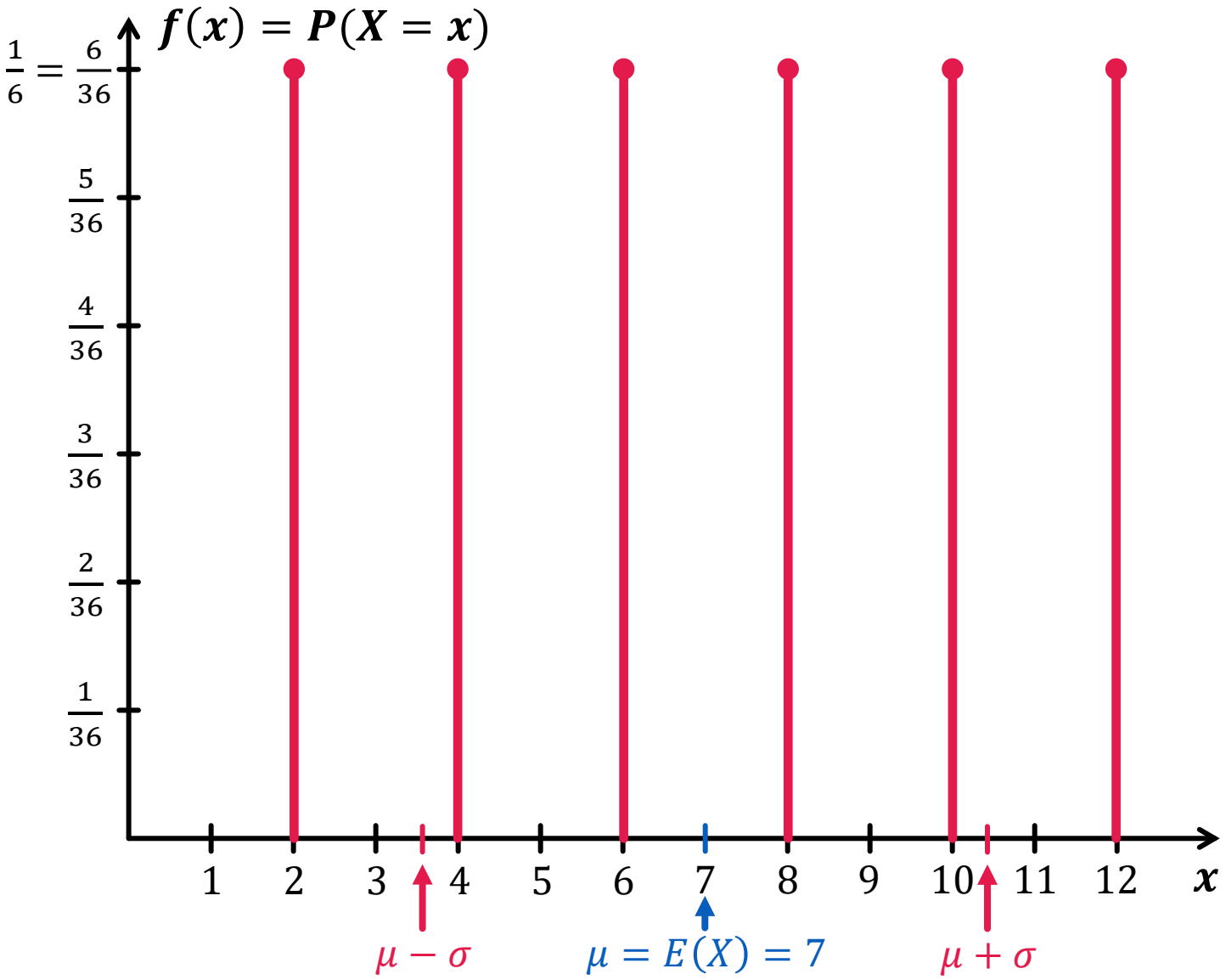
$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$$
$$= (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4-7)^2 \cdot \frac{3}{36}$$
$$+ (5-7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (6-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7-7)^2 \cdot \frac{6}{36}$$
$$+ (8-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9-7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (10-7)^2 \cdot \frac{3}{36}$$
$$+ (11-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36}$$
$$= \frac{210}{36} \approx 5{,}8333$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{210}{36}} \approx 2{,}4152$$

https://www.geogebra.org/m/zahmzfqx

Streuungsmaß: Standardabweichung



x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Varianz σ^2

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$$
$$= (2-7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (8-7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (10-7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \frac{70}{6} \approx 11{,}6667$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{70}{6}} \approx 3{,}4157$$

https://www.geogebra.org/m/zahmzfqx

MaTeGnu

4.6 Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Vokabeltest Chinesisch

Aufgabe

Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?

水	☐ Geld	☐ Liebe	☐ Hund	☐ Wasser
目	☐ Ding	☐ Auge	☐ Katze	☐ See
木	☐ Abstand	☐ Mund	☐ Pferd	☐ Baum
羊	☐ Familie	☐ Ohr	☐ Schaf	☐ Blume
女	☐ Frau	☐ Respekt	☐ Hase	☐ Luft

T: Richtige Antwort (Treffer) $\quad P(T) = p = \frac{1}{4}$

N: Falsche Antwort (Niete) $\quad P(N) = 1 - P(T) = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Herkunft der chinesischen Schriftzeichen: https://de.wikipedia.org/wiki/Sechs_Kategorien_chinesischer_Schriftzeichen

Vokabeltest Chinesisch

Aufgabe
Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?



Sind die **Modell-Annahmen** gerechtfertigt?

(1) Wahrscheinlichkeitsmodell
Laplace-Wahrscheinlichkeit, da – wegen des durch Unwissen erzwungenen Ratens – alle Kreuze gleichwahrscheinlich sind.

(2) Stochastische (Un-)Abhängigkeit
Einzelfragen werden unabhängig voneinander beantwortet (unterschiedliche Zeichen).

(3) Trefferwahrscheinlichkeit p
Die Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{p}$ für einen Treffer ist bei jeder Frage gleich (unterschiedliche Zeichen & gleiche Anzahl von Auswahlantworten).

T: Richtige Antwort (Treffer) $\quad P(T) = p = \frac{1}{4}$

N: Falsche Antwort (Niete) $\quad P(N) = 1 - P(T) = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

