MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvor-
stellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik

Jürgen Roth

02.06.2026 MaTeGnu–K1–M3, PL Bad Kreuznach

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Warum Modellieren und Angewandte Mathematik?

Zielrichtungen

- Die Frage nach dem „Warum?“ wird von Anfang an thematisiert.
- Begriffe, Verfahren und Strukturen
  - an konkreten Beispielen erarbeiten,
  - als Grundlage von Problemlösungen nutzen und
  - in vielfältigen Anwendungsbereichen einsetzen.

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik

1. Beispiel Marktforschung: Repräsentationen erarbeiten
2. Schematisierung: Matrizenmultiplikation
3. Entwicklung der Kundenzahlen: Übergangsmatrix

GeoGebra-Buch „Modul 3: Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“
https://mategnu.de/m/l3

mategnu.de

RPTU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik

1. **Beispiel Marktforschung: Repräsentationen erarbeiten**
2. Schematisierung: Matrizenmultiplikation
3. Entwicklung der Kundenzahlen: Übergangsmatrix

GeoGebra-Buch „Modul 3: Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“
https://mategnu.de/m/l3

Beispiel: Marktforschung

Streaming-Dienste

- Ein Marktforschungsinstitut wird beauftragt, das Verhalten der Abo-Kunden von Streaming-Diensten zu untersuchen.
- **Ziel:** Argumente für Marketingentscheidungen liefern.

Modellannahmen

- Es gibt zwei Streaming-Dienste: GoVideo (**G**) und Hetzfix (**H**)
- Die Gesamtzahl der Kunden bleibt konstant.
- Der Marktmechanismus ändert sich nicht.

Beispiel: Marktforschung

Daten über Umfragen

- Streaming-Dienst GoVideo (**G**) hat 20.000 Kunden.
- Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) hat 30.000 Kunden.
- Pro Monat wechseln 20% der **G**-Kunden zu **H**.
- Pro Monat wechseln 5% der **H**-Kunden zu **G**.

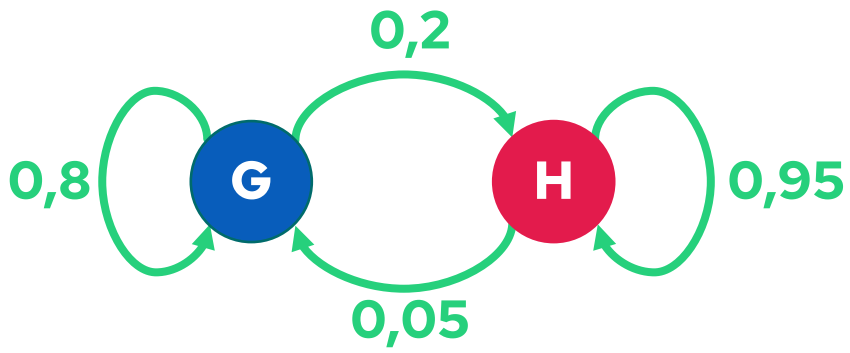
Wie entwickeln sich die Kundenzahlen?

- Abonnieren irgendwann alle den Streaming-Dienst Hetzfix (**H**)?
- Oszillieren die Kundenzahlen?
- Stellt sich ein Gleichgewicht ein?

