MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvor-
stellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Modul 5:
Exponentialfunktionen

Jürgen Roth

17.04.2025

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

5 Exponential-funktionen

MaTeGnu

Kapitel 5: Exponentialfunktionen

5.1 Eigenschaften von Exponentialfunktionen

5.2 Gegenüberstellung Exponentialfunktion ↔ lineare Funktion

5.3 Graphen von Exponentialfunktionen

5.4 Lineares und exponentielles Wachstum

5.5 Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

5.6 Anwendungen

5.7 Ableitungen von Umkehrfunktion, Exponential- & Logarithmusfunktion

mategnu.de

RPTU

Lehrplan RLP: Grundkurs

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
1.	Die e-Funktion als spezielle Exponentialfunktion kennen und eine Exponentialfunktion in der Form $f(x) = a \cdot e^{kx}$ schreiben (4.15e)	
2.	Die Funktion $f(x) = \ln x$ als Umkehrung der e-Funktion kennen (4.15e)	
3.	Die Ableitung der e-Funktion kennen und die Herleitung verstehen (4.15e)	Der Einsatz des Computers wird zur Förderung des Verständnisses empfohlen.
4.	Die Ableitung von $f(x) = a \cdot e^{kx}$ kennen und anwenden (4.15e)	Da die Kettenregel im Grundfach nicht vorgesehen ist, sollte die Ableitung von $f(x) = a \cdot e^{kx}$ anschaulich bzw. beispielgebunden einsichtig gemacht werden.
5.	Sachaufgaben zu Wachstums- und Zerfallsprozessen lösen (4.15e)	Auf Idealisierungen bei der Annahme exponentiellen Wachstums bzw. Zerfalls soll besonders eingegangen werden (Modellbildung).

Lehrplan RLP: Leistungskurs

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
4.	Eine Definition der Eulerschen Zahl e kennen (4.15e)	
5.	Die Ableitung der e-Funktion kennen und begründen (4.15e)	
6.	Den Zusammenhang zwischen den Funktionen $\ln(x)$ und $\frac{1}{x}$ kennen und die entsprechenden Beweise verstehen (4.15e)	
7.	Exponentialfunktionen ableiten (4.15e)	Der Zusammenhang zwischen einer allgemeinen Exponentialfunktion und der e- Funktion sollte hier bewusst gemacht und angewendet werden.
8.	Sachaufgaben, die auf Exponentialfunktionen – auch solche mit Parametern – führen, lösen (4.15e)	Auf Idealisierungen bei der Annahme exponentiellen Wachstums bzw. Zerfalls soll im Rahmen der vorgelegten Probleme besonders eingegangen werden (Modellbildung). Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können in diesem Zusammenhang auch lineare und logistische Wachstumsprozesse betrachtet werden.

MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), S. 44f

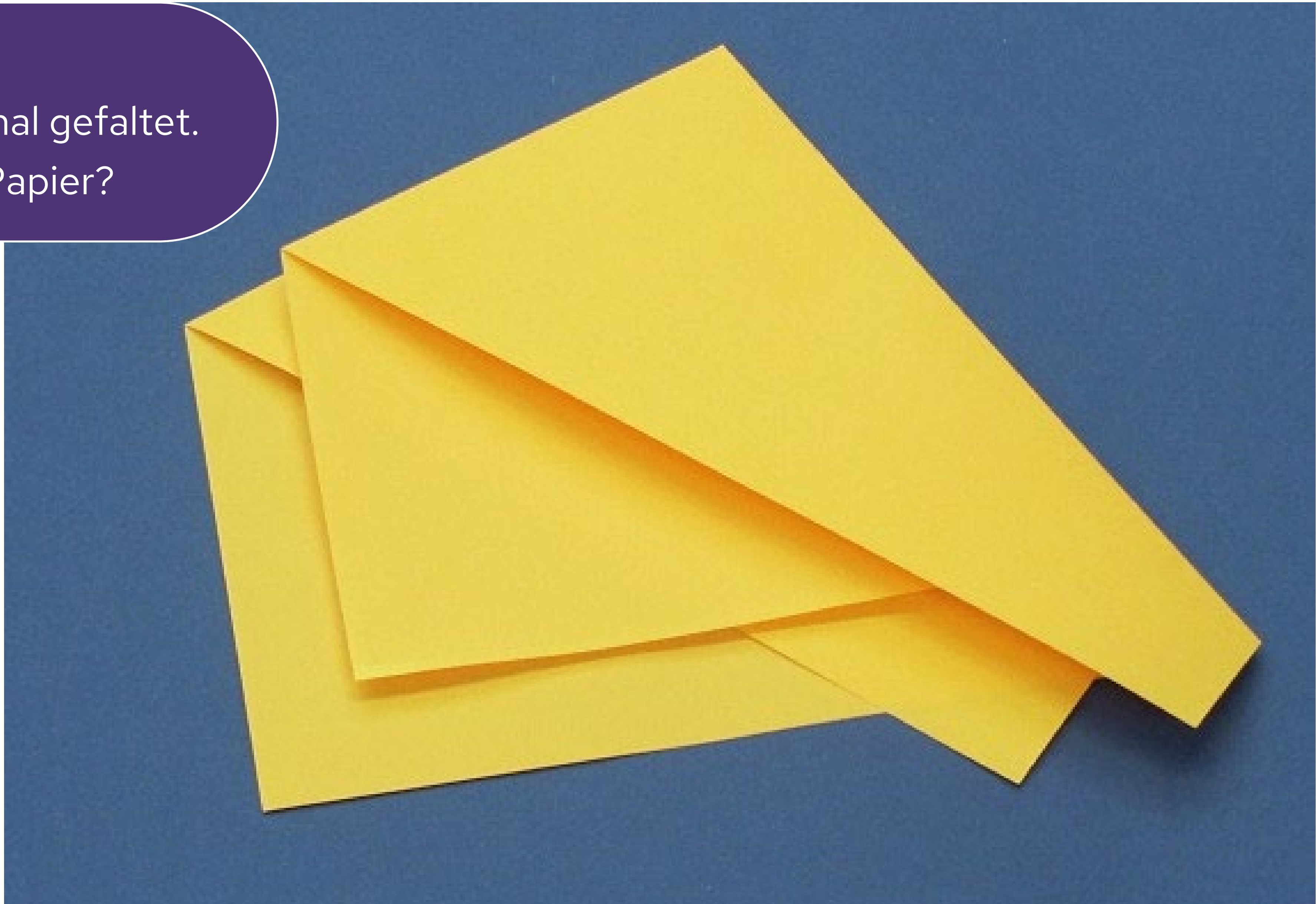
MaTeGnu

Kapitel 5: Exponentialfunktionen

Papier falten

Problem

- Ein DIN A0 Blatt wird 20-mal gefaltet.
- Wie dick ist das gefaltete Papier?



Papier falten

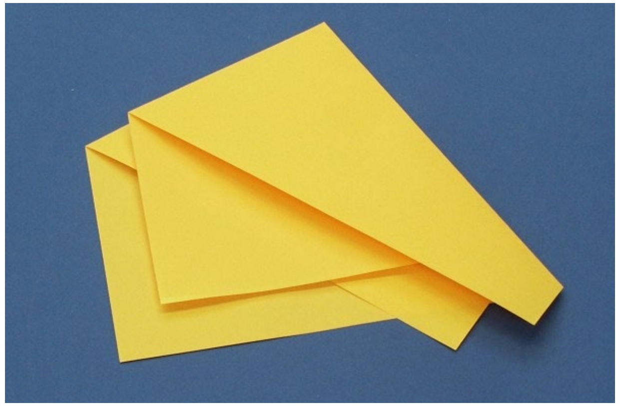
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Problem

- Ein DIN A0 Blatt wird 20-mal gefaltet.
- Wie dick ist das gefaltete Papier?

Messen

- 50 Blatt Papier sind $5{,}25\ \mathrm{mm}$ hoch.
- Dicke eines Blatts: $d_0 = 0{,}105\ \mathrm{mm}$



Falten

- 1-mal falten: $d(1) = d_0 \cdot 2 = d_0 \cdot 2^1$
- 2-mal falten: $d(2) = d(1) \cdot 2 = d_0 \cdot 2 \cdot 2 = d_0 \cdot 2^2$
- 3-mal falten: $d(3) = d(2) \cdot 2 = d_0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = d_0 \cdot 2^3$
- n-mal falten: $d(n) = d_0 \cdot 2^n$

Vgl. Zellteilung!

Dicke des gefalteten Papiers

$$d(20) = d_0 \cdot 2^{20} = 0{,}105\ \mathrm{mm} \cdot 2^{20} = 110.100{,}48\ \mathrm{mm} \approx 110\ \mathrm{m}$$

Erbschaft

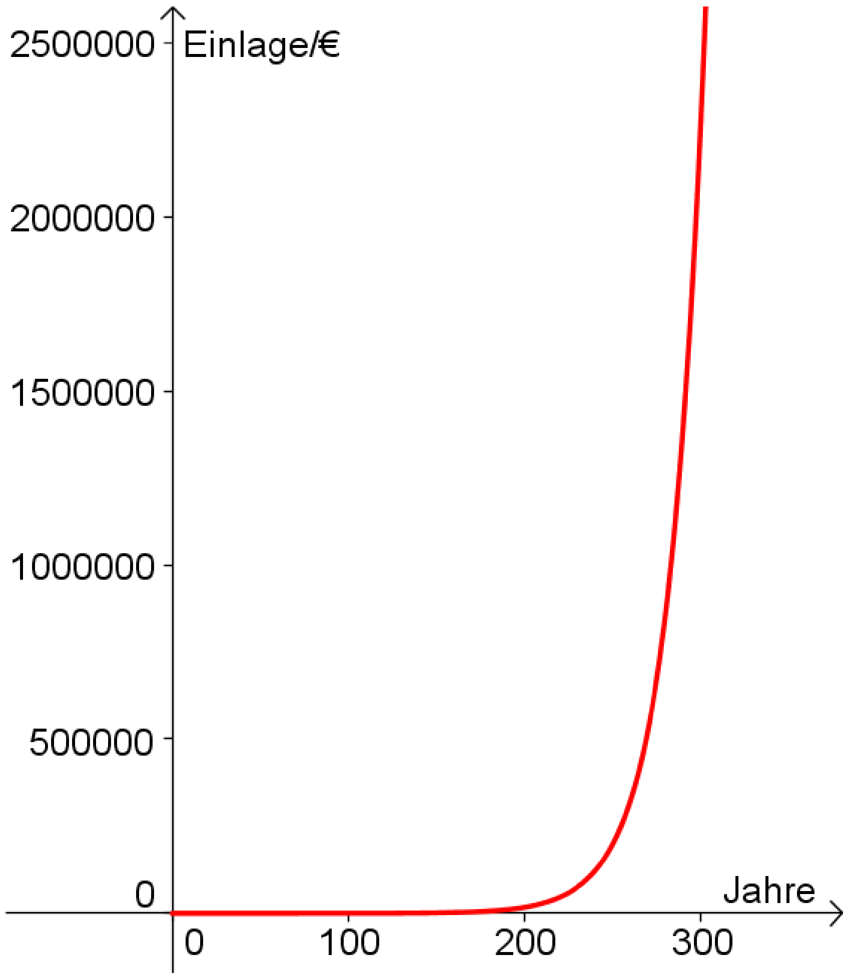
Netter Vorfahre

- Ein Mann legt 1 € festverzinslich zu einem jährlichen Zinssatz von 5 % für 300 Jahre an.
- Wie viel Geld erhält ein Erbe nach 300 Jahren?
- $1\text{ €} \cdot 1{,}05^{300} \approx 2.273.996{,}13\text{ €}$