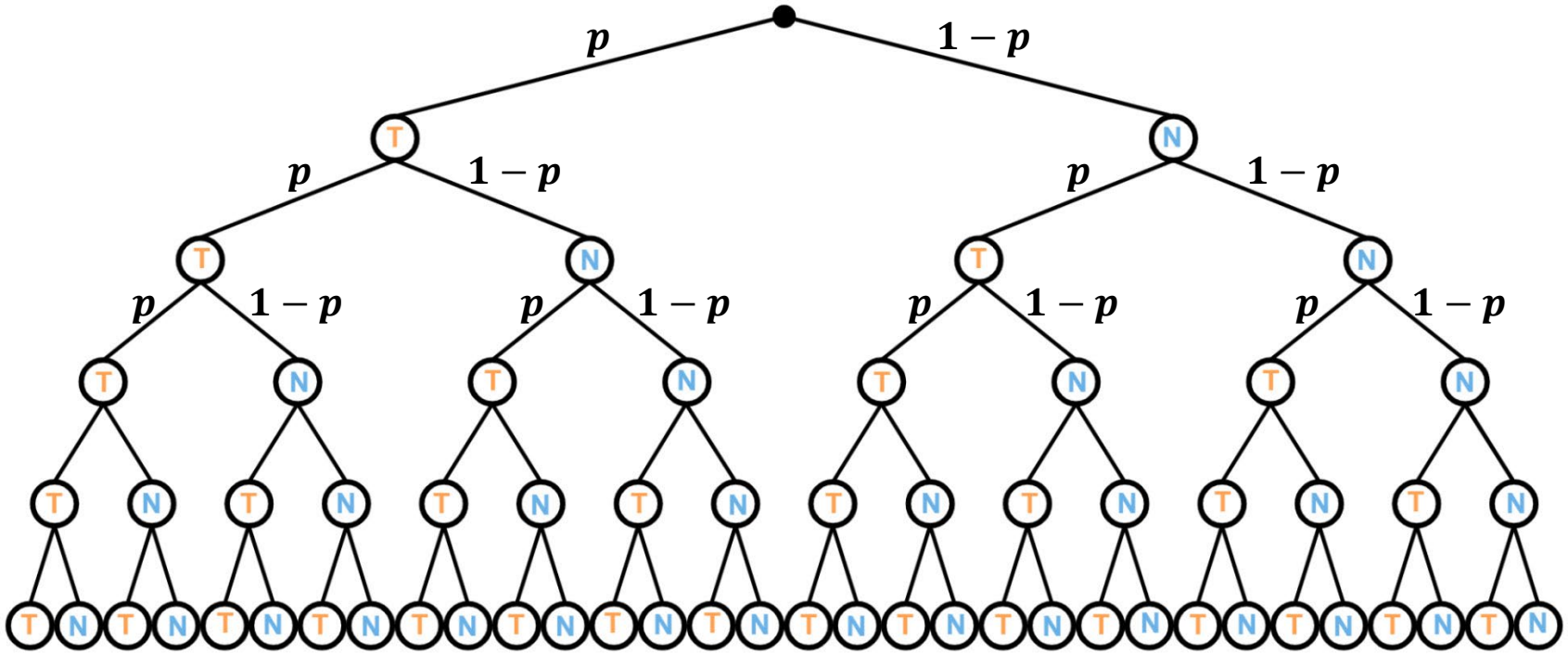
Herkunft der chinesischen Schriftzeichen: https://de.wikipedia.org/wiki/Sechs_Kategorien_chinesischer_Schriftzeichen

Vokabeltest Chinesisch

Aufgabe

Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?



水 目 木 羊 女

Erarbeitung: https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/bytymkxj

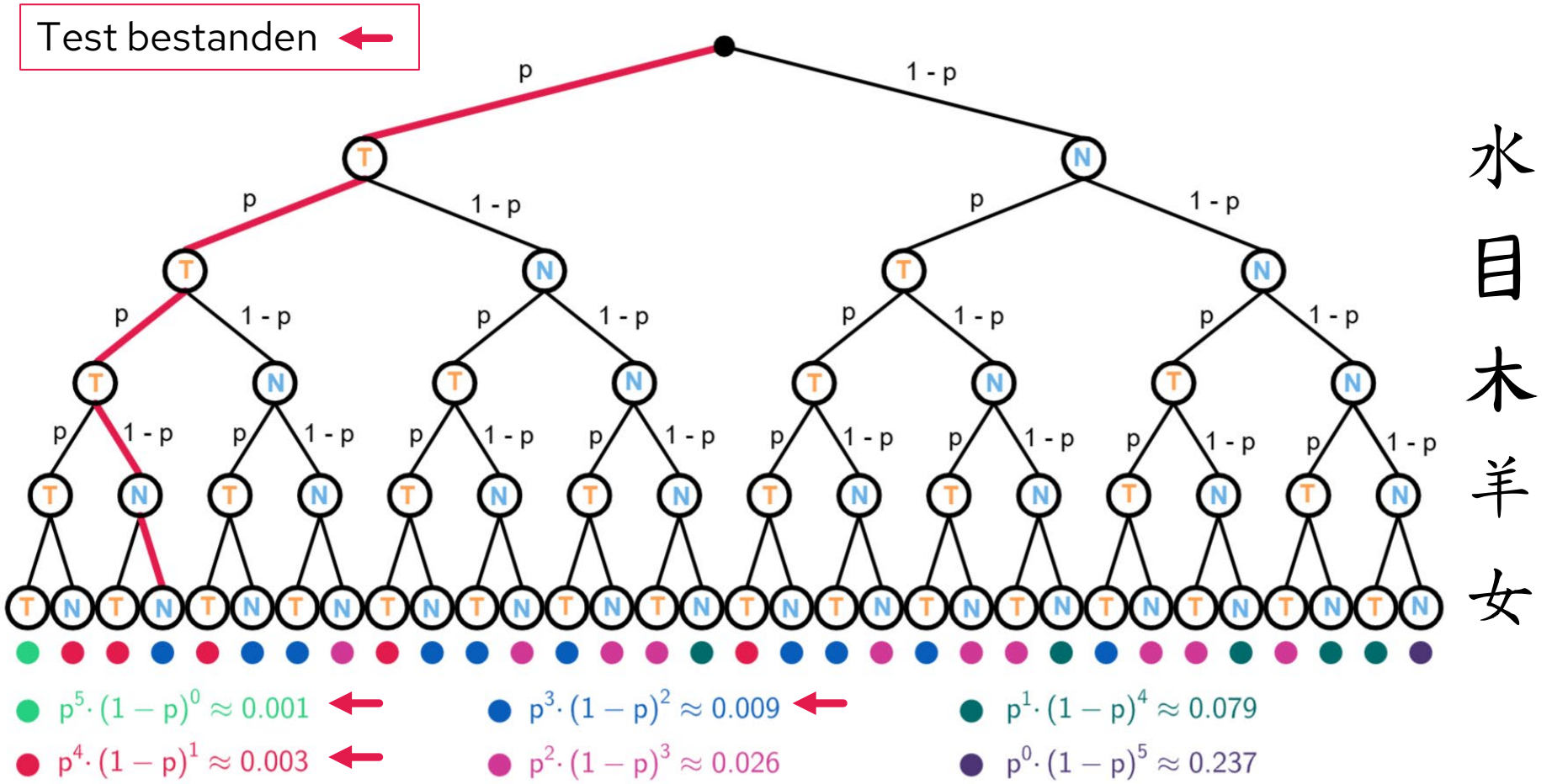
Herkunft der chinesischen Schriftzeichen: https://de.wikipedia.org/wiki/Sechs_Kategorien_chinesischer_Schriftzeichen

Vokabeltest Chinesisch

Aufgabe

Bei einem chinesischen Vokabeltest müssen Lernende für fünf verschiedene Schriftzeichen jeweils aus einer von vier Übersetzungen die richtige auswählen. Sie können dabei wohl nur raten. Wenn 60% der Antworten richtig sind, hat man bestanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test allein durch Raten zu bestehen?



Der Test wurde bestanden, wenn für die Trefferanzahl k gilt: $k \geq 3$

Lösung: https://www.geogebra.org/m/kvrn9uup

Herkunft der chinesischen Schriftzeichen: https://de.wikipedia.org/wiki/Sechs_Kategorien_chinesischer_Schriftzeichen

Binomialverteilung: Voraussetzungen

Bernoulli-Experiment [1]

- Ein Zufallsexperiment bei dem nur interessiert, ob ein bestimmter Ausgang vorliegt oder nicht, man also nur die beiden Ergebnisse „Treffer“ $\boldsymbol{T}$ oder „Niete“$\boldsymbol{N}$ hat, nennt man **Bernoulli-Experiment**.
- Ein passender Ergebnisraum ist $\Omega = \{0,1\}$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $P(\{1\}) = \boldsymbol{p}$ und der Nietenwahrscheinlichkeit $P(\{0\}) = 1 - \boldsymbol{p}$.