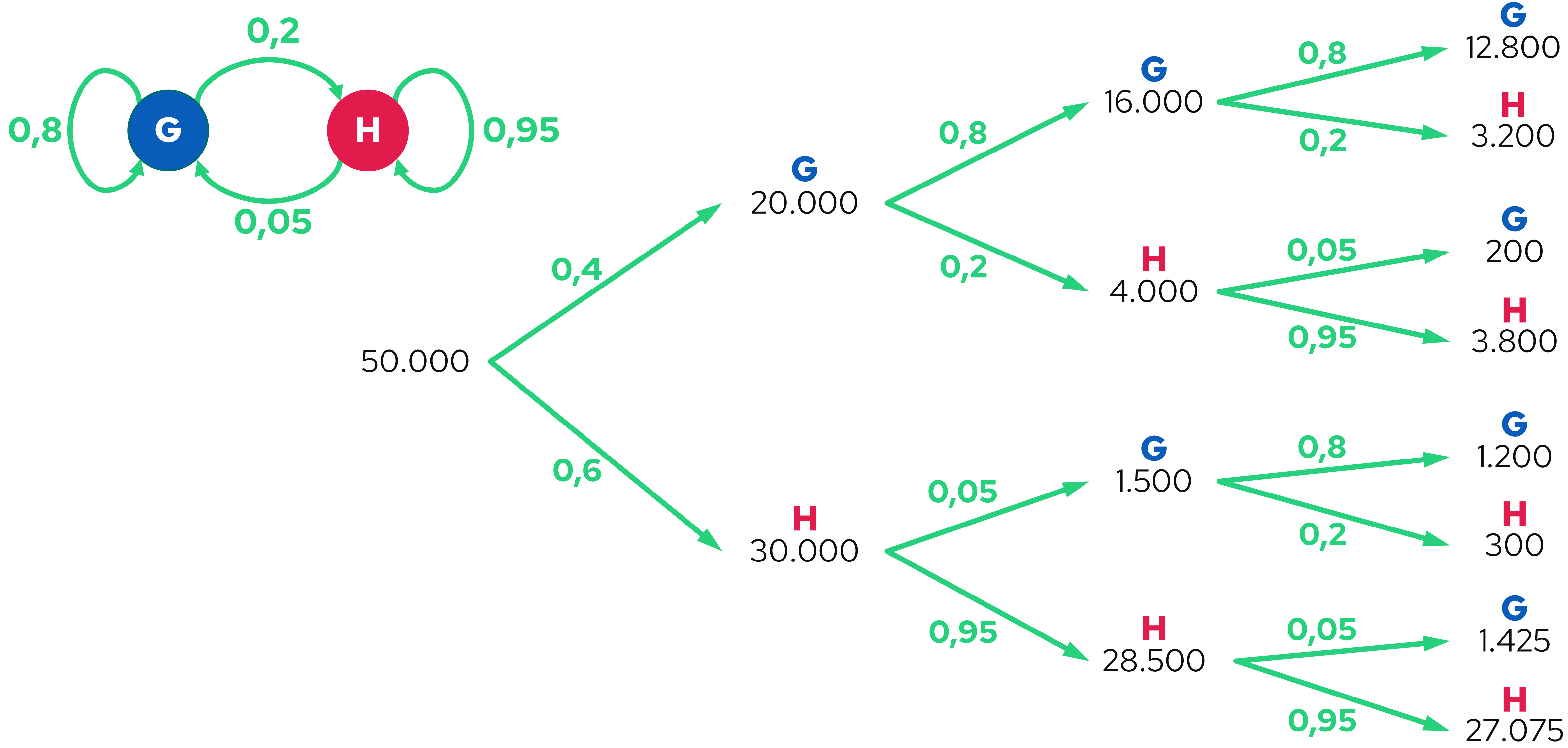
Übergangstabelle

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

Übergangsgraph



Baumdiagramm

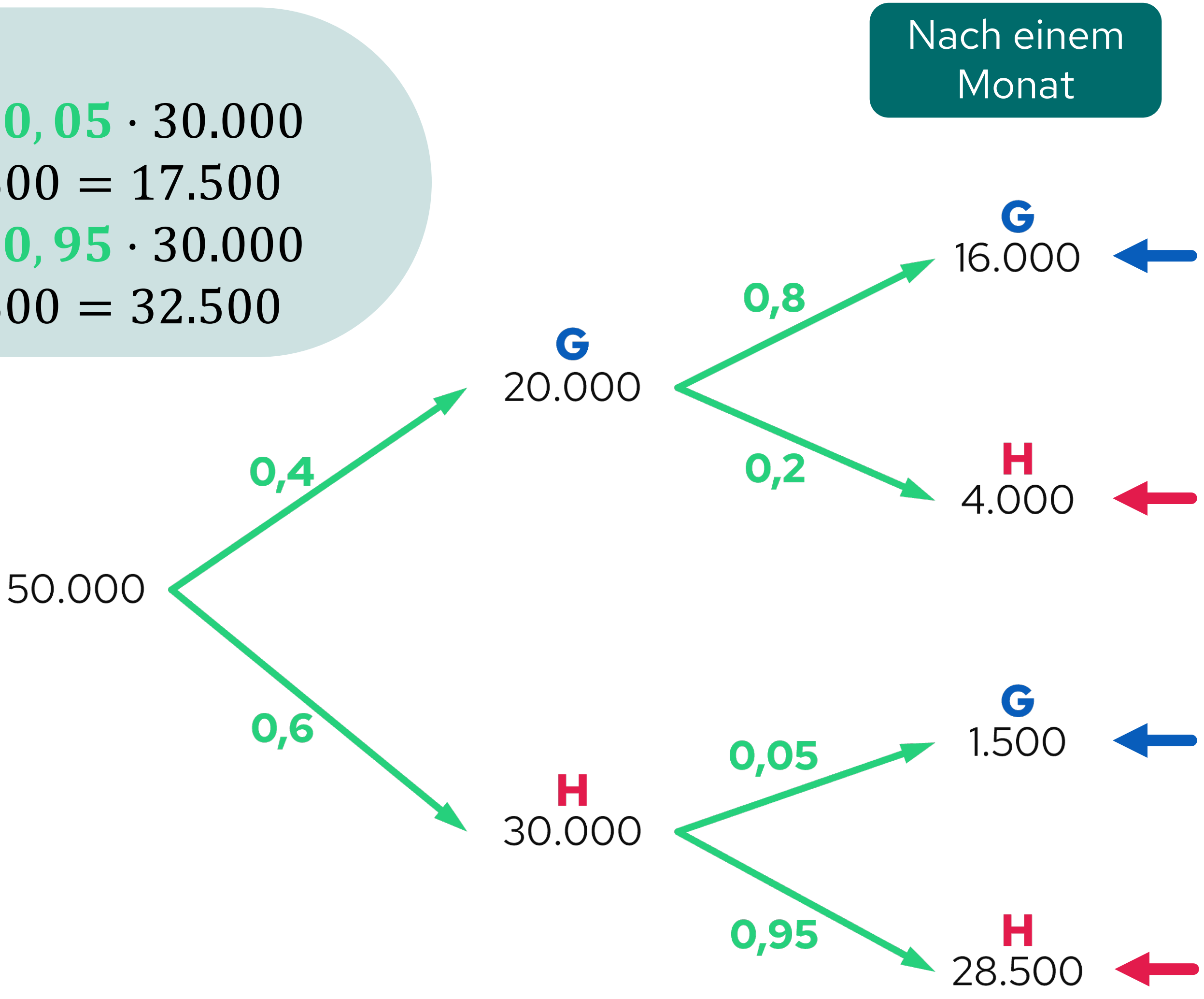


Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

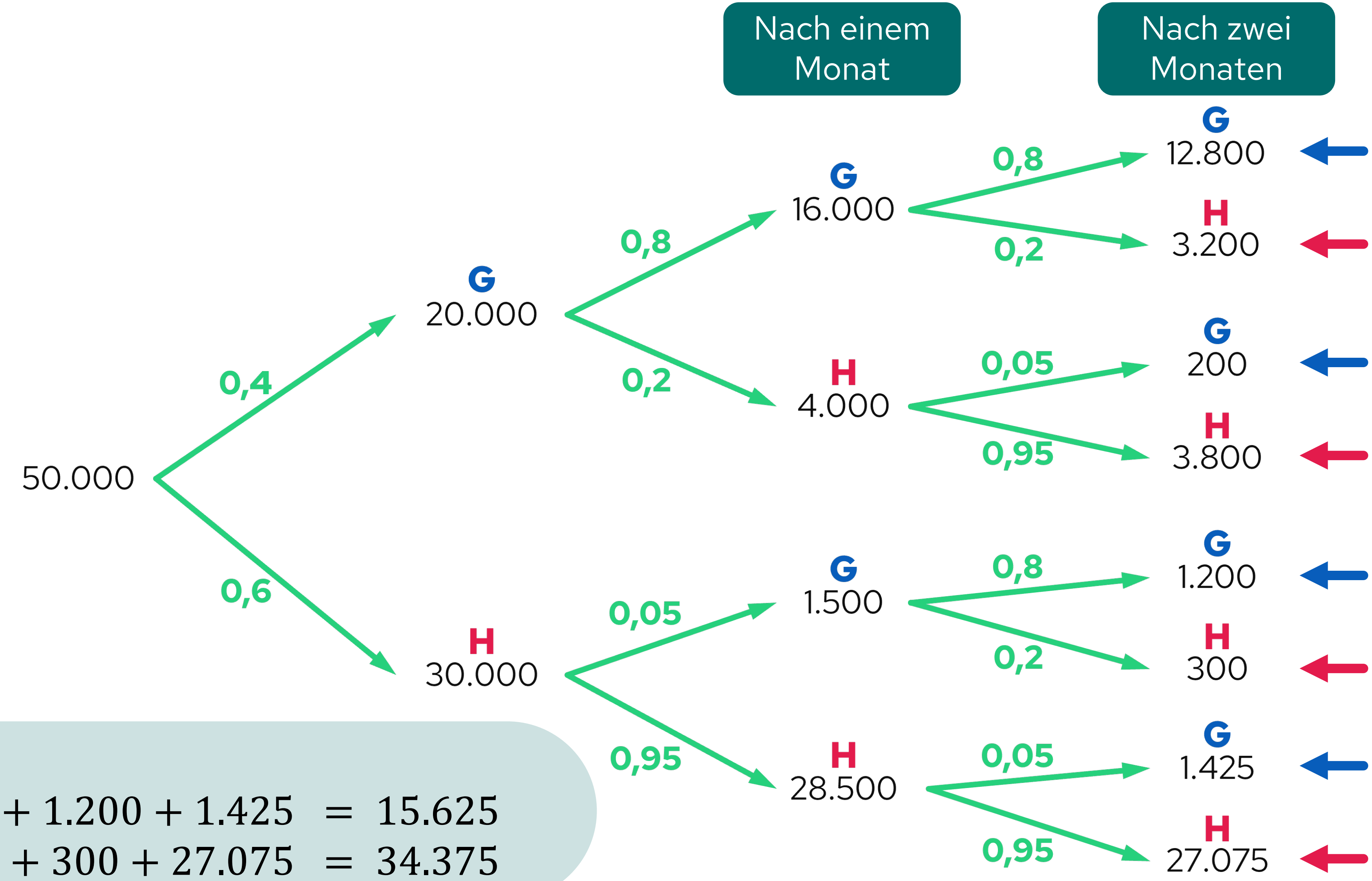
Nach einem Monat

Kunden **G**: $0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$
$= 16.000 + 1.500 = 17.500$

Kunden **H**: $0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$
$= 4.000 + 28.500 = 32.500$



Entwicklung der Abonnenten-Zahlen



Nach zwei Monaten

Kunden **G**: $12.800 + 200 + 1.200 + 1.425 \;=\; 15.625$

Kunden **H**: $3.200 + 3.800 + 300 + 27.075 \;=\; 34.375$

Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

- Untersuchen Sie die Entwicklung der Kunden-Zahlen über einen Zeitraum von …
  - 10 Monaten.
  - 100 Monaten.
- Ein Tabellenkalkulationsprogramm kann helfen …