+50 +50 +50 +50 +50 +50

Jahr	0	50	100	150	200	250	300
Einlage	1,00 €	11,47 €	131,50 €	1.507,98 €	17.292,58 €	198.300,94 €	2.273.996,13 €

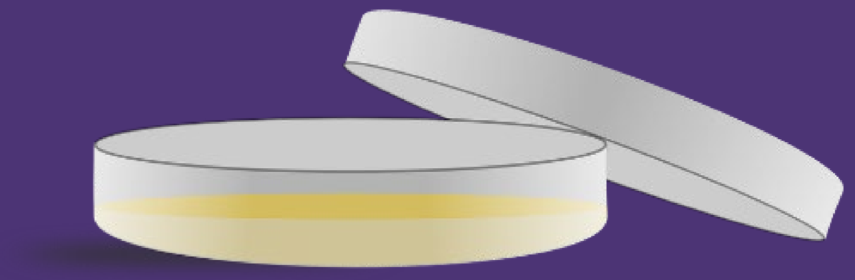
$\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$



Zellsterben

Problem

In einer Schale befinden sich 80.000 Zellen. Es wirkt ein Zellgift, durch das (idealisiert) pro Zeiteinheit 15 % der Zellen sterben.



Gesucht

Anzahl der Zellen in Abhängigkeit von der Zeit

Zeitpunkt $t_0 = 0$:

$N_0 = N(t_0) = N(0) = 80.000$

Zeitpunkt $t_1 = 1$:

$N(t_1) = N_0 \cdot 0{,}85$

Zeitpunkt $t_2 = 2$:

$N(t_2) = N(t_1) \cdot 0{,}85 = (N_0 \cdot 0{,}85) \cdot 0{,}85 = N_0 \cdot 0{,}85^2$

Zeitpunkt $t_3 = 3$:

$N(t_3) = N(t_2) \cdot 0{,}85 = (N_0 \cdot 0{,}85^2) \cdot 0{,}85 = N_0 \cdot 0{,}85^3$

Zeitpunkt $t_n = n$:

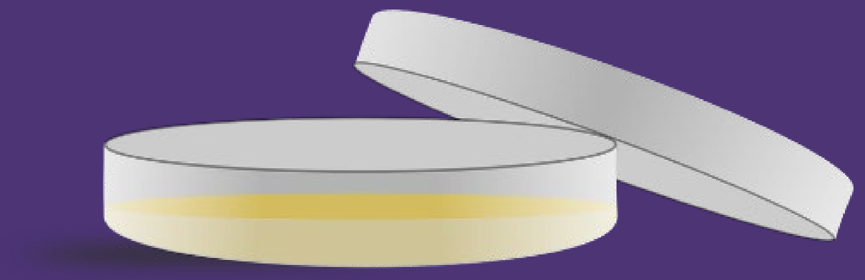
$N(t_n) = N_0 \cdot 0{,}85^n$

Allgemein: $N(t) = N_0 \cdot 0{,}85^t$

Zellsterben

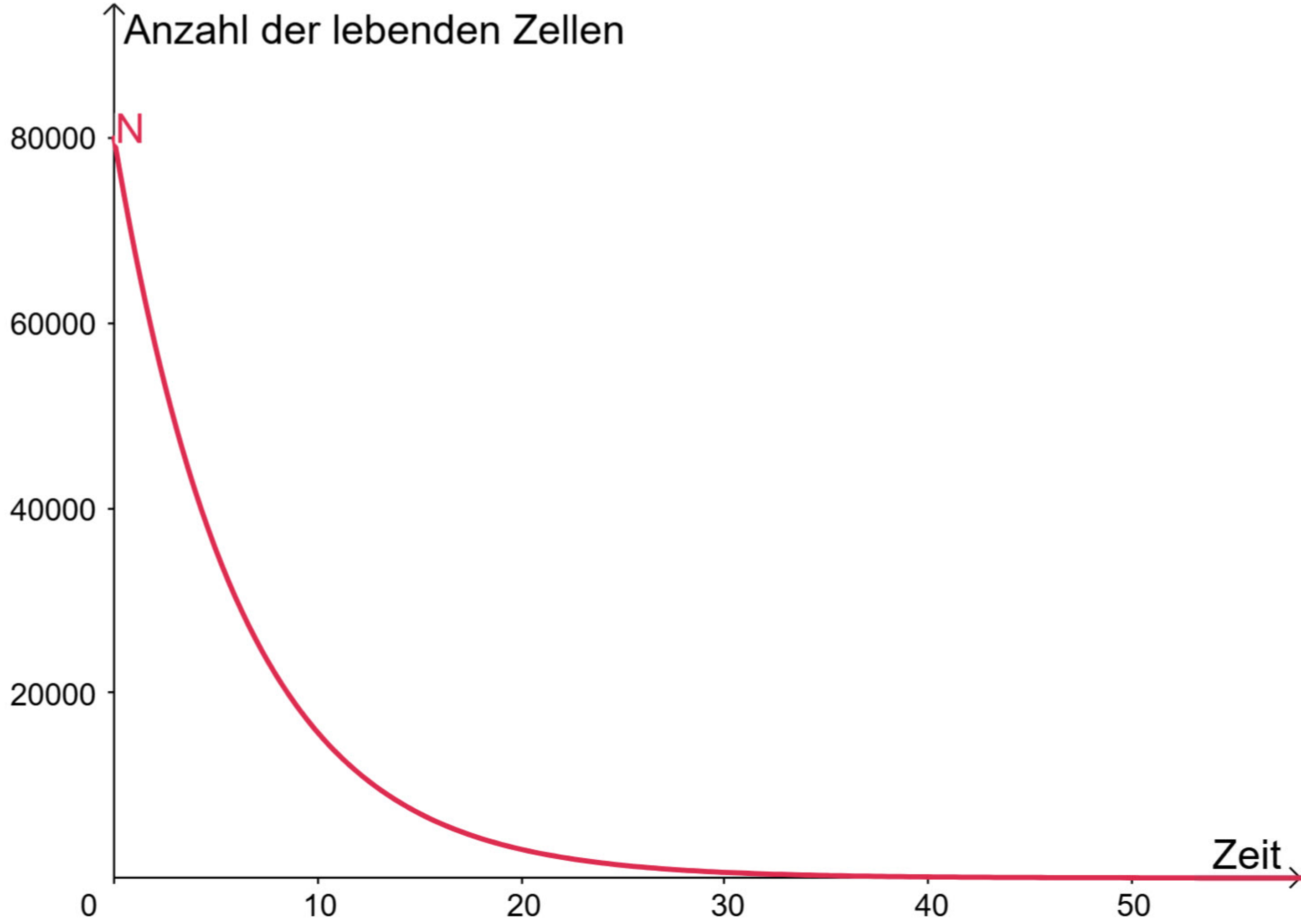
Problem

In einer Schale befinden sich 80.000 Zellen. Es wirkt ein Zellgift, durch das (idealisiert) pro Zeiteinheit 15 % der Zellen sterben.



Gesucht

Anzahl der Zellen in Abhängigkeit von der Zeit



Exponentialfunktionen

Definition

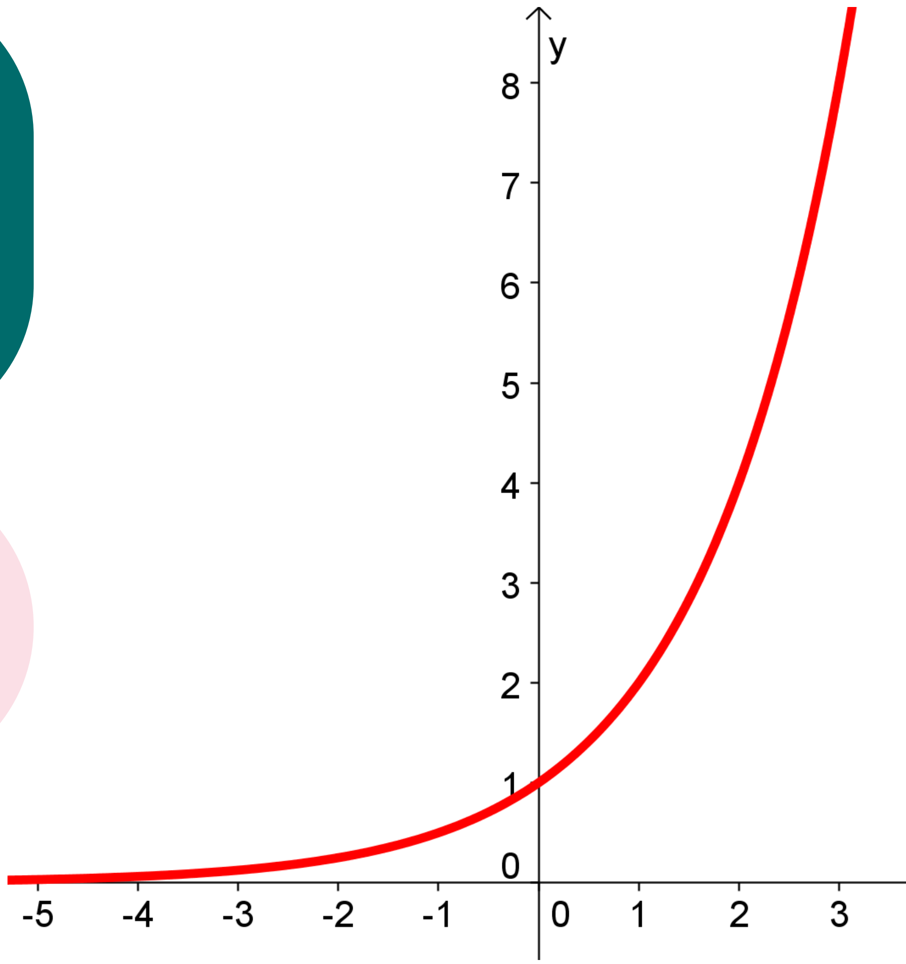
Funktionen der Bauart $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißen **Exponentialfunktionen**.

Häufig werden Exponentialfunktionen zur Basis a auch als $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \exp_a(x) = a^x$ geschrieben.

