MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvor-
stellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

Jürgen Roth

09.06.2026 MaTeGnu-K1-M3, Bad Kreuznach

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

1 Lehrplanalternativen RLP

2 Vektorbegriff – Schülerschwierigkeiten und Zugang über n-Tupel

3 Geometrische Deutung von Vektoren

4 Geraden- und Ebenengleichungen

5 Skalarprodukt

6 Zusatzmaterialien Selbststudium

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

mategnu.de

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Lehrplanalternativen RLP

MaTeGnu

Grundkurs
(ca. 44 Stunden)

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

wahlweise

- A1: Matrizen in praktischer Anwendung
- A2: Geraden und Ebenen im Raum

Leistungskurs
(ca. 75 Stunden)

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

wahlweise

- A1: Vektoren und Matrizen
- A2: Geraden und Ebenen im Raum

https://lehrplaene.bildung-rp.de

MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

Lehrplanalternativen RLP: Grundkurs
(ca. 44 Stunden)

MaTeGnu

Wahlpflichtgebiet A1: Matrizen in praktischen Anwendungen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren

In allen Wahlpflichtgebieten enthalten!

A1:

- In Sachzusammenhängen folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und ausführen:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen
  - Inverse Matrix
- Komplexere Aufgaben aus mindestens zwei Anwendungsfeldern von Matrizen bearbeiten
- Erfahren, dass Matrizen auch zur Beschreibung von geometrischen Abbildungen dienen

A2:

- Begriff "Linearkombination" kennen & anwenden
- Parameterform von Geraden- & Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen bestimmen
- Lage gegebener Geraden & Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden
- Allg. Normalengleichung der Ebene kennen & anwenden
- Wissen und begründen:
  - eine Koordinatengleichung mit drei Variablen beschreibt eine Ebene
  - die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle „eine Lösung", „keine Lösung" oder „unendlich viele Lösungen" geometrisch deuten

https://lehrplaene.bildung-rp.de

MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

Lehrplanalternativen RLP: Leistungskurs
(ca. 75 Stunden)

MaTeGnu

Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

In allen Wahlpflichtgebieten enthalten!

Lineare Gleichungssysteme

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen
- Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren

Matrizen

- Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen, sowie für Abbildungen und in nichtgeometrischen Sachbezügen anwenden:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen, Inverse Matrix

Vektoralgebra

- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren
- Die Begriffe „Linearkombination" und „linear abhängig/unabhängig" verstehen & anwenden
- Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen
- Elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen

https://lehrplaene.bildung-rp.de
MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

Lehrplanalternativen RLP: Leistungskurs
(ca. 75 Stunden)

MaTeGnu

Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

Matrizen (Fortsetzung)

- Eigenschaften der affinen Abbildungen beweisen
- Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen verstehen
- Affine Abbildungen nach ihren Fixelementen untersuchen
- In mindestens einem nichtgeometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Sachaufgaben lösen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

Analytische Geometrie

- Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen
  - bestimmen und die Verfahren begründen
  - durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Allgemeine und Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung herleiten und anwenden
- Winkel und Abstände im Raum berechnen
- Kreis- und Kugelgleichung herleiten und zur Untersuchung von Lagebeziehungen anwenden
- Vektorprodukt:
  Definition & Eigenschaften kennen & anwenden

https://lehrplaene.bildung-rp.de

MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

1 Lehrplanalternativen RLP

2 Vektorbegriff – Schülerschwierigkeiten und Zugang über n-Tupel

3 Geometrische Deutung von Vektoren

4 Geraden- und Ebenengleichungen

5 Skalarprodukt

6 Zusatzmaterialien

Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff

MaTeGnu

Einige typische Schülerschwierigkeiten

- Schwierigkeit mit Pfeilklassen
- Algebraische Auffassung von Vektoren fehlt („Vektor" → „Schalter wird auf Geometrie gestellt")
- Deutung von Zahlenpaaren/-tripeln als Pfeile
- Schwierigkeiten mit dem Nullvektor
- Lernen ohne die Entwicklung von (Grund-)Vorstellungen
- Vektorformeln aufstellen
- „Ortsvektor" als Problemfall

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16-19

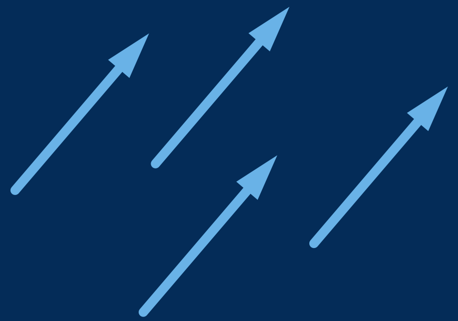
Schwierigkeit: Pfeilklassen

MaTeGnu

Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Alexandra (A)
Einen Pfeil in einem Raum.

Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile."
Was sagst du dazu?



A: Stimmt nicht.

I: Warum?

A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.

I: Was ist für dich ein Vektor?

A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.

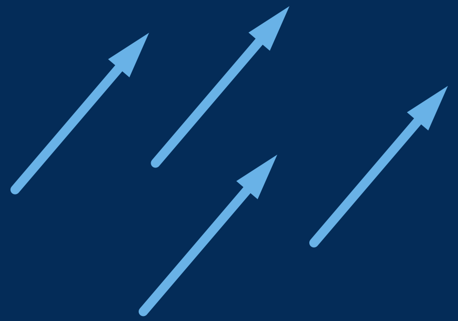
I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?

A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

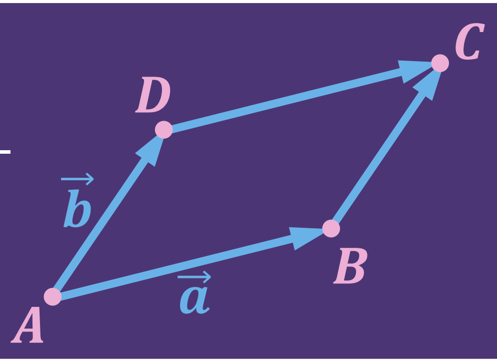
Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Pfeilklassen

Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile."
Was sagst du dazu?



Aufgabe: Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A, B und D. Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts C.



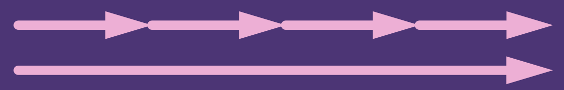
Richard (R)
Diese vier Vektoren kann man aneinanderreihen und kommt dann auf einen Vektor, einen Gesamtvektor.

A: Ich würde Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ so lange verschieben, bis ich zum Punkt B komme, und dann habe ich den Vektor $\overrightarrow{BC}$ ... Das ist eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$, nur von einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.

I: Bitte zeichne das auf.

I: Kann man behaupten: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$?

R: [Fertigt eine Zeichnung an]



A: Nein, weil $\overrightarrow{BC}$ geht von einem anderen Punkt als $\vec{b}$ aus.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Algebraische Auffassung von Vektoren

MaTeGnu

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

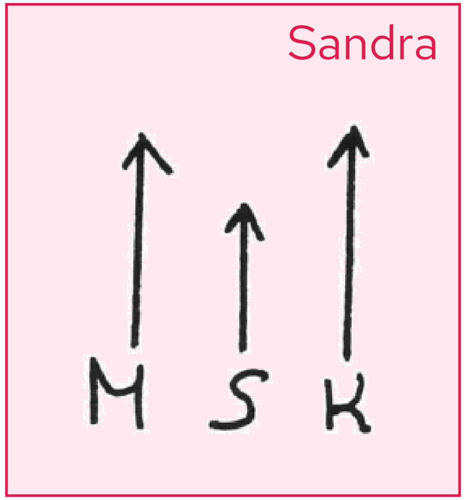
2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

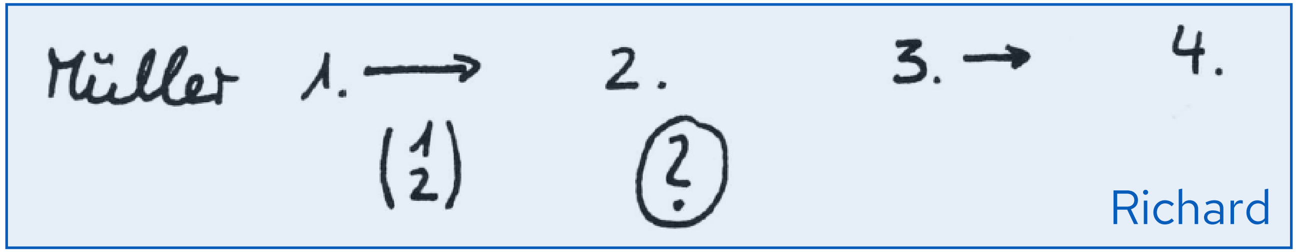
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

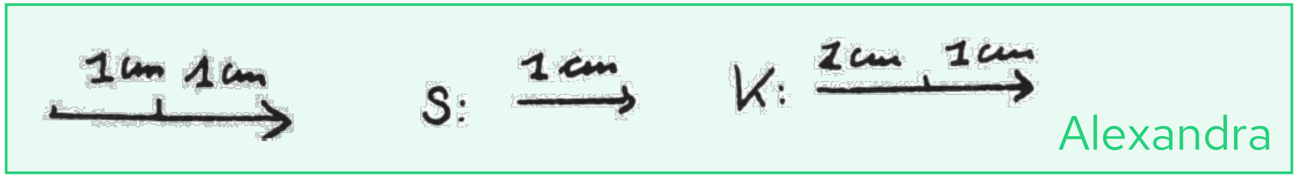
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Schülerlösungen







 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Algebraische Auffassung von Vektoren

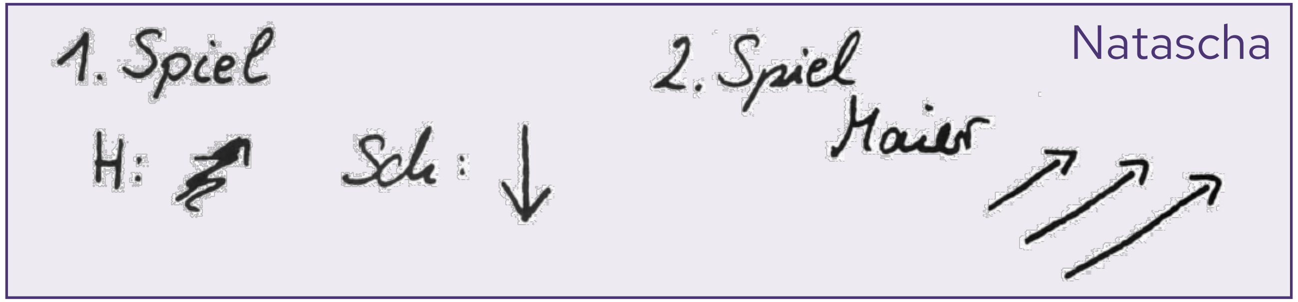
MaTeGnu

Aufgabe
Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

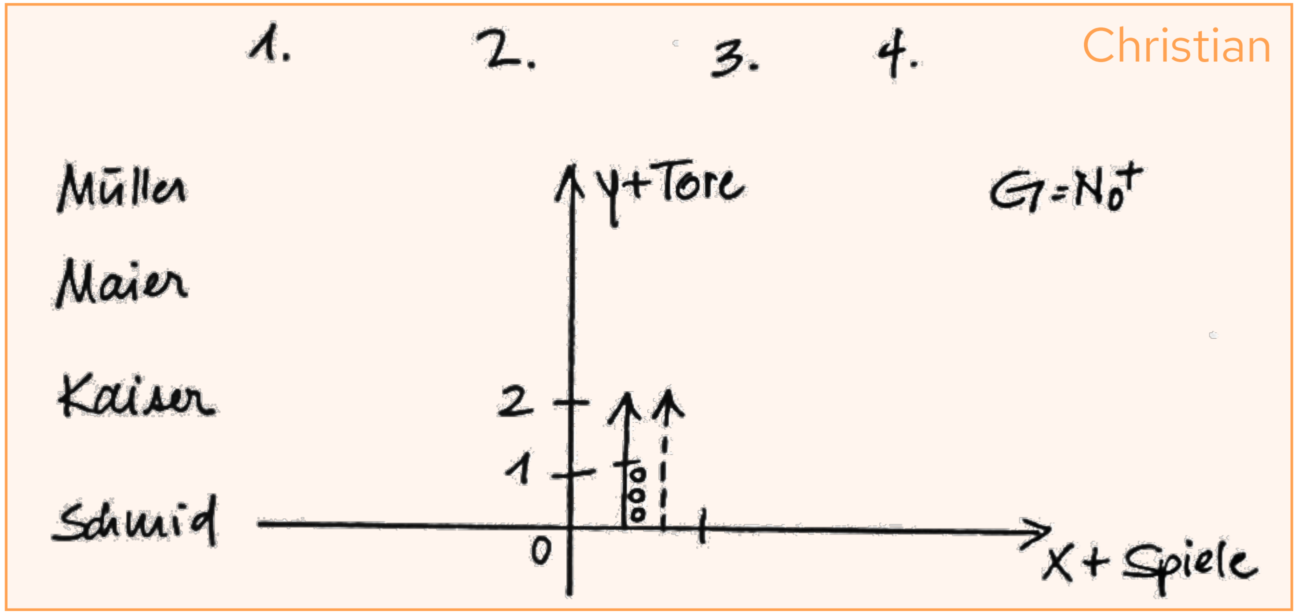
1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)
2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Schülerlösungen



Natascha



Christian

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

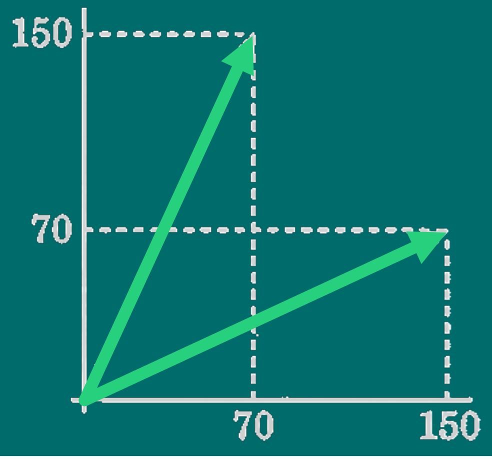
MaTeGnu

Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Michaela
Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.

I: Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}150\\70\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}70\\150\end{pmatrix}$ gleich oder verschieden?

A: [Fertigt eine Zeichnung an.]



I: Du erkennst die Ungleichheit dieser Vektoren aufgrund einer Zeichnung. Kannst du das auch ohne Zeichnung begründen?

A: Nein!

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. Mathematik lehren, 133, 16–19

Schwierigkeit:
Deutung von Zahlenpaaren als Pfeile

MaTeGnu

Zahlenpaare können …

- in der Regel als Punkte gedeutet werden.
- häufig nicht als Pfeile gedeutet werden.

Interviewer (I)

Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Christian

So wie es da steht mit dieser Spaltenform ist es ein Pfeil. Wenn (3|4) da stehen würde, wäre es ein Punkt.

Interviewer (I)

Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Natascha (N)

(3|4) sind die Koordinaten von einem Punkt im ebenen Koordinatensystem im Zweidimensionalen.

I: Kann dieses Zahlenpaar auch einen Pfeil darstellen?

N: Nein, da bräuchte ich noch ein zweites Koordinatenpaar, um den Pfeil darzustellen. Aber ich habe nur eines gegeben, also kann es nur einen Punkt darstellen.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren*, *133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

MaTeGnu

Nullvektor

- Grenzfall eines Vektors
- Entarteter Pfeil der Länge Null (das ist aber ein Punkt)
- Weil Lernende Vektoren häufig mit Pfeilen identifizieren, ist der Nullvektor für sie kein Vektor.

Kathi (K): [Schreibt] $0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dann ist es ein Punkt.

I: Dann ist es ein Punkt?

K: Ja, der Nullpunkt.

I: Kann es auch ein Pfeil sein?

K: Nein!

I: Warum nicht?

K: Es ist kein Pfeil. Es steckt keine Verbindung drinnen.

I: Das wäre also ein Zahlenpaar, das man nicht als Pfeil interpretieren kann?

K: Ja.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

MaTeGnu

Situation
Es geht um den Vektor $r \cdot \vec{a}$.

Interviewer (I): Und wenn $r = 0$?

Daniel (D): Dann gibt's den Vektor nicht.

Christoph (C): Es ist der Nullpunkt.

I: Es ist der Nullpunkt?

C: Ja.

D: … Ja, er muss im Koordinatenursprung liegen. Ah nein, es ist ein Vektor! Richtig. D.h. es ist der Punkt, wo der Vektor $\vec{a}$ weggehen würde, also der Schaft … Ja der kann auch irgendwo anders liegen, aber der Punkt muss da liegen [Er zeichnet ein Achsenkreuz und zeigt auf den Ursprung.]. Aber nein, der kann überall liegen. Denn wenn der Vektor überall liegen kann, kann der Punkt überall liegen.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Vektorformeln aufstellen

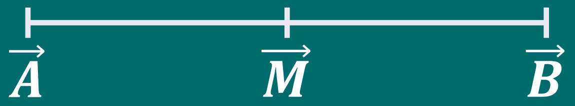
MaTeGnu

Aufgabe

Stelle eine Formel auf, für den Mittelpunkt $\vec{M}$ einer Strecke AB.

Schülerlösungen

Alle gingen von derselben Skizze aus.



Sie schrieben aber unterschiedliches auf:

Isabella: $\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$

Florian: $\vec{M} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

Martin: $\vec{M} = \frac{\vec{A}+\overrightarrow{AB}}{2}$

Karin: $\vec{M} = \frac{\vec{A}-\vec{B}}{2}$

Probleme

- Im Prinzip wird so gedacht: „Ich gehe von $\vec{A}$ aus, füge die Hälfte von $\overrightarrow{AB}$ dazu und komme zu $\vec{M}$."
- Wie kann der Gedankengang mit Hilfe der Vektorsymbolik notiert werden? $\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Unverständnis des Vektorbegriffs
- „Typkontrolle" Pfeil ↔ Punkt fehlt.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

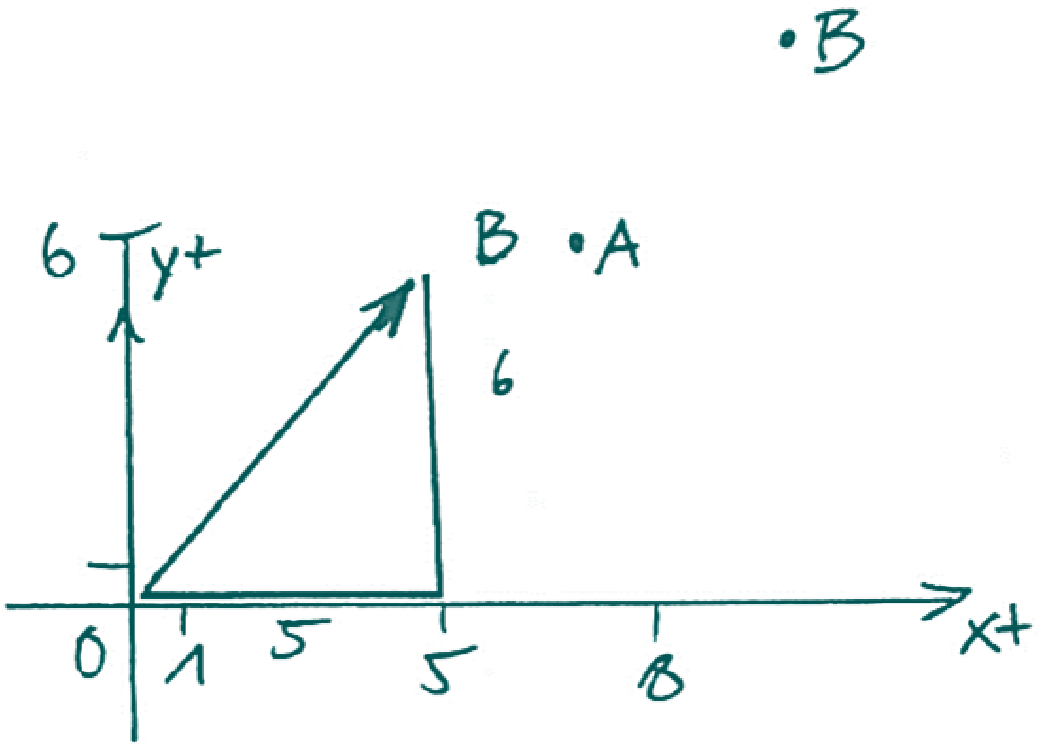
Schwierigkeit: „Ortsvektoren“

Aufgabe

Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und veranschauliche ihn an einer Skizze: $\vec{A} = (8|6)$, $\vec{B} = (13|12)$

Schülerlösung

- Christian rechnet richtig:
  $\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Er zeichnet die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ einigermaßen richtig in ein Koordinatensystem ein.
- Anschließend stellt er den Vektor $\overrightarrow{AB}$ aber als Ortspfeil dar.



 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

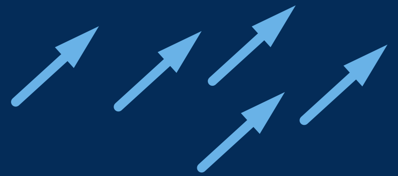
Zugänge zum Vektorbegriff

Was ist ein Vektor?
Es gibt viele Antworten auf diese Frage.

Hochschulmathematik

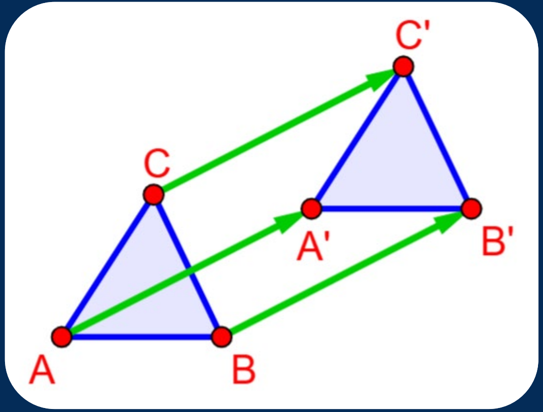
- **Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.**
- Axiomatischer Zugang über die Struktur

Schulmathematik



(1) **Ein Vektor ist eine Pfeilklasse.**

(2) **Ein Vektor ist eine Verschiebung**, also eine Änderung der Lage.



(3) **Ein Vektor ist ein n-Tupel.**

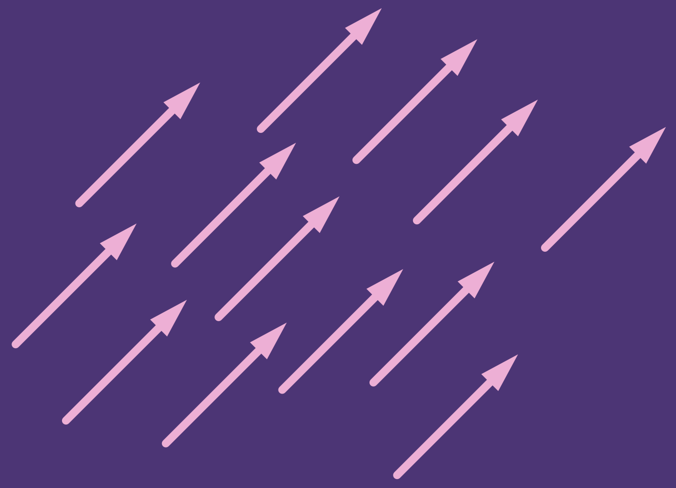
- Ein Vektor $\vec{v}$ ist als n-Tupel ein Element des $\mathbb{R}^n$.
- Er kann je nach Bedarf als Zeilenvektor $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ oder auch als Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ geschrieben werden.