Jakob Bernoulli

Bernoulli-Kette: Ein $\boldsymbol{n}$-stufiges Zufallsexperiment mit Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^{\boldsymbol{n}}$, bei dem (für $i = 1, \dots, \boldsymbol{n}$) die Ereignisse

$\boldsymbol{E_i}$: „Menge aller $\boldsymbol{n}$-Tupel mit der 1 an der i-ten Stelle“
(„Treffer in der i-ten Stufe des Experiments“)

- unabhängig sind und
- die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(\boldsymbol{E_i}) = \boldsymbol{p}$ haben,

heißt **Bernoulli-Kette** mit den Parametern $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{p}$.
Der Parameter $\boldsymbol{n}$ heißt Länge der Bernoulli-Kette.

Aufgabe: Ist die Voraussetzung für eine Bernoulli-Kette jeweils erfüllt?

a) Eine Person, die bisher nicht Basketball gespielt hat, wirft zehnmal hintereinander auf einen Basketballkorb.

b) Zehn zufällig gewählte Personen werfen je einmal auf einen Basketballkorb.

c) Eine Person wirft während zehn Wochen immer Montags in der Pause einmal auf einen Basketballkorb.

1 Benannt nach Jacob Bernoulli (*06.01.1655, †16.08.1705) • https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I_Bernoulli

Binomialverteilung

Herleitung: Wahrscheinlichkeit $B(n; p; k)$

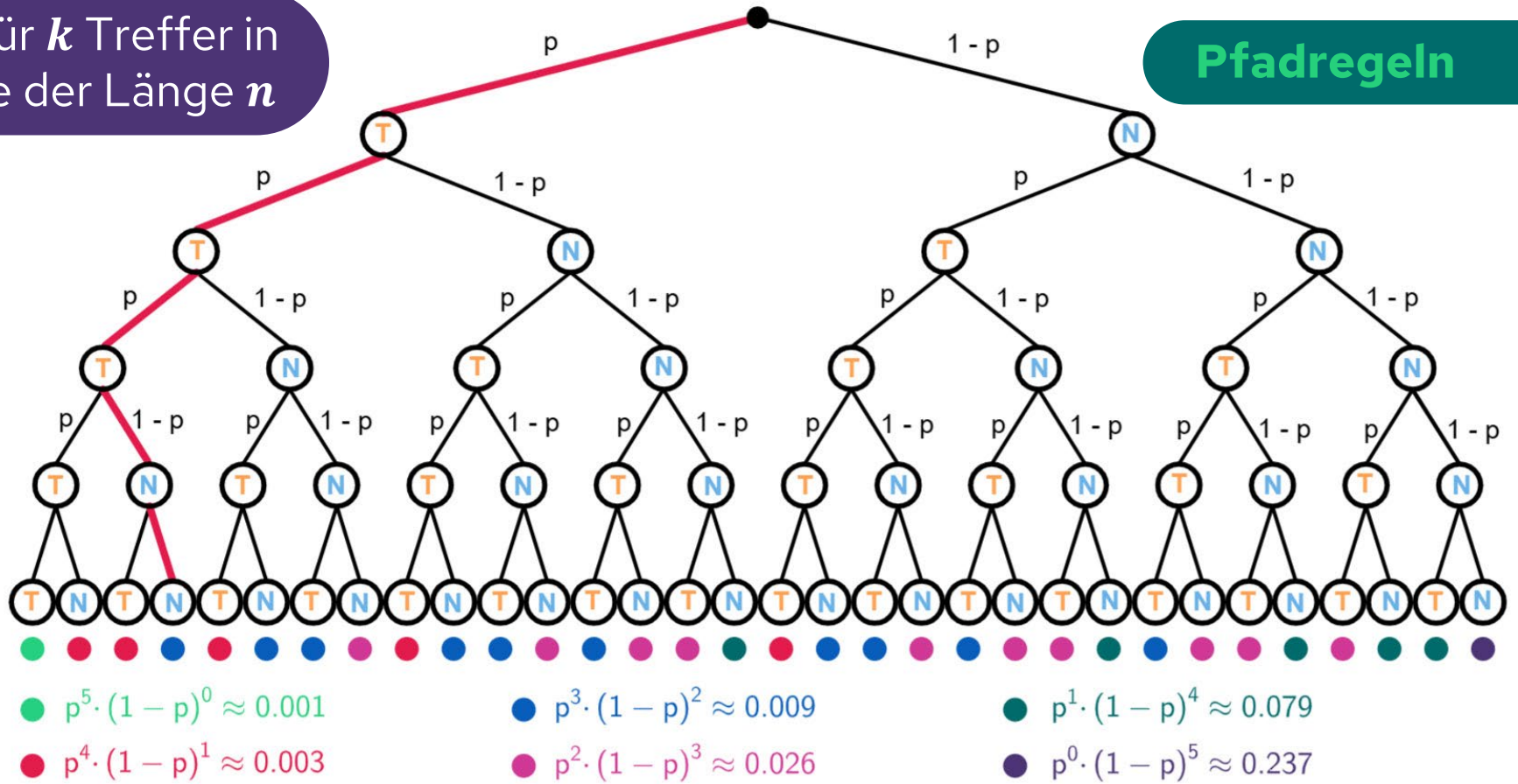
Gesucht: Wahrscheinlichkeit für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n

$$B(n; p; k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Summenregel}} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{Produktregel}}$$

Summenregel: Anzahl aller Pfade mit k Treffern

Produktregel: Wahrscheinlichkeit eines Pfades der Länge n mit k Treffern

Pfadregeln



Länge der Kette: $n = 5$

Treffer: T

Trefferanzahl: $k = 3$

Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{4}$

Wahrscheinlichkeit für $k = 3$ Treffer:

$$B\left(5; \frac{1}{4}; 3\right) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{3^2}{4^5} \approx 0{,}088$$

Erarbeitung: https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/bytymkxj **Lösung:** https://www.geogebra.org/m/kvrn9uup

Binomialverteilung: Definition

Satz: Trefferwahrscheinlichkeit in einer Bernoulli-Kette [1]

Für ein Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p \in]0;1[$ ist die Wahrscheinlichkeit $B(n;p;k)$ für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n gegeben durch ($k \in \{0,1,\dots n\}$):

$$B(n;p;k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beweisidee

Definition: Binomialverteilung

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$B(n;p)\colon k \mapsto B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

  mit $k \in \{0,1,\dots n\}$ und $p \in]0;1[$ heißt **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p.

- Eine Zufallsgröße X mit $P(X = k) = B(n;p;k)$ heißt binomial verteilt nach der Binomialverteilung $B(n;p)$.



Jakob Bernoulli

[1] Benannt nach Jacob Bernoulli (*06.01.1655, †16.08.1705) • https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I_Bernoulli

Binomialverteilung mit GeoGebra



Normalverteilung:
Gute Näherung für große n

Aufgabe
Erkunden Sie Eigenschaften der Binomialverteilung anhand der GeoGebra-Datei.

https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/za3kuwrb

GeoGebra Rechner Suite: https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/nvbedwnq

Binomialverteilung: Erwartungswert

Aufgabe: Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl (absolute Häufigkeit) k der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p.

- Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n ordnet die Zufallsvariable X_i dem i-ten Bernoulli-Experiment der Kette den Wert 0 für Niete und den Wert 1 für Treffer mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung zu:

x_i	0	1
$P(X_i = x_i)$	$1-p$	p

- Die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ beschreibt also die Anzahl (absolute Häufigkeit) der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern n und p, wobei die X_i unabhängig sind.

- Da für die Erwartungswerte $E(X_i)$ gilt

$$E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1)$$
$$= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

folgt für den **Erwartungswert** $E(X)$:

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$\overset{*}{=} E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot p$$

Satz: Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable „absolute Trefferhäufigkeit“ X
Für den **Erwartungswert** $E(X)$ einer $B(n;p)$-verteilten Zufallsvariable „absolute Trefferhäufigkeit“ X gilt: $E(X) = n \cdot p$

Satz: Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable „relative Trefferhäufigkeit“ h
Für den **Erwartungswert** $E(h)$ einer $B(n;p)$-verteilten Zufallsvariable „relative Trefferhäufigkeit“ h gilt: $E(h) = \frac{E(X)}{n} = \frac{n \cdot p}{n} = p$

∗ **Hinweis:** Hier wird die Additivität des Erwartungswerts, also $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, benutzt. Dies ist keine selbstverständliche Eigenschaft und wäre eigentlich noch zu zeigen.

