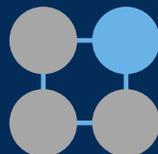


GeoGebra-Tag für Studienseminare



GeoGebra-Institut
Landau (RLP)



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Jürgen Roth

28.03.2025 GeoGebra-Tag für Studienseminare

WLAN:
Voucher:

RPTU-guest
LmpvqF3ZfGb

R
P

TU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau



Zeit	Inhalt			
9:00-10:00	Vortrag: GeoGebra einsetzen – Lernumgebung, Werkzeug und Prüfungen C4 260			
10:00-10:30	Kaffeepause ☕ C4 260			
10:30-12:00	Workshop-Phase 1			
	WS 1: Erste Schritte mit GeoGebra C4 260	WS 2: Einstieg in die Differentialrechnung C4 266	WS 3: GeoGebra-Werkzeugeinsatz in Übungen & Prüfungen C3 140	WS 4: Digitale Lernumgebungen mit GeoGebra zusammenstellen C3 148
12:00-12:30	Mittagspause ☕ C4 260			
12:30-14:00	Workshop-Phase II			
	WS 5: GeoGebra-Applets zur Matrizenrechnung C4 266	WS 6: GeoGebra-Simulationen selbst erstellen C3 140	WS 7: GeoGebra als Werkzeug in Stochastik C3 148	WS 8: Vernetzung von Geometrie & funktionalem Zusammenhang C4 260
14:00-14:30	Abschlussplenum C4 260			



GeoGebra einsetzen

Lernumgebung, Werkzeug & Prüfungen

Jürgen Roth

28.03.2025 juergen-roth.de



R
TU
P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

GeoGebra einsetzen

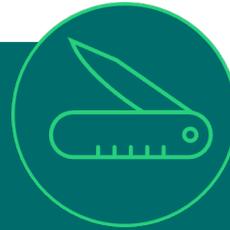
Lernumgebung, Werkzeug & Prüfungen

- 1 Digitale Lernumgebung
↔ digitales Werkzeug
- 2 GeoGebra beim
Lernen und Leisten

GeoGebra einsetzen

Lernumgebung, Werkzeug & Prüfungen

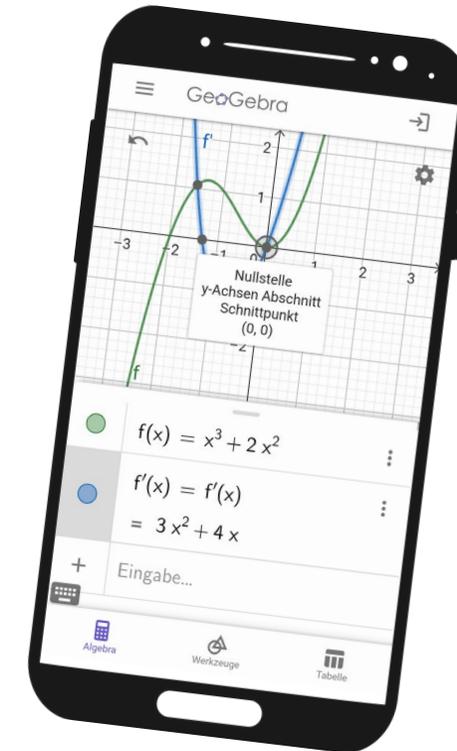
- 1 Digitale Lernumgebung
↔ digitales Werkzeug**
- 2 GeoGebra beim
Lernen und Leisten



Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematik-
unterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
- Computer-Algebra-Systeme,
- dynamische Geometrie-Systeme
und als deren Integration
- dynamische Mathematik-Systeme (DMS)
[Multi-Repräsentations-Systeme,
modulare Mathematikssysteme (MMS)].



MMS nur dann einsetzen, wenn dadurch das Erreichen der Ziele des Mathematikunterrichts nachhaltig unterstützt wird.

Aufgabenstellungen

- schriftliche Ergebnis-Vorhersagen vor Nutzung dynamischer Interaktivitäten
- dynamisch dargestellte Situation und dynamische mathematische Repräsentationen in Beziehung setzen
- Reflexionsfragen zu beobachteten bzw. erarbeiteten Ergebnissen
- Zusammenhänge schriftlich festhalten
- Ergebnisse anwenden

Lichti & Roth (2018), Digel & Roth (2022)

Protokollierung

Ergebnisse und Vorgehensweisen schriftlich (Text & Grafik) festhalten

- erleichtert reflektierte Abstraktion sowie Schematisierung & ermöglicht tiefere Verarbeitung Dörfler (2003)
- entlastet das Arbeitsgedächtnis Schnotz et al. (2011)
- fördert Reflexionstiefe und neue Erkenntnisgewinnung Roth (2013)
- ermöglicht die spätere Weiterarbeit mit den Erkenntnissen
- Anregung: Prompts & leere Kästen Schumacher & Roth (2015)

Thesen zum Einsatz von MMS im MU

Ein digitales Werkzeug (MMS) ist ...