 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



Probleme mit dem Pfeilklassenmodell

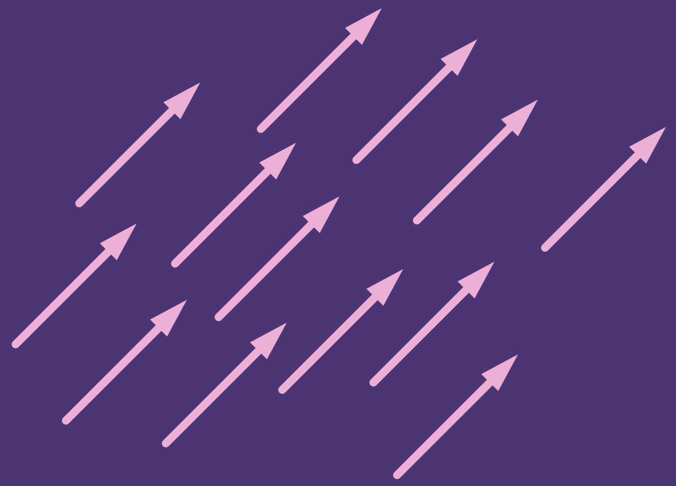
- Erfüllt Vektorraumaxiome, aber Probleme mit der Definition der Rechengesetze über Repräsentanten
- Einführung der Rechenoperationen und Beweise der Rechengesetzte kompliziert
  ⇒ Konsequente und saubere Anwendung des Pfeilklassenmodells findet oft nicht statt.
- Nur in der Schulmathematik etabliert.
- Passt nicht zur Denkweise in
  - Analytischer Geometrie
  - und Physik.

 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

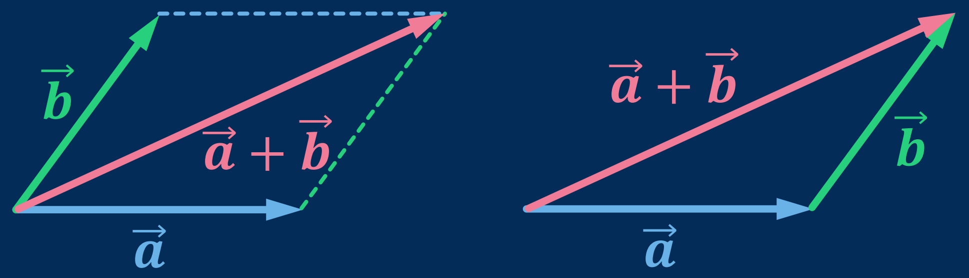
Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



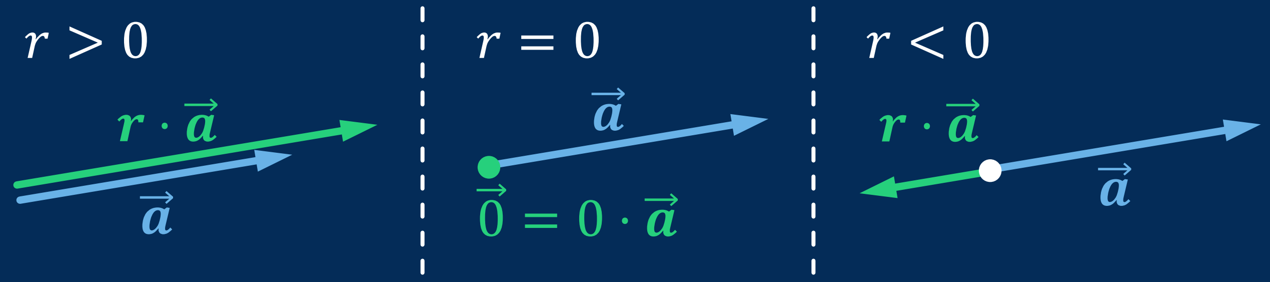
Bei jeder Definition muss die **Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten** gezeigt werden!

Rechenoperationen für Pfeilklassen

- ... sind über Repräsentanten definiert.
- **Addition:** Definition durch Repräsentanten



- **Vervielfachung:** Definition durch Repräsentanten

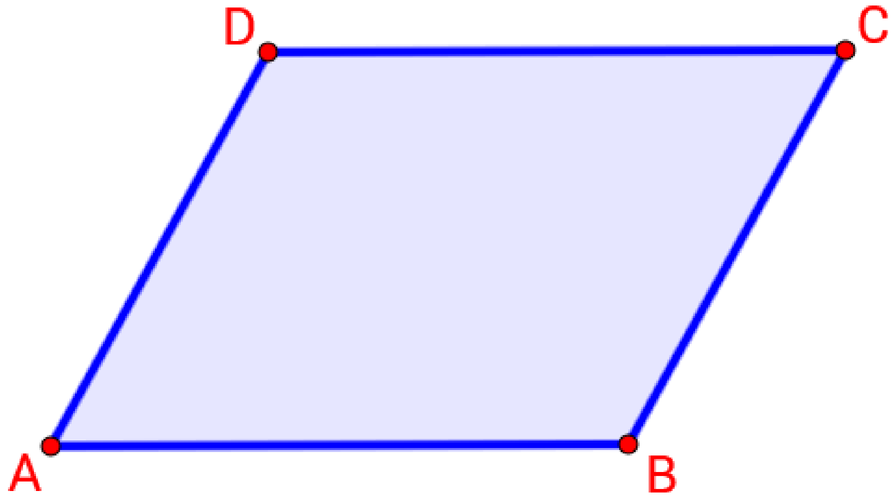


Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Analytischen Geometrie

MaTeGnu

Aufgabe

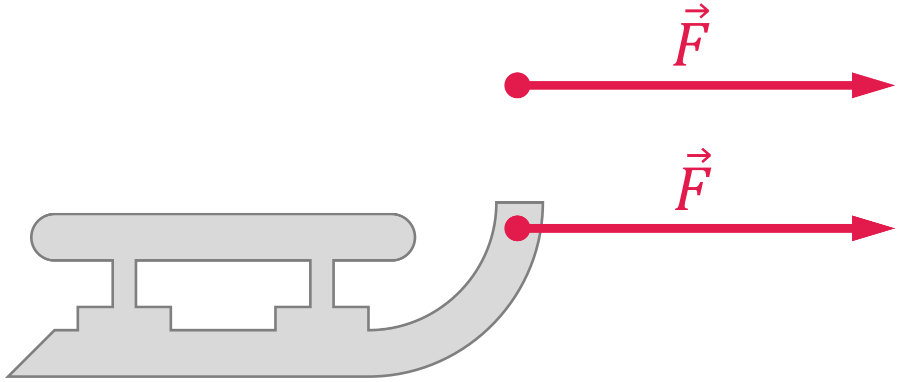
- Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A, B und D.
- Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts C.

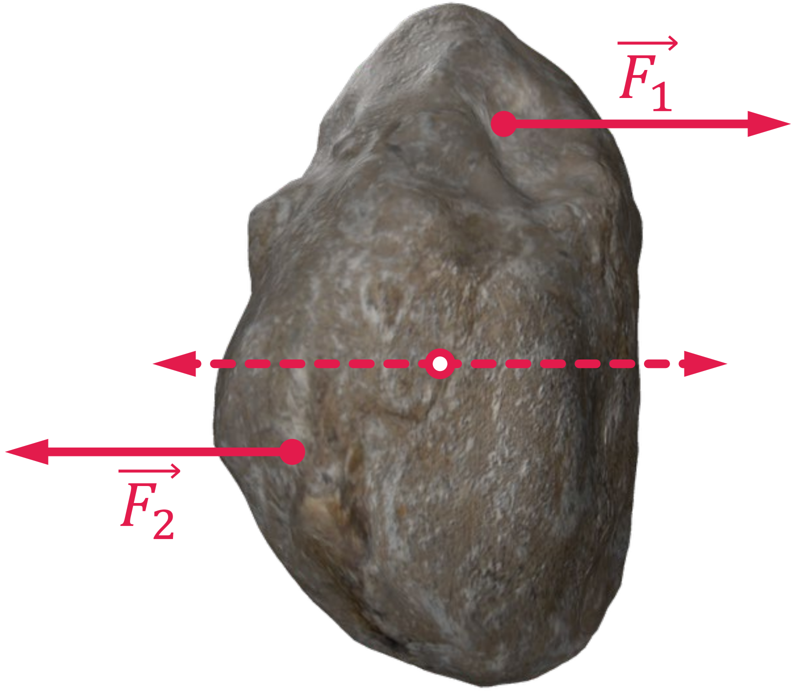


Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Physik

Wo greift die Zugkraft an?



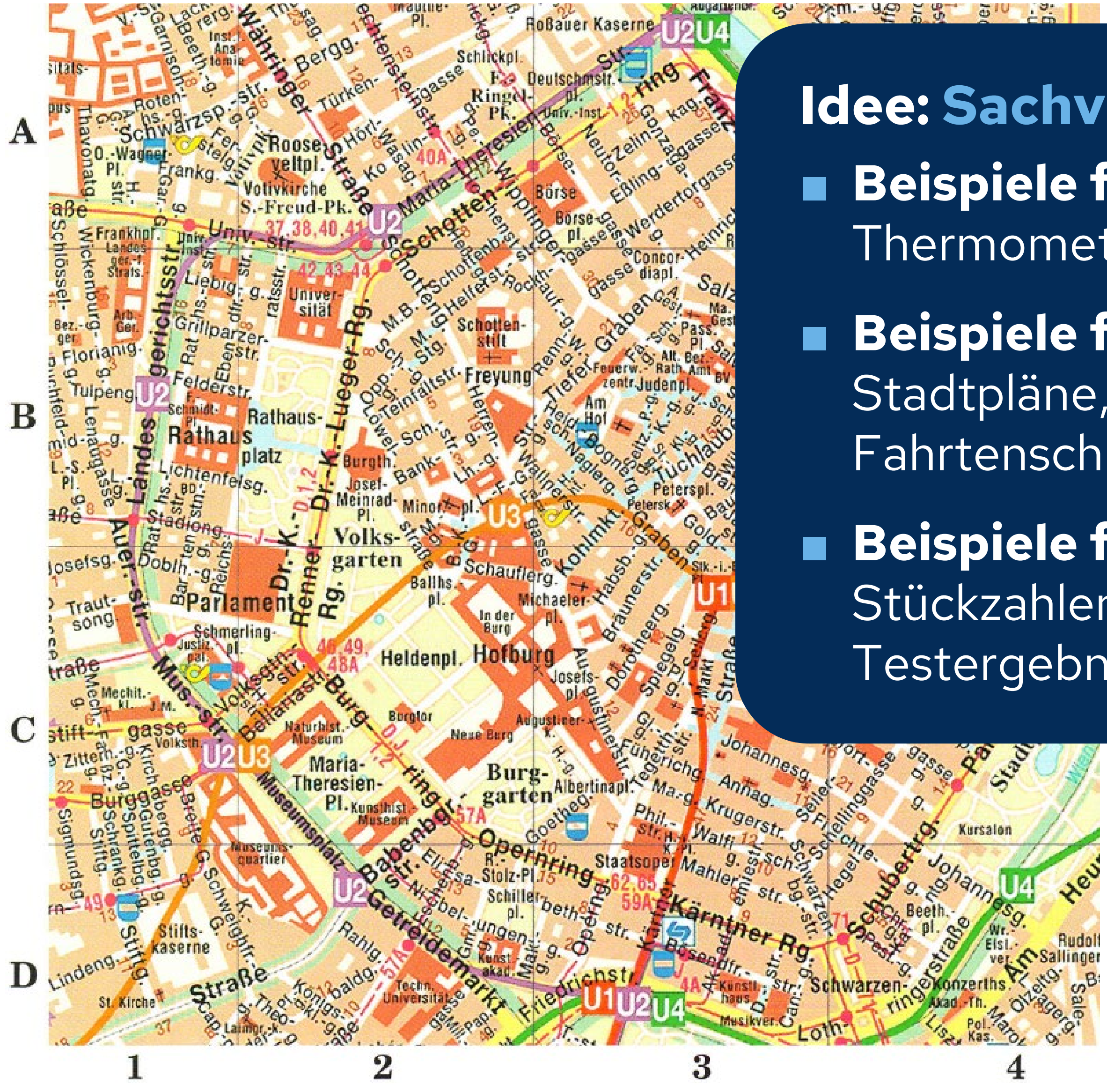


Kraftpfeile dürfen nicht beliebig verschoben werden!

 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als n-Tupel einführen!

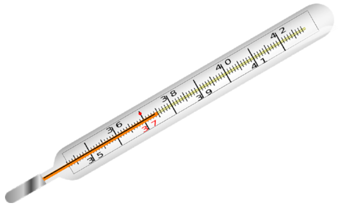
MaTeGnu

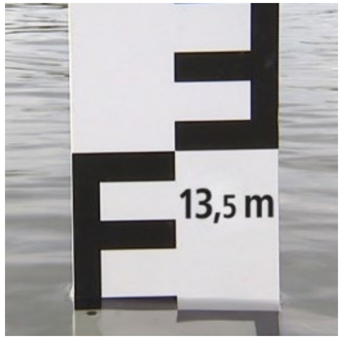


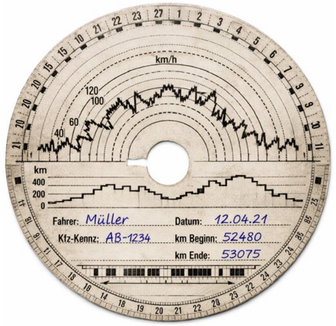
Idee: Sachverhalte mit Zahlen bzw. n-Tupeln darstellen

- **Beispiele für reelle Zahlen (1-Tupel)**
  Thermometer, Wasserstandsanzeiger, …
- **Beispiele für 2-Tupel**
  Stadtpläne, Schachbrett, Fahrtenschreiber, …
- **Beispiele für 3-Tupel**
  Stückzahlen in einem Lager, Testergebnisse, rgb-Farben, …

Wichtig:
Dieser Zugang zum Vektorbegriff ist bewusst rein arithmetisch und wird dringend empfohlen.







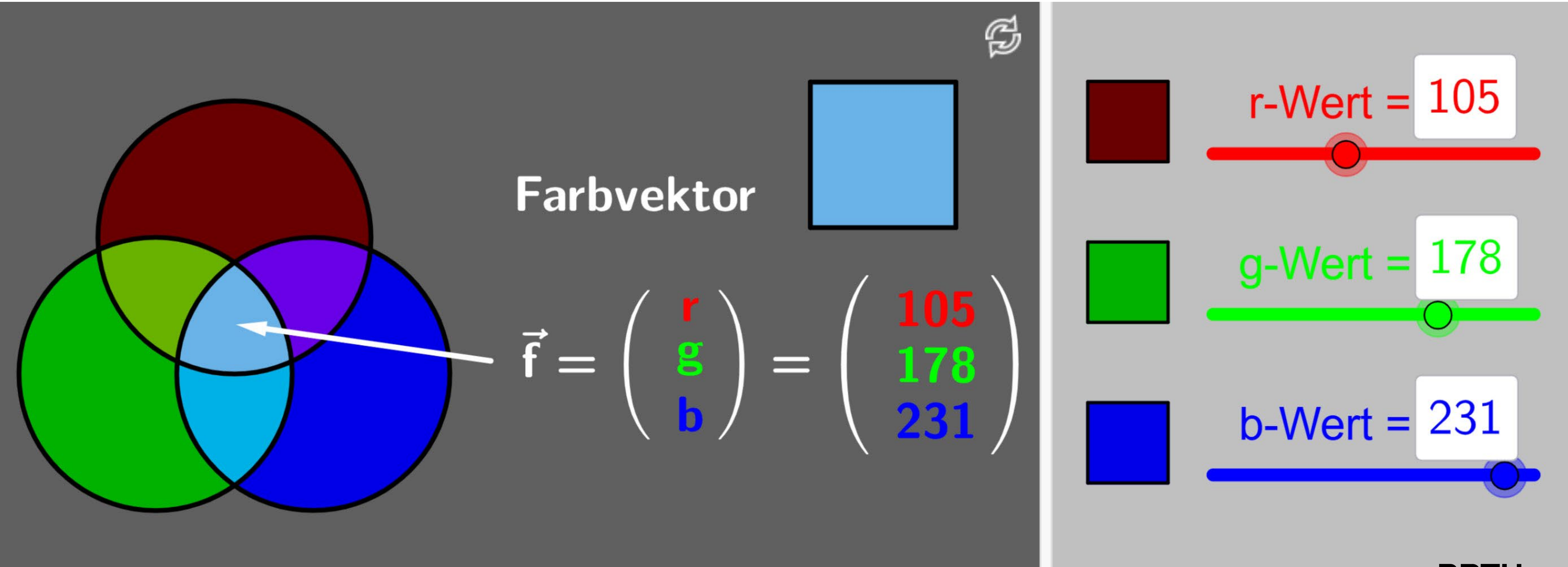
 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Verständnisanker: rgb-Farben

MaTeGnu

Verständnisanker: Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt.



Vektoren als n-Tupel einführen!
Situationen beschreiben, berechnen und lösen

MaTeGnu

Tests

Beate und Dora haben zwei Tests absolviert.
Bei jedem Test konnte man 20 Punkte erreichen.
Beate erhielt auf den ersten Test 15 Punkte und auf den zweiten 18 Punkte. Dora erhielt jedes Mal zwei Punkte weniger als Beate.

Gib ein Zahlenpaar an, das ...

- Beates Punktzahlen bei den beiden Tests angibt.
- Doras Punktzahl bei den beiden Tests angibt.
- die Punktzahlen der beiden Mädchen beim ersten Test angibt.
- Die Punktzahlen der beiden Mädchen beim zweiten Test angibt.

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15-2 \\ 18-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 15-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 18-2 \end{pmatrix}$$

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Situationen beschreiben, berechnen und lösen

MaTeGnu

Produktionskosten

Eine Firma erzeugt drei Waren. Die Stückpreise der Waren sind 115 €, 135 € und 140 €.

Im Lager befinden sich von diesen Waren 728, 644 bzw. 840 Stück, bestellt wurden 411, 433 bzw. 596 Stück. Es fallen Produktionskosten von 65 €, 70 € bzw. 72 € pro Stück an.

a) **B**eschreibe die Stückpreise, den Lagerbestand, die Bestellzahlen und die Produktionskosten jeweils durch ein Zahlentripel.

b) **D**ie Produktionskosten steigen um 5 € pro Stück. Deshalb erhöht die Firma die Stückpreise ebenfalls um 5 € pro Stück. Dadurch sinken die Bestellungen für die erste Ware um 56 Stück, für die zweite Ware um 112 Stück und für die dritte Ware um 134 Stück. Um weitere Kosten zu sparen, wird der Lagerbestand um ein Viertel gesenkt. Wie lauten jetzt die Zahlentripel?

Stückpreise: $\begin{pmatrix} 115€ \\ 135€ \\ 140€ \end{pmatrix}$

Lagerbestand: $\begin{pmatrix} 728 \\ 644 \\ 840 \end{pmatrix}$

Bestellzahlen: $\begin{pmatrix} 411 \\ 433 \\ 596 \end{pmatrix}$

Produktionskosten: $\begin{pmatrix} 65€ \\ 70€ \\ 72€ \end{pmatrix}$

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Situationen beschreiben, berechnen und lösen

MaTeGnu

Warenlager

Eine Firma verkauft zwei Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. Der Vektor $\vec{A} = (a_1|a_2)$ gibt die Stückzahlen der beiden Waren im ersten Lager, der Vektor $\vec{B} = (b_1|b_2)$ die Stückzahlen der beiden Waren im zweiten Lager an. Der Vektor $\vec{C}$ gebe die Stückzahlen der beiden Waren in beiden Lagern zusammen an.

a) Drücke $\vec{C}$ durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aus.

b) Was gibt der Vektor $\vec{B} - \vec{A}$ an?

c) Was sagt die Gleichung $\vec{B} = 2 \cdot \vec{A}$ aus?

d) Drücke in diesem Fall $\vec{C}$ durch $\vec{A}$ aus.

Rabatte

Die Verkaufspreise (in Euro) von vier Waren werden durch den Vektor $\vec{V} = (v_1|v_2|v_3|v_a)$ angegeben. Bei Großabnahme erhält man 35 % Rabatt. Es sei $\vec{V'}$ der Vektor der Preise bei Großabnahme und $\vec{R}$ der Vektor der Rabatte.

a) Welche Beziehung besteht zwischen $\vec{R}$ und $\vec{V}$?

b) Welche Beziehung besteht zwischen $\vec{V'}$ und $\vec{V}$?

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Situationen beschreiben, berechnen und lösen

MaTeGnu

Zimmerpreise

Ein Hotel hat 25 Zimmer. Der Vektor $\vec{P} \in \mathbb{R}^{25}$ gibt die Zimmerpreise an, der Vektor $\vec{B} \in \mathbb{R}^{25}$ gibt an, wie oft jedes Zimmer im laufenden Monat belegt war.

a) Drücke die Gesamteinnahmen $\vec{G}$ des Hotels im laufenden Monat durch $\vec{P}$ und $\vec{B}$ aus.

b) Im nächsten Monat werden die Zimmerpreise um 5% erhöht. Drücke wiederum $\vec{G}$ durch $\vec{P}$ und $\vec{B}$ aus.

Firmenbestellung

Eine Firma bestellt 100 Waren. Die Stückzahlen der bestellten Waren seien $s_1, s_2, \dots, s_{100}$, die Preise der Waren seien $p_1, p_2, \dots, p_{100}$.

a) Schreibe einen Stückzahlvektor $\vec{S}$ und einen Preisvektor $\vec{P}$ auf.

b) Was bedeutet $\vec{S} \cdot \vec{P}$?

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Vektoren als n-Tupel einführen!

Komponentenweise Erklärung von Rechenoperationen

MaTeGnu

Addition, Subtraktion, Vervielfachung

- Komponentenweise erklärt
  - $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$
  - $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ \vdots \\ r \cdot a_n \end{pmatrix}$
- Formeln von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ übertragen
  - $b = 1{,}2 \cdot n$
  - $\vec{b} = 1{,}2 \cdot \vec{n}$

Die Erkenntnis, dass Addition, Subtraktion und Vervielfachung von Vektoren komponentenweise erklärbar ist, wird anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug erarbeitet (vgl. Folien 27-30.) .

Skalarprodukt

Am Beispiel (Stückpreis, Stückzahl) einführen.

(Vgl. Abschnitt 5: Skalarprodukt)

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_2 \cdot b_2$$

Arithmetischen Zugang als Übergang zu linearen Gleichungssystemen (LGS) nutzen!

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. JMD 1, 171–187.

Vektoren als n-Tupel einführen!

Rechengesetze (→ Vektorraum-Axiome) erarbeiten

MaTeGnu

Rechengesetze für n-Tupel (Vektoren)

Vektorraum-Axiome

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — Kommutativität der Vektoraddition
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ — Assoziativität der Vektoraddition
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ — Existenz eines Nullvektors $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ — Existenz eines Gegenvektors* zu jedem Vektor

  $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ ist der Gegenvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- $(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$ — Assoziativität der Vervielfachung eines Vektors
- $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ — 1. Distributivgesetz
- $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$ — 2. Distributivgesetz
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ — Neutrales Element bzgl. der Vervielfachung

Rechengesetze bzw. **Vektorraum-Axiome** werden anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug erarbeitet. (Vgl. Folien 27-30)

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

*Gegenvektor = inverses Element bzgl. +

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, …)

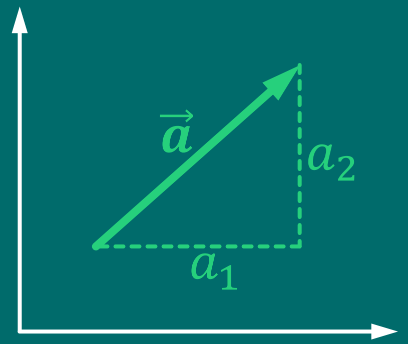
2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

MaTeGnu

Was ist ein Pfeil?
Ein Pfeil ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entsprechen unendlich viele Pfeile in der Ebene, die alle gleich lang und (abgesehen von den Nullpfeilen) gleich gerichtet und gleich orientiert sind. Die Komponenten können als Änderungen in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse gedeutet werden.

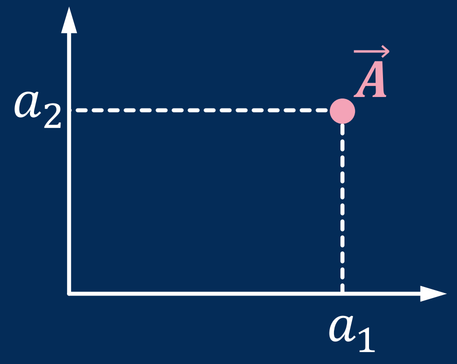
Umgekehrt entspricht jedoch jedem Pfeil in der Ebene genau ein Zahlenpaar.



Änderung

Was ist ein Punkt?
Ein Punkt ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entspricht genau ein Punkt in der Ebene und umgekehrt.