Satz

Exponentialfunktionen genügen folgender Funktionalgleichung:

Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $\boldsymbol{f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)}$



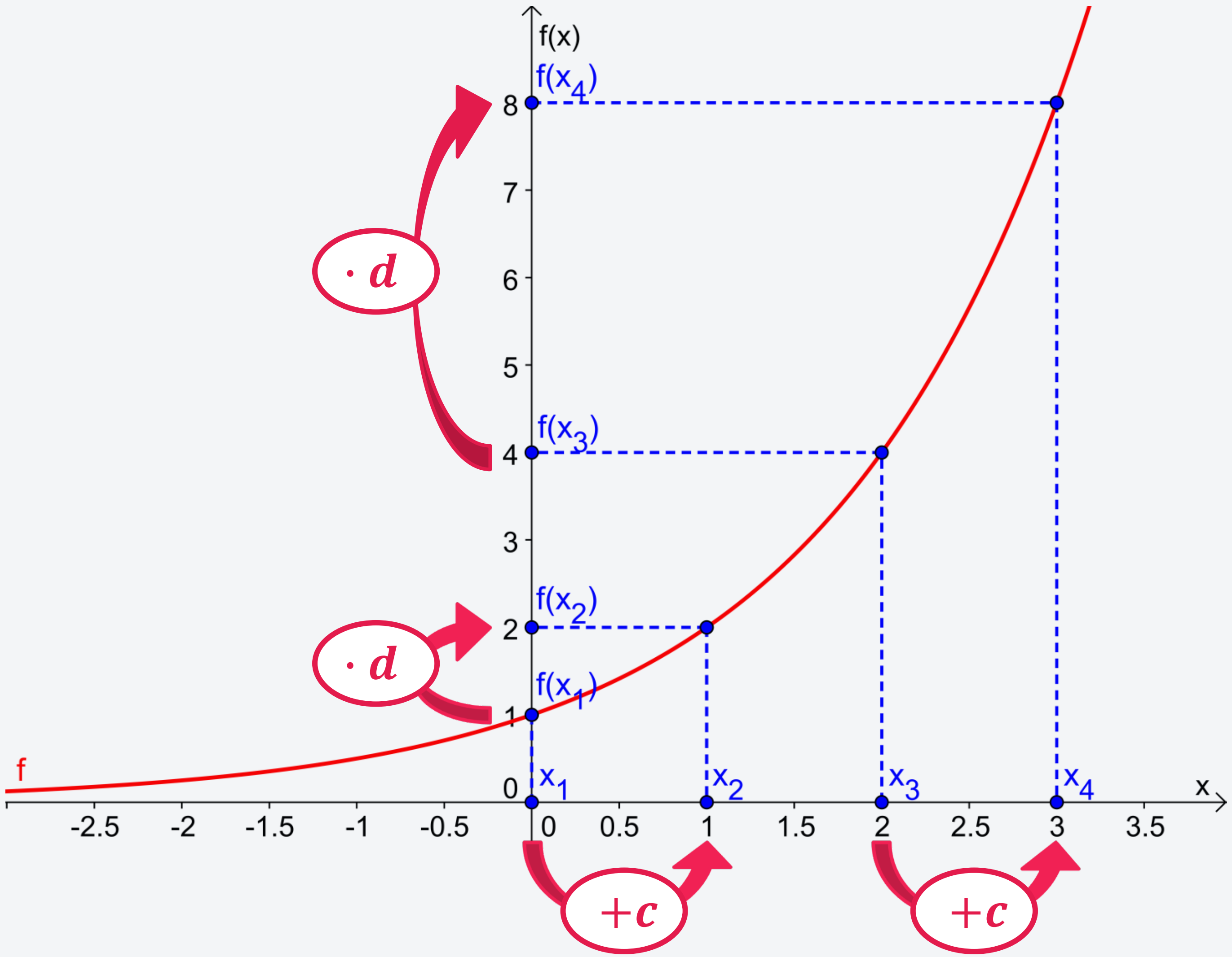
Beweisidee

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} \overset{\text{Potenzgesetze}}{\triangleq} a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

MaTeGnu

Kapitel 5: Exponentialfunktionen

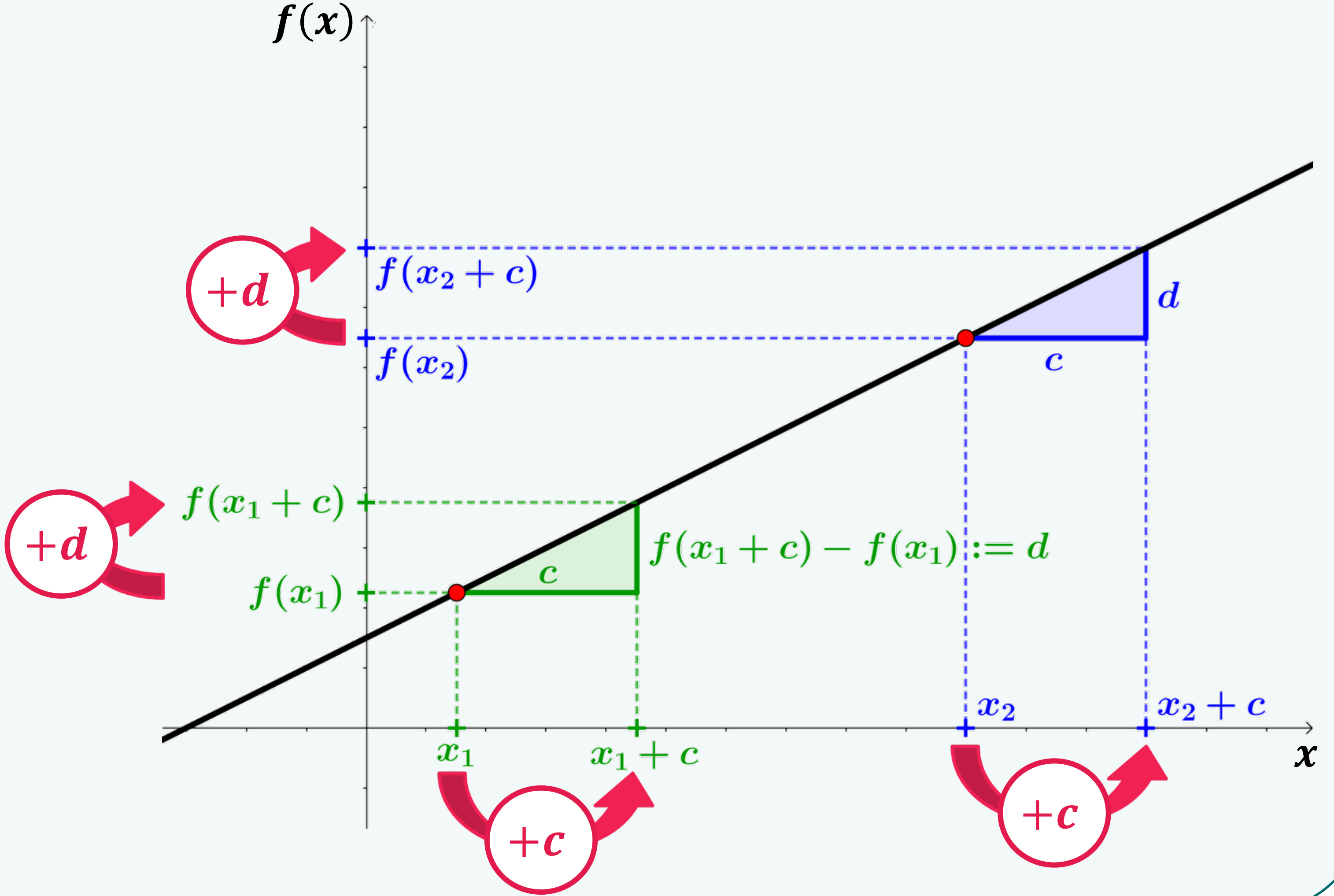
Exponentialfunktionen



$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,$
$x \mapsto f(x) = a^x$

$$
\begin{aligned}
f(x+c) &= a^{x+c} \\
&= \underbrace{a^x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{a^c}_{:=d} \\
&= f(x) \cdot d
\end{aligned}
$$

Lineare Funktionen



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

$x \mapsto f(x) = a \cdot x + b$

$f(x + c)$

$= a \cdot (x + c) + b$

$= \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$

$= f(x) + d$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Exponentialfunktionen & lineare Funktionen
Charakteristische Eigenschaften

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Funktionsgleichung Exponentialfunktion

Die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion hat die Form $f(x) = a^x$.

Funktionsgleichung lineare Funktion

Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion hat die Form $f(x) = a \cdot x + b$.

Funktionalgleichung Exponentialfunktion

Bei Exponentialfunktionen gehört zu gleichen additiven Zuwächsen im Argument immer der gleiche Wachstumsfaktor.

Wird also bei einer Exponentialfunktion das Argument um den gleichen Wert $(+c)$ vergrößert, dann nimmt der Funktionswert um den gleichen Faktor $(\cdot\, d)$ zu.

$$\begin{aligned}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x+c) &= a^{x+c}\\ &= \underbrace{a^x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{a^c}_{:=d} = f(x)\cdot d\end{aligned}$$

Funktionalgleichung lineare Funktion

Bei linearen Funktionen gehört zu gleichen additiven Zuwächsen im Argument immer der gleiche Wachstumssummand.

Wird also bei einer linearen Funktion das Argument um den gleichen Wert $(+c)$ vergrößert, dann nimmt der Funktionswert um den gleichen Summanden $(+d)$ zu.

$$\begin{aligned}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x+c) &= a\cdot(x+c)+b\\ &= \underbrace{a\cdot x+b}_{=f(x)} + \underbrace{a\cdot c}_{:=d} = f(x)+d\end{aligned}$$

Änderungsverhalten
Exponentialfunktion ↔ proportionale Funktion

Betrachten Sie die

Exponentialfunktion
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$

mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

und die

proportionale Funktion
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$

mit $a \in \mathbb{R}$

unter dem Kovariationsaspekt.