Experimentierumgebung zur Erkenntnisgewinnung

entlastet vom Kalkül → mehr Planung, Analyse
und Argumentation

Heuristisches Hilfsmittel („Denkzeug“)

ermöglicht Realitätsorientierung
und authentische Probleme

Modellierungswerkzeug („Kreativitäts-/Interpretationskrücke“)

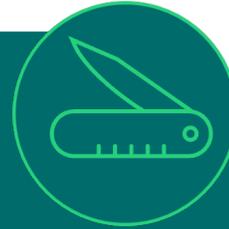
unterstützt selbsttätiges, entdeckendes Arbeiten

Kommunikationsmittel

fördern kreatives und produktives Arbeiten

Digitale Werkzeuge

sind Universalwerkzeuge zur mathematischen Problemlösung und müssen durch die Nutzer/in, durch geeignete Ausgestaltung, zu Spezialwerkzeugen für den jeweiligen Zweck gemacht werden.



Digitale Lernumgebungen

setzen einen Rahmen für das selbstständige Mathematik-Lernen. Dazu werden – häufig von Lehrpersonen – unter anderem Applets auf der Basis von digitalen Werkzeugen zur Unterstützung von selbstständigen Lernprozessen von Lernenden in die digitale Lernumgebung integriert.



Wann sollte was genutzt werden?

■ Digitales Werkzeug

Primäres Lernziel ist die Ausbildung von Nutzungsexpertise bzgl. des verwendeten digitalen Werkzeugs zur Problemlösung bzw. Aufgabenbearbeitung.

→ Die selbständige Nutzung des digitalen Werkzeugs ist sinnvoll.

■ Digitale Lernumgebungen

Primäres Lernziel besteht darin, einen mathematischen Inhalt zu durchschauen und zu verstehen.

→ Die Einbindung in eine digitale Lernumgebung ist sinnvoll.

MMS-Nutzung durch Lernende

Grad der Vorstruktururierung

Digitale Lernumgebung



Konfiguration
vollständig
vorgegeben

Strukturierungs- und
Fokussierungshilfen für
alle wesentlichen Aspekte
(z. B. Farbgebung, Linienstärken,
Mitführen von Messwerten, ...)

Elemente können ein-
und ausgeblendet werden

Variationsmöglichkeiten
bewusst eingeschränkt.

Hybrid

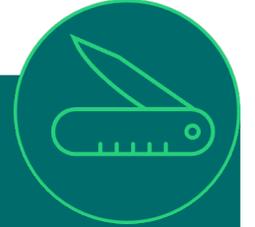


Veränderbare
(Teil-)Konfiguration
vorgegeben

Kann / muss ergänzt
oder verändert werden

Nur einzelne
Strukturierungs- und
Fokussierungshilfen
vorhanden

Digitales Werkzeug



Leere,
unstrukturierte
MMS-Datei

MMS wird selbst-
ständig und ohne
Vorgaben benutzt

Erfordert
Werkzeugkompetenz

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 233-248). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis**. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Inhalts- und Unterstützungsdimension

Zweck des DMS-Einsatzes	Grad der Vorstrukturierung	Fertig vorgegebene Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)	Veränderbare Konfiguration mit einzelnen Fokussierungshilfen	Leeres, unstrukturiertes DMS
Bewegliche Argumentation kommunizieren		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>
Beweisidee vermitteln		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>
Verständnisgrundlage für Begriffe und ihre Eigenschaften schaffen		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Experimentelles Arbeiten		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
▪ Entdecken von Zusammenhängen		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
▪ Finden von Ideen im Problemlöseprozess			<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Reflexion von Problemlöseprozessen		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>