Binomialverteilung: Standardabweichung

Aufgabe: Bestimmen Sie die Standardabweichung für die Anzahl k der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p.

- Die Varianz der Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ lässt sich ebenfalls über die Varianzwerte der unabhängigen Zufallsgrößen X_i bestimmen:
- Mit $\mu_i = E(X_i) = p$ gilt für die Varianzen $\mathrm{Var}(X_i)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(X_i) &= (0-\mu_i)^2 \cdot P(X_i = 0) + (1-\mu_i)^2 \cdot P(X_i = 1)\\ &= (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p\\ &= p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p\\ &= p \cdot (1-p) \cdot \underbrace{[p + (1-p)]}_{=1}\\ &= \boldsymbol{p \cdot (1-p)}\end{aligned}$$

Daraus folgt für die **Varianz** $\mathbf{Var}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(X) &= \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\\ &\overset{*}{=} \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)\\ &= \underbrace{p \cdot (1-p) + \cdots + p \cdot (1-p)}_{n \text{ Summanden}}\\ &= \boldsymbol{n \cdot p \cdot (1-p)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

Satz: Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable X

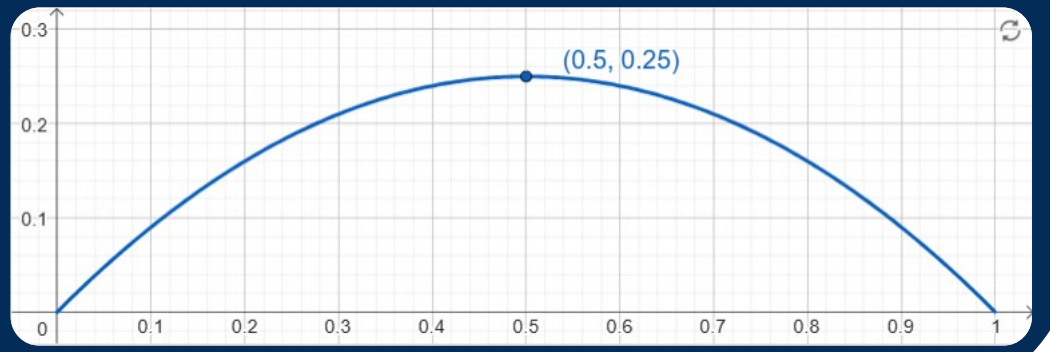
Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer $B(n;p)$-verteilten Zufallsvariable X gilt: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

*Wichtig: Dies funktioniert nur wegen der Additivität der Varianz bei der Bernoulli-Kette, also $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$. Dieser Satz ist nicht selbstverständlich und wäre eigentlich noch zu zeigen. Ein Beweis führt hier aber zu weit.

Binomialverteilung: Standardabweichung

Bemerkung: Für die Standardabweichung $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ einer Binomialverteilung lässt sich eine obere Abschätzung angeben, die unabhängig von p ist:

- Der Term $p \cdot (1-p)$ unter der Wurzel kann wegen $0 \leq p \leq 1$ nicht größer als $\frac{1}{4}$ werden. Man sieht das, wenn man die Funktion $p \mapsto p \cdot (1-p) = -p^2 + p$ im Definitionsbereich $0 \leq p \leq 1$ betrachtet.
- Der Graph dieser quadratischen Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
- Damit folgt:
  $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq \sqrt{n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}}$



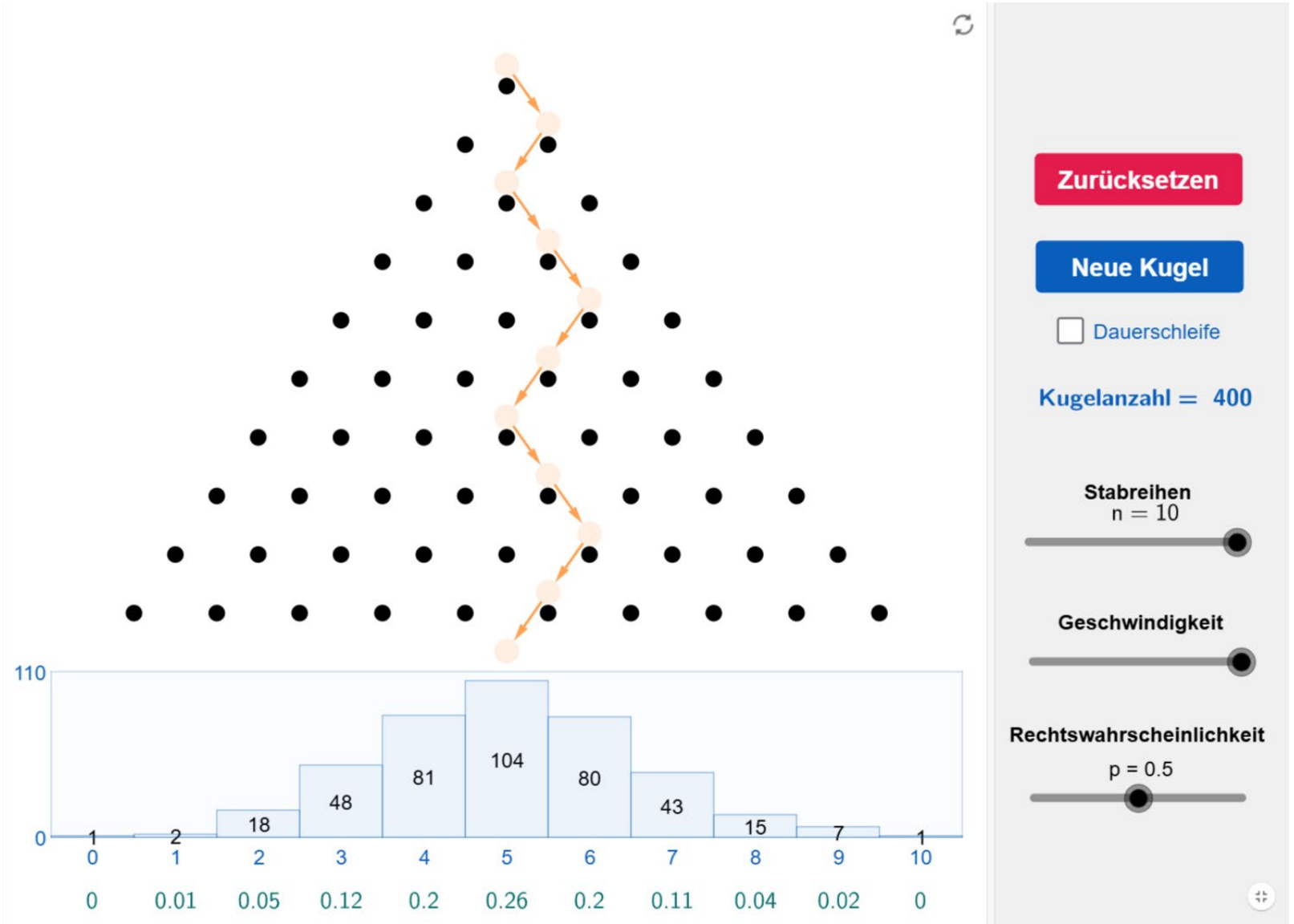
Satz: Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable X

Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer $B(n;p)$-verteilten Zufallsvariable X gilt:

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}}$$

Galton-Brett

https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_all.html?locale=de

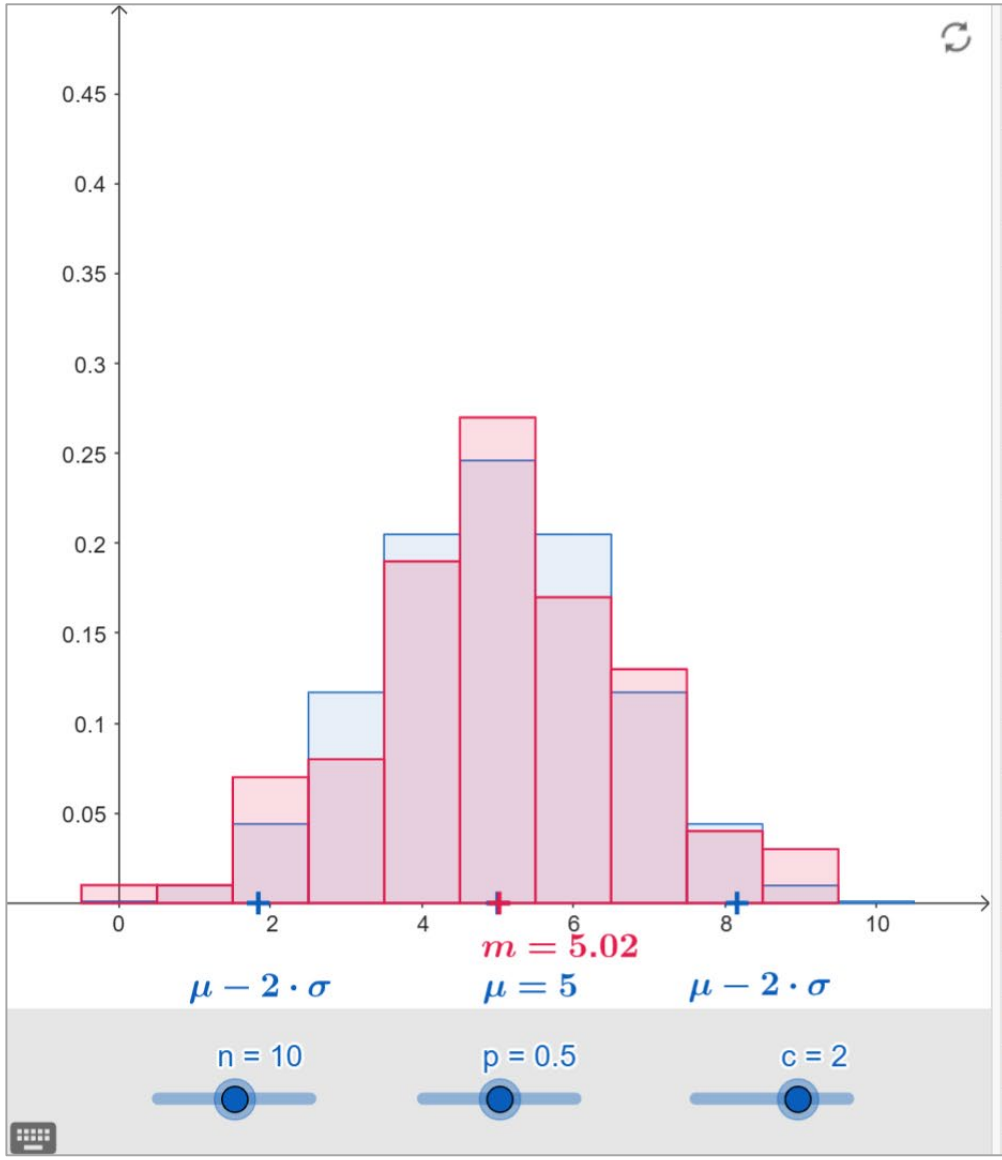




https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/wn7enhda

Galton-Brett-Video

Binomialverteilung
Vergleich Modell ↔ Wirklichkeit



	A	B	C	D
1		Anzahl der Kugeln		
2		100		
3				
4	k	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	B(n,p)
5	0	1	0.01	0
6	1	1	0.01	0.01
7	2	7	0.07	0.04
8	3	8	0.08	0.12
9	4	19	0.19	0.21
10	5	27	0.27	0.25
11	6	17	0.17	0.21
12	7	13	0.13	0.12
13	8	4	0.04	0.04
14	9	3	0.03	0.01
15	10	0	0	0
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				



https://www.geogebra.org/m/tfyx9kdm

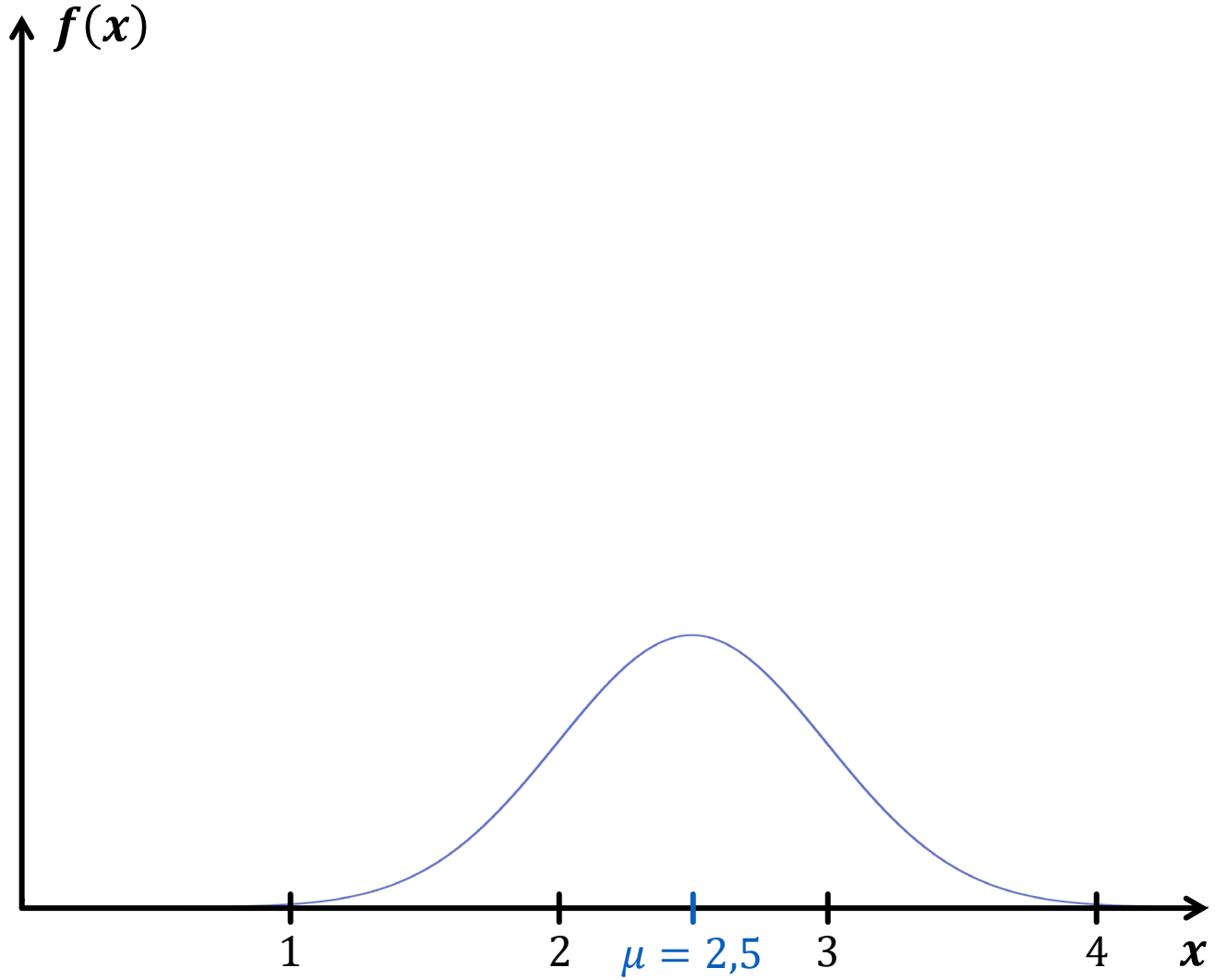
Galton-Brett-Video

MaTeGnu

4.7

Normalverteilung und Sigma-Regeln

Normalverteilung: Dichtefunktion



https://youtu.be/cTyPuZ9-JZ0
https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/pdnjhnqa

Bemerkung

- Hier ist der Graph der Dichtefunktion f einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung, konkret einer Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  mit $\mu = 2{,}5$ und $\sigma = 0{,}5$ dargestellt.