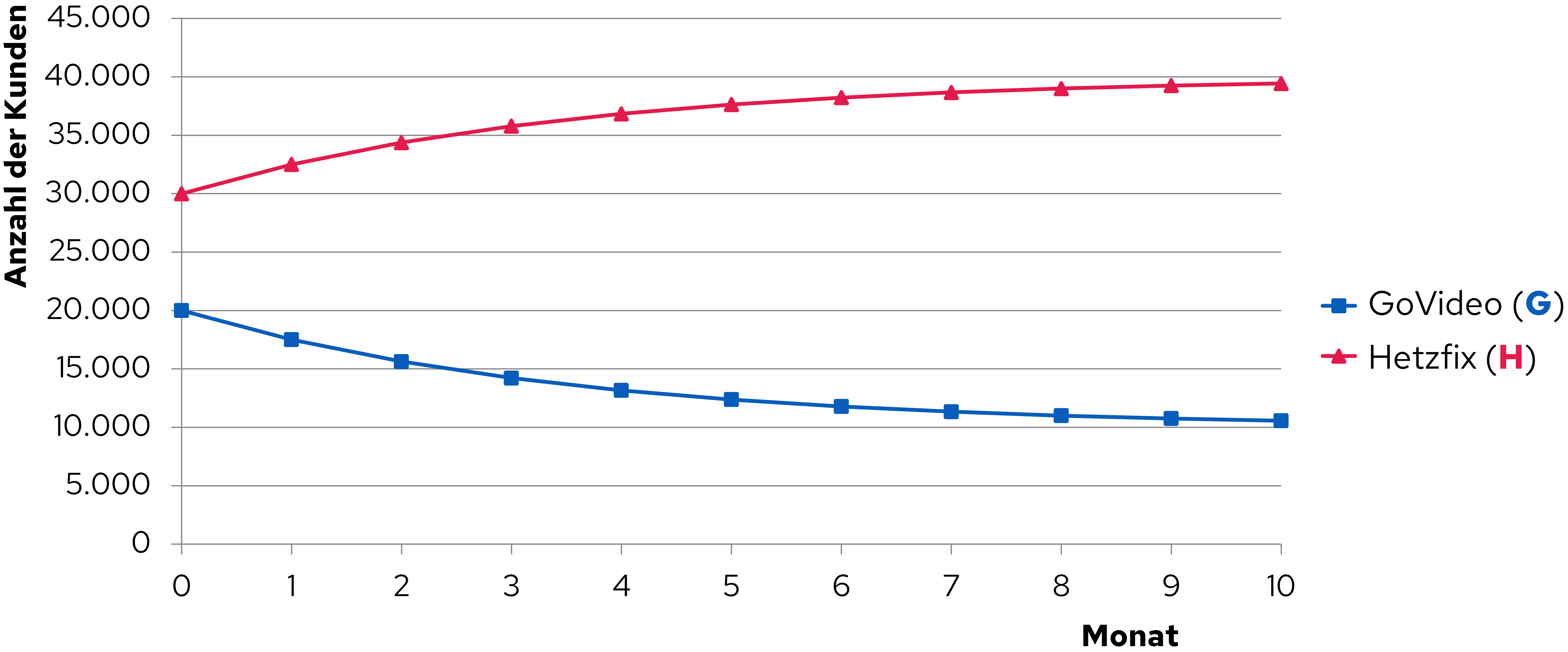
	A	B	C	D
1	G -> H	0.2		
2	H -> G	0.05		
3				
4	Monat	G	H	
5	0	20000	30000	
6	1	17500	32500	
7	2			
8	3			
9	4			
10	5			
11	6			
12	7			
13	8			
14	9			
15	10			
16				

= B5 * (1 - B1) + C5 * B2

= B5 * B1 + C5 * (1 - B2)

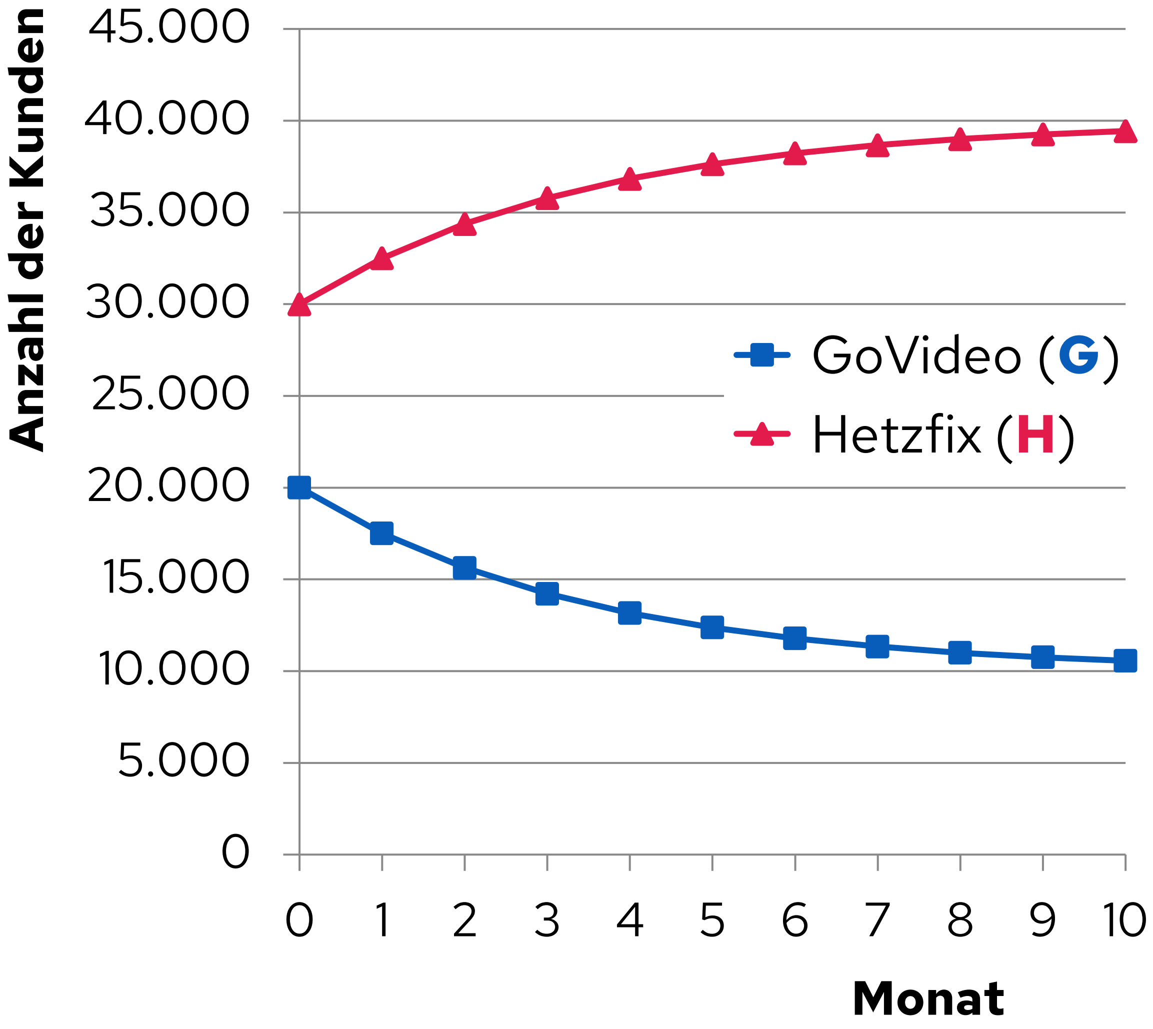
Herunter-
ziehen

Entwicklung der Kunden-Zahlen



 https://www.geogebra.org/m/rwmqpq5f

Entwicklung der Kunden-Zahlen



Erkenntnis

Die Kunden-Zahlen von GoVideo (**G**) sinken und die von Hetzfix (**H**) steigen.