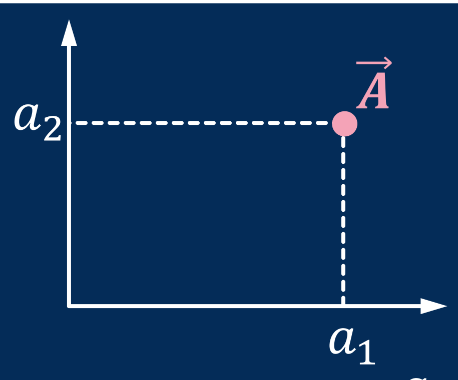
Zustand

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4–7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. *JMD, 1*(3), 171–187.

Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, …)

2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

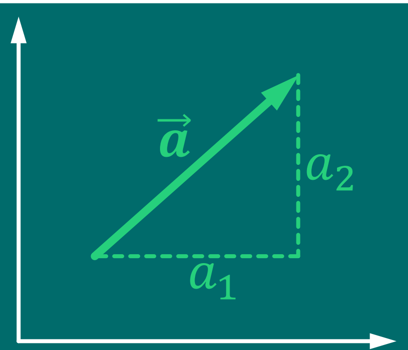
MaTeGnu



Zustand

Zahlenpaar $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

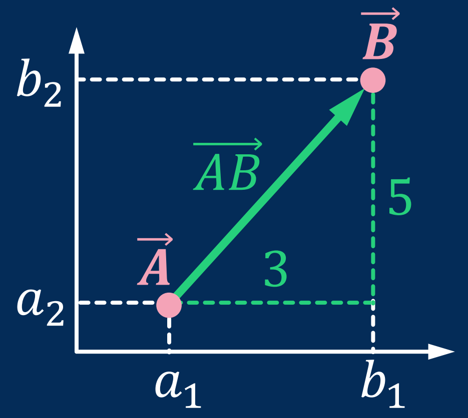
als **Punkt** in der Ebene.



Änderung

Zahlenpaar $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

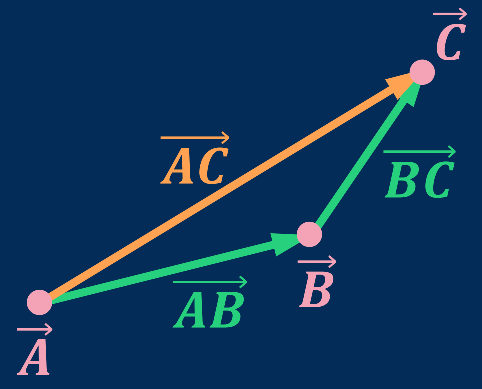
als **Pfeil** in der Ebene.



Pfeil $\overrightarrow{AB}$ gegeben durch Anfangs- und Endpunkt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{A} + \overrightarrow{AB} = \vec{B}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= (\vec{B} - \vec{A}) + (\vec{C} - \vec{B})$$
$$= \vec{C} - \vec{A}$$
$$= \overrightarrow{AC}$$

Grundvorstellungen zur Addition

MaTeGnu

Grundvorstellungen (GV) zur Addition

- Vom Hofe und Roth (2023) beschreiben vier Grundvorstellungen zur Addition.
- Zwei davon bewähren sich im Rahmen von Zahlbereichserweiterungen um inhaltlich-anschauliches Verständnis aufzubauen.

GV „Hinzufügen“

Anna hat 2 €, ihre Eltern geben ihr 3 € dazu.
Wie viel Euro hat Anna insgesamt?

- Die Ausgangssituation ist ein Zustand, dann erfolgt eine Änderung, das Ergebnis ist wieder ein Zustand.
- Folgende Gleichung beschreibt diese GV plakativ:
  Zustand + **Änderung** = **Zustand**

GV „Zusammenfassen von Änderungen“

Tobias bekommt von Onkel Jürgen 2 € und von Tante Susanne 3 €. Wie viel Euro hat er insgesamt bekommen?

- Hier werden zwei Änderungen zu einer Gesamtänderung zusammengefasst.
- Folgende Gleichung beschreibt diese GV plakativ:
  Änderung + **Änderung** = **Gesamtänderung**

vom Hofe, R. & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. Mathematik lehren, 236, 2-7

Grundvorstellungen zur Addition
Geometrische Darstellungen

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren*, *133*, 8-14

https://www.geogebra.org/m/kpww4bah

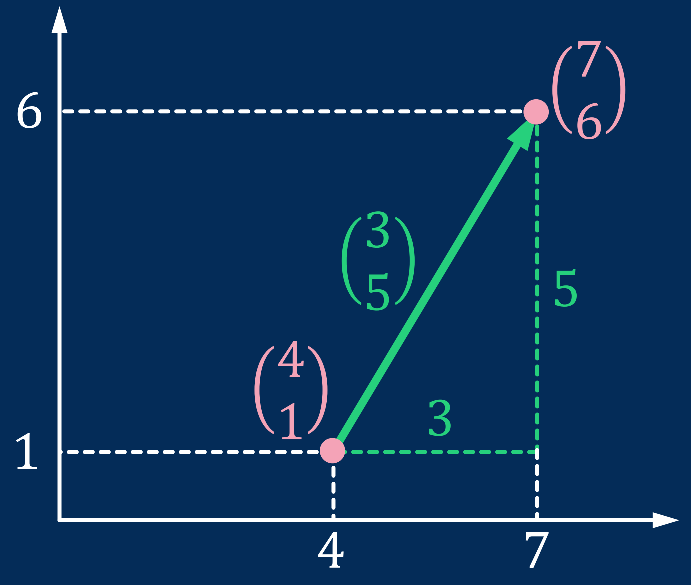
MaTeGnu

Grundvorstellung (GV) „Hinzufügen“
Zustand + Änderung = Zustand

Punkt-Pfeil-Darstellung:

- Reelle Zahlen → Zahlengerade

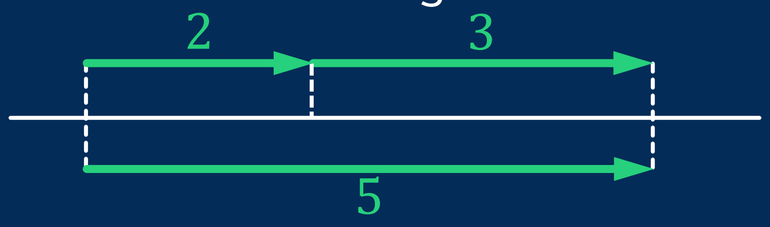
- Vektoren (n-Tupel) → Koordinatensystem



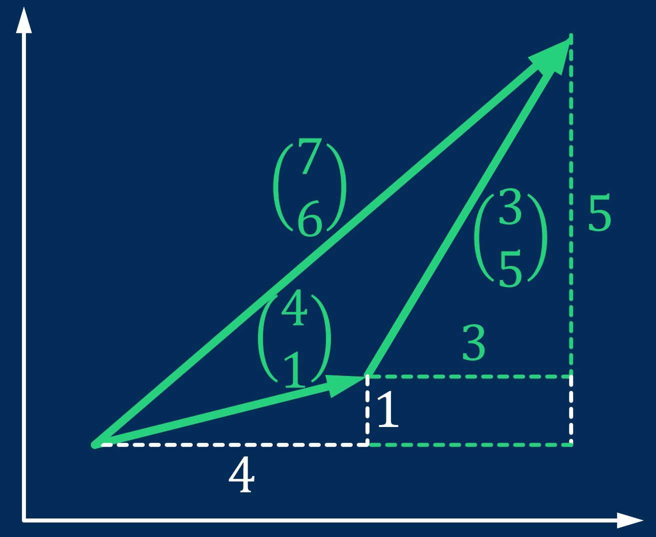
GV „Zusammenfassen von Änderungen“
Änderung + Änderung = Gesamtänderung

Pfeil-Darstellung:

- Reelle Zahlen → Zahlengerade



- Vektoren (n-Tupel) → Koordinatensystem



RPTU

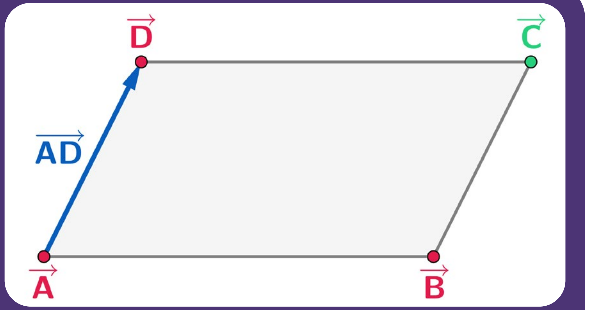
Schreibweisen für Vektoren

Aufgabe: Aus den bekannten Koordinaten der Eckpunkte A, B und D eines Parallelogramms sollen die Koordinaten des Eckpunkts C bestimmt werden.

MaTeGnu

MaTeGnu

$$\vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \vec{B} + \left(\vec{D} - \vec{A}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$$

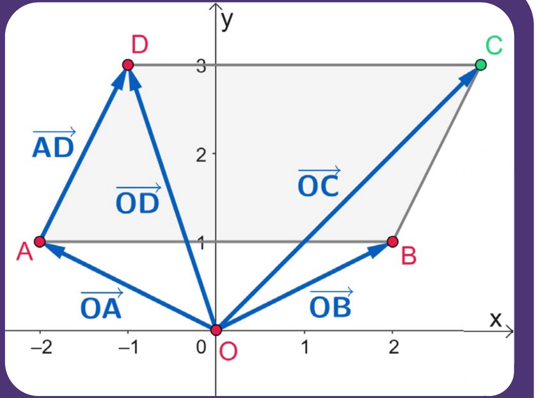


Vektor als n-Tupel
(Zustand **und** Änderung)

Schulbücher

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$$

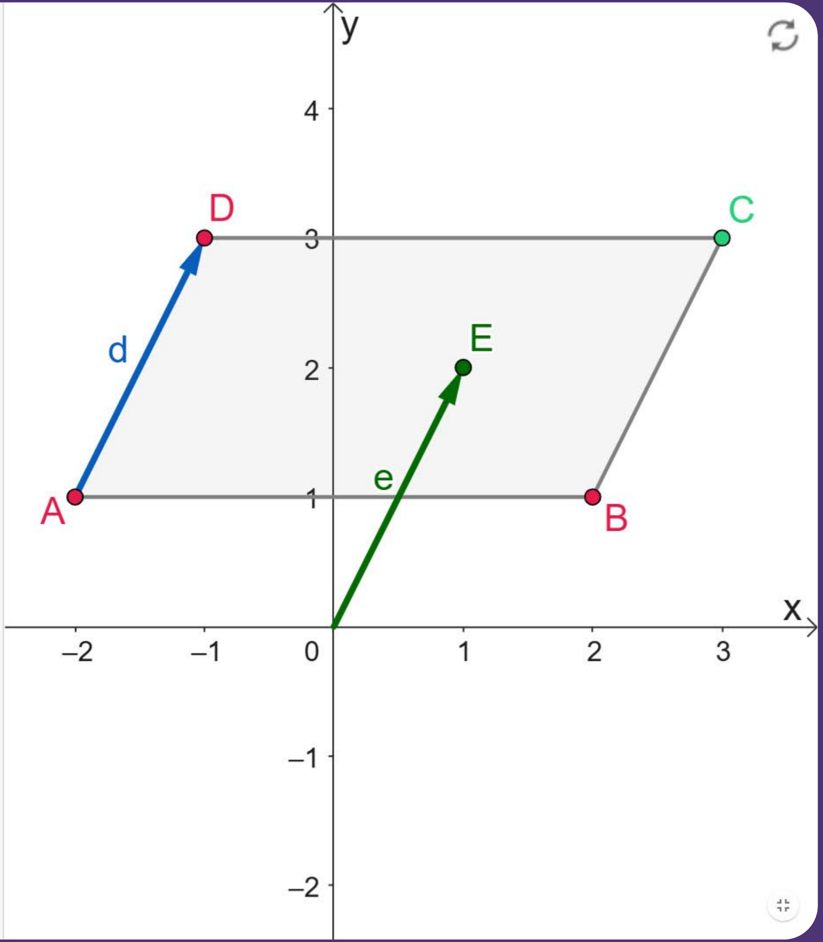
$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \vec{b} + \left(\vec{d} - \vec{a}\right)$$



Vektor als Pfeilklasse
(**Nur** Änderung)

GeoGebra

●	A = (-2, 1)
●	B = (2, 1)
●	D = (-1, 3)
●	d = Vektor(A, D) $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
●	C = B + d = (3, 3)
●	E = D − A = (1, 2)
●	e = D − A $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



RPTU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Schwierigkeit:
Fehlende (Grund-)Vorstellungen

MaTeGnu

Situation
Viele Lernende benutzen Vektoren, ohne zu verstehen, was sie tun.

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?

Florian (F):
Ich glaube, das hat etwas mit diesem großen $\vec{X}$ zu tun. $\vec{X}$ ist gleich irgendein Punkt $\vec{A}$ plus t mal $\overrightarrow{AB}$.
[Er schreibt:] $\vec{X} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

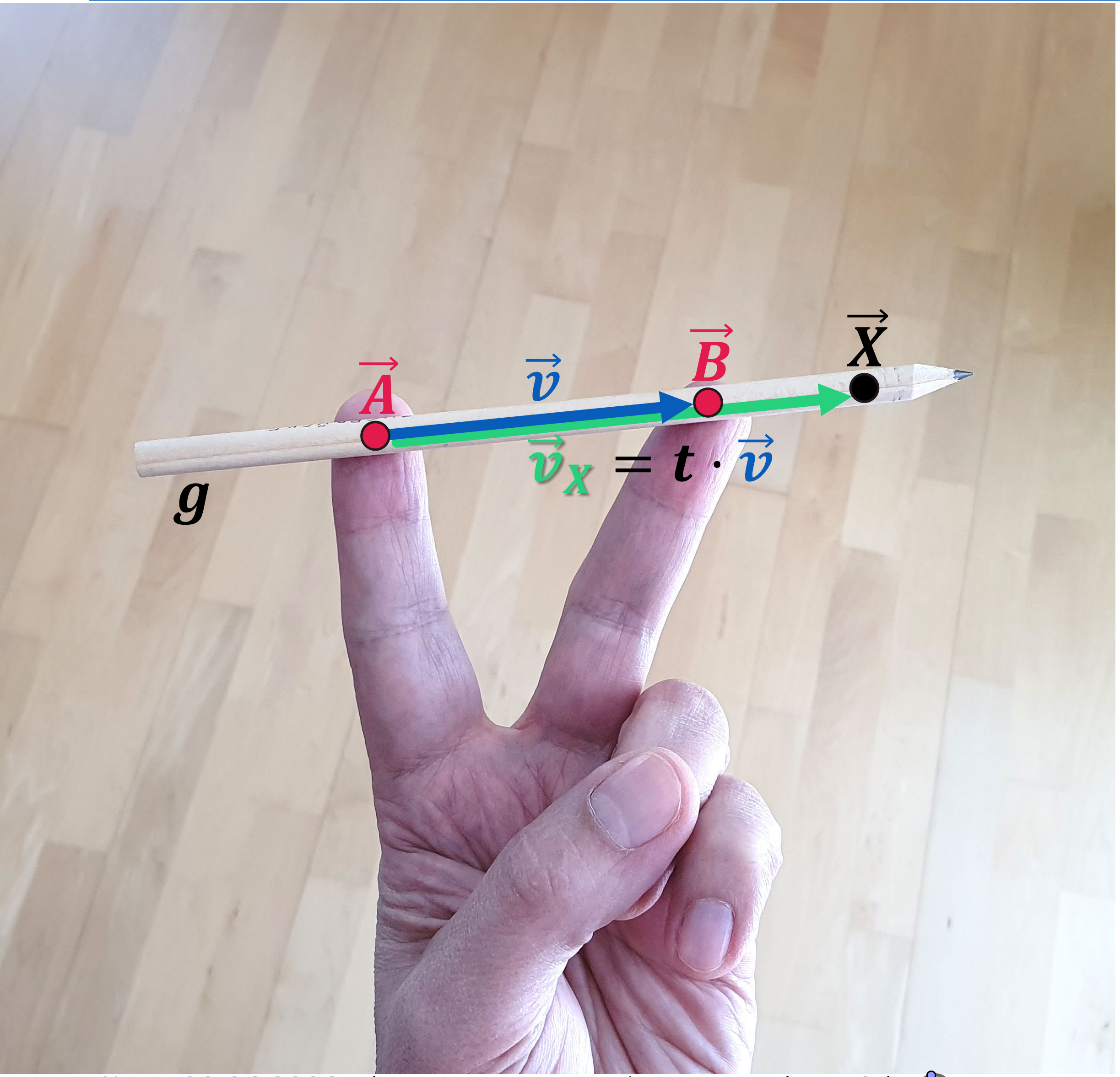
F: Für t kann man auch Lambda schreiben.

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

F: Weiß ich nicht!

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Geradengleichung: Parameterform



Bemerkung

- Eine Gerade g ist eindeutig festgelegt über
  - zwei verschiedene Punkte $\vec{A}$, $\vec{B}$ bzw.
  - einen Anfangspunkt $\vec{A}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
- Für jeden Punkt $\vec{X}$ der Gerade g gibt es eine reelle Zahl t, so dass gilt:

$$\vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

Geradengleichung: Parameterform

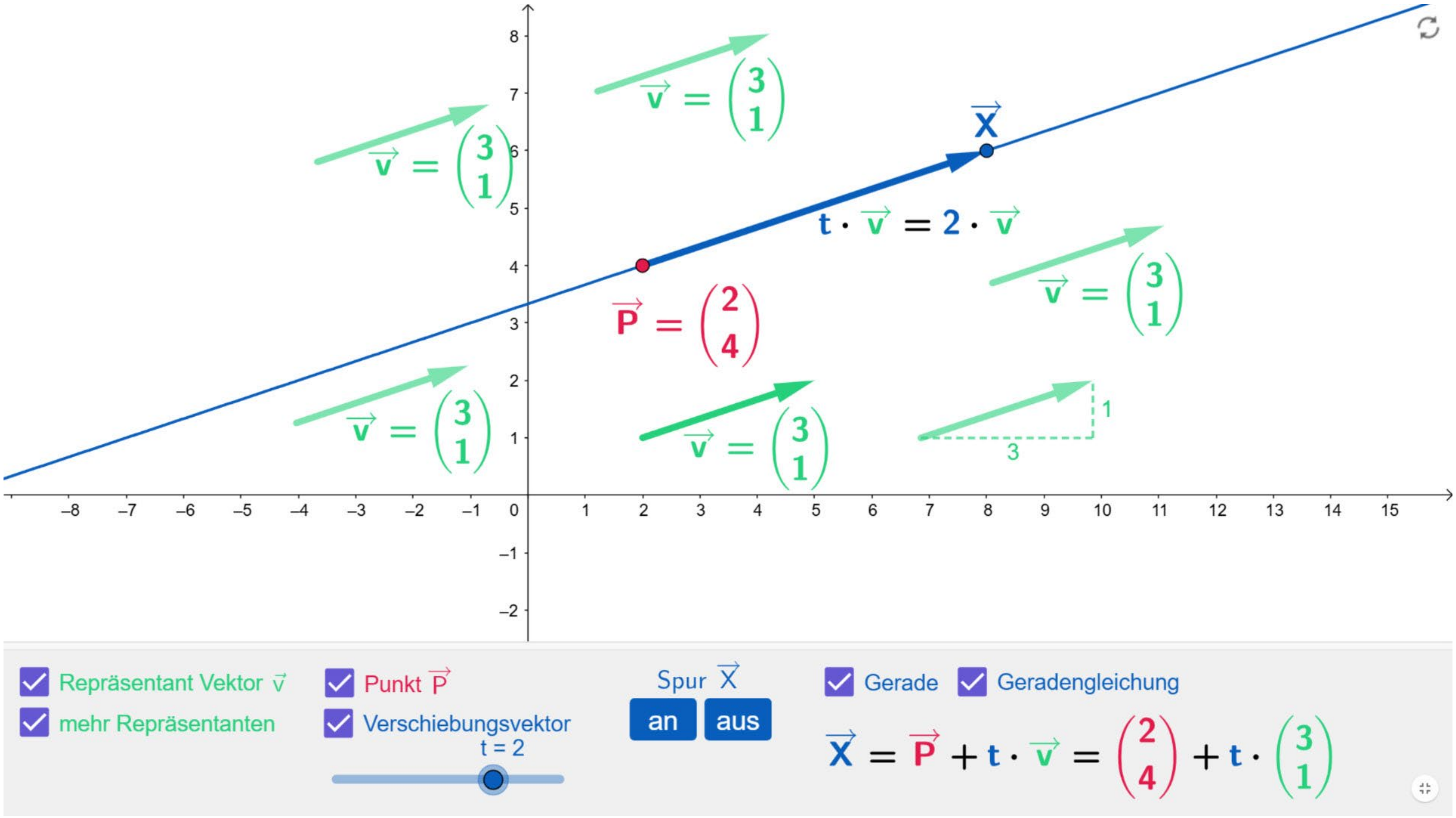
Eine Gerade g ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als

$$g = \{\vec{X} \mid \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz $\quad g\colon \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{v},\quad t \in \mathbb{R}.$

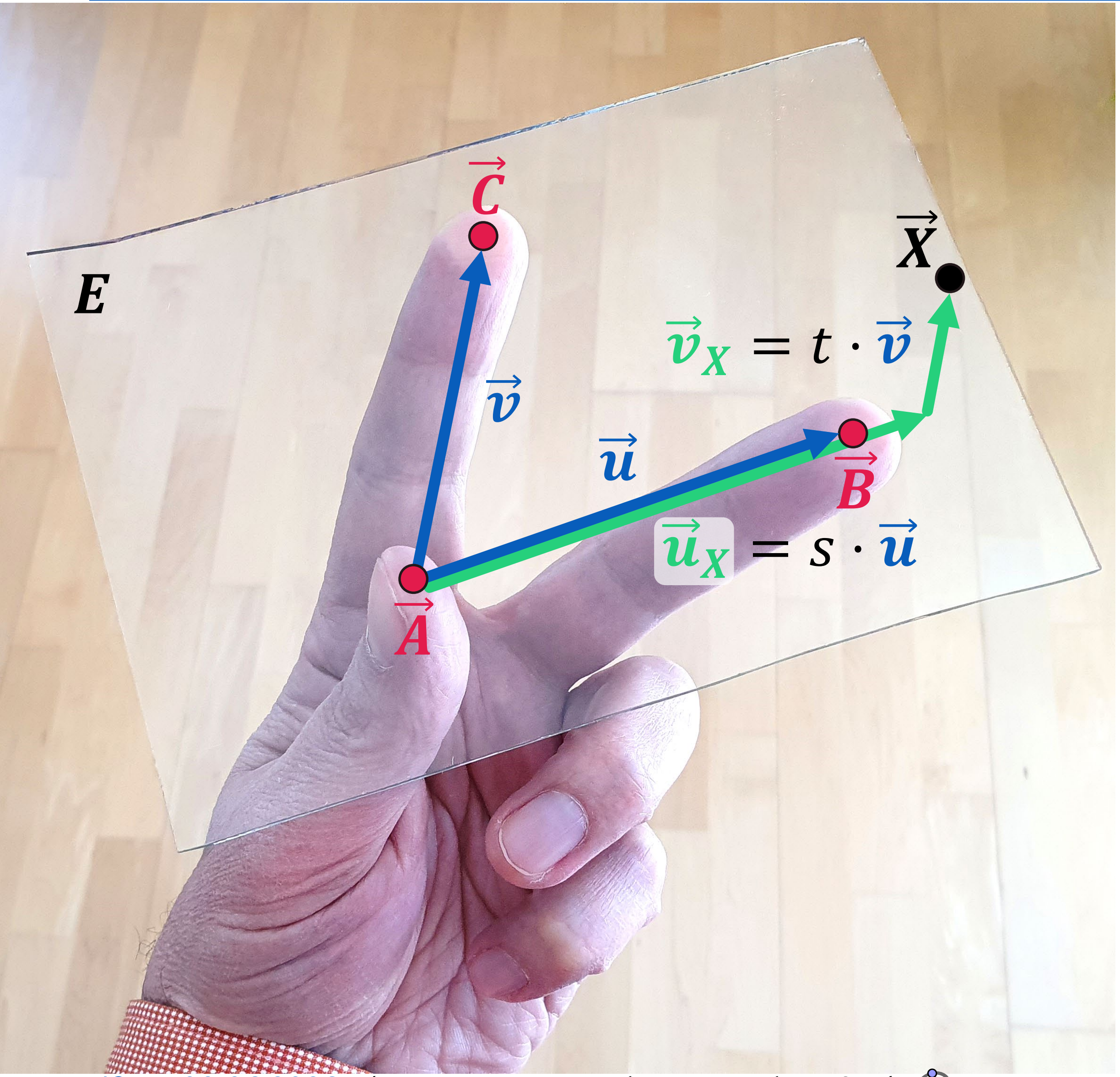
(Grund-)Vorstellungen zu Geraden

MaTeGnu



Ebenengleichung: Parameterform

MaTeGnu



Bemerkung

- Eine Ebene E ist eindeutig festgelegt über
  - drei nicht kollineare Punkte $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ bzw.
  - einen Anfangspunkt $\vec{A}$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
- Für jeden Punkt $\vec{X}$ der Ebene E gibt es zwei reelle Zahlen s und t, so dass gilt:

$$\vec{X} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Ebenengleichung: Parameterform

Eine Ebene E ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als:

$$E = \{\vec{X} \mid \vec{X} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ s, t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz

$$E: \vec{X} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Ebenengleichung: Koordinatenform

MaTeGnu

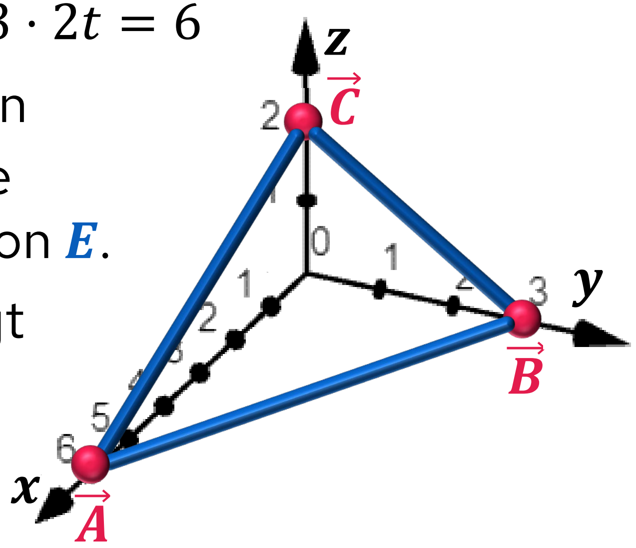
Beispiel: $x + 2y + 3z = 6 \quad (*)$

Vermutung: Die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ der Gleichung $x + 2y + 3z = 6$ ist eine Ebene.