- Für eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung f gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Bemerkung

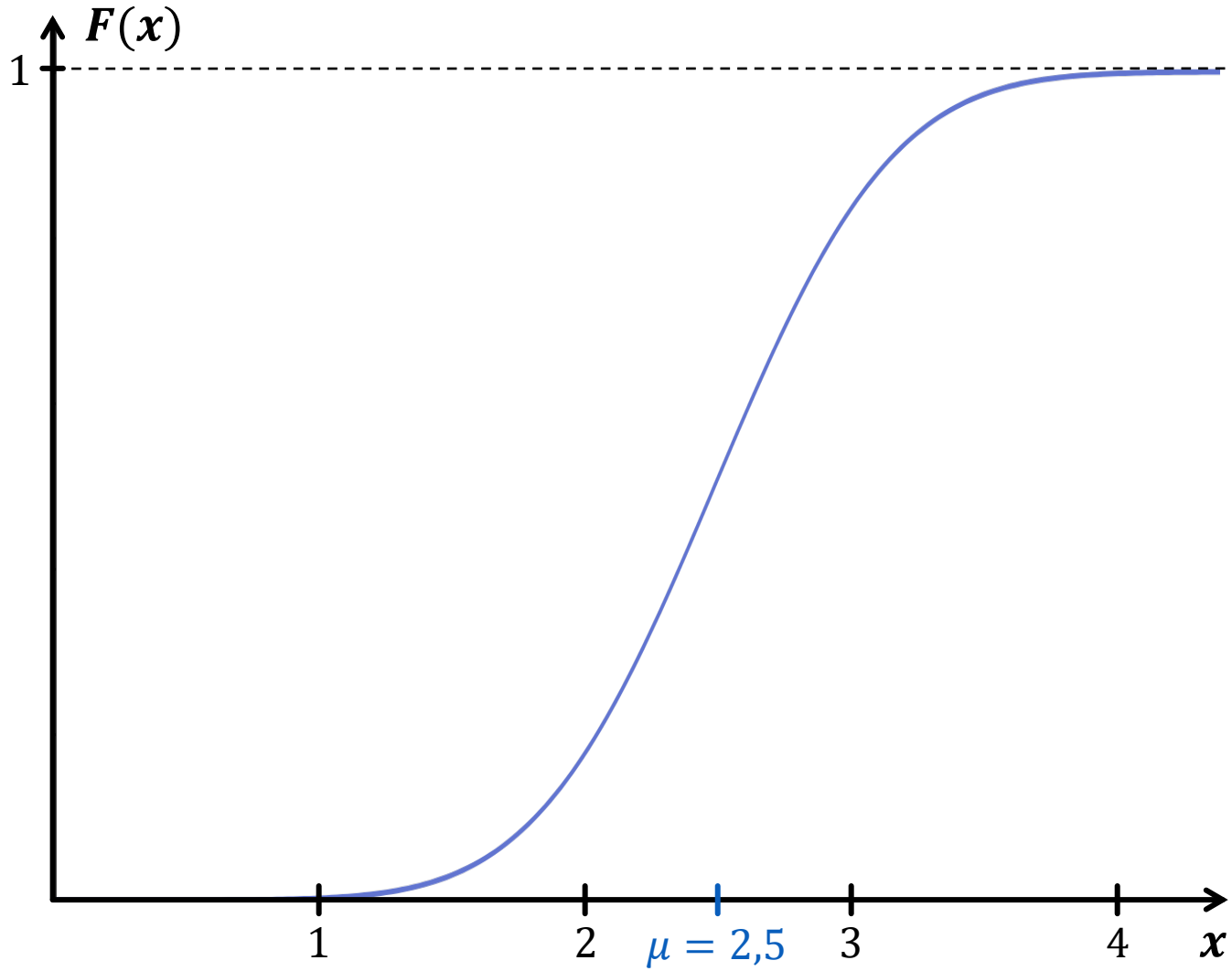
Eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt auch φ.

Unnötig!

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

RPTU

Normalverteilung: Verteilungsfunktion



Bemerkung

- Hier ist der Graph der Verteilungsfunktion F einer Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  mit $\mu = 2{,}5$ und $\sigma = 0{,}5$ dargestellt.

- Für solche Verteilungsfunktionen F gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