Fragen

- Halten diese Tendenzen an?
- Hat GoVideo (**G**) irgendwann keine Kunden mehr?
- Was passiert, wenn GoVideo (**G**) zu Beginn mehr bzw. noch weniger Kunden hat?

Vorgehensweisen

- Vorhersagen machen & festhalten lassen.
- Testen! (Schieberegler!)

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik

1. Beispiel Marktforschung: Repräsentationen erarbeiten
2. **Schematisierung: Matrizenmultiplikation**
3. Entwicklung der Kundenzahlen: Übergangsmatrix

GeoGebra-Buch „Modul 3: Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://mategnu.de/m/l3

Schematisierung

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

Übergangstabelle

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

Tabelle der Ausgangswerte

G_0	20.000
H_0	30.000

Vektor der Ausgangswerte

$$\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

Schematisierung

Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

1 $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix}$

Schematisierung

Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$

H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

5

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}}_{\text{Übergangs-matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}}_{\text{Ursprünglicher Kundenvektor}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}}_{\text{Kundenvektor nach einem Monat}}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem der händischen Berechnung von Folie 8!

Nach einem Monat

→ Kunden **G**: $0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$
$= 16.000 + 1.500 = 17.500$

→ Kunden **H**: $0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$
$= 4.000 + 28.500 = 32.500$

Schematisierung

Definition: $(n \times m)$-Matrix
Ein rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und m Spalten heißt **$(n \times m)$-Matrix**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

Eine $(n \times 1)$-Matrix heißt auch **Spaltenvektor**.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Eine $(1 \times m)$-Matrix heißt auch **Zeilenvektor**.

$$(a_1 \ldots a_m)$$

Matrizen werden mit einem Groß-buchstaben abgekürzt, Vektoren mit Kleinbuchstaben & einem Pfeil darüber.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrix $\boldsymbol{A}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$

Schematisierung im Beispiel

Ursprünglicher Kundenvektor: $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

Kundenvektor nach einem Monat: $\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}$$

Kundenvektor nach zwei Monaten: $\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{k_1}$

Kundenvektor nach n Monaten: $\overrightarrow{k_n} = A \cdot \overrightarrow{k_{n-1}}$

Schematisierung

Definition
Das Produkt einer (2×2)**-Matrix** mit einer (2×1)**-Matrix** (**Spaltenvektor**) wird definiert durch:

$$A \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_1 + a_{12} \cdot k_2 \\ a_{21} \cdot k_1 + a_{22} \cdot k_2 \end{pmatrix}$$

Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Eingabe von Matrizen

Eingabe von $A \coloneqq \{\{1,2,3\},\{-4,-5,-6\},\{7.1,8.2,9.3\},\{3,2,1\}\}$ liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ und ggf. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$:

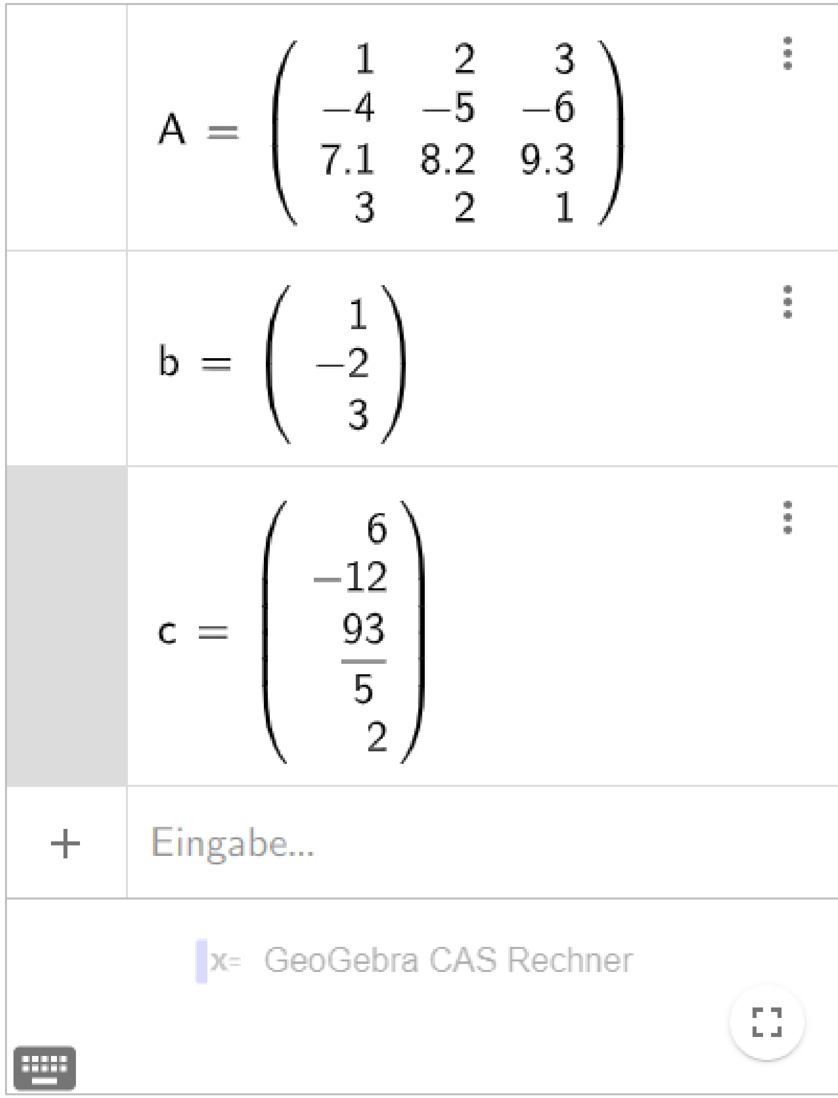
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ \frac{71}{10} & \frac{41}{5} & \frac{93}{10} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: In GeoGebra Classic kann eine Matrix auch über die Eingabe in die Zellen einer Tabelle erfolgen. Die Zellen werden anschließend markiert und nach rechtem Mausklick wird im Kontextmenü → Erzeugen und → Matrix ausgewählt.