Vorgehen

- Setzt man $y = z = 0$ dann ergibt sich $x = 6$.
- Daraus ergibt sich der Punkt $\vec{A} = (6|0|0)$, den man als Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der x-Achse deuten kann.
- $x = z = 0$ liefert $y = 3$. $\vec{B} = (0|3|0)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der y-Achse.
- $x = y = 0$ liefert $z = 2$. $\vec{C} = (0|0|2)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der z-Achse.
- $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ heißen **Spurpunkte** und man kann vermuten, dass die von ihnen bestimmte Ebene die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ ist.

- Zu zeigen: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist der Punkt $\vec{X} = \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$ Lösung der Gleichung $(*)$.
- Einsetzen der Punktkoordinaten liefert:
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6s - 6t \\ 3s \\ 2t \end{pmatrix}$$
- Einsetzen in die Gleichung $(*)$ ergibt: $(6 - 6s - 6t) + 2 \cdot 3s + 3 \cdot 2t = 6$
- Also ist $\vec{X} \in \boldsymbol{E}$ und die von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ aufgespannte Ebene eine Teilmenge von $\boldsymbol{E}$.
- Durch Nachrechnen zeigt man, dass jede weitere Lösung von $(*)$ wieder in der von den Spurpunkten aufgespannten Ebene liegt.

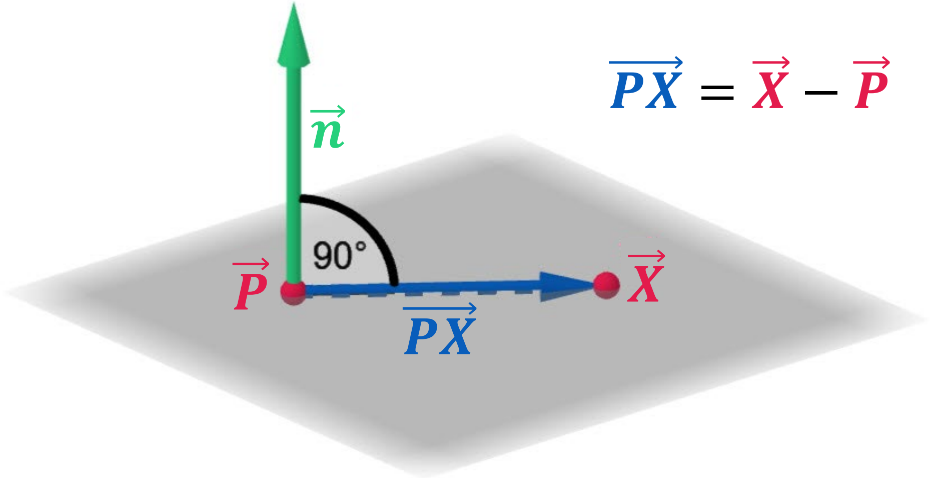


RPTU

Ebenengleichung: Normalenform

MaTeGnu

Ebene mit Normalenvektor beschreiben



$$\overrightarrow{PX} = \vec{X} - \vec{P}$$

- Ein Normalenvektor einer Ebene E ist ein Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, der zu jedem Verbindungsvektor zweier beliebiger Punkte $\vec{P}$ und $\vec{X}$ der Ebene E orthogonal ist, für den also gilt: $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$
- Damit folgt für das Skalarprodukt:
$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = (\vec{X} - \vec{P}) \cdot \vec{n} = 0$$

Ebenengleichung in Normalenform

Ist $\vec{P}$ ein Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E, dann kann man alle Punkte $\vec{X}$ der Ebene schreiben als

$$E = \{\vec{X} \mid (\vec{X} - \vec{P}) \cdot \vec{n} = 0\}$$

oder kurz:

$$E\colon (\vec{X} - \vec{P}) \cdot \vec{n} = 0$$

Hesse'sche Normalenform

Ist $\vec{P}$ ein Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E, dann kann man alle Punkte $\vec{X}$ der Ebene schreiben als

$$E = \left\{\vec{X} \mid (\vec{X} - \vec{P}) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0\right\}$$

Oder mit dem Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0} := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

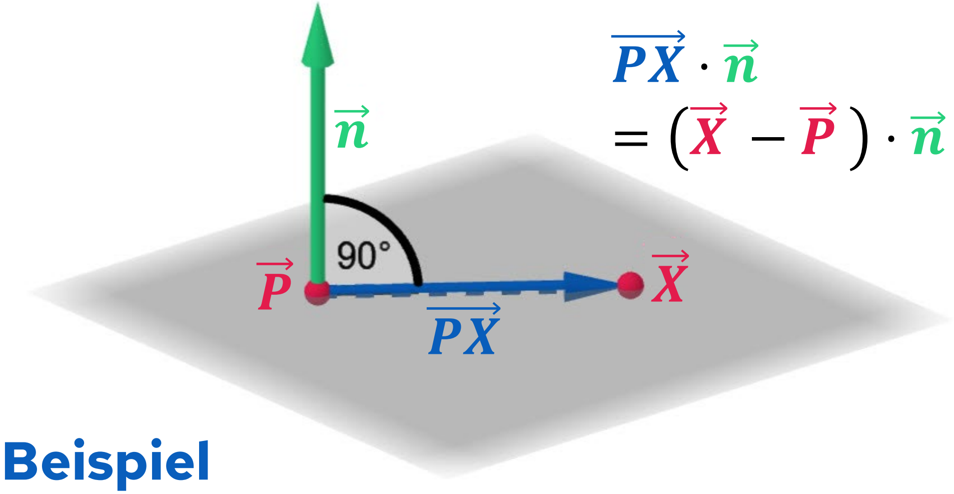
kurz: $E\colon (\vec{X} - \vec{P}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$

RPTU

Ebenengleichung: Normalenform

MaTeGnu

Ebene mit Normalenvektor beschreiben



$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n}$
$= (\vec{X} - \vec{P}) \cdot \vec{n} = 0$

Beispiel

Gegeben: Punkt $\vec{P} = (2{,}2{,}1)$
und Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
einer Ebene $\boldsymbol{E}$.

Für alle Punkte $\vec{X}$ der Ebene gilt dann
$(\vec{X} - \vec{P}) \cdot \vec{n} = 0$, bzw. mit Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$-1 \cdot (x-2) + 3 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-1) = 0$$
$$-1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z$$
$$+\big(-1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1)\big) = 0$$
$$-1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 6$$

Bemerkung
Wie das Beispiel zeigt, lässt sich die Normalen-form einer Ebenengleichung in eine Koordina-tenform umwandeln, bei der die Koeffizienten die Koordinaten eines Normalenvektors sind.

Satz
Ist $\boldsymbol{a} \cdot x + \boldsymbol{b} \cdot y + \boldsymbol{c} \cdot z = d$ eine Gleichung einer Ebene $\boldsymbol{E}$, dann ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von $\boldsymbol{E}$.

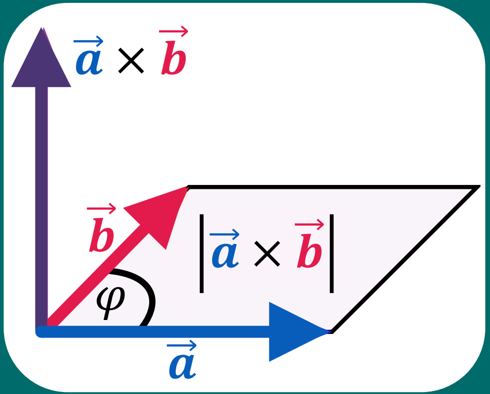
RPTU

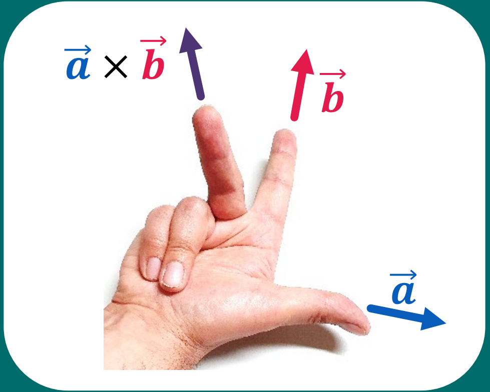
Exkurs: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

MaTeGnu

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet (**Rechte-Hand-Regel**).
- Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.





- Das Vektorprodukt wird wie folgt berechnet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vorgehensweise bei der Berechnung:

1. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2} \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cancel{a_2} \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \cancel{b_2} \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ \boxed{-(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)} \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

3. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cancel{a_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cancel{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ \boxed{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \end{pmatrix}$$

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Aspekte des Skalarprodukts im MU

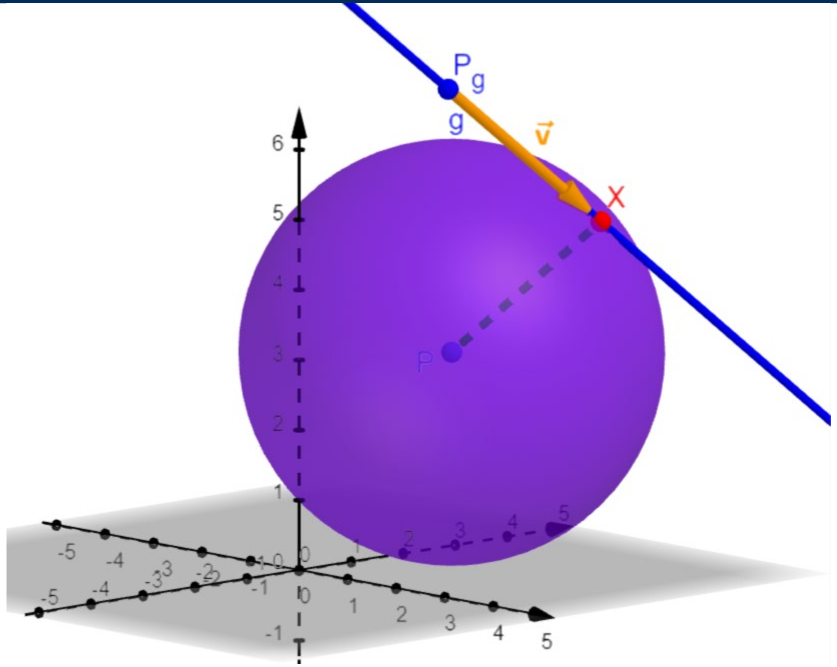
 Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. *Praxis der Mathematik in der Schule 56(55)*, 32-38

Skalarprodukt

MaTeGnu

Skalarprodukt:
Weitere Struktur in einem Vektorraum

Um in einem Vektorraum Längen und Winkel messen zu können, muss eine weitere Struktur, das Skalarprodukt, hinzugefügt werde.
⇒ Euklidischer Vektorraum



Anwendungen des Skalarprodukts

- **Abstände bestimmen**
  - Punkt ↔ Gerade, Ebene ↔ Gerade
  - parallele Geraden
    (z. B. zur Flächenberechnung)
  - windschiefe Geraden
- **Schnittwinkel berechnen**
  - Gerade ↔ Gerade
  - Ebene ↔ Ebene
  - Gerade ↔ Ebene
- **Orthogonalität prüfen**
  - Gerade ↔ Gerade
  - Ebene ↔ Ebene
  - Gerade ↔ Ebene
- **Normalenvektor / -gleichung bestimmen**
  - Normalenvektor einer Ebene
  - Normalengleichung einer Ebene

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

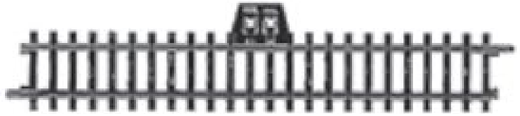
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

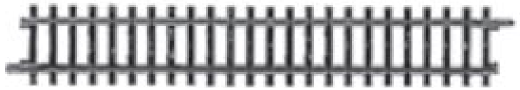
Arithmetischer Zugang

Beispiel: Modelleisenbahnbau

Artikel	**Stückzahl im Basissortiment**	**Stückzahl im Ergänzungssortiment**	**Preis pro Stück**
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	15	2,40 €
Gleisstück gebogen (45°)	8	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	1	6,29 €
Weiche links	0	2	17,98 €
Weiche rechts	0	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	4	12,98 €



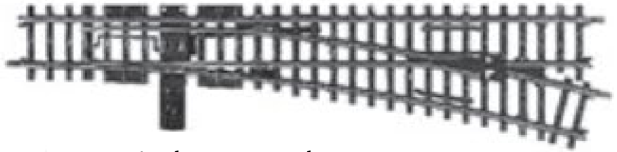
Anschluss-Gleisstück



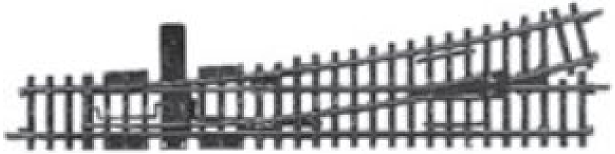
Gleisstück gerade (168,9 mm)

Gleisstück gebogen (45°)

Weichenantrieb



Weiche rechts



Weiche links

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

Arithmetischer Zugang

Beispiel: Modelleisenbahnbau

MaTeGnu

Artikel	Stückzahl im Basissortiment	Stückzahl im Ergänzungssortiment	Preis pro Stück
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	15	2,40 €
Gleisstück gebogen (45°)	8	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	1	6,29 €
Weiche links	0	2	17,98 €
Weiche rechts	0	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	4	12,98 €

Teilevektor

Stückliste Ergänzungs-sortiment: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Preisvektor

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}40 \\ 2{,}70 \\ 6{,}29 \\ 17{,}98 \\ 17{,}98 \\ 12{,}98 \end{pmatrix}$

Gesamtpreis eines Sortiments

Summe der Produkte einander entsprechender Komponenten des Teile- und des Preisvektors

$15 \cdot 2{,}40 + 8 \cdot 2{,}70 + 1 \cdot 6{,}29$
$+ 2 \cdot 17{,}98 + 2 \cdot 17{,}98 + 5 \cdot 12{,}98$
$= \mathbf{187{,}73}$ **(in €)**

Skalarprodukt

Die Produktsumme, die den Gesamtpreis ergibt, nennen wir Skalarprodukt der Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{p}$.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

Arithmetischer Zugang
Definition Skalarprodukt

MaTeGnu

Definition: Skalarprodukt
Als Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

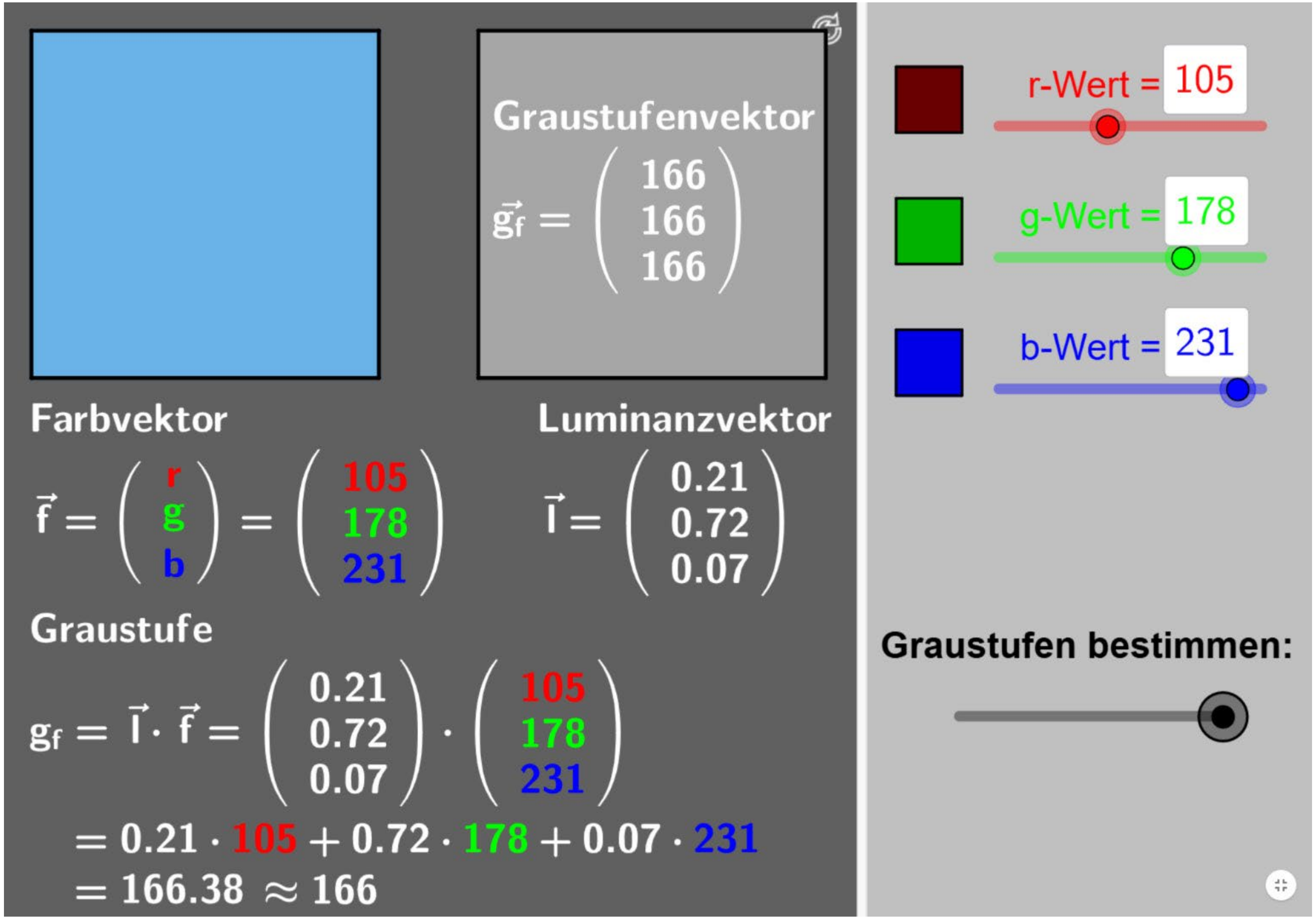
wird die Summe der Produkte einander entsprechender Komponenten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezeichnet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

Arithmetischer Zugang

Verständnisanker: Graustufen bestimmen



 https://www.geogebra.org/m/hhdjmnbu

Arithmetischer Zugang
Definition Skalarprodukt

MaTeGnu

Bemerkungen

- Der Name **Skalarprodukt** kommt daher, dass zwei Vektoren ein Skalar, d. h. eine reelle Zahl, zugeordnet wird.
- Beim Rechnen mit Vektoren treten damit nun drei Arten von Produkten auf, für die jeweils das Zeichen „$\cdot$“ verwendet wird:
  - das Produkt zweier reeller Zahlen,
  - das Produkt einer reellen Zahl mit einem Vektor,
  - das Skalarprodukt zweier Vektoren.
- Was das Zeichen „$\cdot$“ jeweils bedeutet, ergibt sich aus der Art der Objekte (Vektoren und/oder reelle Zahlen), zwischen denen es steht.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

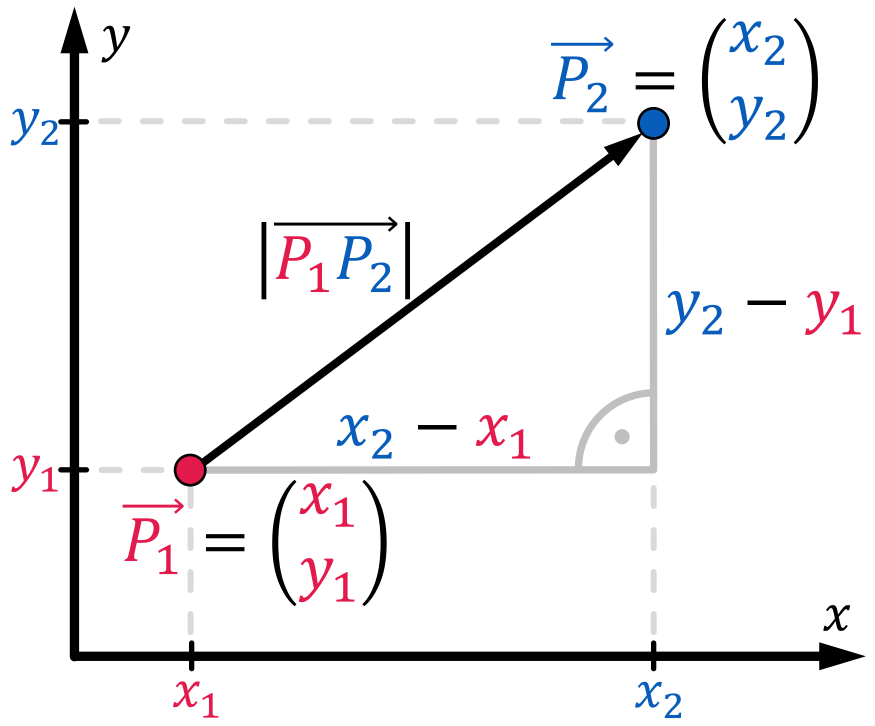
GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Skalarprodukt: Geometrische Deutung

Abstand zweier Punkte der Ebene

Für den Abstand zweier Punkte $\overrightarrow{P_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{P_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ der Ebene ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Skalarprodukt: Geometrische Deutung