Definition: Lernumgebung

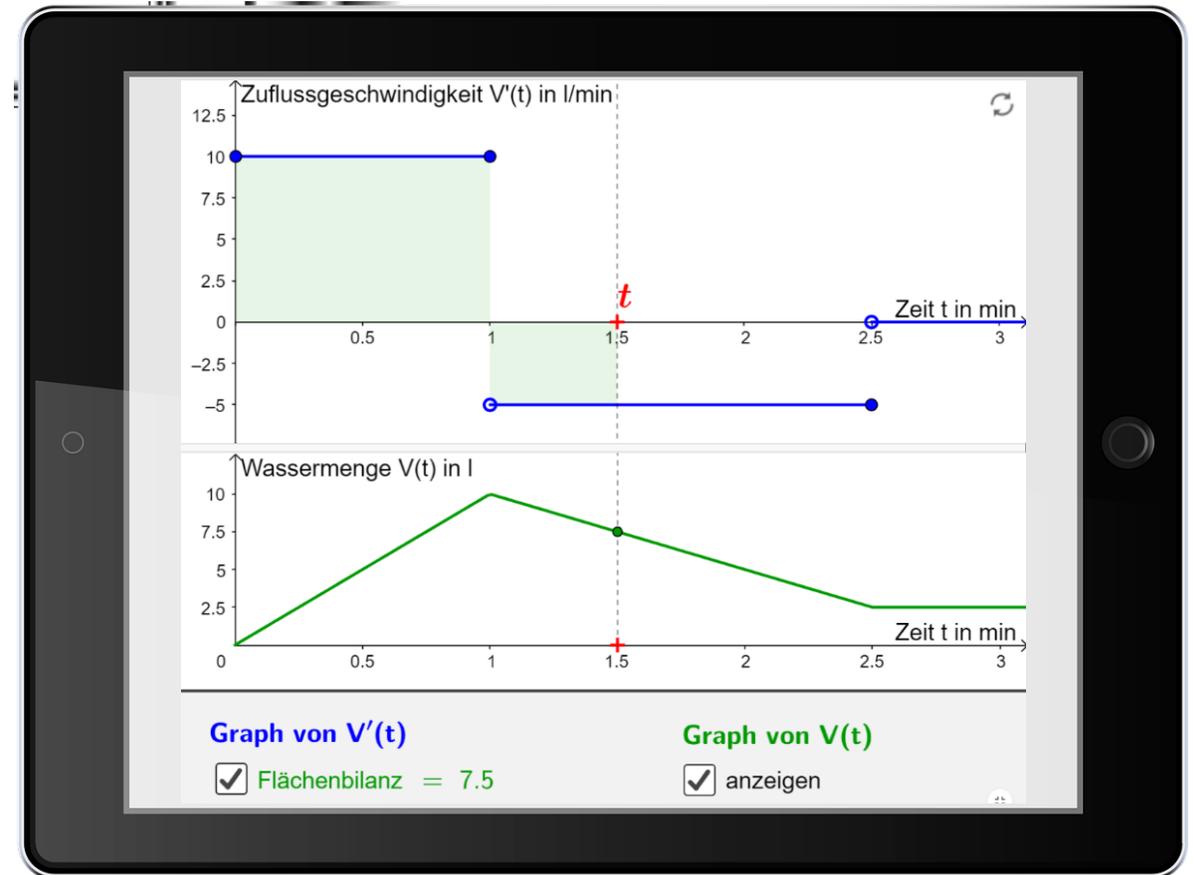
Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.



Digitale Lernumgebungen



- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
 - von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
 - die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten, digital angereichert wurde.



Rolle der Lehrperson im Rahmen der Arbeit mit (digitalen) Lernumgebungen

Vorbereitung

- L**ernende auf Arbeit mit digitaler Lernumgebung einstimmen
- R**egeln und Art der Dokumentation festlegen
- N**otwendige mathem. Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sicherstellen
- V**oraussetzungen für sinnvolles Arbeiten mit digitaler Lernumgebung schaffen



Durchführung

- Ü**berblick über Arbeitsstände und -ergebnisse verschaffen
- I**mplementierte Unterstützungssysteme adaptiv ergänzen
- M**öglichst minimal und in der Regel nicht inhaltlich unterstützen (Lernhilfen nach Zech)
- N**achbereitungsphase inhaltlich vorbereiten



Nachbereitung

- K**onsolidieren der erarbeiteten Wissens Elemente
- B**eobachtungen & Protokolle Lernender nutzen
- M**it regulärem mathem. Wissen abgleichen
- W**esentliche Grundvorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten herausarbeiten und sichern
- E**reichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen
- E**rarbeitetes weiter nutzen

Motivationshilfe

Hier beginnen.

- Lernende Motivieren
- Lernende bei der Aufgabenbearbeitung halten

Rückmeldehilfe

- Lernstand
- Korrektheit der Bearbeitung

Protokollierung

Allgemein- strategische Hilfe

- Strategie vermitteln, die unabhängig vom aktuellen Inhalt genutzt werden kann

Verweis auf
Hilfen, MMS ...

Inhaltsorientiert- strategische Hilfe

- Strategie vermitteln, die überwiegend beim aktuellen Inhalt Anwendung findet

Inhaltliche Hilfe

- Inhaltliche Hinweise
- (Teil-)Lösungen



Ziel der Nutzung

- Selbstständiges, verständnisbasiertes, an Grundvorstellungen ausgerichtetes Lernen mathematischer Inhalte
- durch geeignete Aufbereitung und mithilfe passgenauer (digitaler) Unterstützungsmedien ermöglichen

Keine Drill and Practice-Programme!