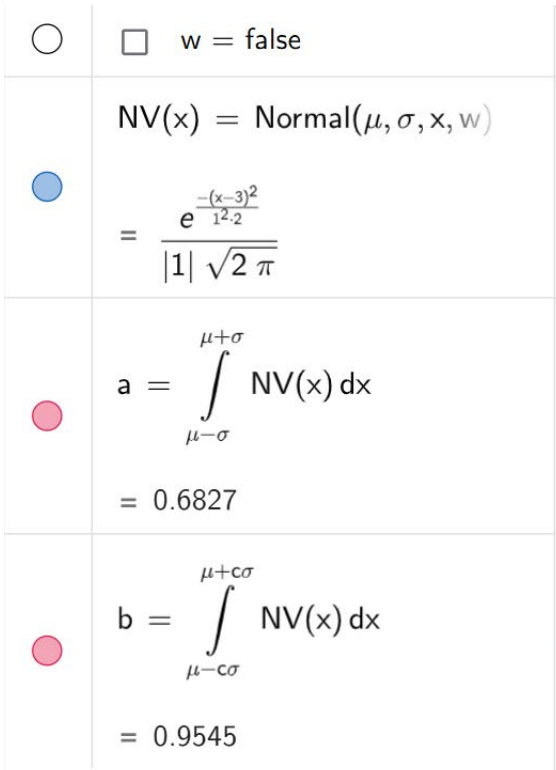
Bemerkung

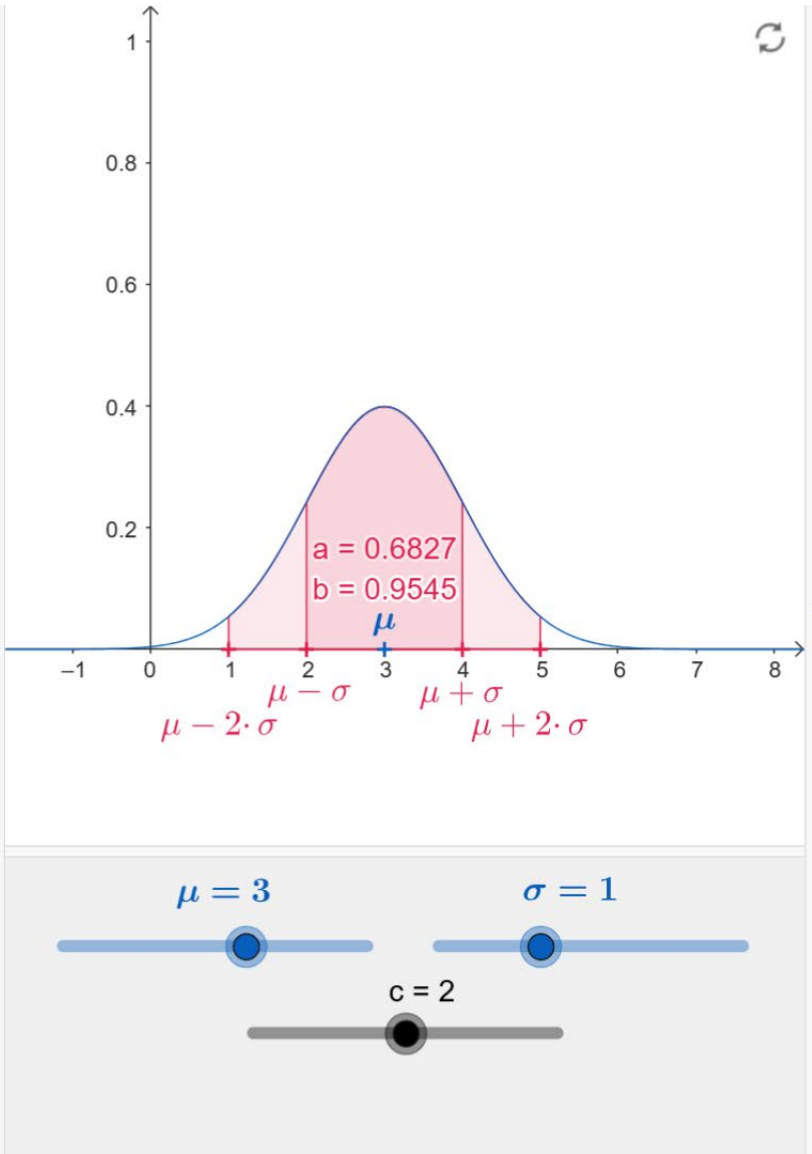
Die Verteilungsfunktion zur Normalverteilung φ mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt auch Φ.

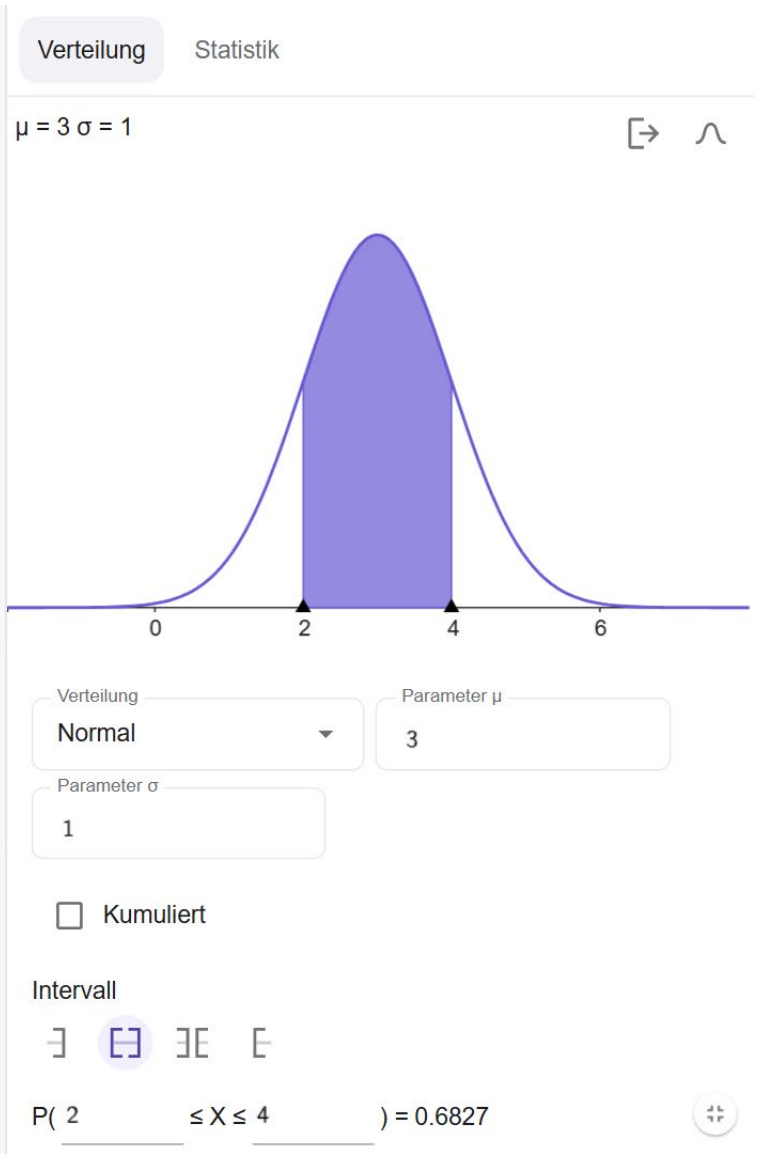
Unnötig!

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Normalverteilung mit GeoGebra







Aufgabe: Erkunden Sie Eigenschaften der Normalverteilung anhand der GeoGebra-Datei.

https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/afed3jme

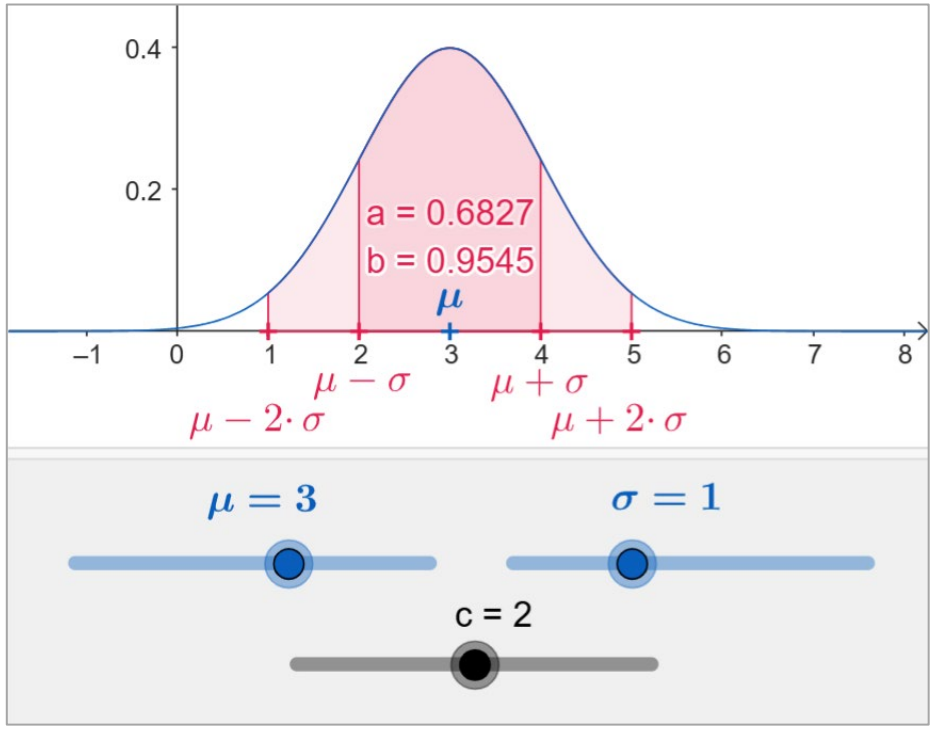
https://www.geogebra.org/m/j8peujcb

Sigma-Regeln (empirisch bestimmt)

Hier wird folgende Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von c untersucht:

$$P(\mu - c \cdot \sigma \leq X \leq \mu + c \cdot \sigma)$$

$$= \int_{\mu - c \cdot \sigma}^{\mu + c \cdot \sigma} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx$$