Eingabe von Vektoren

Eingabe von $b \coloneqq \{\{1\},\{-2\},\{3\}\}$ bzw. $b \coloneqq (1,-2,3)$ liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ und ggf. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$:

$$b \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Matrizen multiplizieren

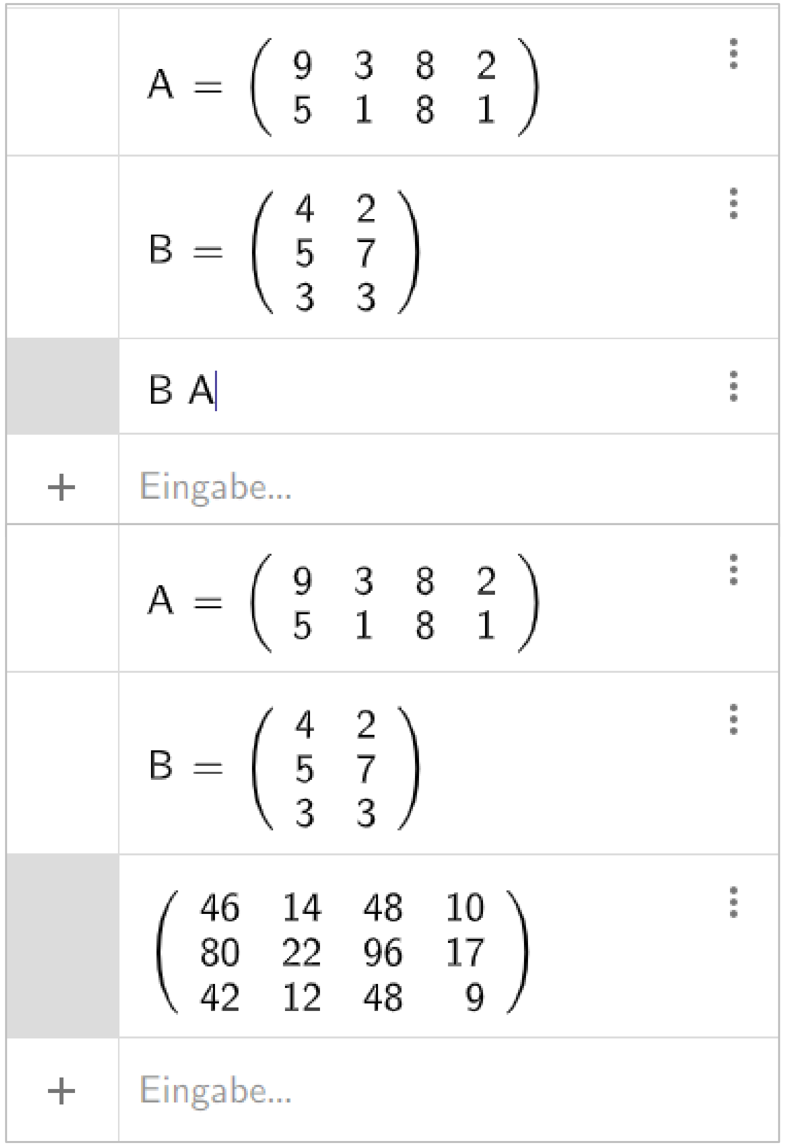
Eingabe von

$A := \{\{9,3,8,2\},\{5,1,8,1\}\}$

$B := \{\{4,2\},\{5,7\},\{3,3\}\}$

$B * A$

liefert nach Auswahl von [=] und ggf. drücken der *Enter*-Taste [Enter] das Produkt $B \cdot A$ der Matrizen.

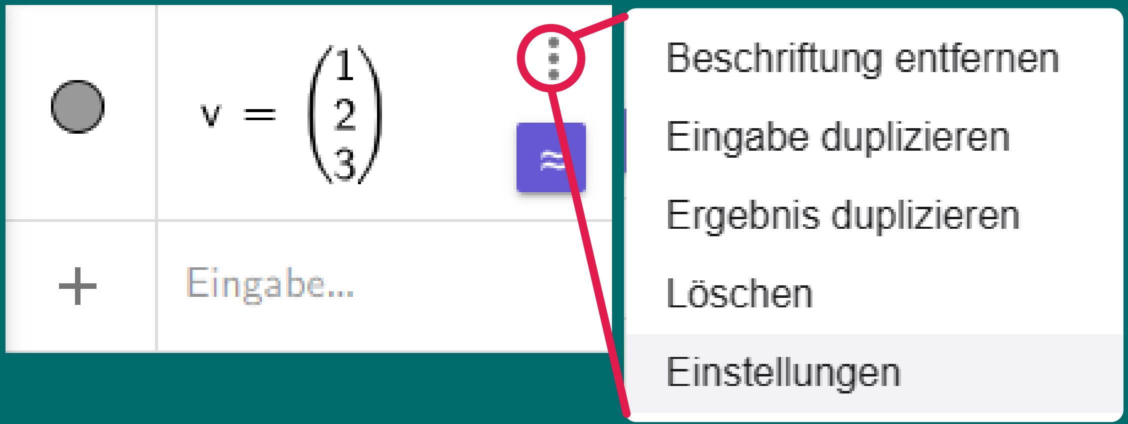


Exkurs: GeoGebra CAS

GeoGebra Classic
Zeilenbezüge in der CAS-Ansicht

- **Statische Bezüge**
  Änderungen in der Referenzzeile haben keine Auswirkungen.
  - # kopiert die vorherige Ausgabe
  - #3 kopiert die Ausgabe von Zeile 3
- **Dynamische Bezüge**
  Änderungen in der Referenzzeile werden übernommen.
  - $ fügt die vorherige Ausgabe ein
  - $3 fügt die Ausgabe von Zeile 3 ein