MaTeGnu

Abstand zweier Punkte des Raums

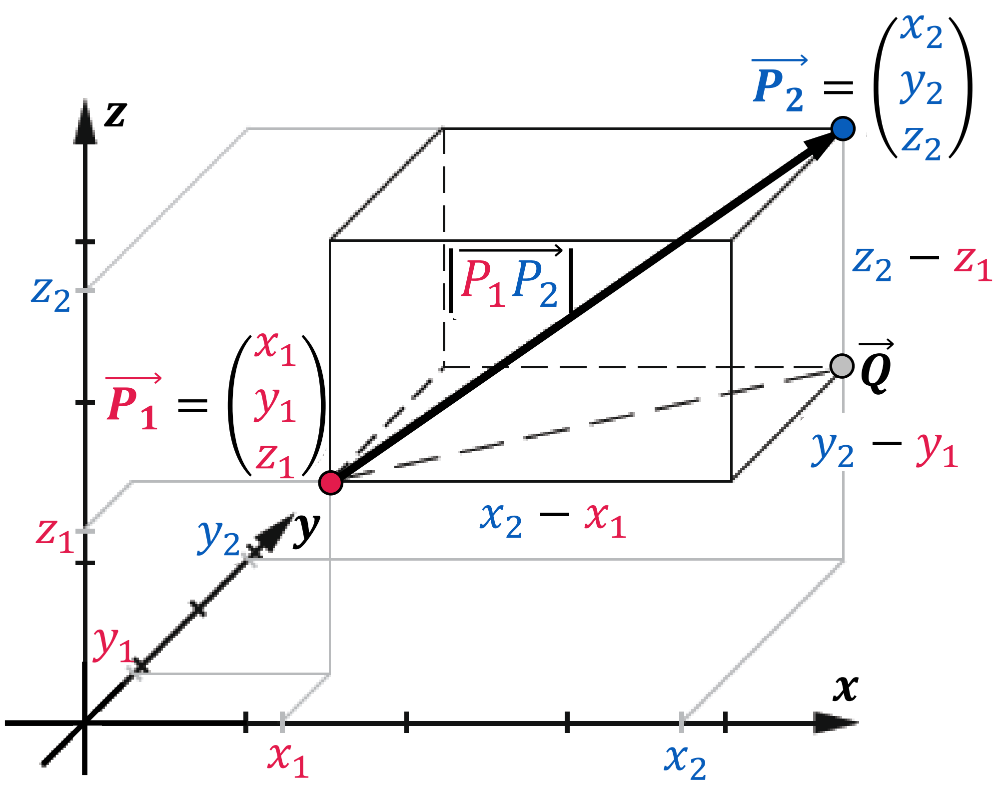
Für den Abstand zweier Punkte $\overrightarrow{P_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{P_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ des Raums ergibt sich (zweimaliges Anwenden des Satzes des Pythagoras):

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Darstellung von Vektoren

Wird ein Vektor $\vec{p}$ durch den Pfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ repräsentiert, dann kann man diesen Vektor auch so darstellen:

$$\vec{p} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$



 Filler, A. (2011). Elementare Lineare Algebra. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 55

RPTU

Skalarprodukt: Geometrische Deutung

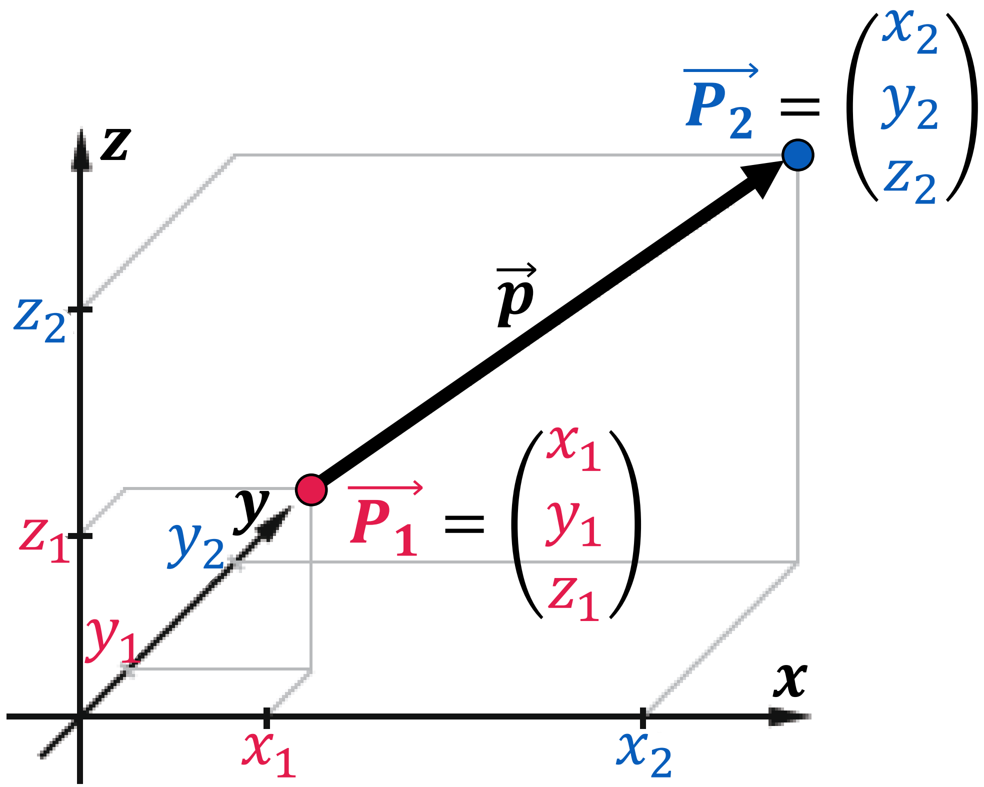
Betrag (Länge) eines Vektors

Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors

$$\vec{p} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

mit sich selbst, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p} &= x_p \cdot x_p + y_p \cdot y_p + z_p \cdot z_p \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right)^2 = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 \end{aligned}$$



Definition: Betrag eines Vektors

Als Betrag eines Vektors $\vec{v}$ bezeichnet man die Wurzel aus dem Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$$

 Filler, A. (2011). Elementare Lineare Algebra. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 55

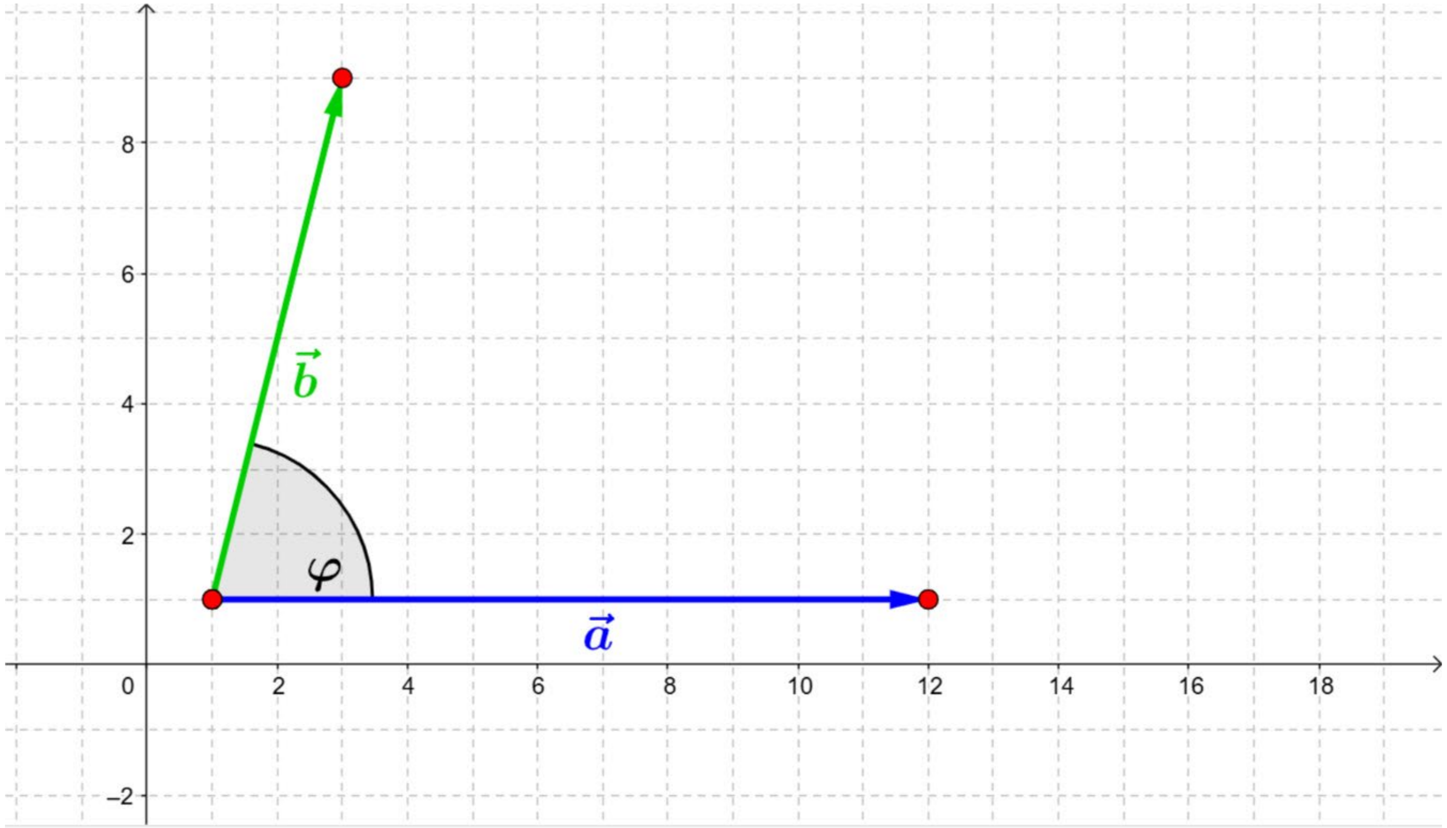
MaTeGnu

Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

Skalarprodukt erkunden

Aufgaben

- Was passiert, wenn die beiden Vektoren parallel zueinander sind?
- Wann ist das Skalarprodukt positiv, wann negativ?
- Wie kann man einen der beiden Vektoren ändern, ohne dass sich das Skalarprodukt ändert?



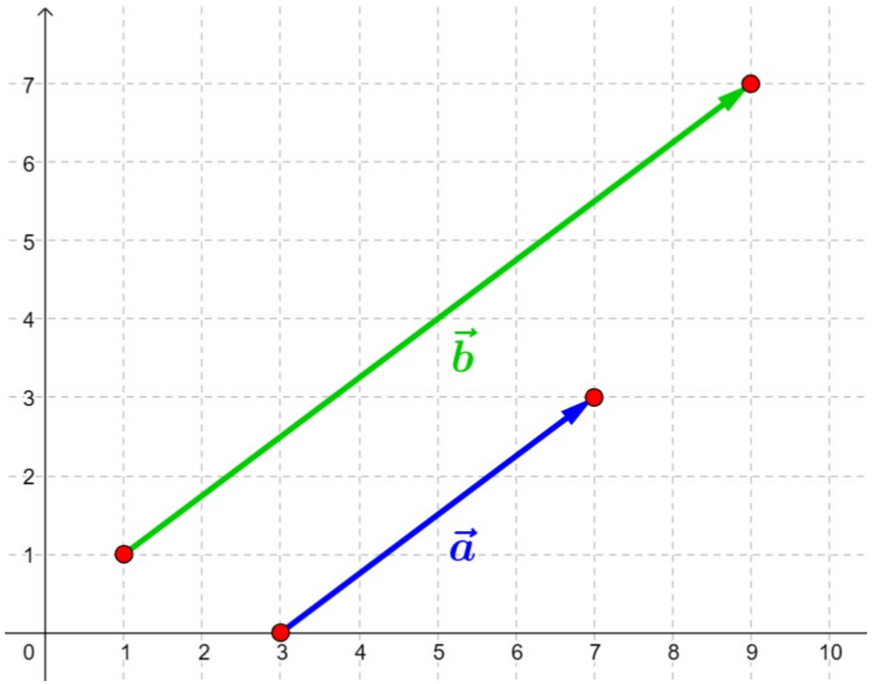
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |\vec{a}| = 11$ $\qquad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 76°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \; |\vec{b}| = 8.2$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 22$

Skalarprodukt erkunden

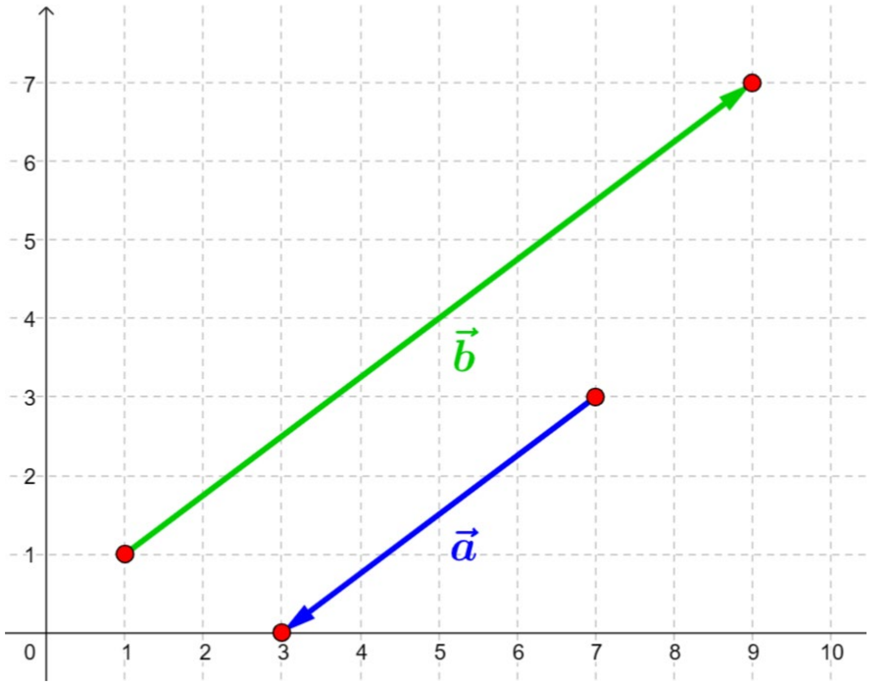
MaTeGnu

Aufgabe: Was passiert, wenn die beiden Vektoren parallel zueinander sind?



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 10$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 50$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$

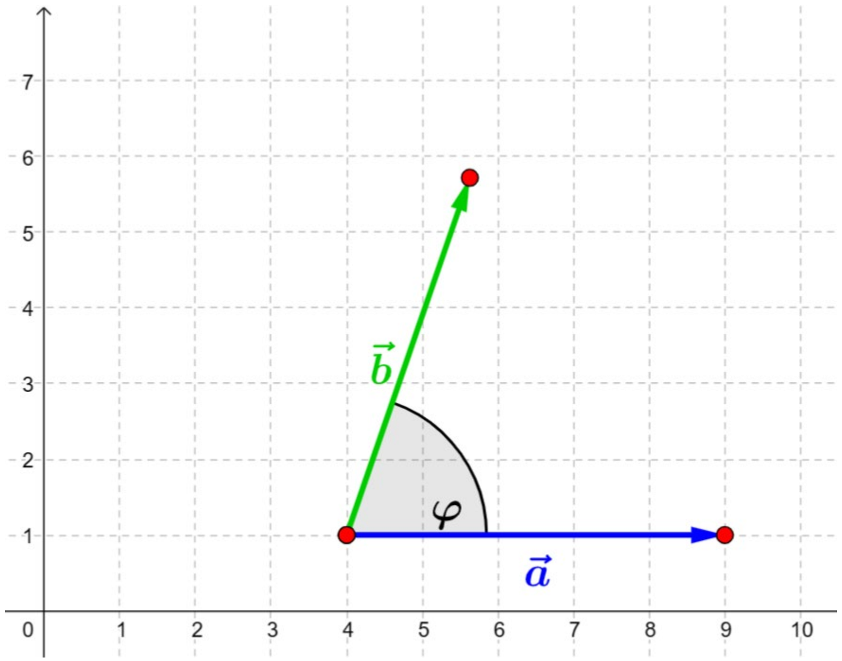
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 10$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -50$

 https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/t8faddrp

Skalarprodukt erkunden

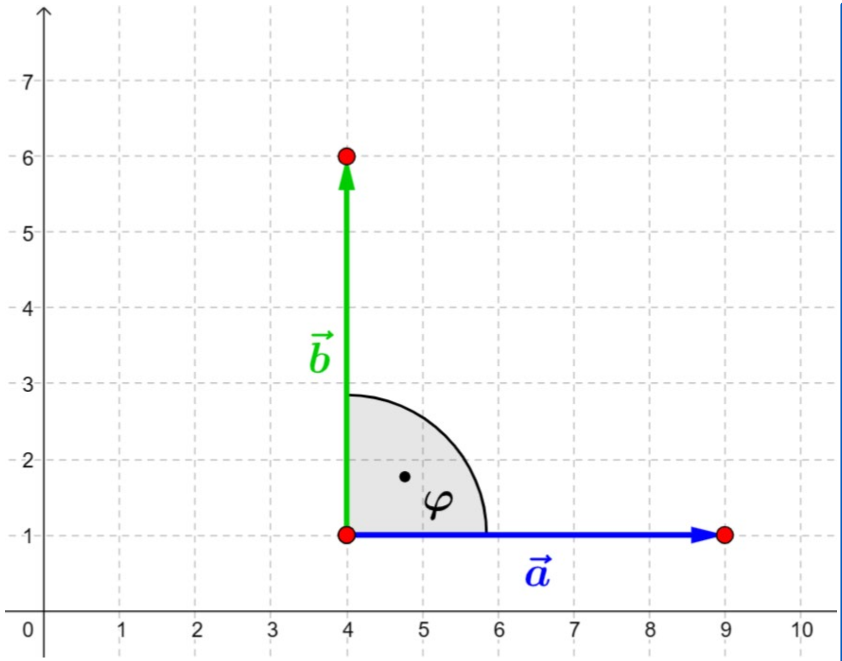
MaTeGnu

Aufgabe: Wann ist das Skalarprodukt positiv, wann ist es negativ?



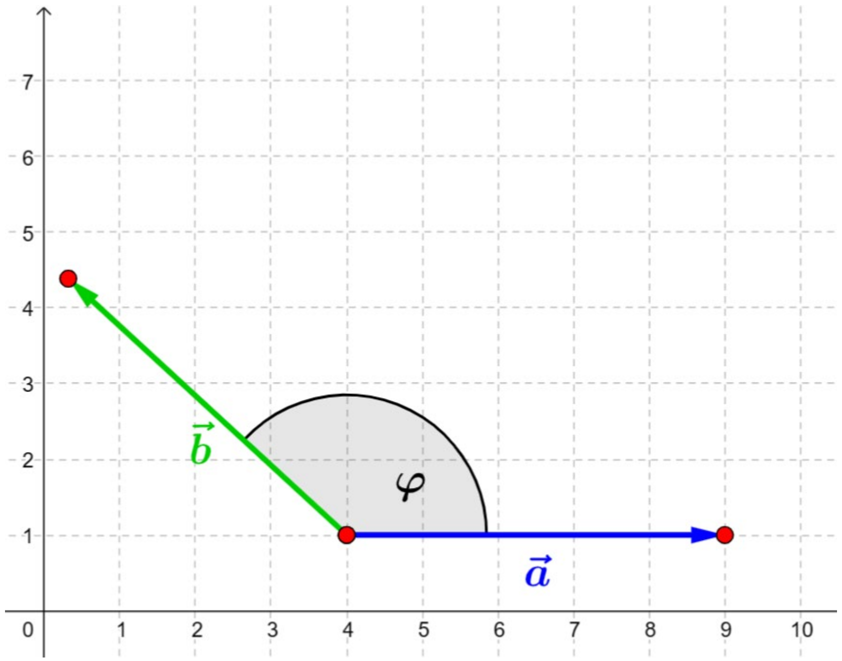
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$ $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 71°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4.7 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 5$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8.1$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$ $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 5$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$ $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 137.4°$

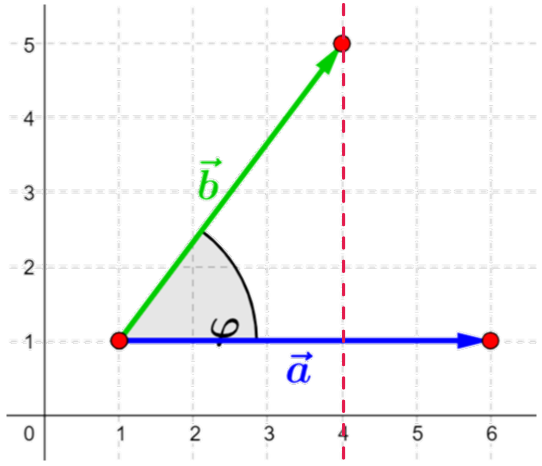
$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3.7 \\ 3.4 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 5$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -18.4$

 https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/t8faddrp

Skalarprodukt erkunden

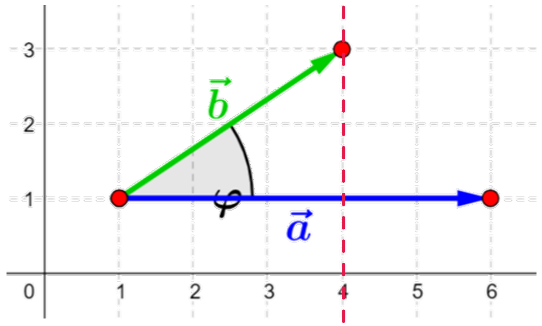
MaTeGnu

Aufgabe
Wie kann man einen der Vektoren ändern, ohne dass sich das Skalarprodukt ändert?



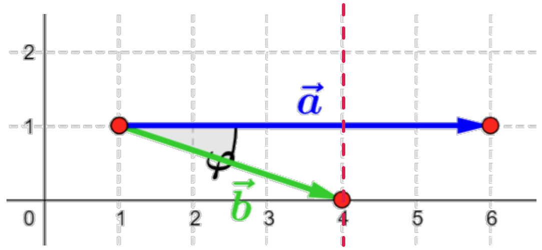
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$ $\qquad$ $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 53.1°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 5$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$ $\qquad$ $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 33.7°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 3.6$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$ $\qquad$ $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 18.4°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 3.2$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$

 https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/t8faddrp

Produktive Übungen:
Systematische Variation nutzen

MaTeGnu

Aufgabe

a) **Z**eichne zunächst jeweils die beiden Vektoren des Produktes in ein Koordinatenkreuz. Bearbeite mithilfe eines CAS die Aufgaben.

b) **M**an nennt diese multiplikative Verknüpfung Skalarprodukt. Beschreibe deine Beobachtungen über die Funktionsweise des Skalarprodukts vor dem Hintergrund deiner Ergebnisse und der jeweiligen Vektoren.