Sigma-Regeln: Ist X eine normalverteilte Zufallsgröße, mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ so gilt:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
- $P(\mu - 1{,}64 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64 \cdot \sigma) \approx 90{,}0\,\%$
- $P(\mu - 1{,}96 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96 \cdot \sigma) \approx 95{,}0\,\%$
- $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 95{,}4\,\%$
- $P(\mu - 2{,}58 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58 \cdot \sigma) \approx 99{,}0\,\%$
- $P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 99{,}7\,\%$

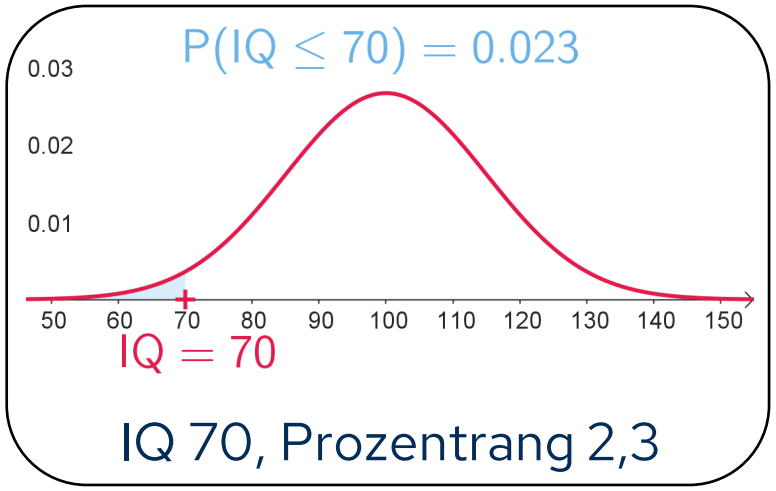
Bemerkung

Die Laplace-Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$ muss erfüllt sein, damit man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung annähern kann. In diesem Fall gelten die Sigma-Regeln näherungsweise auch für die Binomialverteilung.

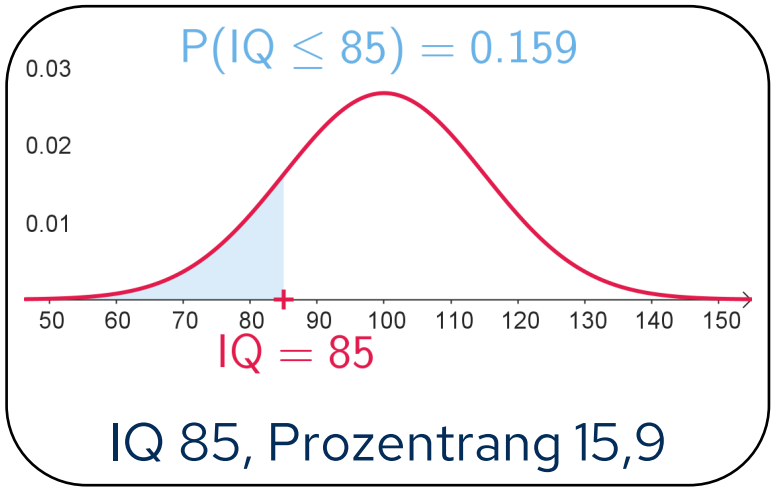
 https://www.geogebra.org/m/wbmhsnba#material/afed3jme

Exkurs: Intelligenztests

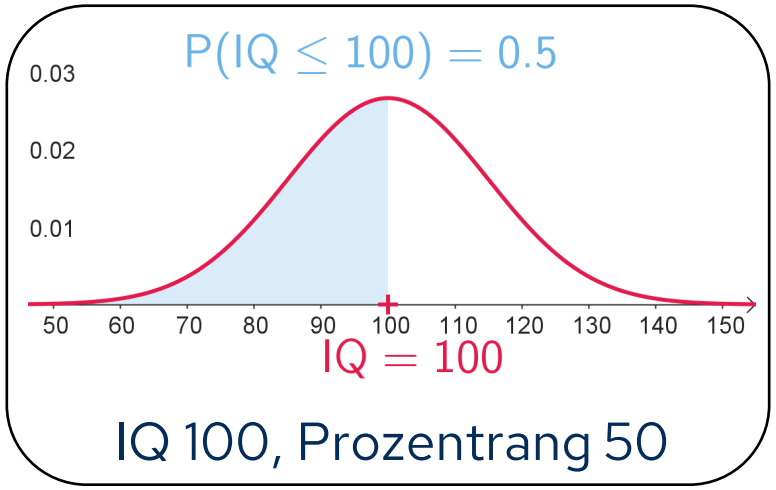
Bei Intelligenztests, die eine IQ-Norm verwenden, wird anhand der Verteilung der Testergebnisse einer großen Stichprobe der Normwert unter **Annahme einer Normalverteilung der Intelligenz** ermittelt und in eine Skala mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ und der Standardabweichung $\sigma = 15$ umgerechnet.



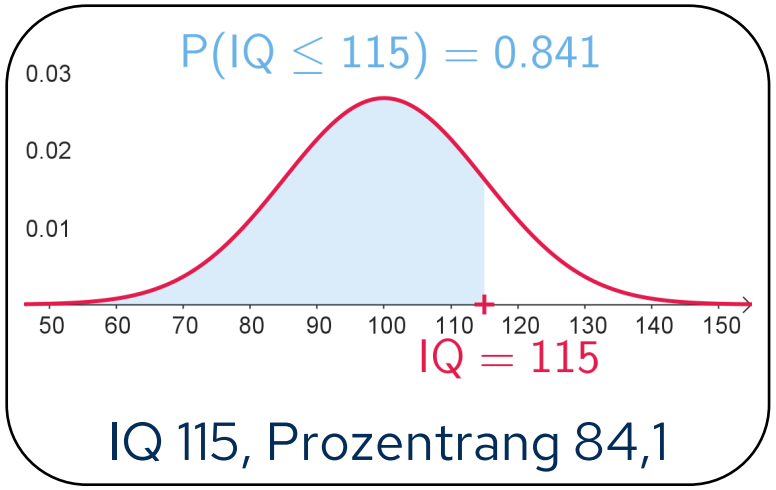
IQ 70, Prozentrang 2,3



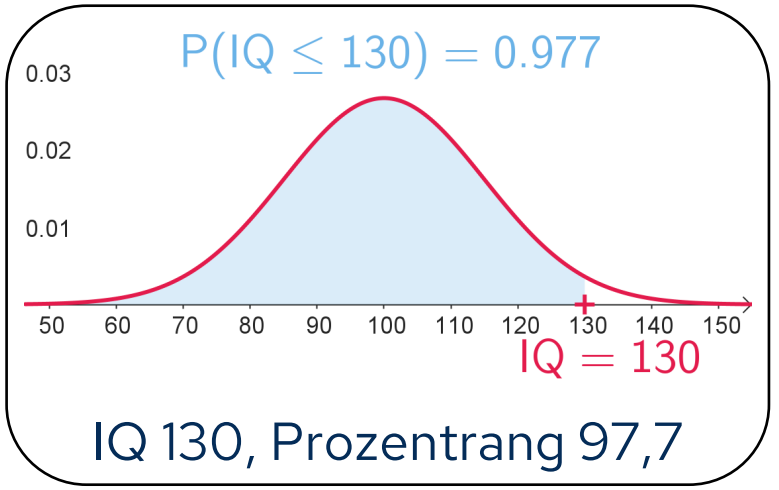
IQ 85, Prozentrang 15,9



IQ 100, Prozentrang 50



IQ 115, Prozentrang 84,1



IQ 130, Prozentrang 97,7

https://de.wikipedia.org/wiki/Intelligenzquotient

Eikenbusch, G. & Leuders, T. (2004). *Lehrer-Kursbuch Statistik*. Cornelsen Scriptor, 43 • https://www.geogebra.org/m/pwqenfde

Kontakt



Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.math.rptu.de
mategnu.de

RPTU