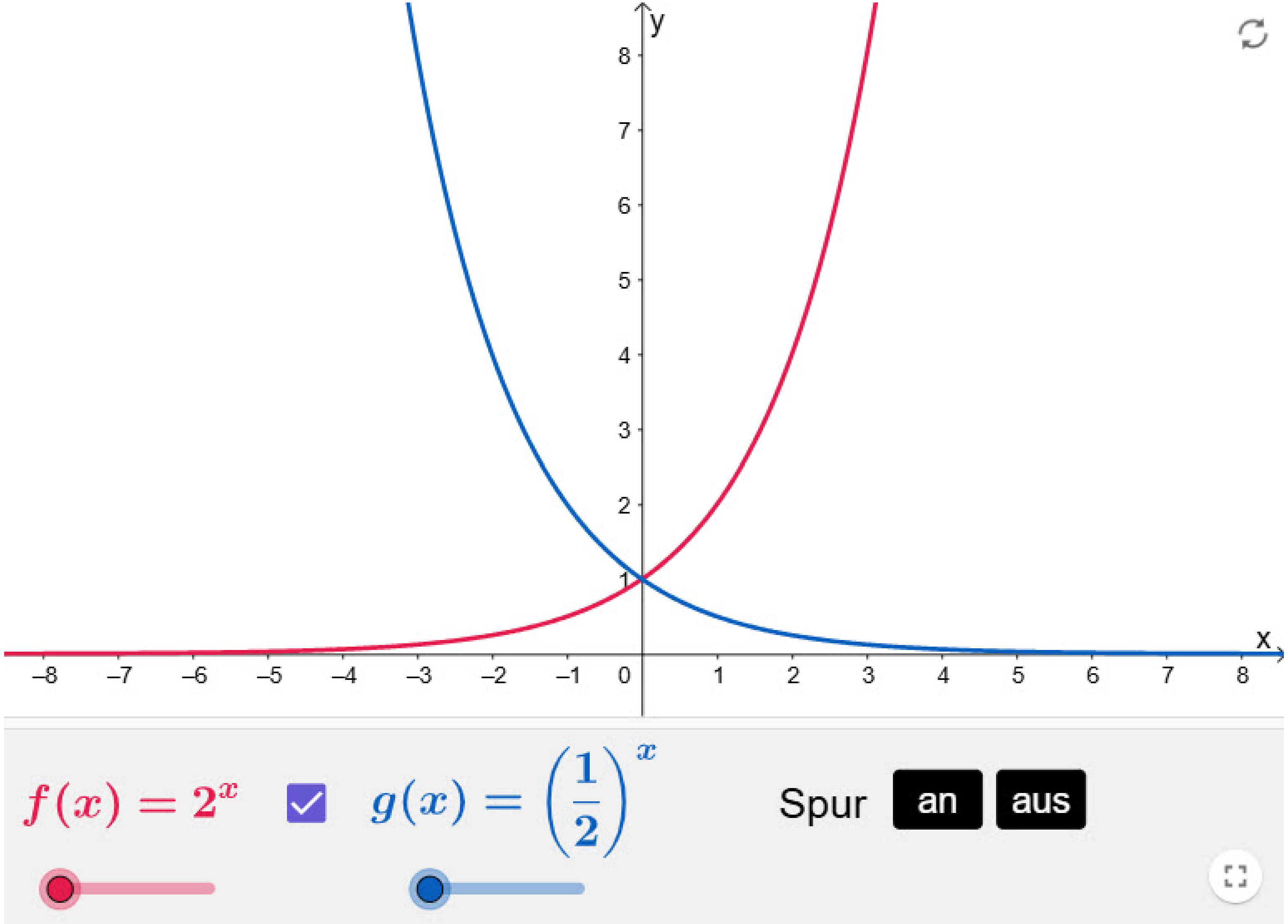
Aufgabe
Wie ändert sich jeweils der Funktionswert, wenn man

- x um 1 vergrößert,
- x um 2 verkleinert,
- x verdoppelt,
- x halbiert,
- x mit 3 multipliziert,
- x durch 3 dividiert,
- x quadriert?

MaTeGnu

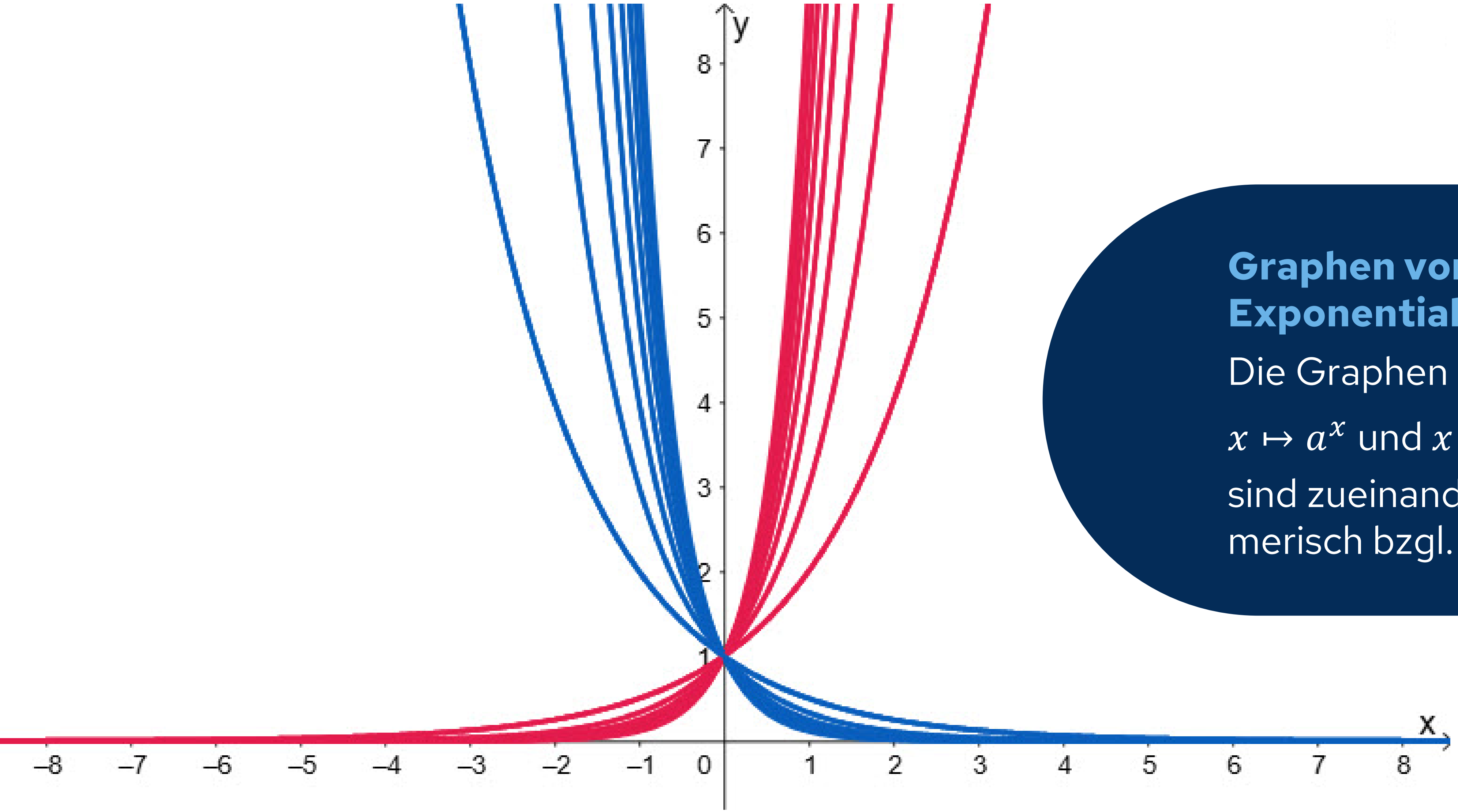
Kapitel 5: Exponentialfunktionen

Graphen von Exponentialfunktionen



 https://www.geogebra.org/m/X5DyaUSA

Graphen von Exponentialfunktionen



Graphen von Exponentialfunktionen

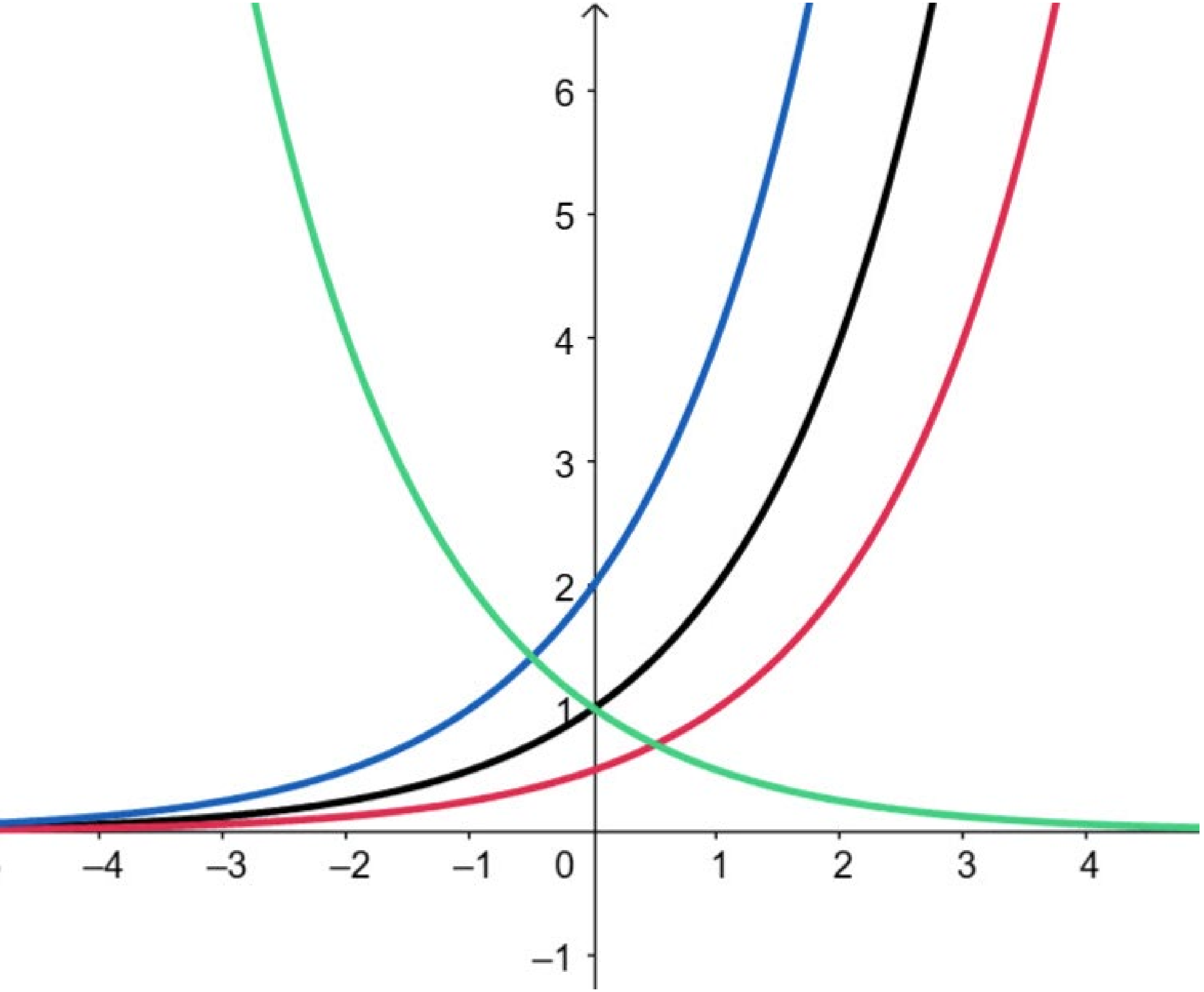
Die Graphen der Funktionen

$x \mapsto a^x$ und $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

sind zueinander achsensymmerisch bzgl. der y-Achse.