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}=$

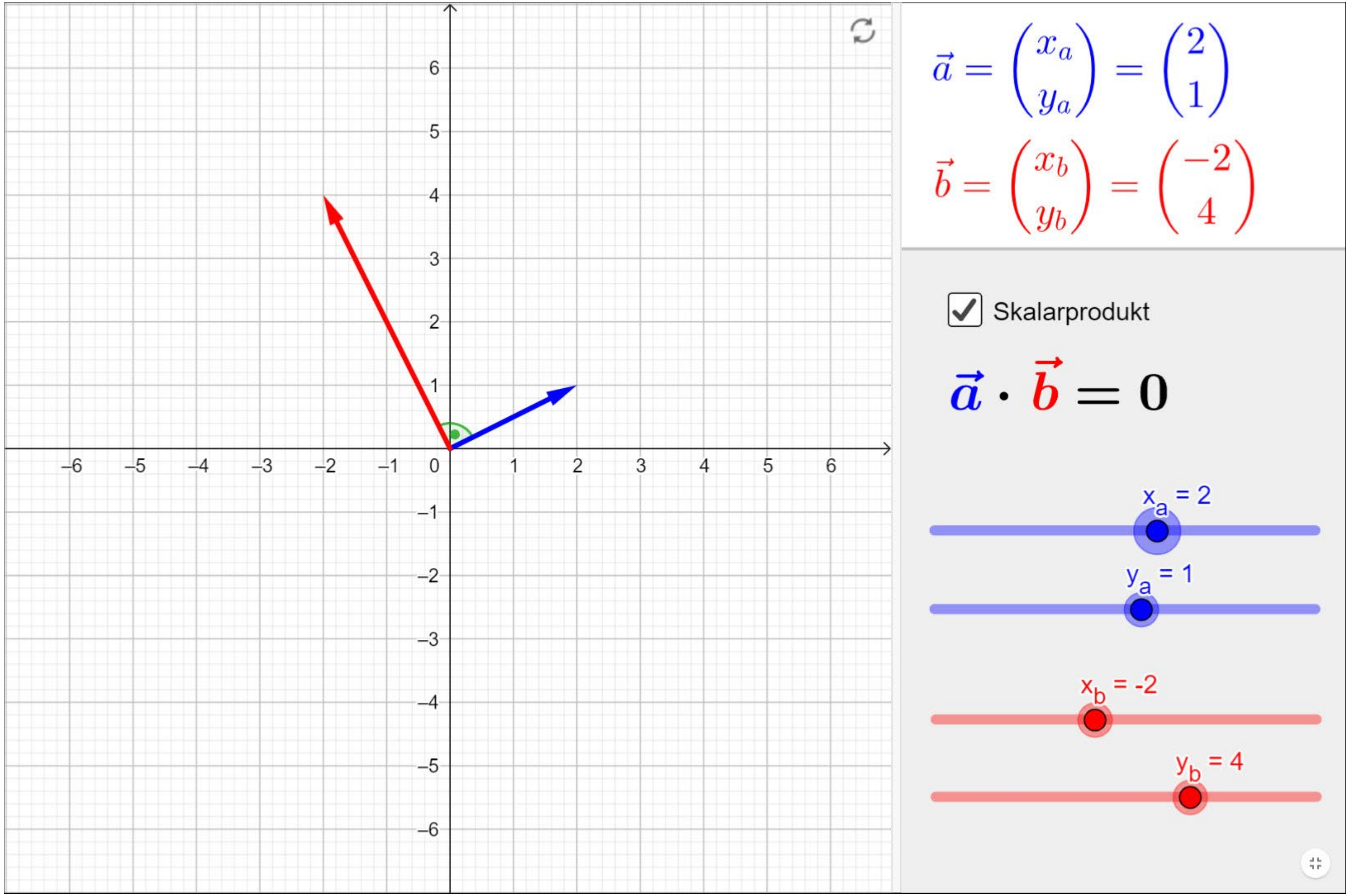
$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$

Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 55, 56. Jahrgang, 32-38

https://www.geogebra.org/m/twm4mpbr

Produktive Übungen:
Systematische Variation nutzen

MaTeGnu



 https://www.geogebra.org/m/twm4mpbr

RPTU

Produktive Übungen: Systematische Variation nutzen

MaTeGnu

Aufgabe

a) **F**inde zunächst jeweils die Vektoren in der Abbildung und berechne dann die angegebenen Skalarprodukte.

b) **B**eschreibe deine Beobachtungen und formuliere Hypothesen zur Funktionsweise des Skalarprodukts vor dem Hintergrund der Ergebnisse und der jeweils zugrunde liegenden Vektoren.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

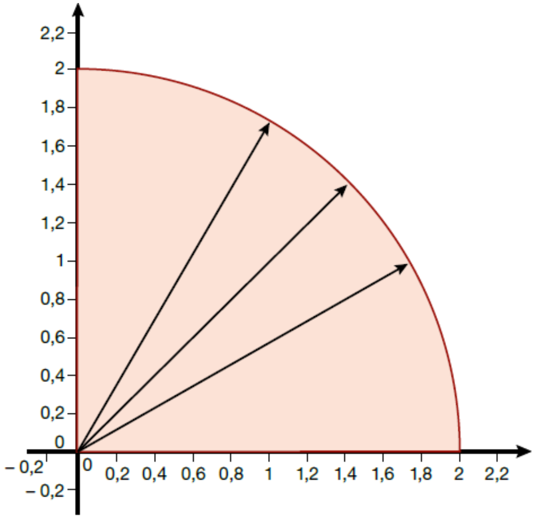
$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

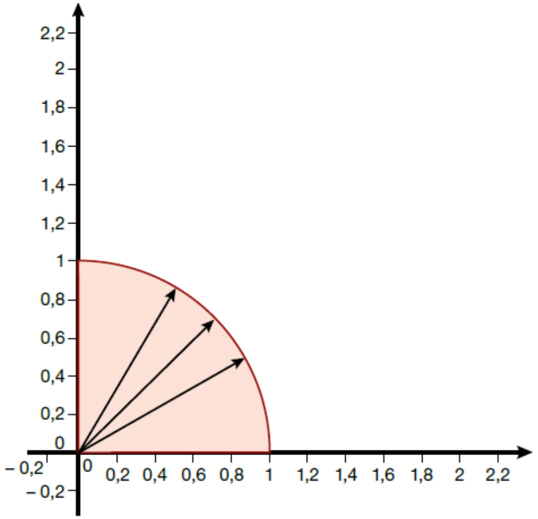
$$\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$



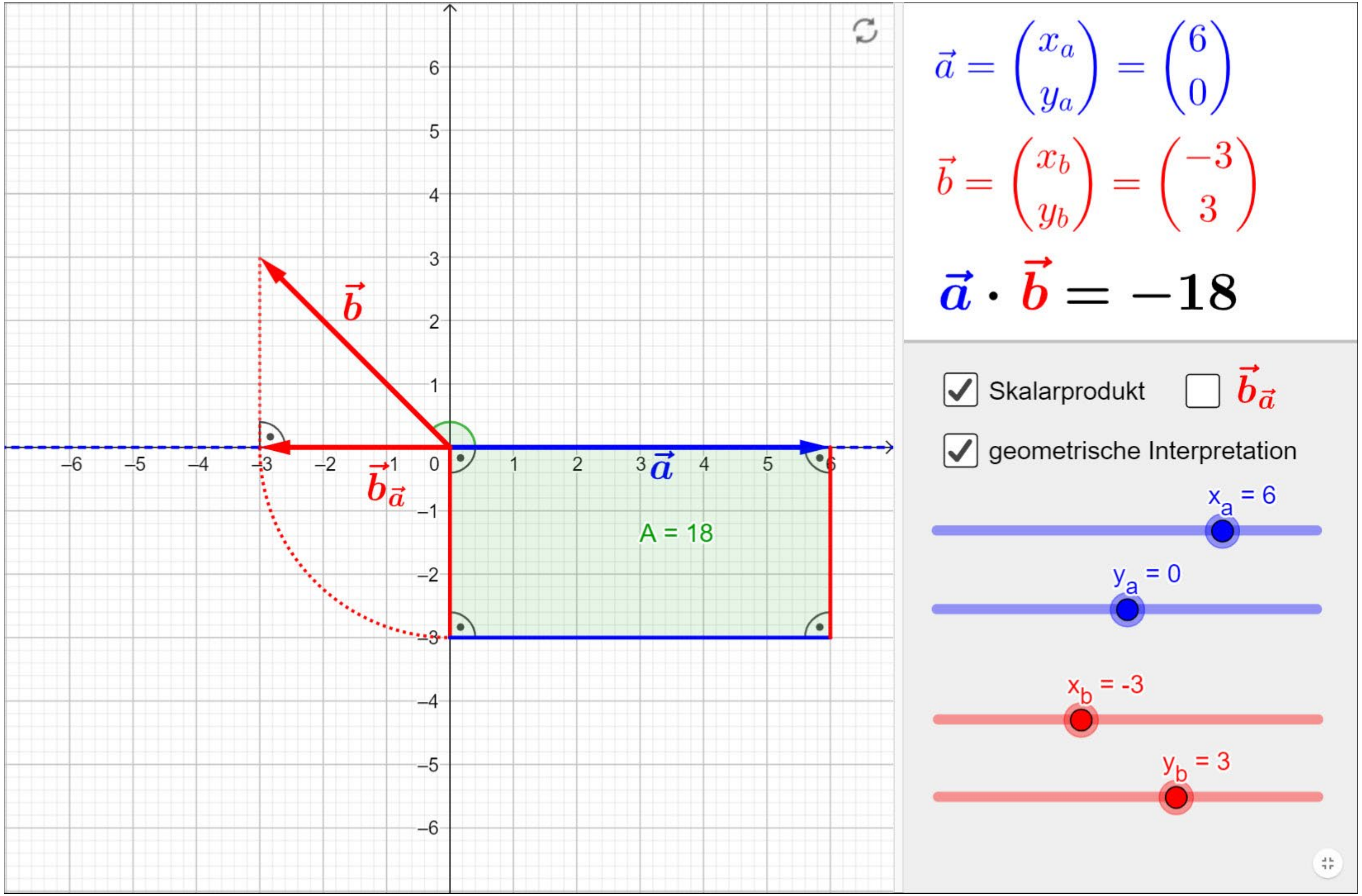


Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 55, 56. Jahrgang, 32-38

https://www.geogebra.org/m/twm4mpbr

Produktive Übungen: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts

MaTeGnu



 https://www.geogebra.org/m/rbt5pgfp

RPTU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Skalarprodukt –
Längen und Winkel messen

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

mategnu.de

RPTU

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

MaTeGnu

Satz: Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ gilt.

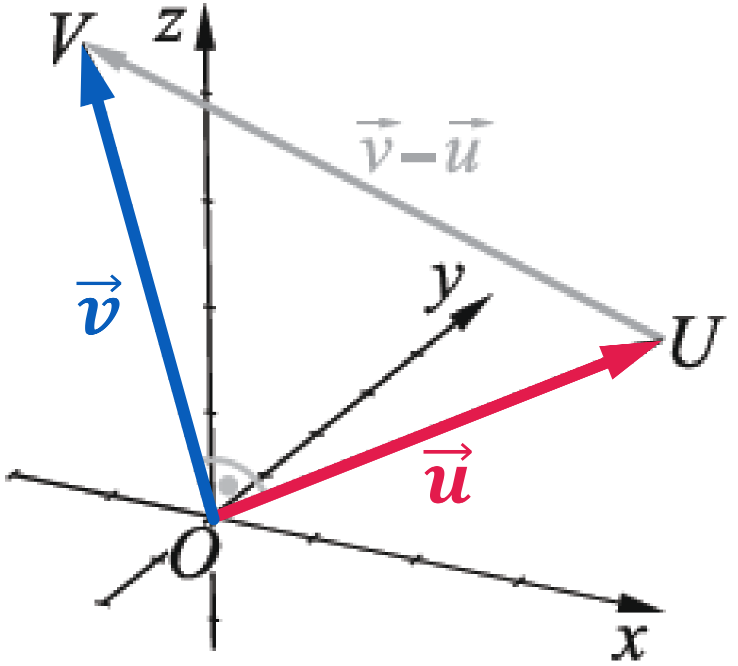
Beweis

- Von zwei Vektoren

  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ ist keiner der Nullvektor.

  (Wenn $\vec{u} = \vec{o}$ oder $\vec{v} = \vec{o}$, dann folgt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ direkt aus der Definition des Skalarprodukts.)

- Betrachte die Pfeile $\overrightarrow{OU}$ und $\overrightarrow{OV}$ die Repräsentanten von $\vec{u}$ bzw. $\vec{v}$ sind und deren Anfangspunkt der Koordinatenursprung O ist.
- Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann orthogonal, wenn das Dreieck ΔUVO bei O rechtwinklig ist.
- Nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung ist das genau dann der Fall, wenn $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$ gilt.

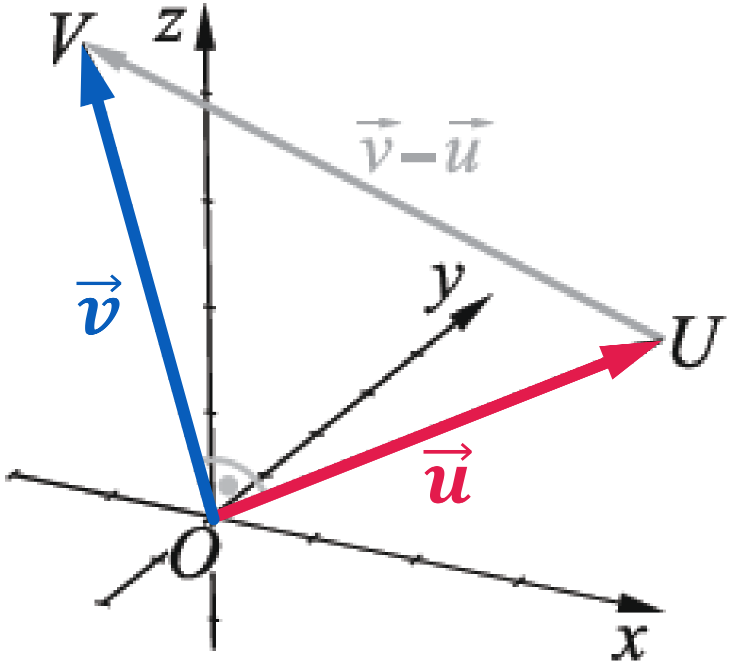


 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 126f

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

Satz: Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ gilt.



Beweis (Fortsetzung)

- Zu zeigen: $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$
- $|OU|^2 = |\vec{u}|^2$
- $|OV|^2 = |\vec{v}|^2$
- $|UV|^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 = (x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2$

$$= x_v^2 - 2x_u x_v + x_u^2 + y_v^2 - 2y_u y_v + y_u^2 + z_v^2 - 2z_u z_v + z_u^2$$
$$= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - 2 \cdot (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \;\; = |OU|^2 + |OV|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- Damit gilt $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$ genau dann, wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Genau in diesem Fall sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal. ∎

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 126f

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

MaTeGnu

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:

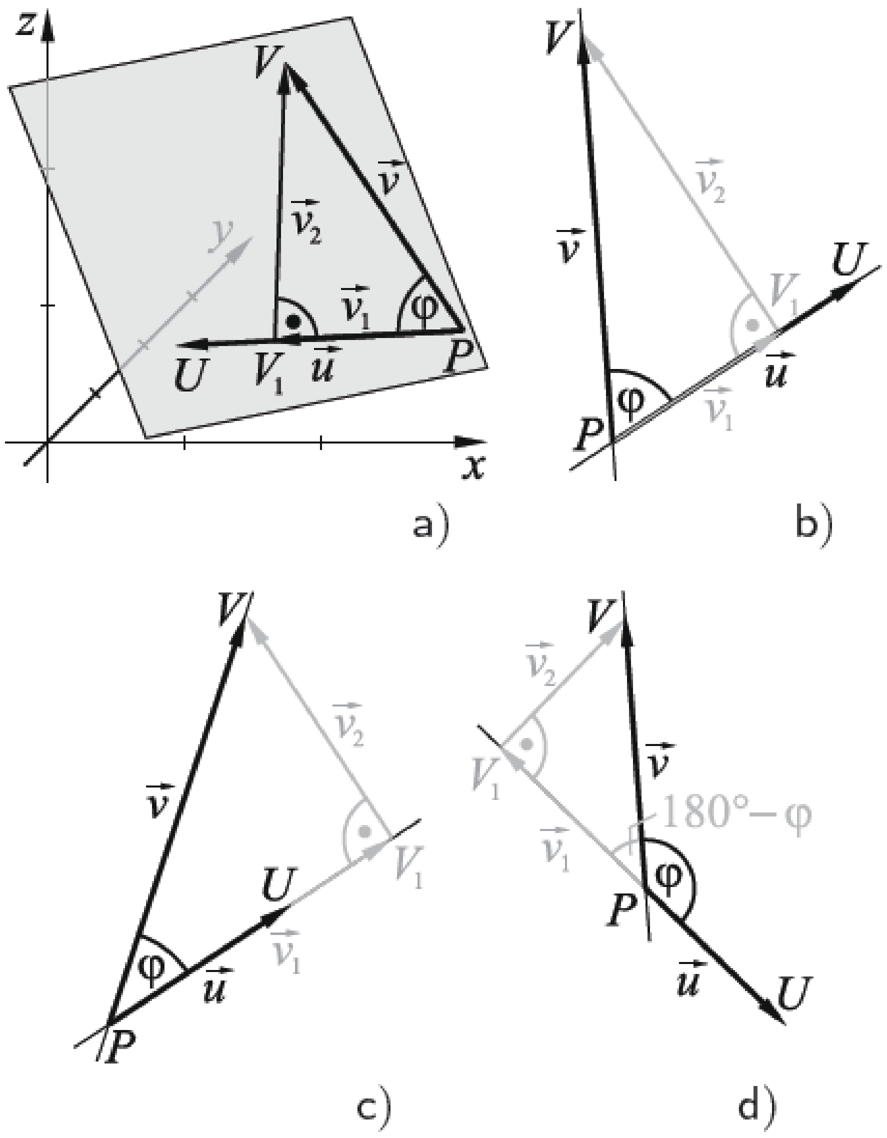
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Satz: Skalarprodukt kollinearer Vektoren

- Für zwei kollineare und gleichorientierte Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:
  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$
- Für zwei kollineare und entgegengesetzt orientierte Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:
  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 124ff

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften



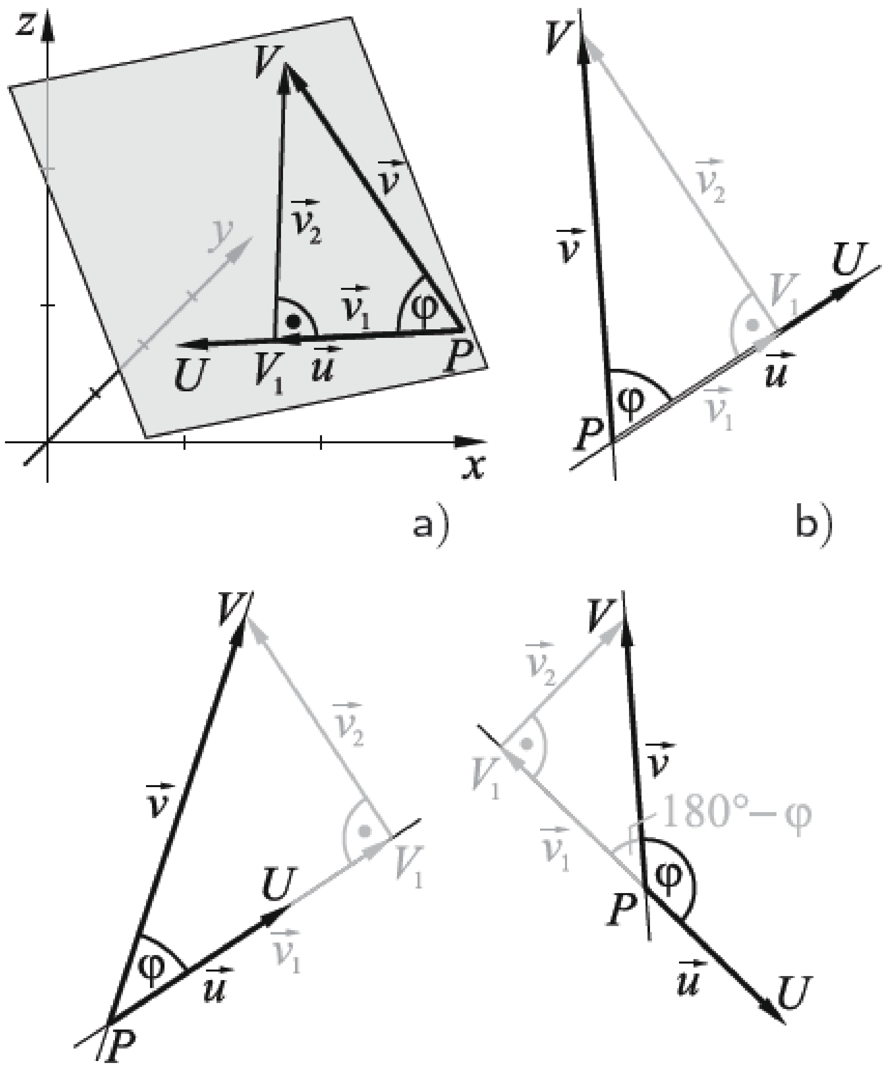
Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

- Der Betrag des Skalarprodukts zweier Vektoren ist also
  - maximal, wenn die Vektoren kollinear und
  - minimal (nämlich Null), wenn die Vektoren orthogonal sind.
- Damit liegt nahe, dass das Skalarprodukt von den Beträgen und dem Zwischenwinkel der Vektoren anhängt.
- Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist der Winkel zwischen zwei repräsentierenden Pfeilen $\overrightarrow{PU}$ und $\overrightarrow{PV}$ mit demselben Anfangspunkt P.

Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

MaTeGnu



Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

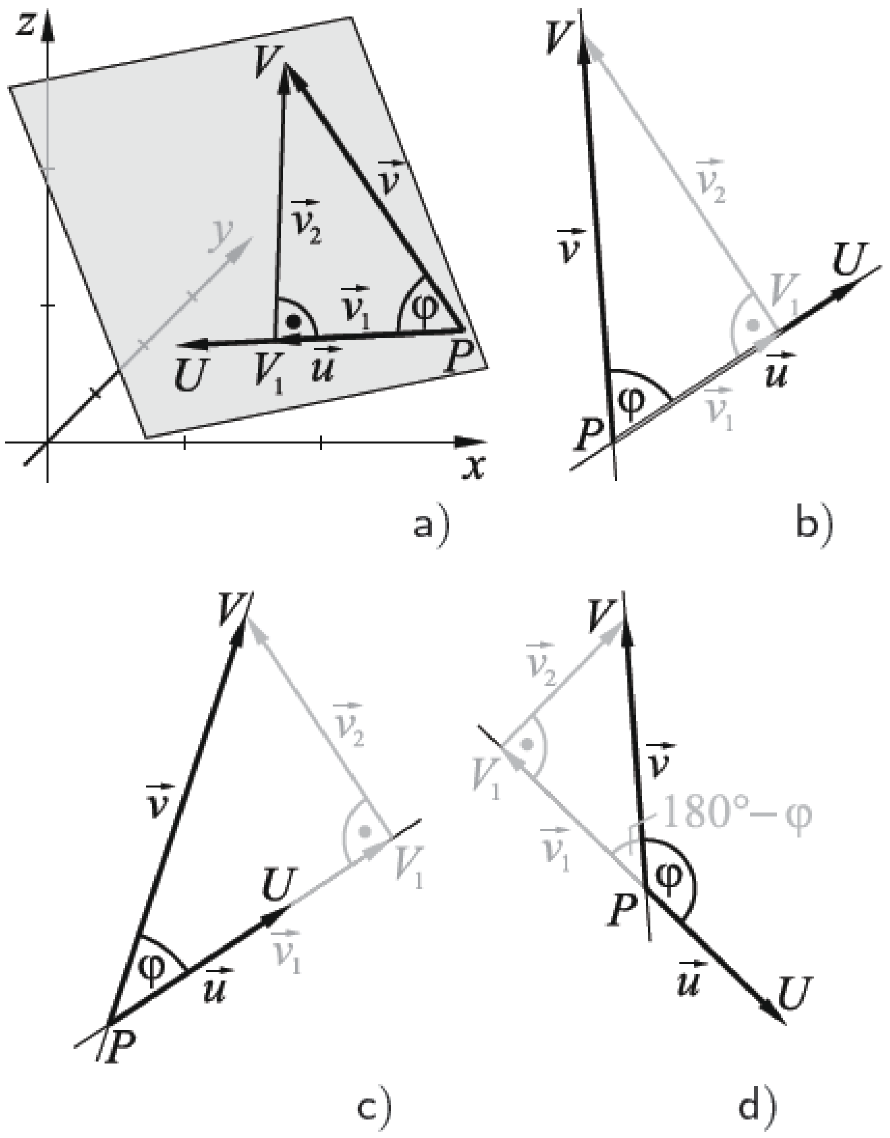
- Lot von V auf die Gerade UP fällen.
  V_1 ist der Lotfußpunkt.
  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (vgl. Abbildungen)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_2}_{\substack{=0 \\ \text{wegen } \vec{u} \perp \vec{v}_2}} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \quad (\#)$
- $\vec{u}$ und $\vec{v}_1$ können abhängig vom Zwischenwinkel φ von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ (mit $0 \leq \varphi \leq 180°$)
  - gleich orientiert ($\varphi < 90°$) oder
  - entgegengesetzt orientiert ($90° < \varphi < 180°$) sein.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

RPTU

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

MaTeGnu



Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

- Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}_1$ gleichorientiert, dann gilt nach dem Satz über das Skalarprodukt gleichorientierter, kollinearer Vektoren:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \quad (*)$$

- Im rechtwinkligen Dreieck ΔPV_1V gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}|} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{v}_1| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi) \quad (**)$$