Mögliche Einsatzszenarien

- **In Inhaltsbereich einsteigen:** Inhaltsbereich explorieren und Grundvorstellungen erarbeiten
- **Inhaltsbereich konsolidieren:** Sichtweisen untereinander und mit Grundvorstellungen vernetzen

Fokussierungshilfen



- dyna-linking, also dynamische Verbindungen zwischen Repräsentationen
- (identische) Farbgebung, Linienstärke
- Bezeichner & Messwerte mitführen
- Hilfslinien
- Veränderungsmöglichkeiten nur, wo für Erkenntnisgewinnung notwendig
- Zu- und Abschaltbare Optionen

Ainsworth (1999), Roth (2005, 2017, 2019)

Digitale Lernumgebungen sind besonders lernförderlich, wenn



- Lerninhalte Veränderungen bzw. Prozesse einschließen
- Lerninhalte subjektiv anspruchsvoll
- Lerninhalte dynamisiert darstellbar
- dynamische Darstellungen interaktiv genutzt werden
- sie Aushandlungs- und Austauschphasen beinhalten
- sie von schriftlichen Protokollaktivitäten begleitet werden

Rolfes et al. (2020)

Digel et al. (2022)



Unterrichtsplanung und -durchführung




Lehr-Lern-Ziele

**(Digitales)
Werkzeug
oder (digitale)
Lernumgebung**

**Art der digitalen
Lernumgebung**


Vorbereitung

Überarbeitung

- Aufgabenstellungen
- Digitale Elemente
- Hilfen / Feedback

Auswahl/Passung

- Inhalt / Lernziel
- Lerngruppe 
- Rahmenbedingung


Durchführung


Nachbereitung


Lehr-Lern-Ziele

GeoGebra einsetzen

Lernumgebung, Werkzeug & Prüfungen

- 1 Digitale Lernumgebung
↔ digitales Werkzeug
- 2 GeoGebra beim
Lernen und Leisten**

Prüfungen sollten ...

- Ziele von Bildungsstandards und Lehrplänen widerspiegeln
- im Einklang mit den Lehr- & Lernpraktiken des Unterrichts stehen
- Lernenden die Möglichkeit geben ihr Wissen und ihre Fähigkeiten geeignet darzustellen

Prüfungen verdeutlichen ...

welche Kenntnisse und Fähigkeiten für wichtig erachtet & honoriert werden
(Art der Aufgaben, geprüfte Fähigkeiten, Anzahl der Bewertungseinheiten, erlaubte Hilfsmittel)

Assessment

should not merely be done to students; rather, it should also be done for students, to guide and enhance their learning.

NCTM: Principles und Standards for School Mathematics

Constructive Alignment

In **Prüfungen** muss qualitativ und quantitativ das abgefragt werden, was auch den **Unterricht** qualitativ und quantitativ prägt.

Henning Körner

GeoGebra beim Lernen & Leisten

Beispiel: Dreiecksgrundformen

-
- 2.1 Lernziel
 - 2.2 Erarbeitung
 - 2.3 Sicherung
 - 2.4 Prüfung

GeoGebra beim Lernen & Leisten

Beispiel: Dreiecksgrundformen

2.1 Lernziel

2.2 Erarbeitung

2.3 Sicherung

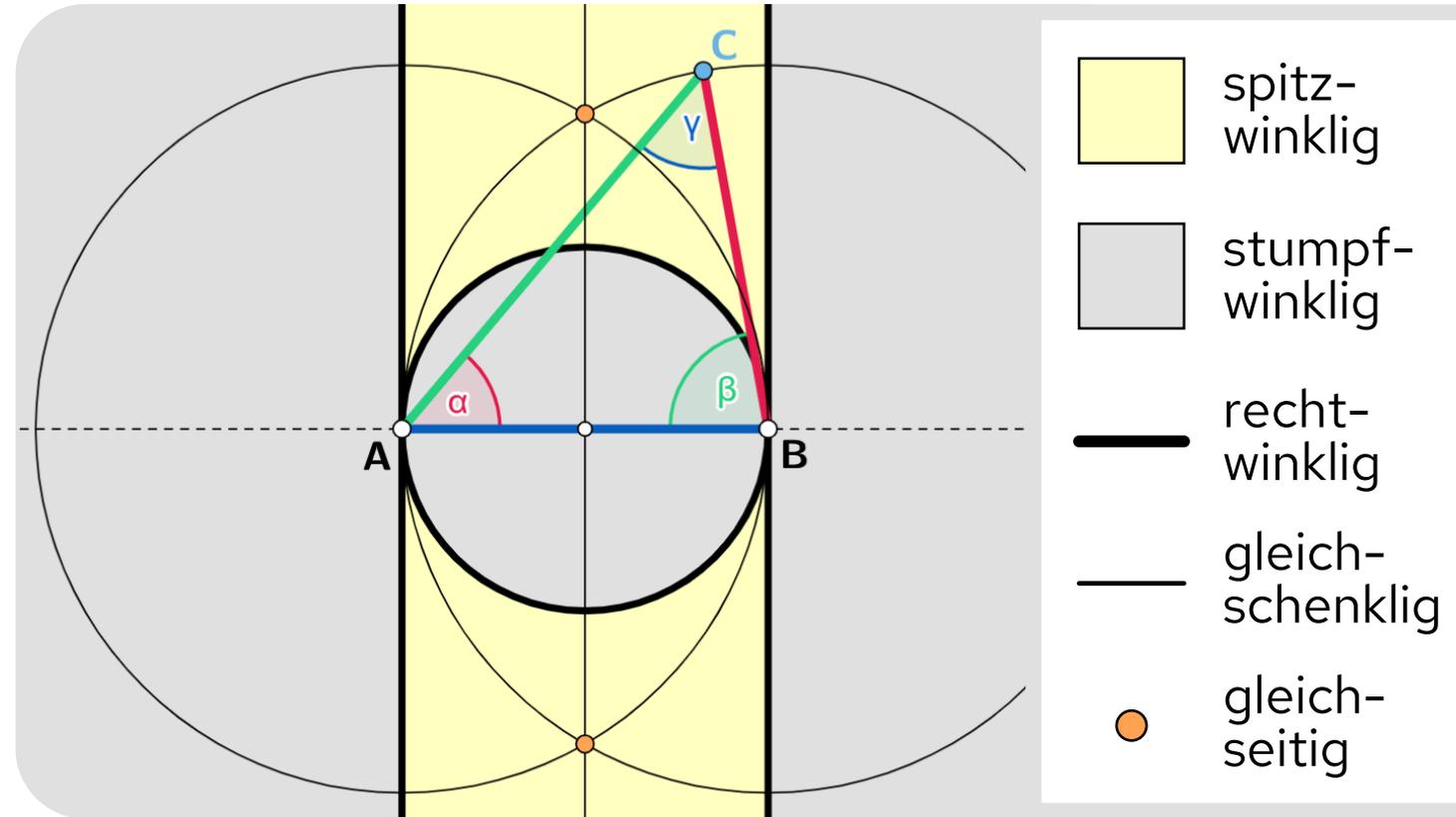
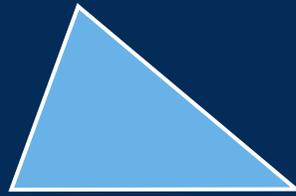
2.4 Prüfung