 https://www.geogebra.org/m/X5DyaUSA

Präsenzaufgabe:
Parameter und Funktionsgraphen



Es gilt: $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$

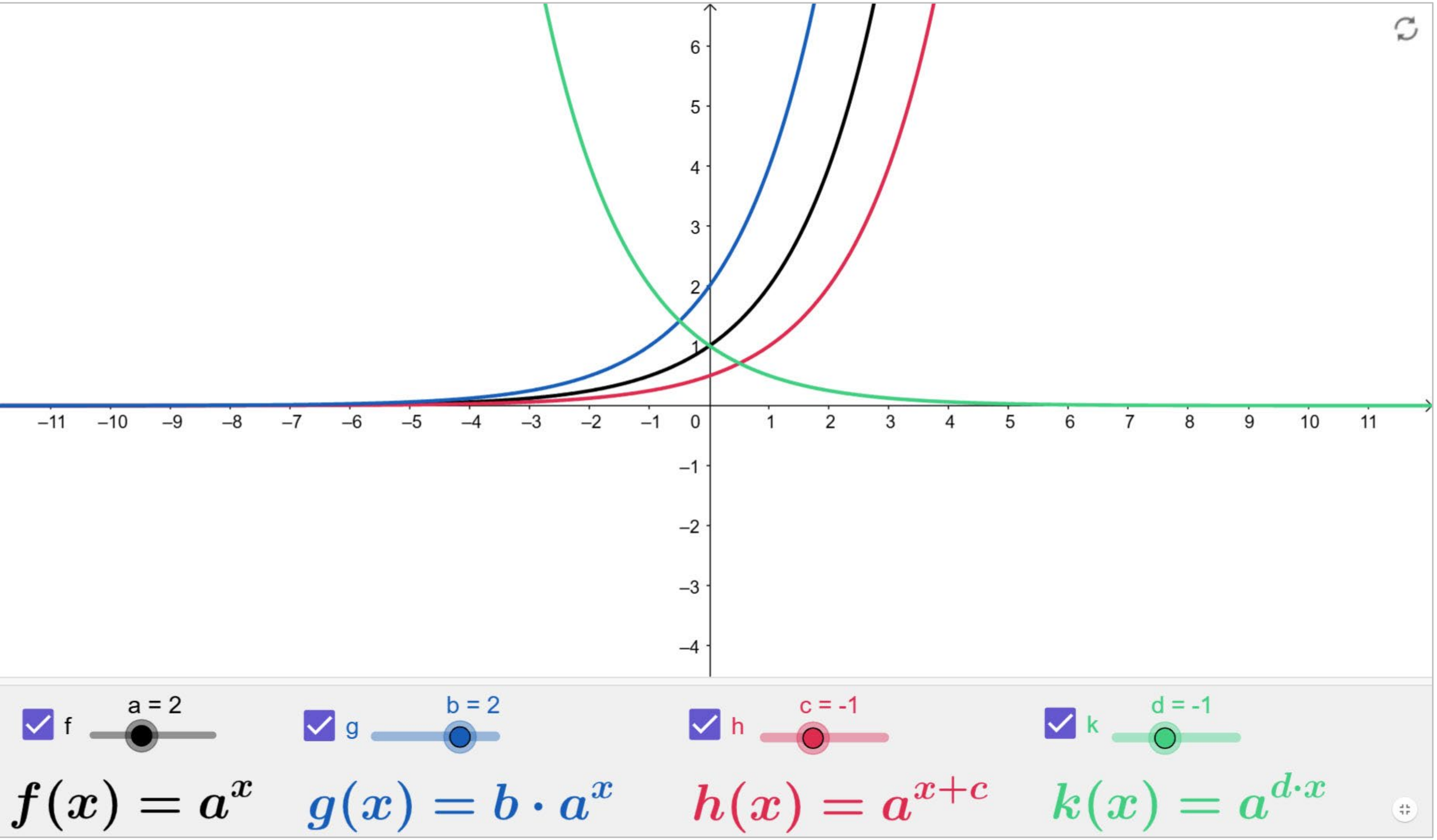
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$

$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$

Aufgabe

- Wie wirkt sich eine Veränderung der Parameter a, b, c und d auf die Graphen der jeweiligen Funktionen aus?
- Vergleichen Sie die Graphen der vier Funktionen für verschiedene Werte von b, c und d. Gibt es Werte, so dass jeweils zwei Funktionsgraphen übereinstimmen?

Präsenzübung



Es gilt: $a \in \mathbb{R}^+$
und $b, c, d \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$

$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$

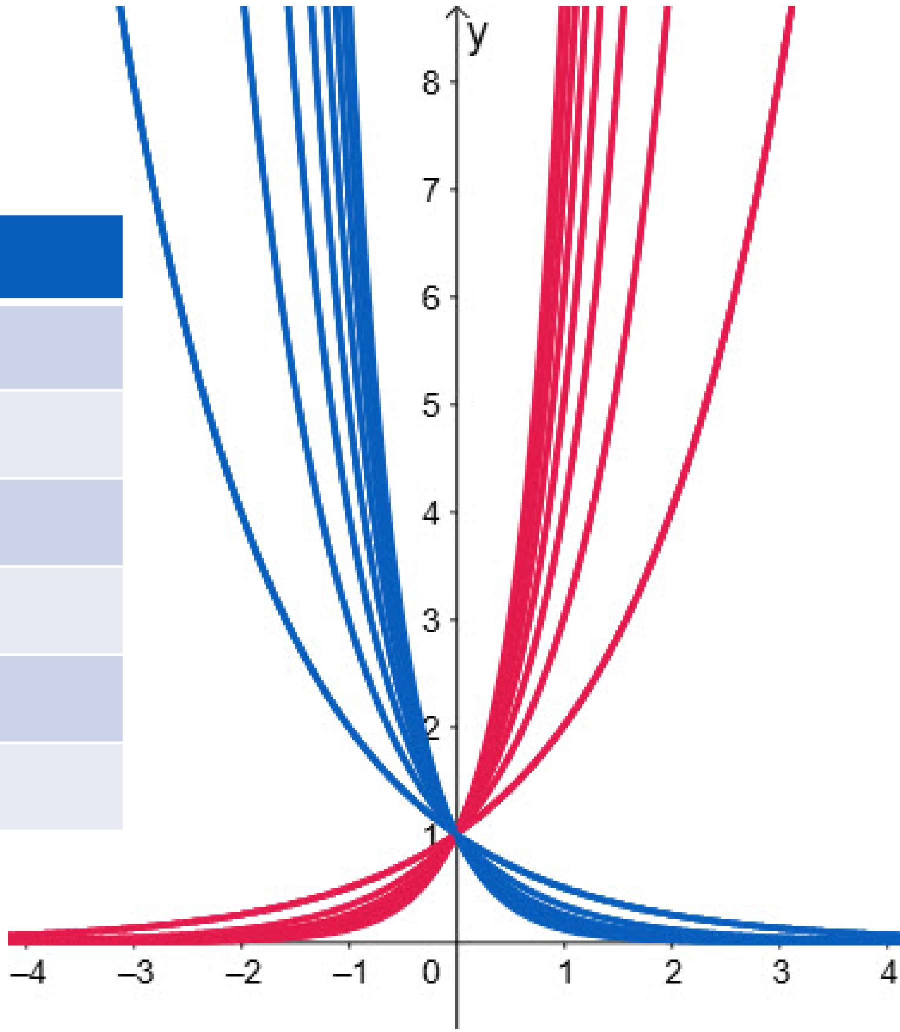
Aufgabe

- Wie wirkt sich eine Veränderung der Parameter a, b, c und d auf die Graphen der jeweiligen Funktionen aus?
- Vergleichen Sie die Graphen der vier Funktionen für verschiedene Werte von b, c und d. Gibt es Werte, so dass jeweils zwei Funktionsgraphen übereinstimmen?

Eigenschaften von $x \mapsto a^x$

Aufgabe: Ergänzen Sie die Tabelle.

Eigenschaft	$a > 1$	$0 < a < 1$
Monotonie		
Definitionsmenge $\mathbb{D}$		
Wertemenge $\mathbb{W}$		
Asymptote		
Punkt des Graphen		
Exponentielle(s)		



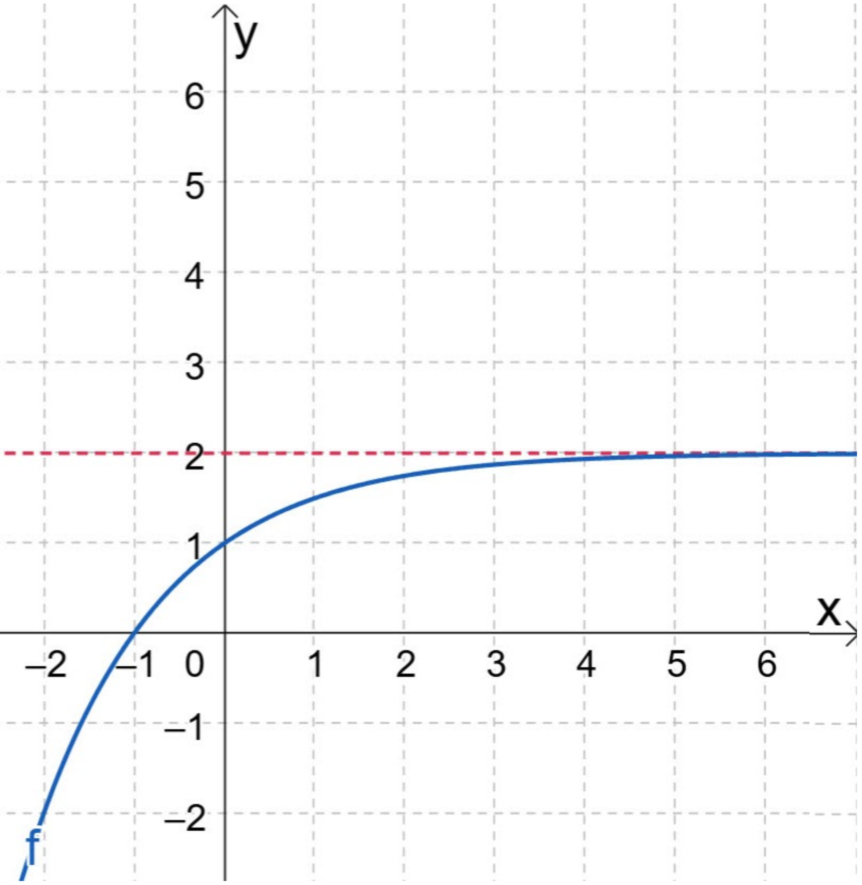
Präsenzaufgabe: Prozentuale Zunahme/Abnahme ↔ Wachstumsfaktor