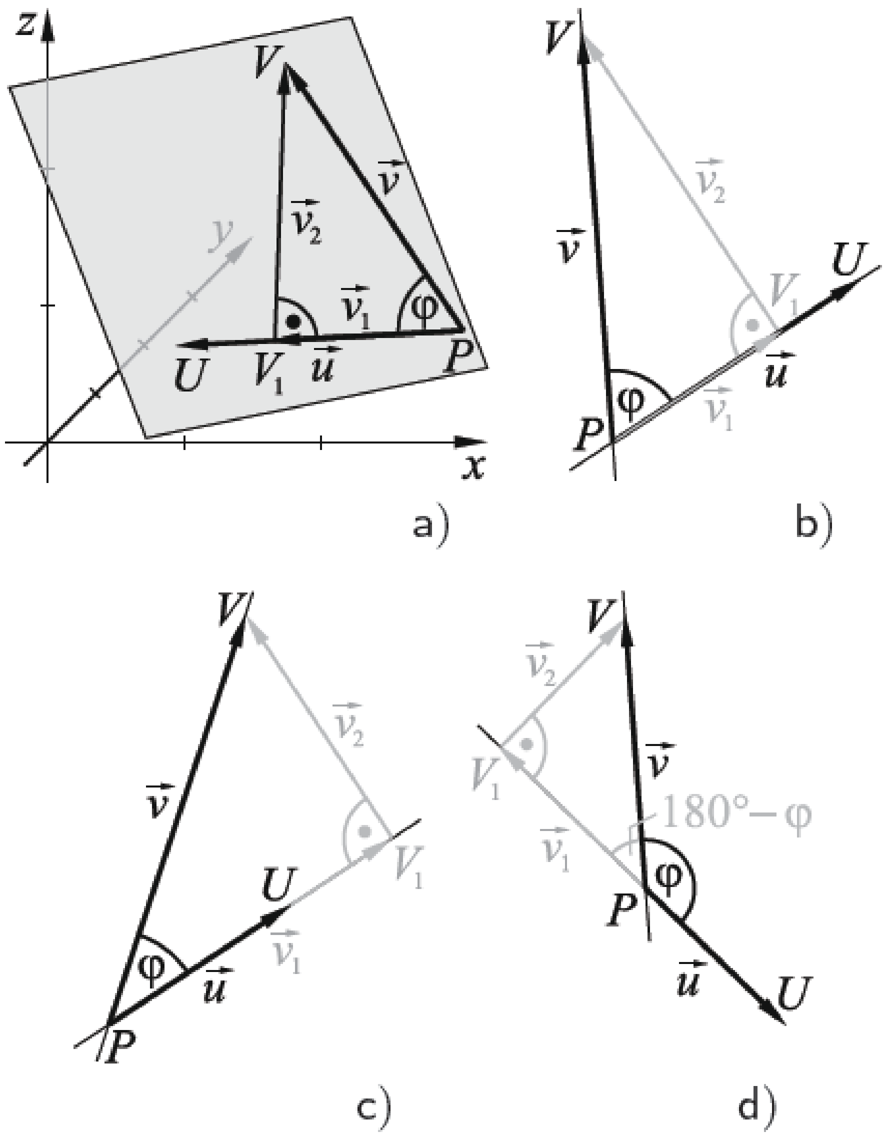
- Damit folgt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \overset{(\#)}{\triangleq} \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \overset{(*)}{\triangleq} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \overset{(**)}{\triangleq} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128f

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

MaTeGnu



Satz

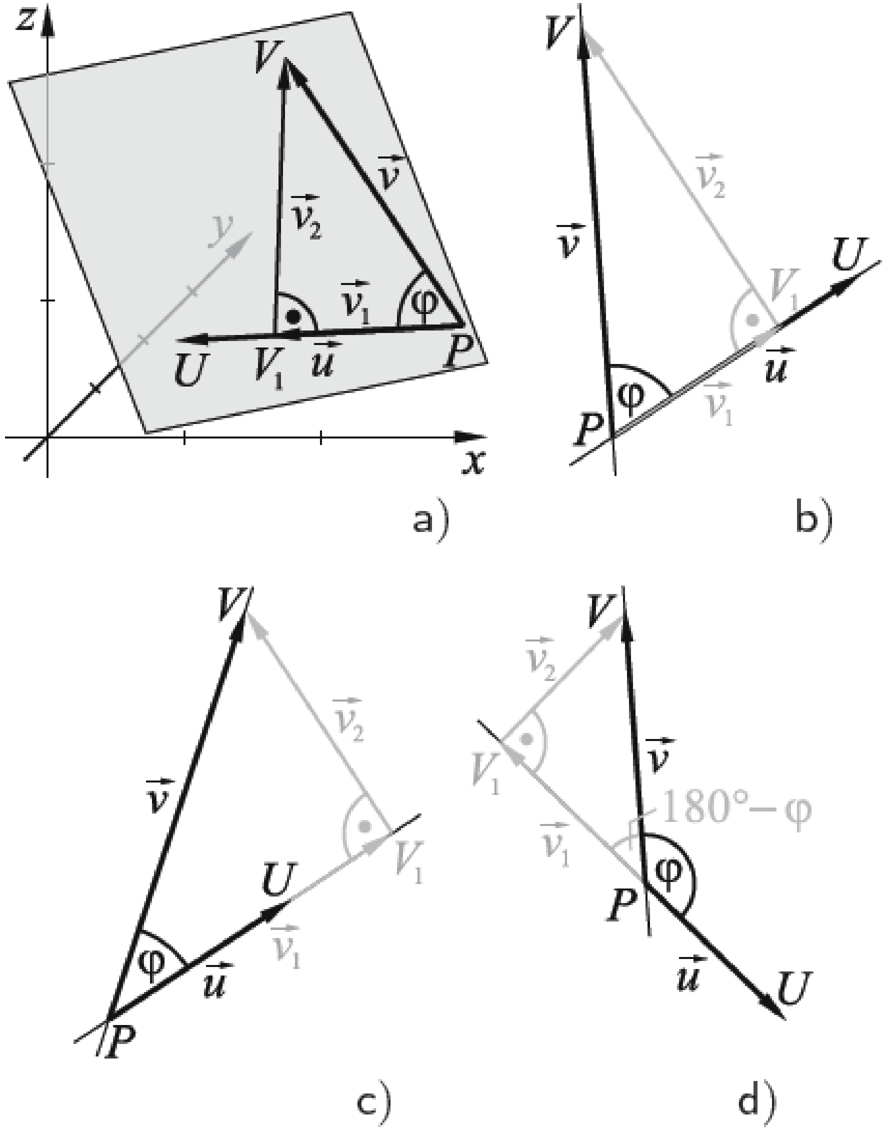
Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, ihre Beträge $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ und den Winkel $\varphi = \angle(\vec{u},\vec{v})$ gilt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

MaTeGnu



Winkel zwischen zwei Vektoren

Wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ zwei Vektoren des Raumes sind, dann ergibt sich:

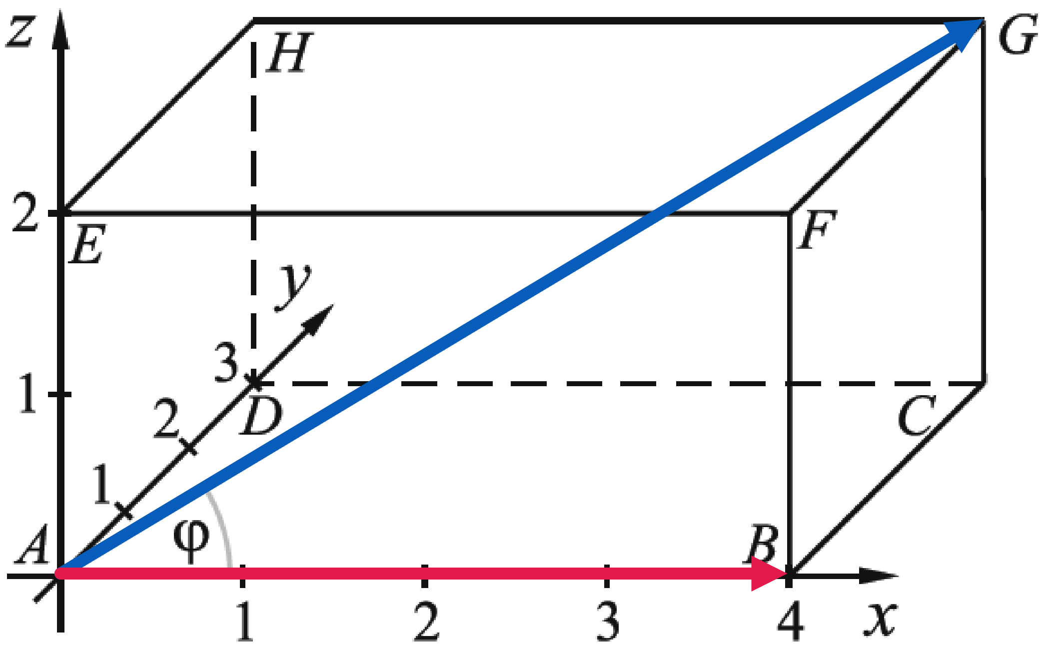
$$\cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}\cdot\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}$$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

Winkelbestimmung

MaTeGnu

Aufgabe
Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Seite $[AB]$ und der Raumdiagonalen $[AG]$ im Quader $ABCDEFGH$.



Lösungshinweis

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right)\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AG}\right|} = \frac{4 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{16}{4 \cdot \sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right) \approx 42°$$

RPTU

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Skalarprodukt im Kontext

MaTeGnu

Emissionsziele
Eine Stadt hat ein CO_2-Emissionsziel von 2 kg pro Person und Tag formuliert.

Annahme: Der Ausstoß wird nur von PKW und öffentlichem Nahverkehr (ÖV) verursacht.

Mittlerer CO_2-Ausstoß pro Person:

- PKW: $0{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km}}$
- ÖV: $0{,}06\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km}}$

a) Geben Sie drei mögliche Mobilitätsvektoren mit den zurückgelegten Kilometern (in ÖV, in PKW) an, die das Emissionsziel genau erfüllen.

b) Im folgenden Applet sind zu einem Emissionsziel mögliche Mobilitätsvektoren dargestellt. Interpretieren Sie die Pfeildarstellungen rechnerisch mithilfe des Skalarprodukts.

c) Die Lage der Pfeilspitzen der Mobilitätsvektoren folgt einer Regelmäßigkeit, beschreiben Sie diese.

d) Legen Sie verschiedene Emissionsziele fest und prüfen Sie, ob die Regelmäßigkeit aus Aufgabe c) auch für andere Emissionsziele gilt.

Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 55, 56. Jahrgang, 32-38

https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/ynkc4vbm

Skalarprodukt im Kontext

MaTeGnu

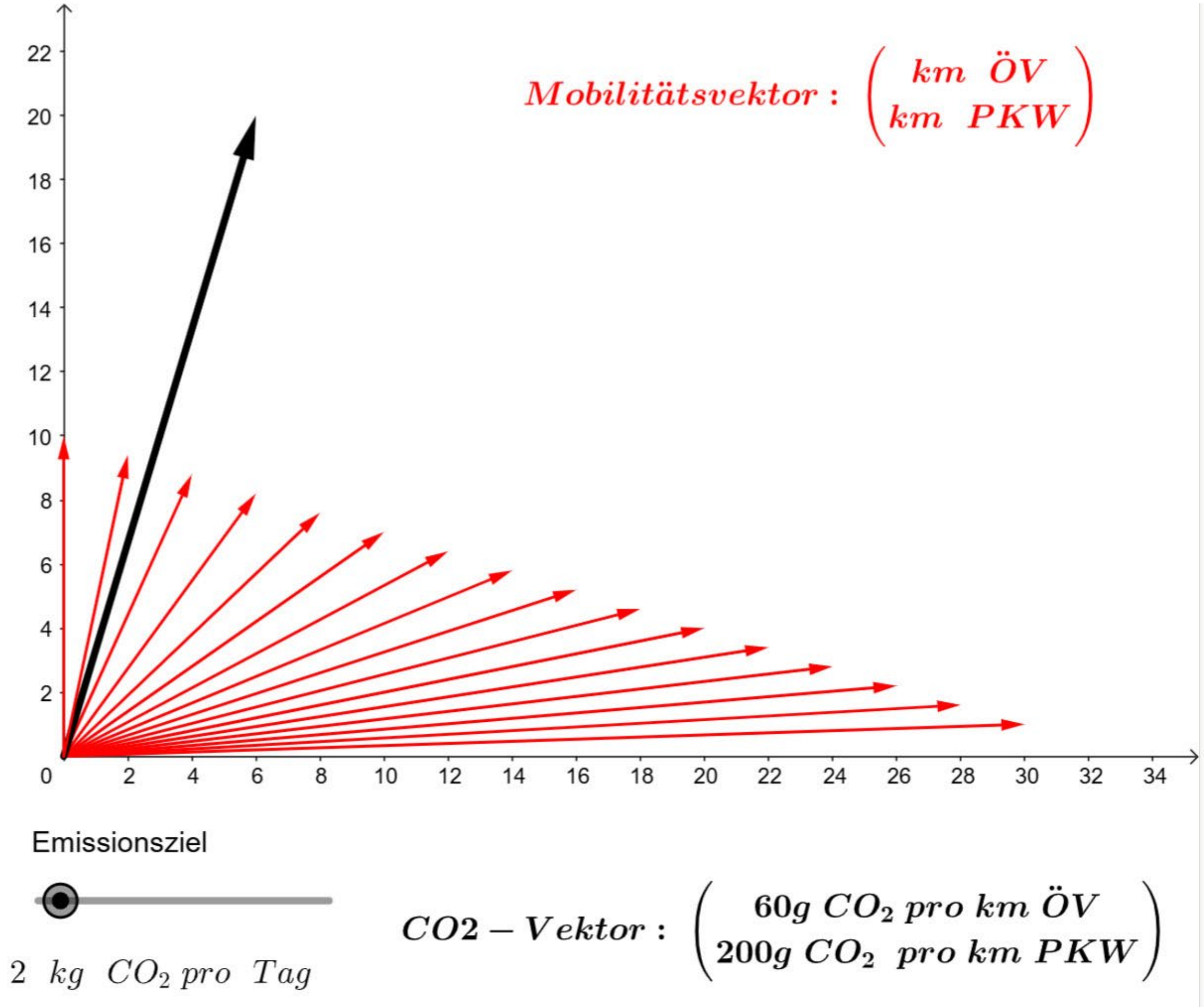
Emissionsziele

Eine Stadt hat ein CO_2-Emissionsziel von 2 kg pro Person und Tag formuliert.

Annahme: Der Ausstoß wird nur von PKW und öffentlichem Nahverkehr (ÖV) verursacht.

Mittlerer CO_2-Ausstoß pro Person:

- PKW: $0{,}2\ \frac{\text{kg}}{\text{km}}$
- ÖV: $0{,}06\ \frac{\text{kg}}{\text{km}}$



	A	B	C
1	0	10	(0, 10)
2	2	9.4	(2, 9.4)
3	4	8.8	(4, 8.8)
4	6	8.2	(6, 8.2)
5	8	7.6	(8, 7.6)
6	10	7	(10, 7)
7	12	6.4	(12, 6.4)
8	14	5.8	(14, 5.8)
9	16	5.2	(16, 5.2)
10	18	4.6	(18, 4.6)

Eingabe…

Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 55, 56. Jahrgang, 32-38

https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/ynkc4vbm

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

Selbststudium

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

Abstand Punkt ↔ Gerade
Strategie gesucht

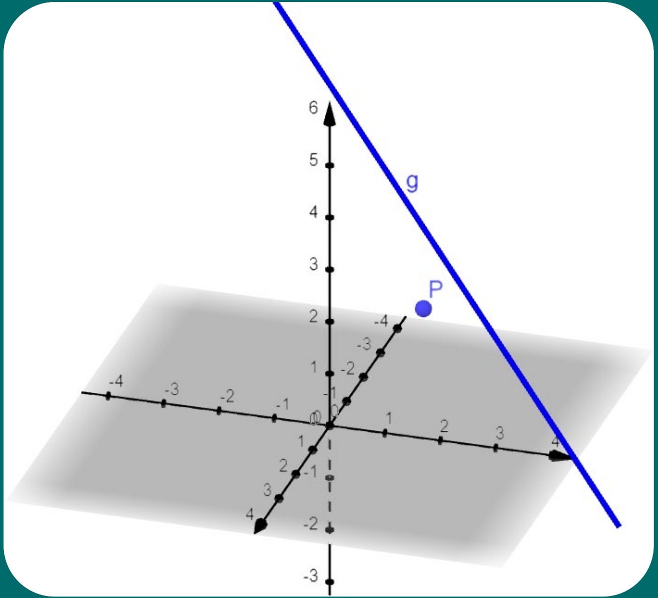
MaTeGnu

Ausgangssituation

Gegeben sind ein Punkt P und eine Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem.

Problem

Wie kann man vorgehen, um den Abstand des Punktes P zur Geraden g zu bestimmen?



Aufgaben

a) **S**ammeln Sie möglichst viele verschiedene Lösungsideen zur Abstandsbestimmung.

Hinweis: Welche geometrischen Objekte (z. B. Punkt, Vektor, Gerade, Ebene, Dreieck, Viereck, Kugel) können dabei helfen?

b) **E**ntwickeln Sie für eine Idee ein konkretes Vorgehen und beschreiben Sie dieses mit allen notwendigen Schritten.

c) **B**erechnen Sie mit diesem Vorgehen den Abstand des Punktes $P(1|2|3)$ zu der Geraden g.

$$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk

Hilfestellungen

MaTeGnu

Idee: Normalenvektor

- Die Ebene, die P und g enthält, hat einen Normalenvektor.
- Ein Verbindungsvektor von P zu g, soll senkrecht zum Normalenvektor und zu g sein!
- Das Skalarprodukt kann helfen!

Idee: Senkrechte Verbindung

- Wähle einen allgemeinen Punkt Q auf g! Er hängt noch von t ab.
- Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ soll senkrecht zu g sein!
- Das Skalarprodukt kann helfen!

Idee: Hilfsebene

- Finde die Ebene, die P enthält und senkrecht zu g verläuft!
- In dieser Ebene kann ein weiterer Punkt bei der Abstandsbestimmung helfen!

Idee: Berührkugel

- Finde eine Kugel mit Mittelpunkt P, die g berührt.
- Der Radius r dieser Kugel muss so gewählt werden, dass es nur einen Schnittpunkt mit g gibt.
- Wissen über quadratische Gleichungen kann helfen!

Idee: Kürzeste Verbindung

- Wähle einen allgemeinen Punkt Q auf g! Er hängt noch von t ab.
- Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ soll möglichst kurz sein!
- Eine quadratische Funktion kann helfen!

Idee: Geradenschar

- Es gibt eine Schar von unendlich vielen Geraden durch P, die senkrecht zum Richtungsvektor von g verlaufen.
- Diejenige Gerade der Schar, die g schneidet, kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

Hilfestellungen

MaTeGnu

Idee: Orthogonalisierung

- Ein Verbindungsvektor $\vec{v}$ von $\boldsymbol{P}$ zu $\boldsymbol{g}$ kann in einem zu $\boldsymbol{g}$ parallelen und einen zu $\boldsymbol{g}$ orthogonalen Anteil zerlegt werden:
$$\vec{v} = \vec{v_\parallel} + \vec{v_\perp}$$
- Ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von $\boldsymbol{g}$, so gilt:
$$\vec{v_\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$$
- Der Vektor $\vec{v_\perp}$ kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

Idee: Höhe im Parallelogramm

- Ein Verbindungsvektor von $\boldsymbol{P}$ zu $\boldsymbol{g}$ spannt mit einem Richtungsvektor von $\boldsymbol{g}$ ein Parallelogramm auf.
- Hat man den Flächeninhalt und eine Seitenlänge, so kann man die Höhe im Parallelogramm bestimmen!
- Das Vektorprodukt kann helfen!

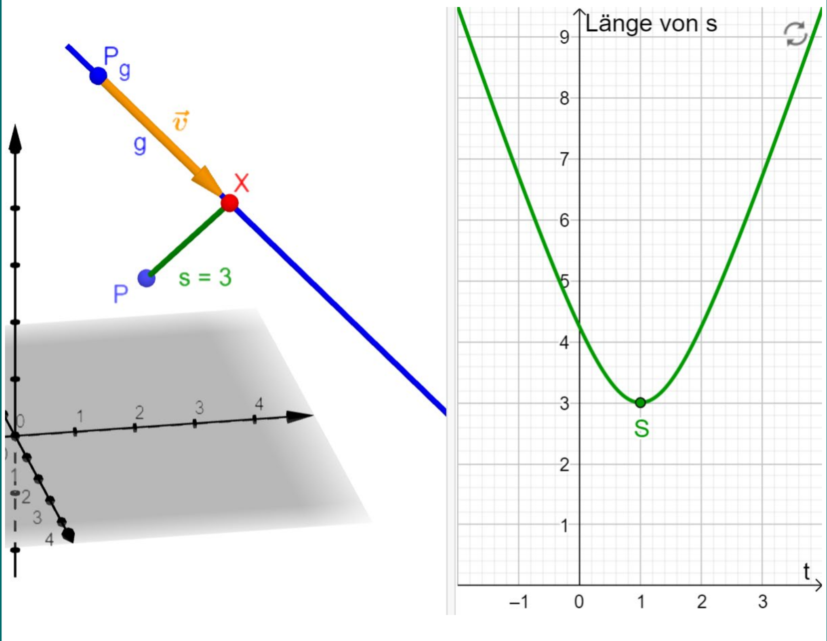
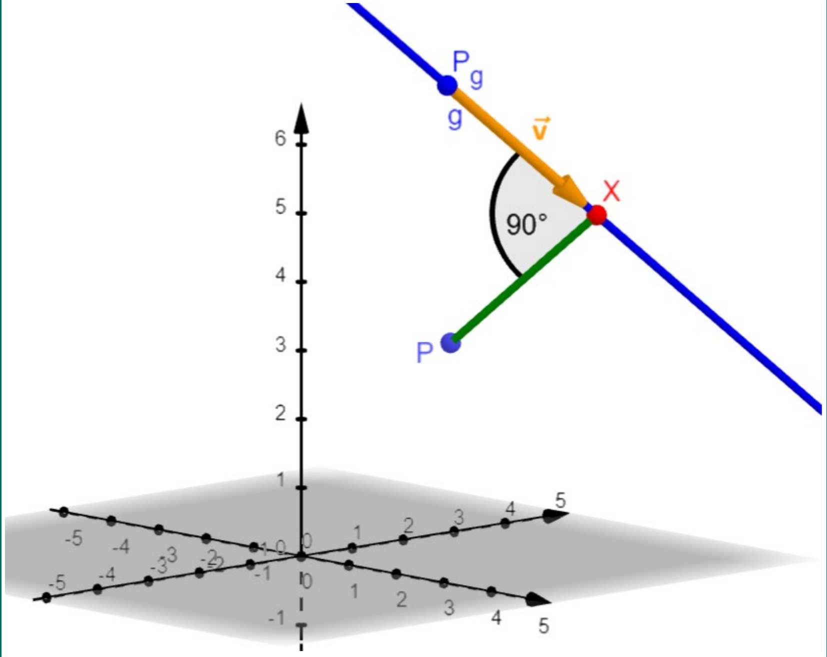
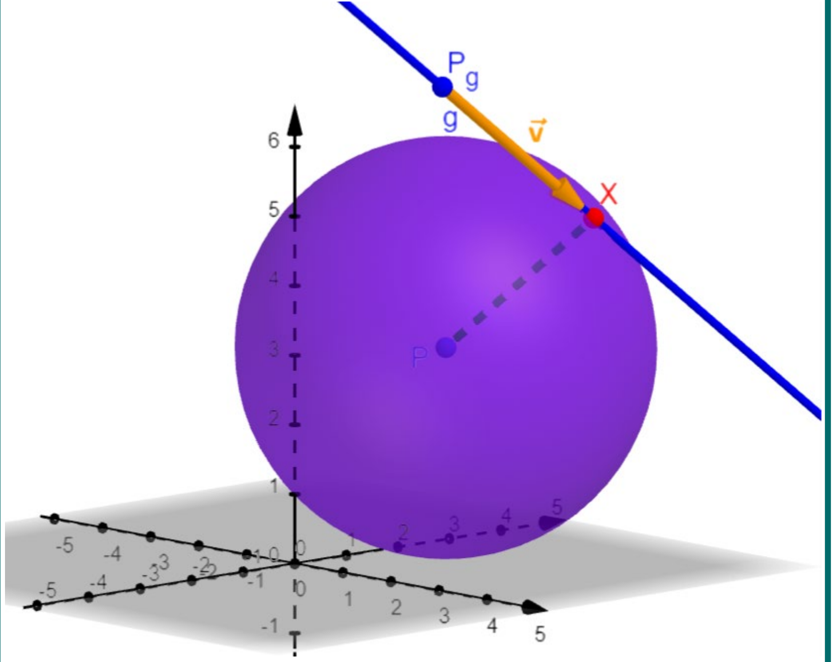
Idee: Kugelschnittpunkte