Objektbegriffe: Dreiecksgrundformen

Dreiecksbegriffe

- rechtwinklig
- spitzwinklig
- stumpfwinklig
- gleichschenkelig
- gleichseitig

als bewegliche
Strukturen aufbauen.



Ziel

Begriffe flexibler verfügbar machen
als mit statischen Prototypen.

„Merkbild“

- Im Merkbild sind Bewegungen kondensiert.
- Wissensabruf benötigt Bewegliches Denken

GeoGebra beim Lernen & Leisten

Beispiel: Dreiecksgrundformen

—
2.1 Lernziel

2.2 Erarbeitung

2.3 Sicherung

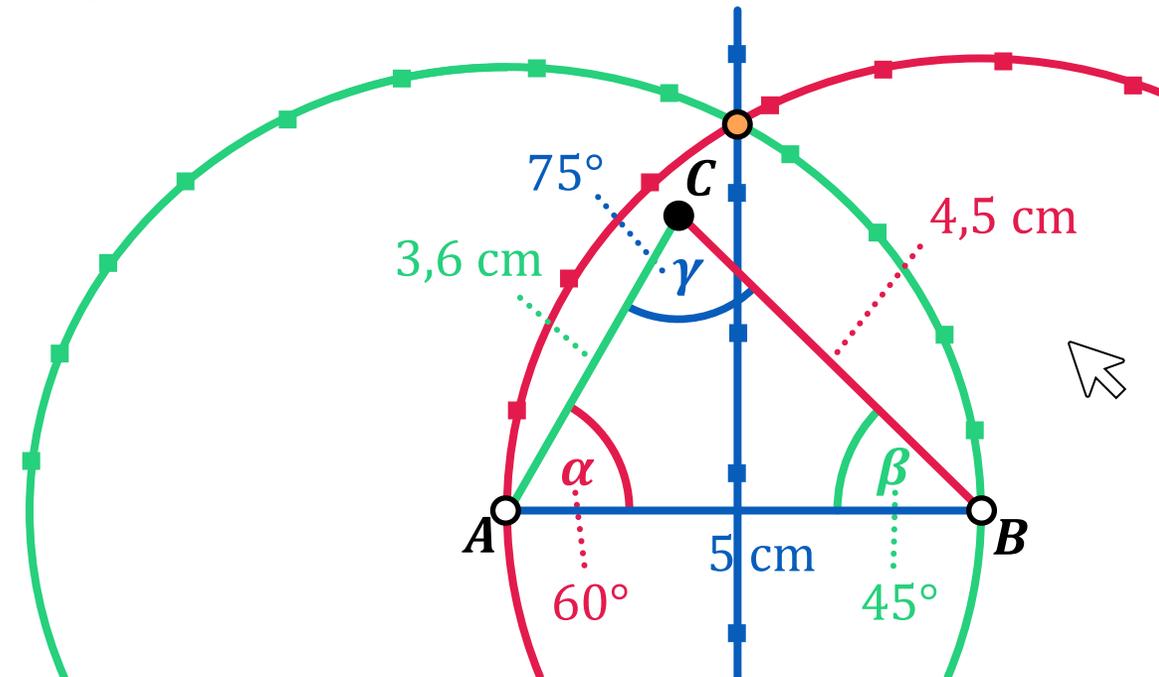
2.4 Prüfung

Gleichschenklige Dreiecke

Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten heißen **gleichschenkl**.