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe: Ergänzen Sie die Tabelle.

prozentuale Zunahme / Abnahme pro Einheit	Wachstumsfaktor	Anfangsbestand	Funktionsterm
– 8 %	0,92	6	$6 \cdot 0{,}92^x$
	1,4	40	
120 %			$6{,}3 \cdot S^x$
			$32 \cdot 0{,}58^x$

Präsenzaufgabe:
Parameter und Funktionsgraphen

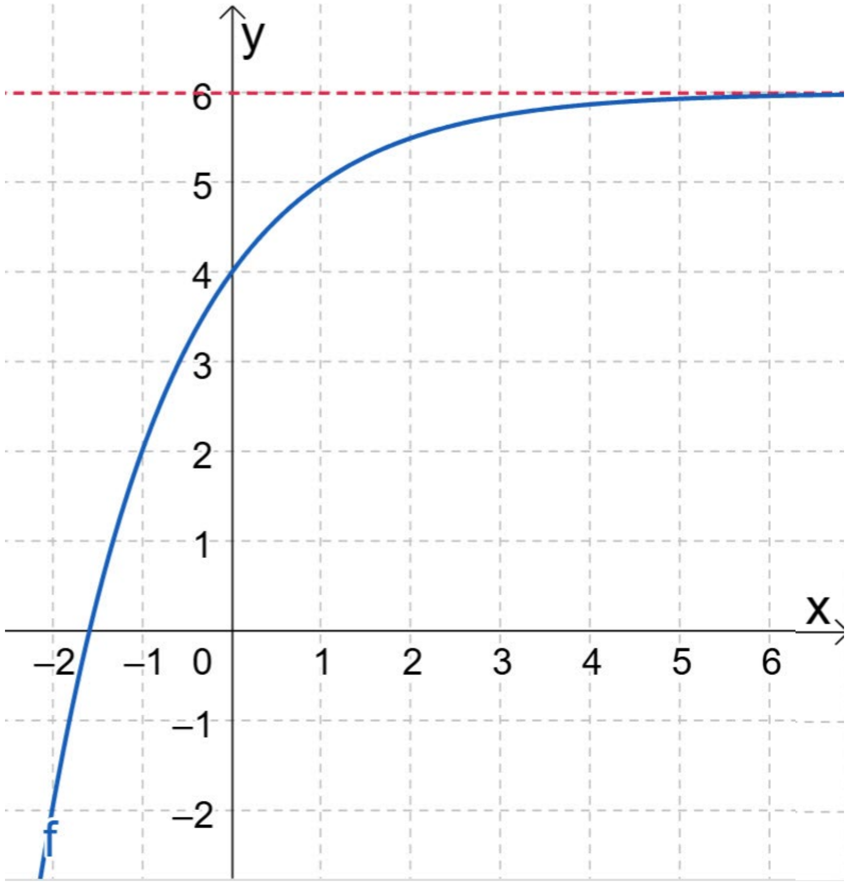


Aufgabe

Die abgebildeten Graphen gehören zu Funktionen folgenden Typs:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{b\cdot x+c} + d$$

Bestimmen Sie jeweils die Parameter a, b, c und d.



Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 5: Exponentialfunktionen

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

Lineares und exponentielles Wachstum

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Aufgabe: Baggersee

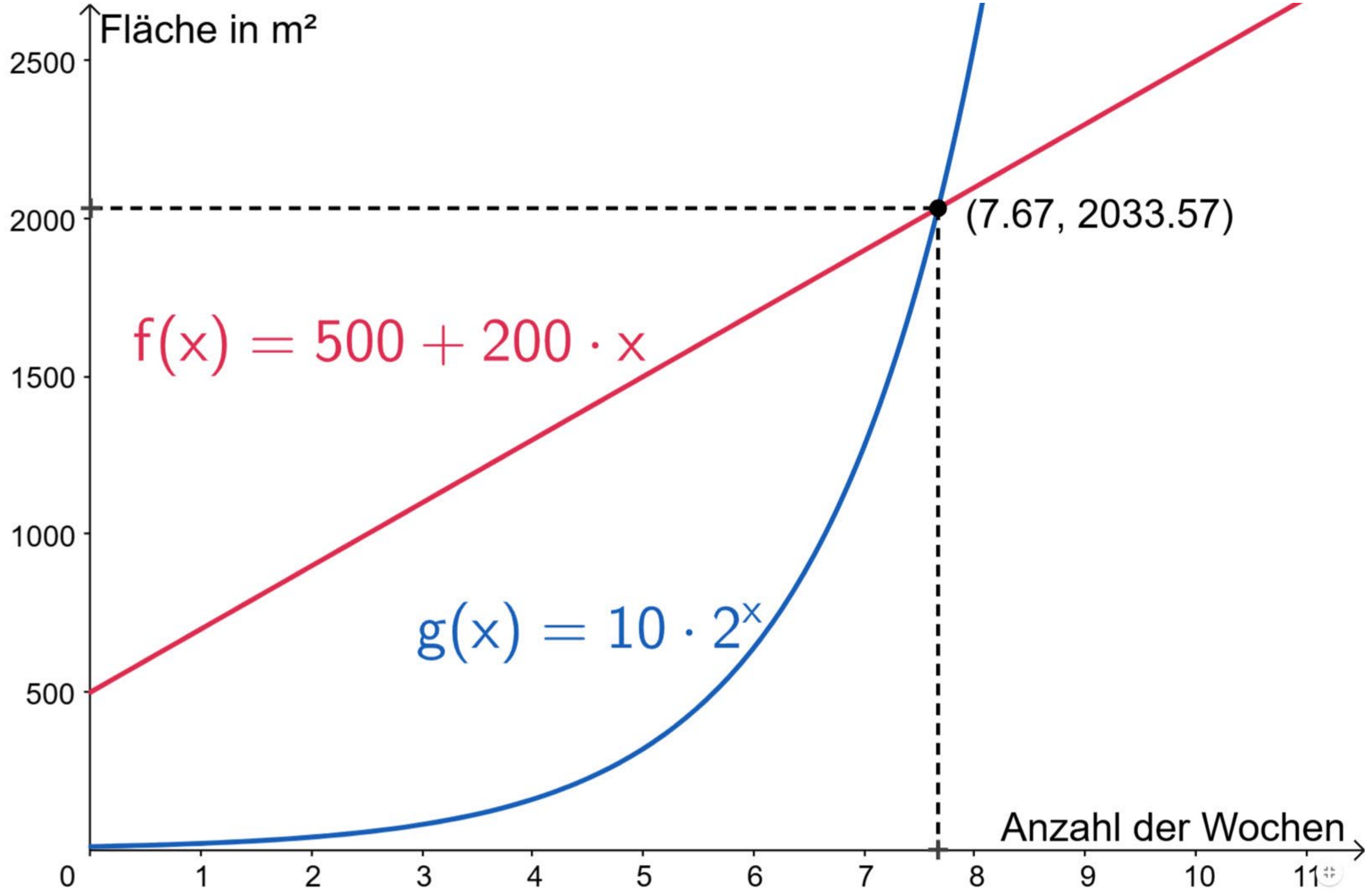
- Ein See mit einer Oberfläche von zunächst 500 m² wird in einer Flussniederung ausgebaggert. Die Oberfläche vergrößert sich dadurch in jeder Woche um 200 m².
- Der See wird von einer Seerosenart besiedelt, die zu Beginn der Baggerarbeiten 10 m² der Oberfläche des Sees bedecken. Die Seerosen vermehren sich derart, dass sich die von ihnen bedeckte Fläche in jeder Woche verdoppelt.
- Nach wie vielen Wochen ist der ganze See mit Seerosen bedeckt?

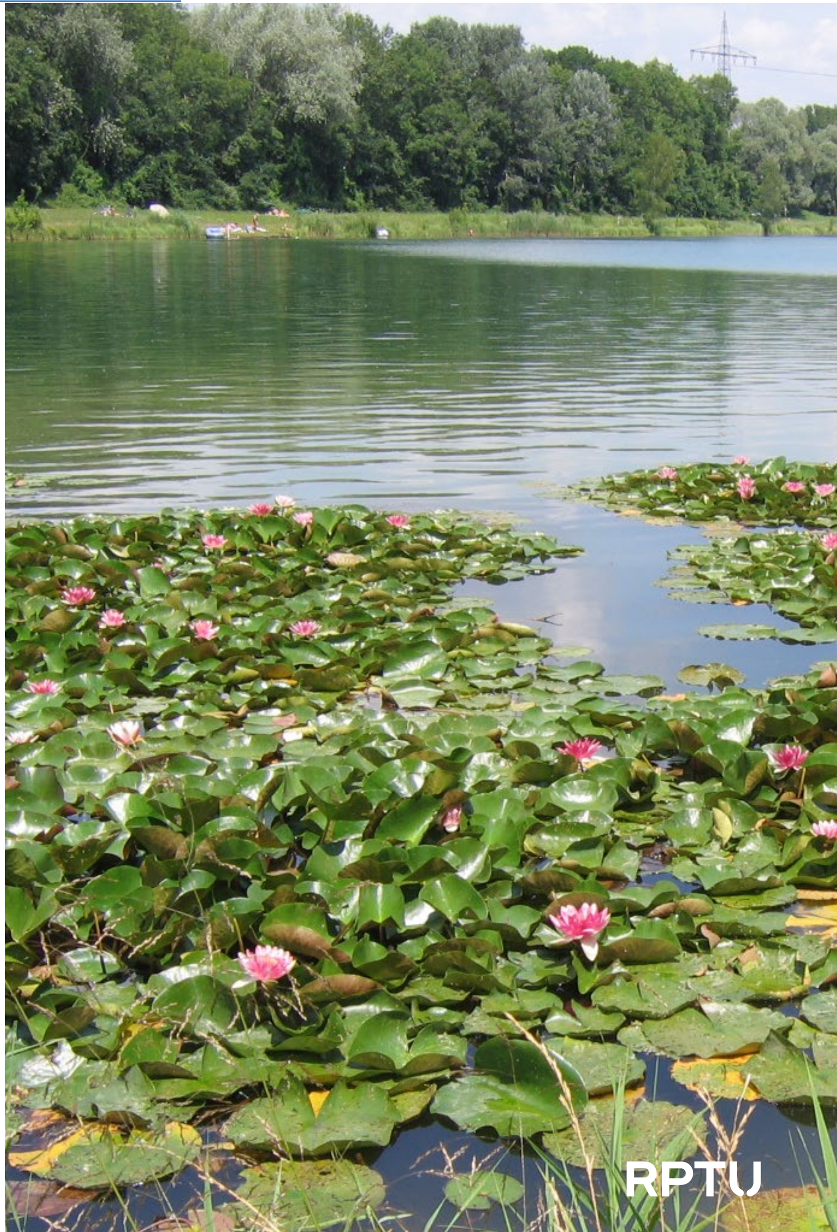
Lineares und exponentielles Wachstum

Anzahl der Wochen	Seefläche in m²
0	500
1	700
2	900
3	1100
4	1300
5	1500
6	1700
7	1900
8	2100
x	$500 + 200 \cdot x$

Anzahl der Wochen	Seerosenfläche in m²
0	10
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320
6	640
7	1280
8	2560
x	$10 \cdot 2^x$

Lineares und exponentielles Wachstum





 https://www.geogebra.org/m/rdQTuA7s

Lineares und exponentielles Wachstum

Lineares Wachstum

- $f(x) = m \cdot x + t$
- $f(x+c) = m \cdot (x+c) + t$
  $= m \cdot x + t + m \cdot c$
  $= f(x) + m \cdot c$
  $= f(x) + d$
- $\forall_{x \in \mathbb{D}_f}\ f(x+c) - f(x) = const.$
- Bei gleichem Zuwachs im Argument ist der absolute Zuwachs konstant.
- Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumssummand.