- Finde eine Kugel mit Mittelpunkt $\boldsymbol{P}$, die von $\boldsymbol{g}$ in zwei Punkten A und B getroffen wird!
- Der Mittelpunkt der Punkte A und B kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

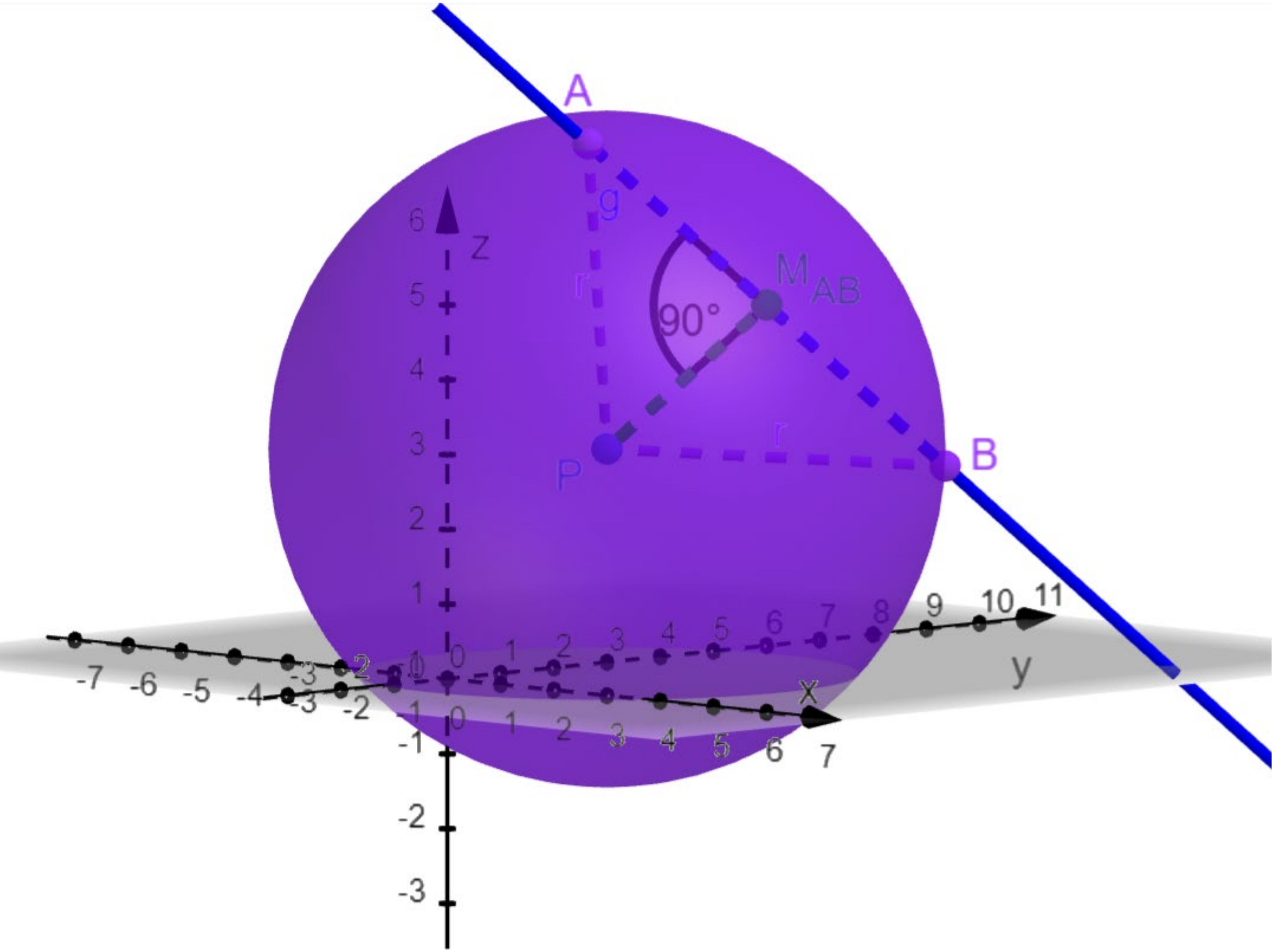
MaTeGnu

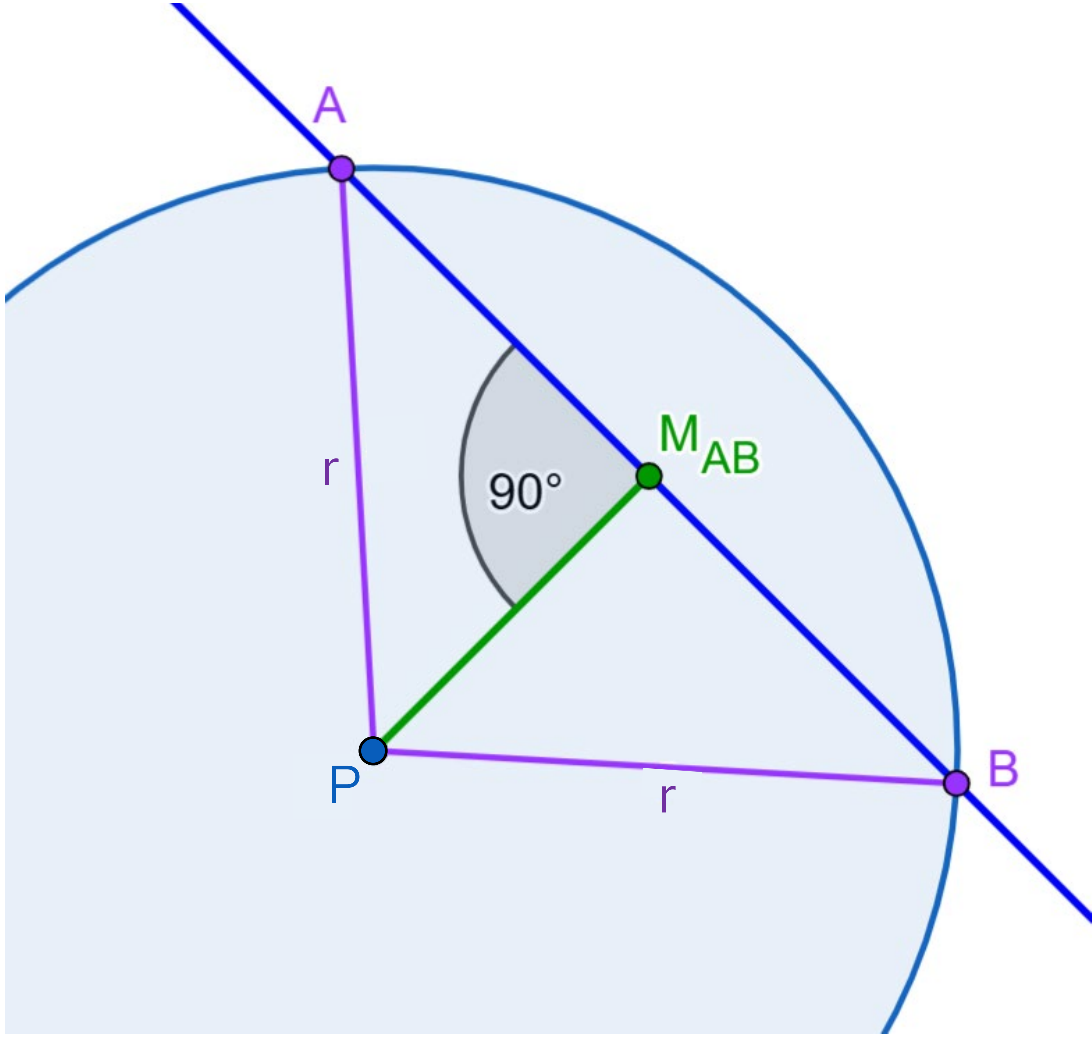
Abstand als kürzeste Verbindung	Abstand als orthogonale Verbindung	Abstand als Radius einer Berührkugel (3D) bzw. eines Berührkreises (2D)
		
https://www.geogebra.org/m/r2tjbnrj	https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk	https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff
Spezialfall: Kugel, die die Gerade schneidet

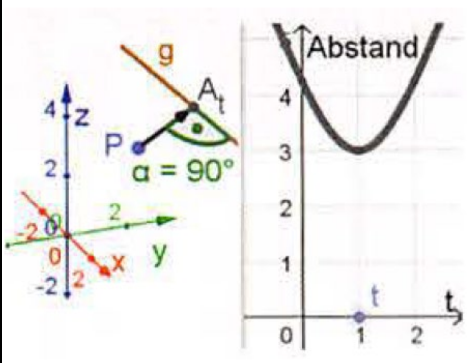
MaTeGnu



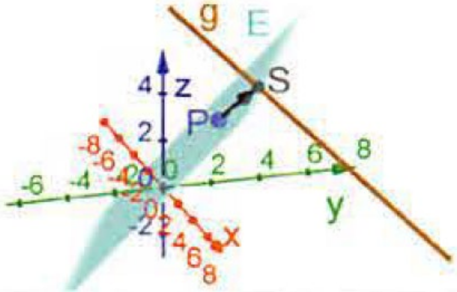
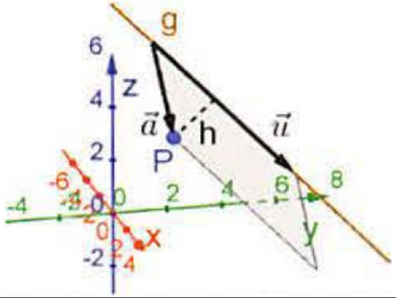


Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

MaTeGnu

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Idee</th><th>Abbildung</th><th>GV zum Abstand</th><th>Bezüge zu weiteren Begriffen und Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Länge des Verbindungsvektors, der orthogonal zur Geraden verläuft</td><td rowspan="2">
</td><td>orthogonale Verbindung</td><td rowspan="2">Gerade als Punktmenge:
Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt.
Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung & Orientierung

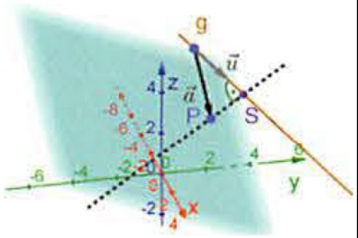
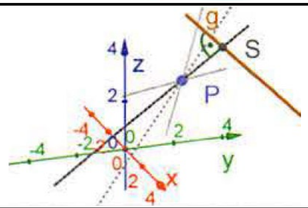
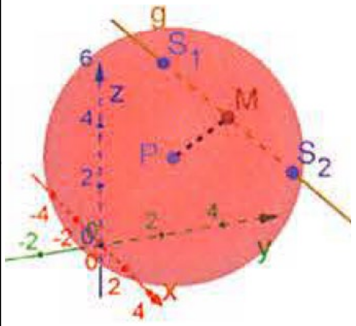
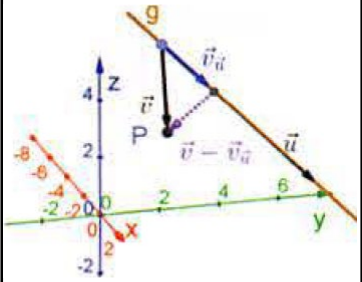
Skalarprodukt:
Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren

Funktionaler Zusammenhang: Jedem Parameterwert wird die Länge des Verbindungsvektors zugeordnet.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Länge des kürzesten Verbindungsvektors</td><td>Kürzeste Verbindung</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Normalebene zur Geraden durch den Punkt, Schnittpunkt mit der Geraden</td><td>
</td><td>orthogonale Verbindung</td><td>Gerade als Punktmenge:
Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt
Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung & Orientierung
Normalenform einer Ebene:
Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Höhe eines Parallelogramms, das durch einen Richtungs- und einen Verbindungsvektor aufgespannt wird</td><td>
</td><td>orthogonale Verbindung</td><td>Richtungsvektor einer Geraden und Verbindungsvektor zweier Punkte als Pfeile mit Länge, Richtung und Orientierung
Vektorprodukt:
Betrag gibt Flächeninhalt des Parallelogramms an
Flächeninhalt Parallelogramm: Produkt von Seitenlänge & Höhe</td></tr>
</table>

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. Mathematik lehren, 223, 32–36

Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

MaTeGnu

Nr.	Idee	Abbildung	GV zum Abstand	Bezüge zu weiteren Begriffen und Grundvorstellungen
5	Lotgerade sowohl orthogonal zur Geraden als auch zum Normalenvektor derjenigen Ebene, die Punkt und Gerade enthält		orthogonale Verbindung	**Normalenform einer Ebene:** Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor **Skalar-/Vektorprodukt** zur Bestimmung des Normalenvektors **Richtungsvektor einer Geraden** als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung
6	Geradenschar durch den Punkt, die orthogonal zur gegebenen Geraden sind; nur eine Gerade der Schar schneidet diese		orthogonale Verbindung	**Gerade als Punktmenge:** Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt **Verbindungsvektor** als Pfeil mit Länge, Richtung & Orientierung **Skalarprodukt:** Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren
7	Berührpunkt an die Gerade von einer passend großen Kugel um den Punkt		Radius einer Berührkugel	**Gerade als Punktmenge:** Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt **Kugel als Ortsfläche:** Kugel als Menge von Punkten gleichen Abstands zum Mittelpunkt
8	Mittelpunkt der Schnittpunkte von der Geraden mit einer genügend großen Kugel um den Punkt		orthogonale Verbindung	
9	Beliebiger Verbindungsvektor ist Summe von parallelem und orthogonalen Anteil; Berechnung des parallelen und damit dann des orthogonalen Anteils (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)		orthogonale Verbindung	**Skalarprodukt:** Projektionsvorstellung $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}}$ **Skalare Multiplikation:** $\vec{u}$ wird zu $\vec{v}_{\vec{u}}$ gestaucht/streckt: $\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \cdot \vec{u}$ **Vektoraddition:** orthogonaler Verbindungsvektor ist $\vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}$

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. Mathematik lehren, 223, 32–36

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Verständnisorientierung in der Analytischen Geometrie

1 Lehrplanalternativen RLP

2 Vektorbegriff – Schülerschwierigkeiten und Zugang über n-Tupel

3 Geometrische Deutung von Vektoren

4 Geraden- und Ebenengleichungen

5 Skalarprodukt

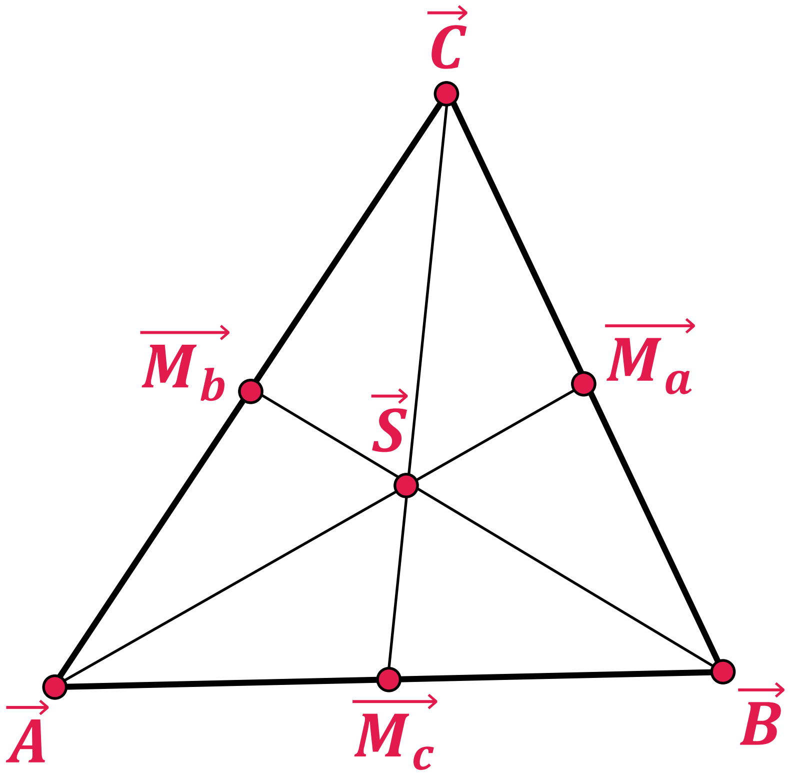
6 Zusatzmaterialien Selbststudium

GeoGebra-Buch zu Modul 3
https://mategnu.de/m/l3

mategnu.de

RPTU

Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



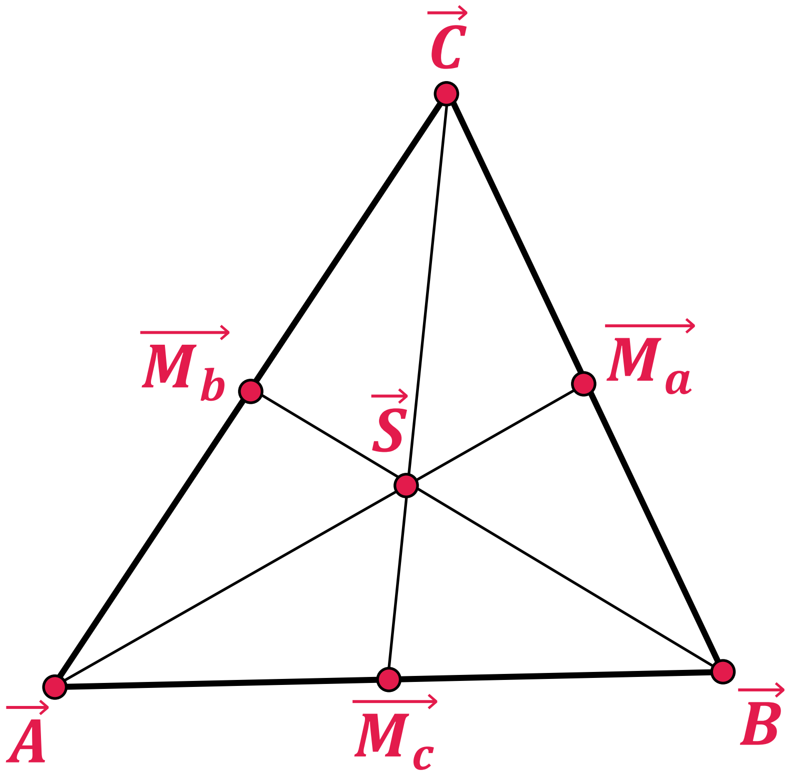
Satz

- In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt $\vec{S}$, dem Schwerpunkt.
- Zwischen den Eckpunkten $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ und dem Schwerpunkt S besteht die Lagebeziehung $3 \cdot \vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

 Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/nwutpqmz

Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

MaTeGnu



Beweis

- Die Seitenhalbierenden s_a und s_b sind gegeben durch $s_a\colon \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AM_a}$ und $s_b\colon \vec{X} = \vec{B} + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$.
- Es gibt reelle Zahlen t und u, so dass für den Schnittpunkt $\vec{S}$ dieser Seitenhalbierenden gilt:
$$\vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = \vec{S} = \vec{B} + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$
- Richtungsvektoren $\overrightarrow{AM_a}$ und $\overrightarrow{BM_b}$ als Linear-kombinationen von $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ schreiben:

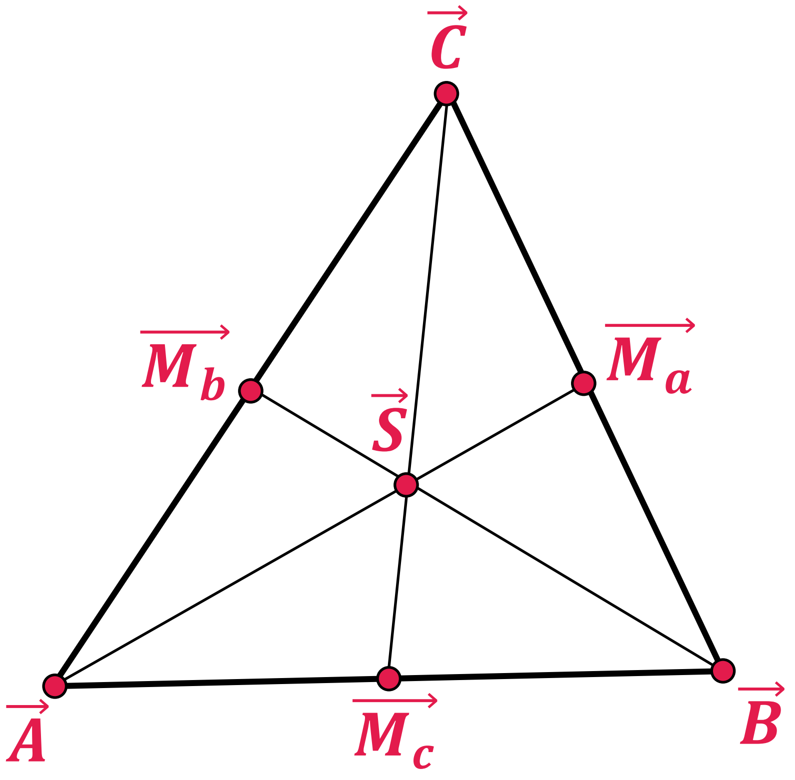
$$\overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM_b} &= \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \left(\tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

 Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/nwutpqmz

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

MaTeGnu



Beweis (Fortsetzung)

- Wir erhalten damit:

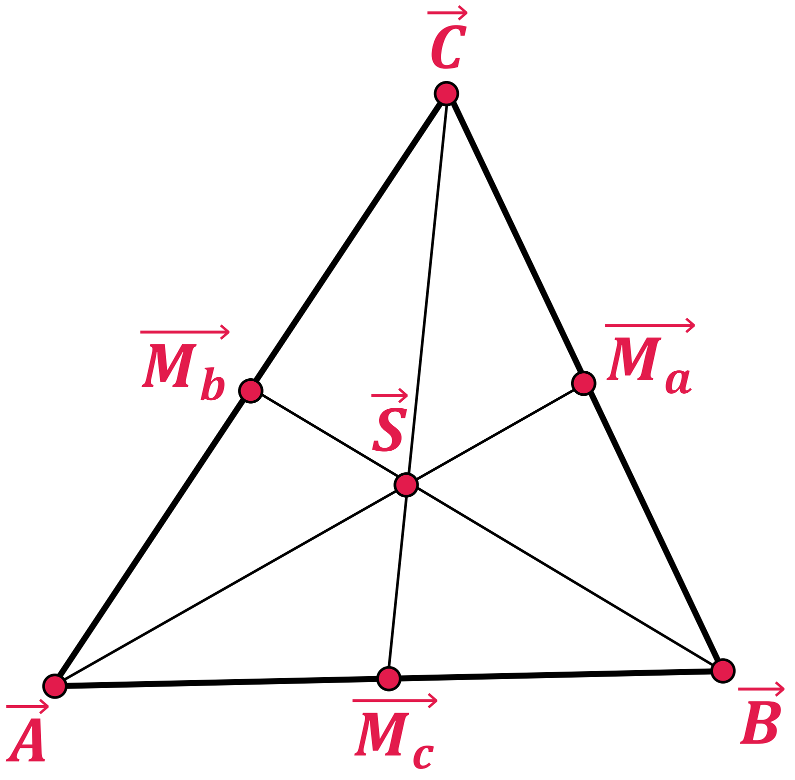
$$\vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = \vec{B} + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$
$$\Leftrightarrow \vec{A} + t \cdot \left(-\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = \vec{B} + u \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$$
$$\Leftrightarrow \vec{A} - \vec{B} - t \cdot \overrightarrow{BA} - \tfrac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BA} = \tfrac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BC} - \tfrac{t}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - t - \tfrac{u}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\tfrac{u}{2} - \tfrac{t}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Weil $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ nicht parallel sind, ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn $1 - t - \frac{u}{2} = 0$ und $\frac{u}{2} - \frac{t}{2} = 0$.
- Lösen dieses Gleichungssystems ergibt: $u = t = \frac{2}{3}$
- Als Schnittpunkt $\vec{S}$ von s_a und s_b erhält man also:

$$\vec{S} = \vec{A} + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_a} = \vec{A} + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) - \vec{A}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$$

 Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/nwutpqmz

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



Beweis (Fortsetzung)

- Aus $\vec{S} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$ folgt durch nachrechnen:
$$\vec{S} = \vec{C} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM_c}$$
- Folglich liegt $\vec{S}$ auch auf der dritten Seitenhalbierenden s_c des Dreiecks.
- Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.
- Der zweite Teil des Satzes folgt direkt aus:
$$\vec{S} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3 \cdot \vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$\blacksquare$

Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49

https://www.geogebra.org/m/ysyzkgyn#material/nwutpqmz

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de
mategnu.de

RPTU