GeoGebra Suite
Zeilen kopieren in der CAS-Ansicht



Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik

1. Beispiel Marktforschung: Repräsentationen erarbeiten
2. Schematisierung: Matrizenmultiplikation
3. **Entwicklung der Kundenzahlen: Übergangsmatrix**

GeoGebra-Buch „Modul 3: Linearen Algebra und Analytischen Geometrie"
https://mategnu.de/m/l3

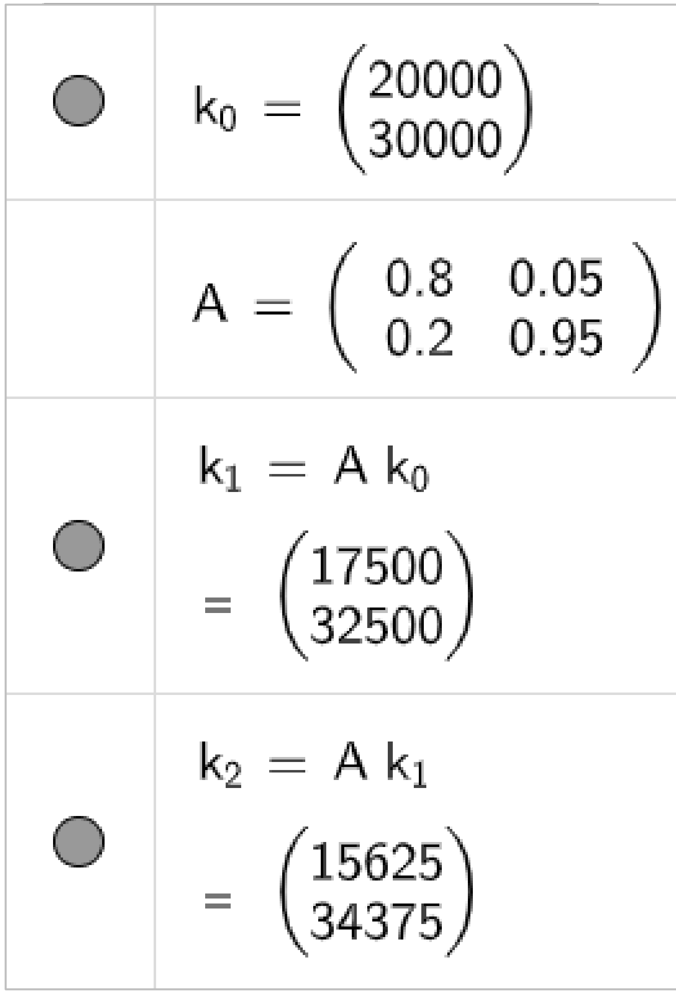
Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

Eingabe des ursprünglichen Kundenvektors: $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

Eingabe der Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

Berechnung des Kundenvektors nach einem Monat: $\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0}$

Berechnung des Kundenvektors nach zwei Monaten: $\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1}$



Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

$$k_3 = A\,k_2 = \begin{pmatrix}14218.75\\35781.25\end{pmatrix}$$

$$k_4 = A\,k_3 = \begin{pmatrix}13164.06\\36835.94\end{pmatrix}$$

$$k_5 = A\,k_4 = \begin{pmatrix}12373.05\\37626.95\end{pmatrix}$$

$$k_6 = A\,k_5 = \begin{pmatrix}11779.79\\38220.21\end{pmatrix}$$

$$k_7 = A\,k_6 = \begin{pmatrix}11334.84\\38665.16\end{pmatrix}$$

$$k_8 = A\,k_7 = \begin{pmatrix}11001.13\\38998.87\end{pmatrix}$$

$$k_9 = A\,k_8 = \begin{pmatrix}10750.85\\39249.15\end{pmatrix}$$

$$k_{10} = A\,k_9 = \begin{pmatrix}10563.14\\39436.86\end{pmatrix}$$

$$k_{11} = A\,k_{10} = \begin{pmatrix}10422.35\\39577.65\end{pmatrix}$$

$$k_{12} = A\,k_{11} = \begin{pmatrix}10316.76\\39683.24\end{pmatrix}$$

$$k_{13} = A\,k_{12} = \begin{pmatrix}10237.57\\39762.43\end{pmatrix}$$

$$k_{14} = A\,k_{13} = \begin{pmatrix}10178.18\\39821.82\end{pmatrix}$$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Iterative Berechnung

- Die Kunden-Zahlen nach zwei Monaten wurden so berechnet:

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right)$$

- Will man die Kunden-Zahlen nicht iterativ sondern direkt berechnen, dann müsste das so funktionieren:

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right) = A^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$$

- Dazu muss eine Multiplikation von Matrizen definiert werden.