Exponentielles Wachstum

- $g(x) = \ b \cdot a^x$
- $g(x+c) = b \cdot a^{x+c}$
  $= b \cdot a^x \cdot a^c$
  $= g(x) \cdot a^c$
  $= g(x) \cdot d$
- $\forall_{x \in \mathbb{D}_g}\ \frac{g(x+c)}{g(x)} = const.$
- Bei gleichem Zuwachs im Argument ist der relative Zuwachs konstant.
- Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumsfaktor.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 5: Exponentialfunktionen

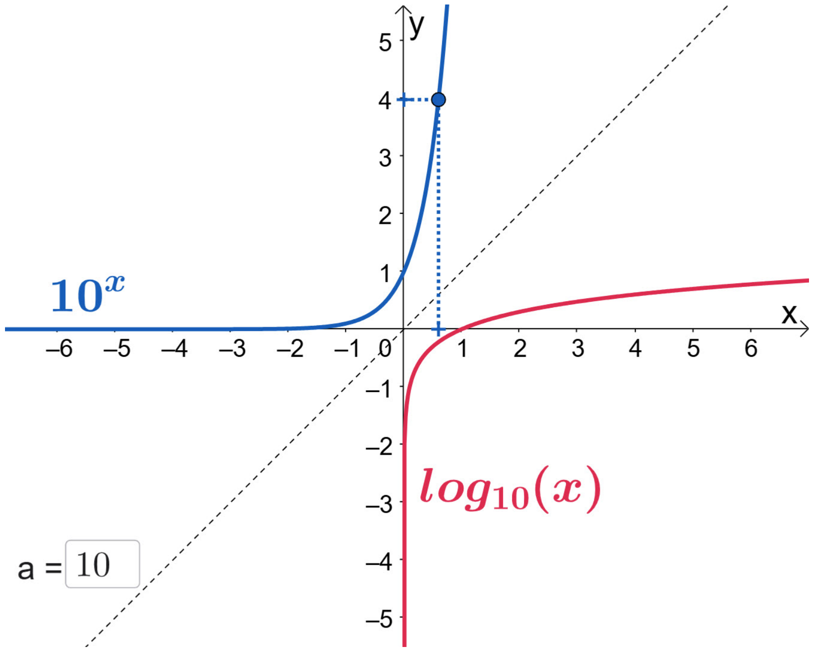
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

Logarithmusfunktion

Exponentialfunktionen
also Funktionen der Bauart

$$\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$

mit $a > 0$ und $a \neq 1$ sind bijektiv und damit umkehrbar.



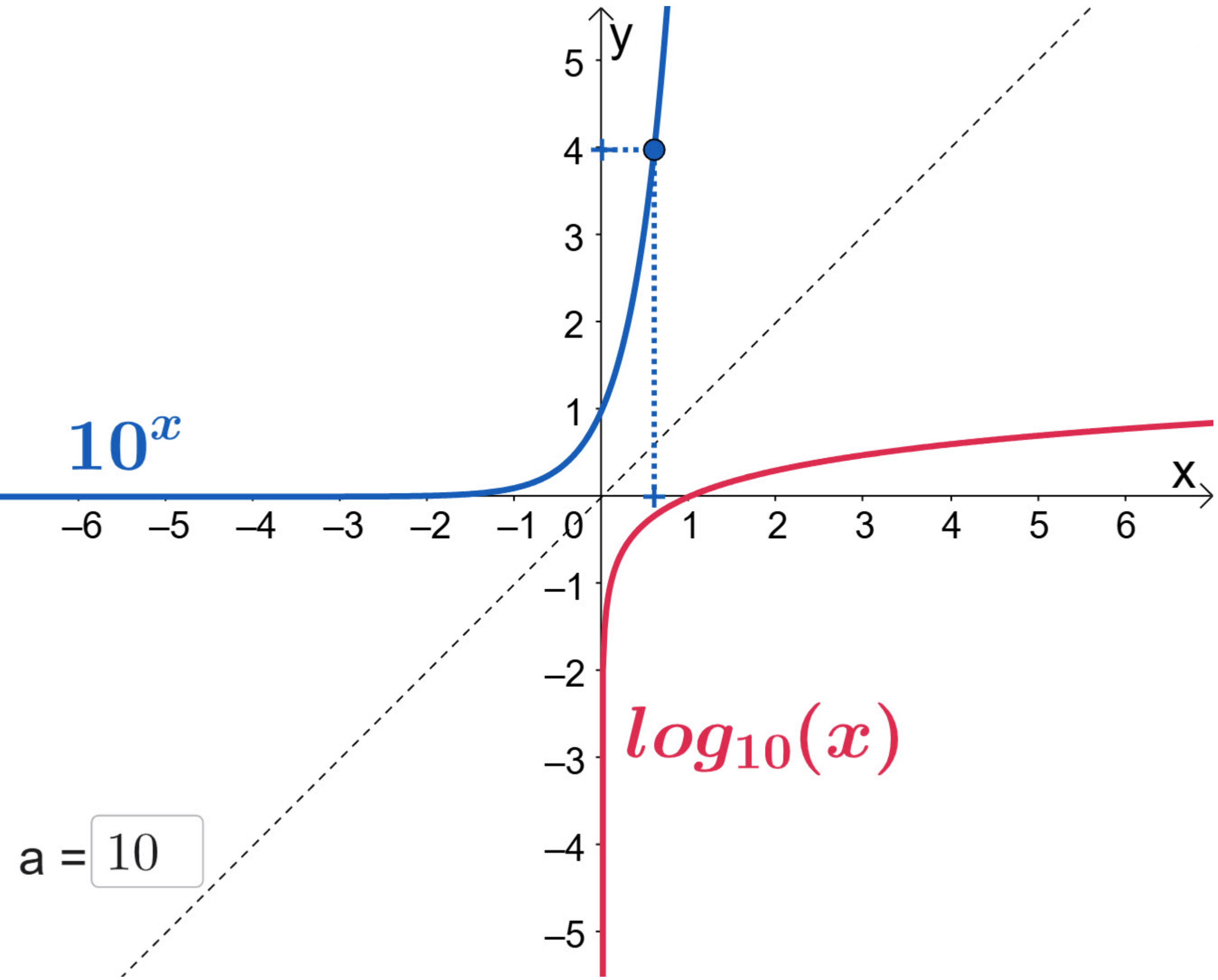
Umkehrfunktion

- Bei der Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion wird für eine Potenz $p = a^r$ danach gefragt, mit welcher Zahl r man a potenzieren muss, um p zu erhalten.
- Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion
$$\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$
ist die **Logarithmusfunktion**
$$\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$$
zur Basis a.
- Da für eine Funktionen f und ihre Umkehrfunktionen f^{-1} gilt
$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$
folgt:
$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{und} \quad \log_a(a^x) = x$$

https://www.geogebra.org/m/JueAn8Xq

C. Weber (2013). Grundvorstellungen zum Logarithmus – Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In Allmendinger et al. (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 79-98), Wiesbaden: Springer

Eigenschaften der Logarithmusfunktion



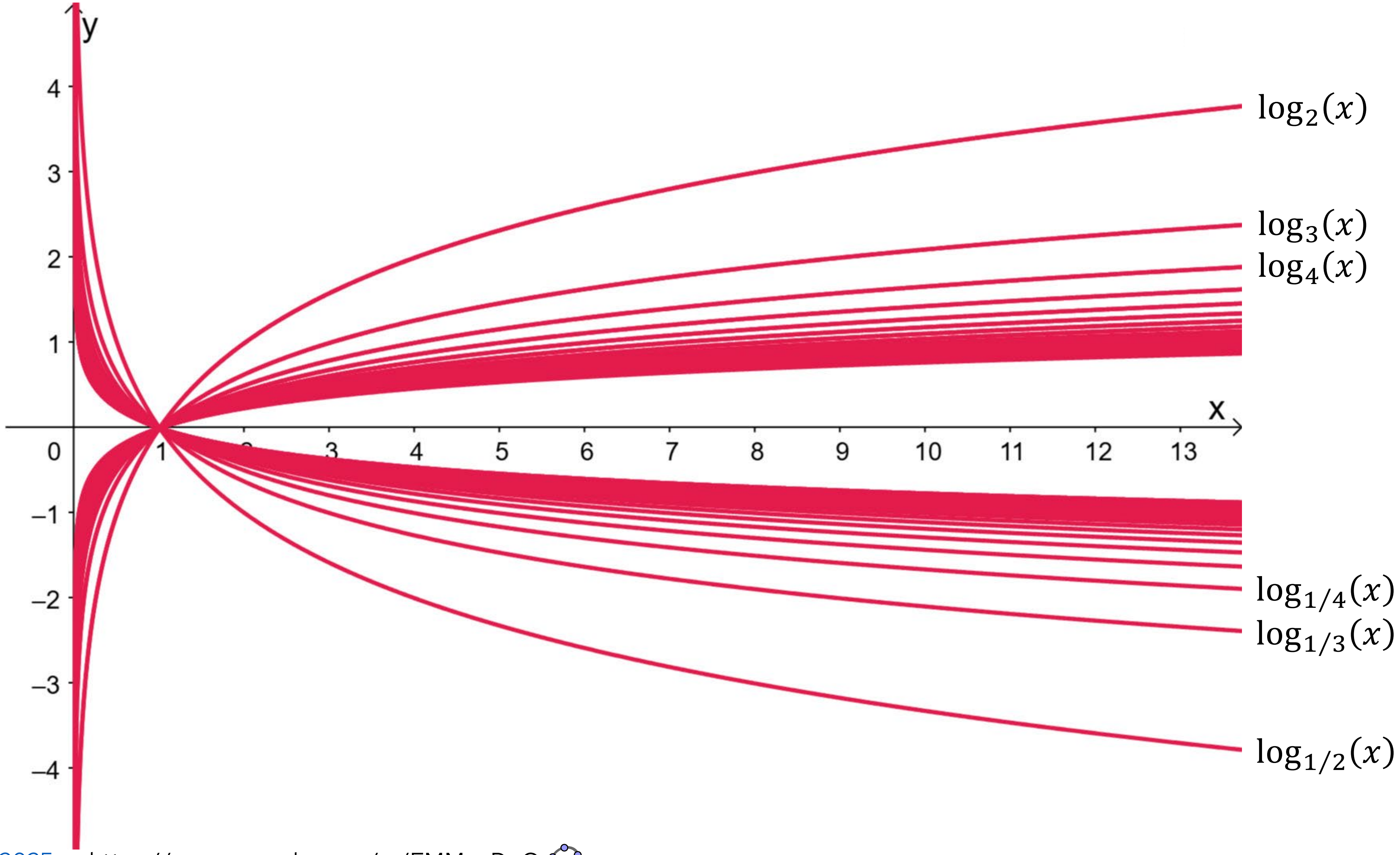
Exponentialfunktion $\exp_a$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
- $\exp_a(0) = a^0 = 1$
- Der Punkt $(0|1)$ ist Element des Graphen jeder Exponentialfunktion $\exp_a$.
- Die x-Achse ist waagerechte Asymptote des Graphen von $\exp_a$.