1. Die Punkte A und B sind fest. Bewegt den Punkt C so, dass Dreiecke ABC entstehen, die
 - a) gleichschenkl mit $|AC| = |BC|$ sind,
 - b) gleichschenkl mit $|AC| = |AB|$ sind,
 - c) gleichschenkl mit $|BC| = |AB|$ sind.
2. Begründet, auf welchen Linien C für die Teilaufgaben **1a)** bis **1c)** jeweils bewegt werden muss.
3. Überprüft eure Ergebnisse aus **2**, indem ihr die Linien konstruiert und den Punkt C entlang der jeweiligen Linie bewegt.
4. Beobachtet die Innenwinkel im Dreieck ABC beim Bewegen von C entlang der drei Linien. Notiert, was euch auffällt.

5. Begründet mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe **2**, wo Punkt C liegen muss, damit **alle** Seiten des Dreiecks ABC gleich lang sind.
6. Gebt an, was für die Innenwinkel in **gleichseitigen** Dreiecken gilt und begründet das.



GeoGebra beim Lernen & Leisten

Beispiel: Dreiecksgrundformen

—

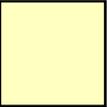
2.1 Lernziel

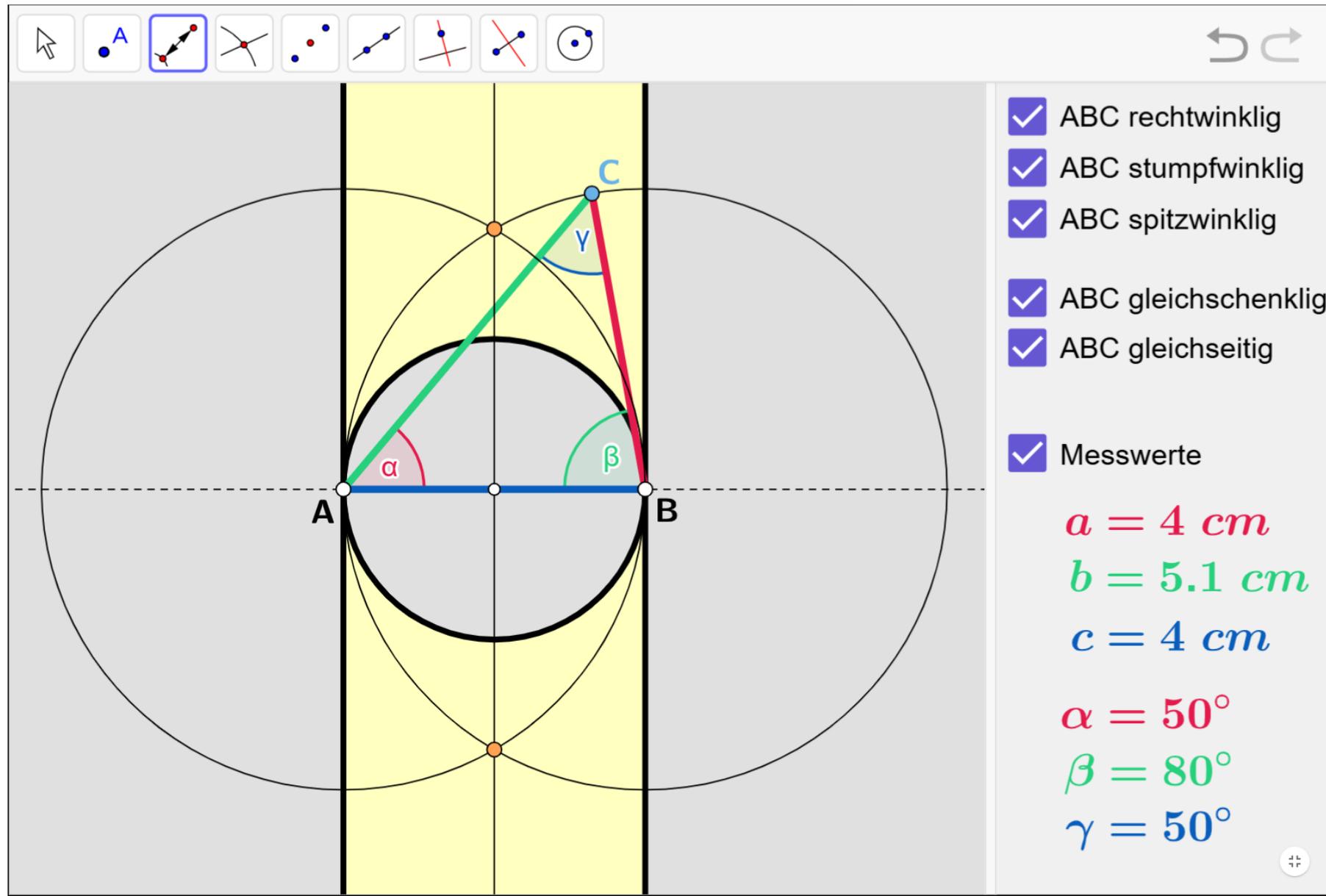
2.2 Erarbeitung

2.3 Sicherung

2.4 Prüfung

Dreiecksgrundformen: „Merkbild“

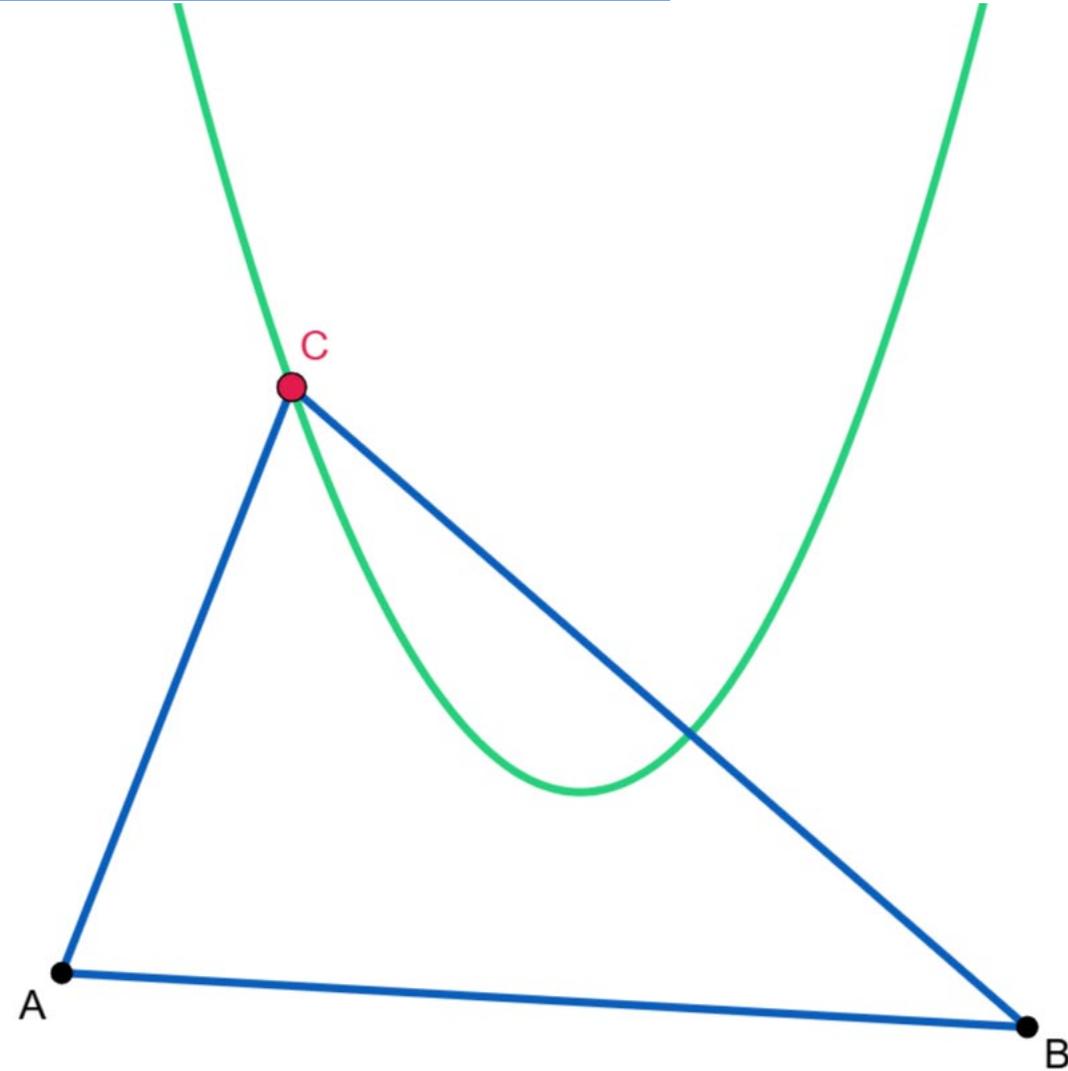
-  spitzwinklig
-  stumpfwinklig
-  rechtwinklig
-  gleichschenkelig
-  gleichseitig



Eckpunkt wandert auf einer Kurve

Aufgabe

- Der Punkt C wird entlang der eingezeichneten Kurve nach rechts bewegt.
- Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck $\triangle ABC$ dabei der Reihe nach an?