- Dann könnte man auch $\overrightarrow{k_n}$ direkt berechnen:

$$\overrightarrow{k_n} = A^n \cdot \overrightarrow{k_0}$$

Berechnung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_2}$

$$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{0_1} \\ k_{0_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{12} \cdot k_{0_2} \\ a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{k_2} &= A \cdot A \cdot \overrightarrow{k_0} = A \cdot \overrightarrow{k_1} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{12} \cdot k_{0_2} \\ a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{11}a_{12} \cdot k_{0_2} + a_{12}a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{12}a_{22} \cdot k_{0_2} \\ a_{21}a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{21}a_{12} \cdot k_{0_2} + a_{22}a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22}a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}) \cdot k_{0_1} + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}) \cdot k_{0_2} \\ (a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}) \cdot k_{0_1} + (a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}) \cdot k_{0_2} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}}_{= A \cdot A =: A^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k_{0_1} \\ k_{0_2} \end{pmatrix}}_{= \overrightarrow{k_0}}
\end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation

Definition

Die Multiplikation einer (2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit sich selbst ist definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

- Vorgehensweise bei der Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} 1\;3 & 2\;4 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \end{array} := \begin{pmatrix} \overset{1}{\boxed{a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}}} & \overset{2}{\boxed{a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}}} \\ \underset{3}{\boxed{a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}}} & \underset{4}{\boxed{a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}}} \end{pmatrix}$$

- Diese Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern.
- Damit sie funktioniert, muss die Anzahl der Spalten der linken Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix sein!

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Prognose ist nun ohne Iteration möglich

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_2} = A^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{10}} = A^{10} \cdot \overrightarrow{k_0}$

$k_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$

$k_1 = A\, k_0 = \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$

$k_2 = A^2\, k_0 = \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$

$k_{10} = A^{10}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$

$k_{20} = A^{20}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10031.71 \\ 39968.29 \end{pmatrix}$

$k_{30} = A^{30}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10001.79 \\ 39998.21 \end{pmatrix}$

$k_{40} = A^{40}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10000.1 \\ 39999.9 \end{pmatrix}$

$k_{100} = A^{100}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 40000 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{k_{30}} = A^{20} \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{30}} = A^{30} \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{40}} = A^{40} \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{100}} = A^{100} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Stabiler Kundenvektor

- Es gibt offensichtlich nach einer bestimmten Anzahl von Monaten einen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$.
- Obwohl weiterhin in jedem Monat Kunden den Streaming-Dienst wechseln, bleiben die Kundenzahlen der beiden Streaming-Dienste konstant.
- Man sagt, es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein.
- Für diesen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ muss gelten:
$$A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$$
- Aus dieser Gleichung kann man $\overrightarrow{k_s}$ auch direkt berechnen.

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

Aus $\quad A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$

ergibt sich mit $\quad \overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

die Matrixgleichung $\quad \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Als lineares Gleichungssystem geschrieben folgt:

$$\begin{aligned} 0{,}8 \cdot x + 0{,}05 \cdot y &= x \\ 0{,}2 \cdot x + 0{,}95 \cdot y &= y \end{aligned}$$

Zusammenfassen gleichartiger Terme liefert:

$$\begin{aligned} -0{,}2 \cdot x + 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Dieses „Gleichungssystem“ ist nicht eindeutig lösbar. $\quad 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y = 0$

Es gilt aber zusätzlich: $\quad x + \quad y = 50.000$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$ (Fortsetzung)

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.	$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \quad\quad y &= 50.000 \end{aligned}$
Aus der ersten Gleichung ergibt sich:	$x = 0{,}25 \cdot y$
Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:	$1{,}25 \cdot y = 50.000$
Es ergibt sich folgende eindeutige Lösung:	$y = 40.000$ $x = 10.000$
Stabiler Kundenvektor:	$\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$ mit (GeoGebra-)CAS

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

- Mit einem Computer-Algebra-System (CAS) wie in GeoGebra kann das Gleichungssystem auch direkt gelöst werden.

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \phantom{0{,}05 \cdot} y &= 50.000 \end{aligned}$$

- Eingabe von

$$\text{Löse}(\{0.2 * x - 0.05 * y = 0, x + y = 50000\}, \{\text{x}, \text{y}\})$$

liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ bzw. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$:

$$\{\{x = 10000, y = 40000\}\}$$

Löse({0.2 x − 0.05 y = 0, x + y = 50000}, {x, y})

= {{x = 10000, y = 40000}}

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Ergebnis

- Die Kundenverteilung stabilisiert sich so, dass – trotz der dynamischen Entwicklung – der Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) dauerhaft 40.000 und der Streaming-Dienst GoVideo (**G**) durchgängig 10.000 Kunden hat.
- Der stabile Kundenvektor lässt sich mit Hilfe der Gleichung $A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$ und der konstanten Kundensumme berechnen.
- Insbesondere ist das lineare Gleichungssystem nicht von einer speziellen Anfangsverteilung der Kunden abhängig.
- Folglich ist auch der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ unabhängig von der Anfangsverteilung der Kunden!

Entwicklung der Übergangsmatrix

Entwicklung der Übergangsmatrix

- Wie verändert sich bei diesem Prozess die Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$?
- Untersuchen Sie das mit Hilfe des CAS in GeoGebra.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse

- Offensichtlich ergibt sich eine **Grenzmatrix** $\boldsymbol{A_G}$:

$$A_G := \lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

- Wird die Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G}$ auf den Ausgangskundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_0}}$ angewandt, dann ergibt sich direkt der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$:

$$A_G \cdot \overrightarrow{k_0} = \overrightarrow{k_s}$$

Entwicklung der Übergangsmatrix

Ergebnisse (Fortsetzung)

- Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G}$ und stabiler Kundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$ sind unabhängig von der Anfangsverteilung.
- Statt 50.000 Kunden kann man auch 100% bzw. 1 nutzen.
- Der Anfangsvektor lässt sich dann als $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ schreiben.
- Multiplikation mit der Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ liefert die erste bzw. zweite Spalte dieser Matrix:
  $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$ bzw. $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$
- Daraus folgt: $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$
- In den Spalten der Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G}$ steht jeweils der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$.

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de
mategnu.de

RPTU