GeoGebra beim Lernen & Leisten

Beispiel: Dreiecksgrundformen

—

2.1 Lernziel

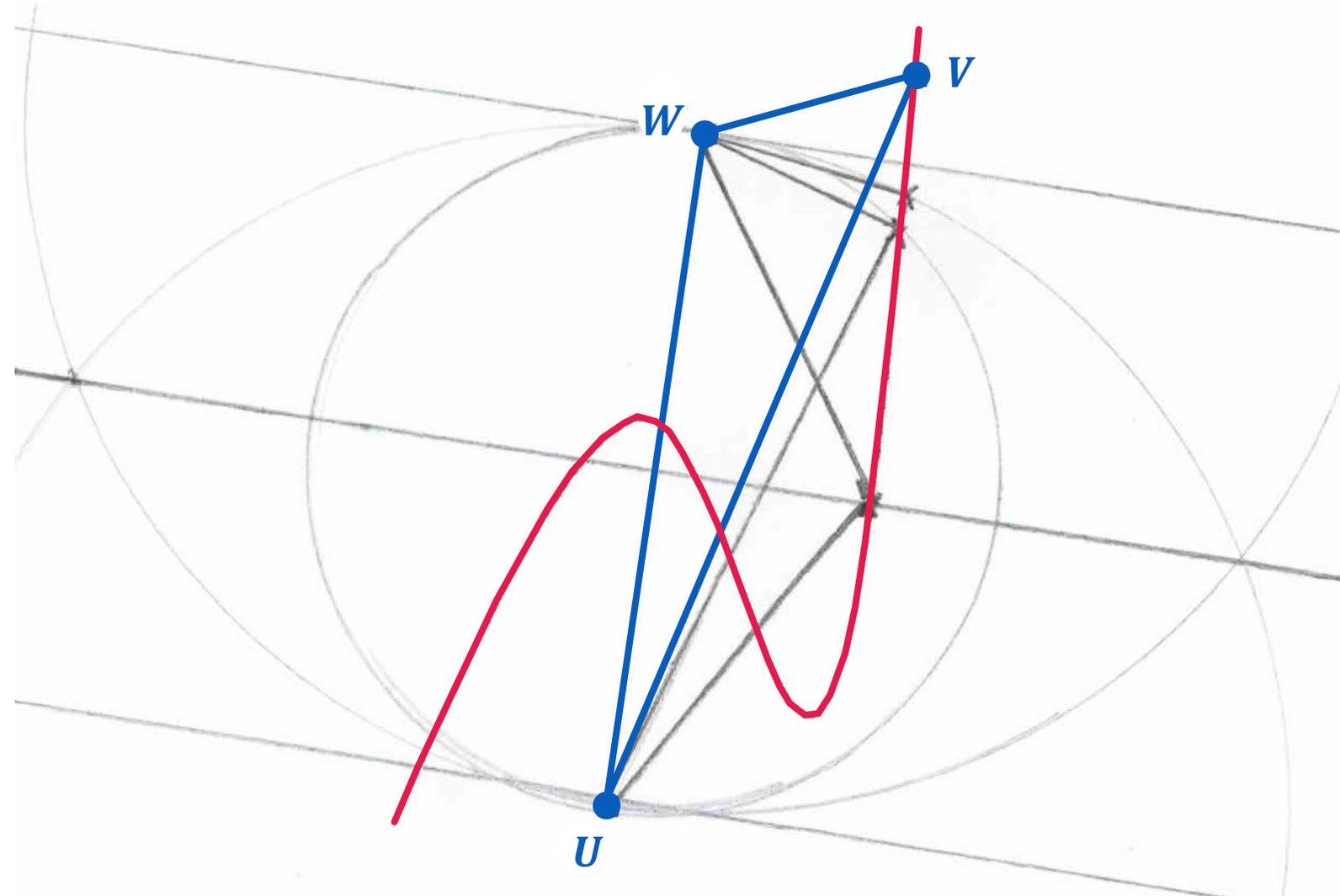
2.2 Erarbeitung

2.3 Sicherung

2.4 Prüfung

Aufgabe

- Der Punkt V wird entlang der eingezeichneten Kurve nach links unten bewegt.
- Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck $\triangle UVW$ dabei der Reihe nach an?



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de

dms.nuw.rptu.de



RPTU



Zeit	Inhalt			
9:00-10:00	Vortrag: GeoGebra einsetzen – Lernumgebung, Werkzeug und Prüfungen C4 260			
10:00-10:30	Kaffeepause ☕ C4 260			
10:30-12:00	Workshop-Phase 1			
	WS 1: Erste Schritte mit GeoGebra C4 260	WS 2: Einstieg in die Differentialrechnung C4 266	WS 3: GeoGebra-Werkzeugeinsatz in Übungen & Prüfungen C3 140	WS 4: Digitale Lernumgebungen mit GeoGebra zusammenstellen C3 148
12:00-12:30	Mittagspause ☕ C4 260			
12:30-14:00	Workshop-Phase II			
	WS 5: GeoGebra-Applets zur Matrizenrechnung C4 266	WS 6: GeoGebra-Simulationen selbst erstellen C3 140	WS 7: GeoGebra als Werkzeug in Stochastik C3 148	WS 8: Vernetzung von Geometrie & funktionalem Zusammenhang C4 260
14:00-14:30	Abschlussplenum C4 260			



Veranstaltungsfeedback

- <https://roth.tel/feedback>



Fragen

(Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.)

- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)
- Was würden Sie sich zukünftig wünschen?
Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)