Logarithmusfunktion $\log_a$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- $\log_a(1) = \log_a(a^0) = 0$
- Der Punkt $(1|0)$ ist Element des Graphen jeder Logarithmusfunktion $\log_a$.
- Die y-Achse ist senkrechte Asymptote des Graphen von $\log_a$.

Eigenschaften der Logarithmusfunktion



 https://www.geogebra.org/m/FMMagDpG

Rechenregeln für Logarithmen

Satz

Für $a, r, s \in \mathbb{R}^+$ gilt:

- $\log_a(r \cdot s) = \log_a(r) + \log_a(s)$
- $\log_a(r : s) = \log_a(r) - \log_a(s)$
- $\log_a(r^s) = s \cdot \log_a(r)$

Beweis

Unter Verwendung von $a^{\log_a(x)} = x$ und $\log_a(a^x) = x$ ergibt sich:

- $\log_a(r \cdot s) = \log_a\left(a^{\log_a(r)} \cdot a^{\log_a(s)}\right)$
  $= \log_a\left(a^{\log_a(r)+\log_a(s)}\right)$
  $= \log_a(r) + \log_a(s)$
- $\log_a(r : s) = \log_a\left(a^{\log_a(r)} : a^{\log_a(s)}\right)$
  $= \log_a\left(a^{\log_a(r)-\log_a(s)}\right)$
  $= \log_a(r) - \log_a(s)$
- $\log_a(r^s) = \log_a\left(\left(a^{\log_a(r)}\right)^s\right)$
  $= \log_a\left(a^{s \cdot \log_a(r)}\right) = s \cdot \log_a(r)$ ■

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Satz
Die Logarithmusfunktion

$$\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$$

zur Basis a mit $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ ist

- streng monoton steigend für $a > 1$,
- streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

Beweis

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \wedge x_1 < x_2$ $(*)$
- $\log_a(x_2) - \log_a(x_1)$

$$= \log_a \underbrace{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}_{\substack{>1 \\ \text{wegen } (*)}} \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 1 \\ < 0 & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$$

■

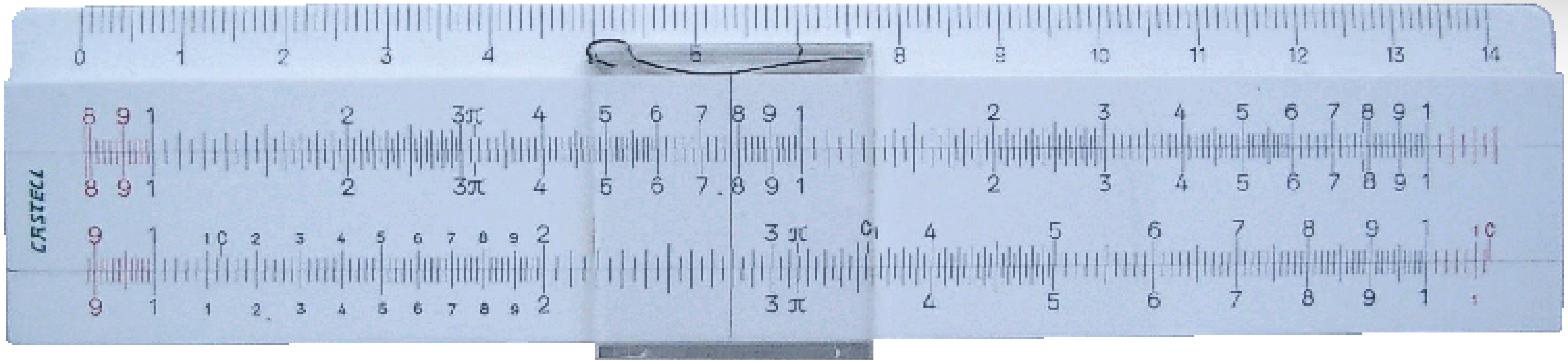
Rechenschieber
Der Vorläufer des Taschenrechners!

Rechenschieber

Die Regeln $\log_a(r \cdot s) = \log_a(r) + \log_a(s)$

und $\log_a(r : s) = \log_a(r) - \log_a(s)$

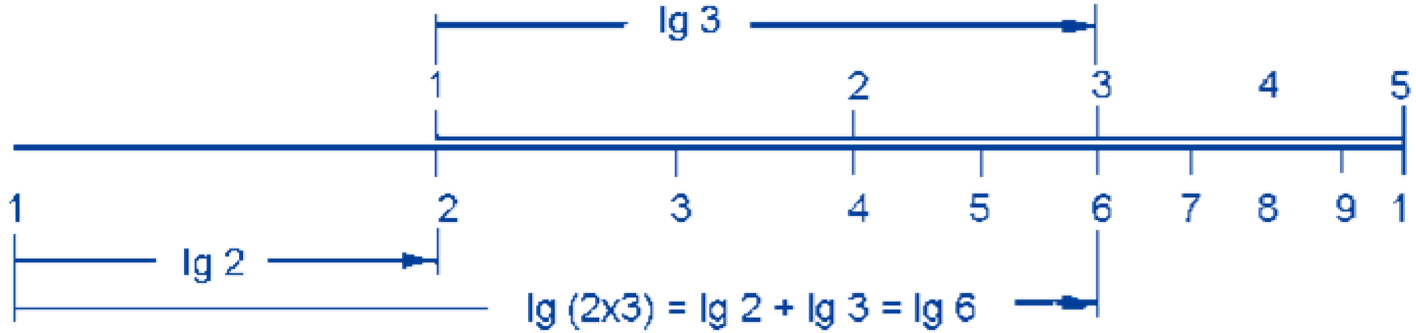
spielten beim Rechenschieber eine wichtige Rolle, weil man mit ihrer Hilfe die Multiplikation auf die Addition und die Division auf die Subtraktion zurückführen kann.



Rechenschieber: Beispiele

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

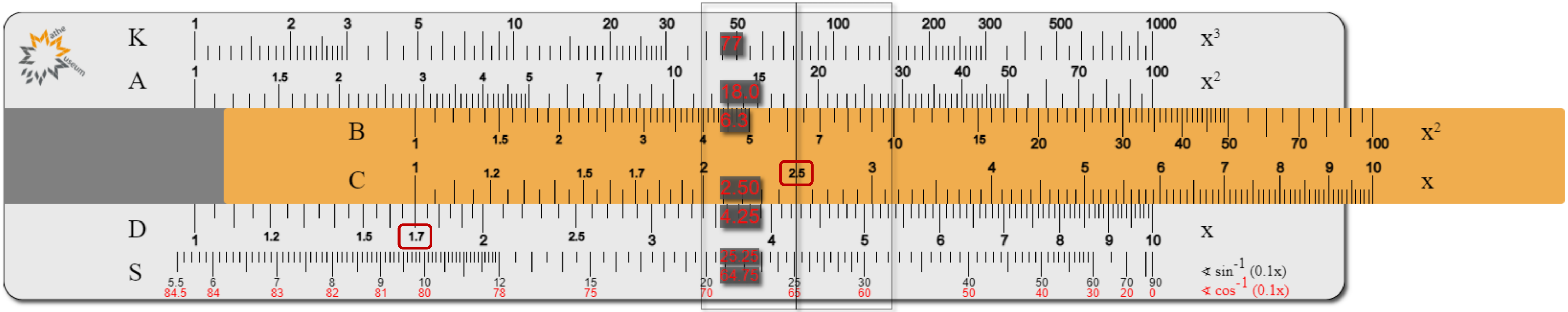
$2 \cdot 3 = ?$



$$\log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10}(2) + \log_{10}(3) = \log_{10}(6)$$

$1{,}7 \cdot 2{,}5 = ?$

$$\log_{10}(1{,}7 \cdot 2{,}5) = \log_{10}(1{,}7) + \log_{10}(2{,}5) = \log_{10}(4{,}25)$$



Rechenregel für Logarithmen

Satz („Taschenrechnergleichung")

Für $a, b, r \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 0$ gilt:

$$\log_a(r) = \frac{\log_b(r)}{\log_b(a)}$$

Beweis

Aus $r = a^{\log_a(r)}$ folgt:

$$\log_b(r) = \log_b\left(a^{\log_a(r)}\right)$$
$$= \log_a(r) \cdot \log_b(a)$$

$$\Rightarrow \log_a(r) = \frac{\log_b(r)}{\log_b(a)} \qquad \blacksquare$$

Anmerkungen

- Mit diesem Satz kann der Logarithmus von r zur Basis a als Quotient zweier Logarithmen zu einer beliebigen Basis ausgedrückt werden.
- Taschenrechner beherrschten früher nur $\lg(x) \coloneqq \log_{10}(x)$, den Logarithmus zur Basis 10, und $\ln(x) \coloneqq \log_e(x)$, den Logarithmus zur Basis e, der auch natürlicher Logarithmus genannt wird.

MaTeGnu

Kapitel 5: Exponentialfunktionen

Zinseszins

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Aufgabe: Zinseszins

- Ein Kapital K_0 wird zu einem Zinssatz p % pro Jahr angelegt. Die anfallenden Zinsen werden am Ende des Jahres dem Sparkonto gutgeschrieben.
- Wie viele Jahre muss man sparen, bis sich das Kapital ver-m-facht hat?

Mögliche Lösung:

$$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad \wedge \quad K(n) = m \cdot K_0$$

$$m \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad \Big| : K_0$$

$$m = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad \Big| \ln \qquad \text{(zulässig, da ln streng monoton steigend)}$$

$$\ln(m) = n \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \Big| : \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(m)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

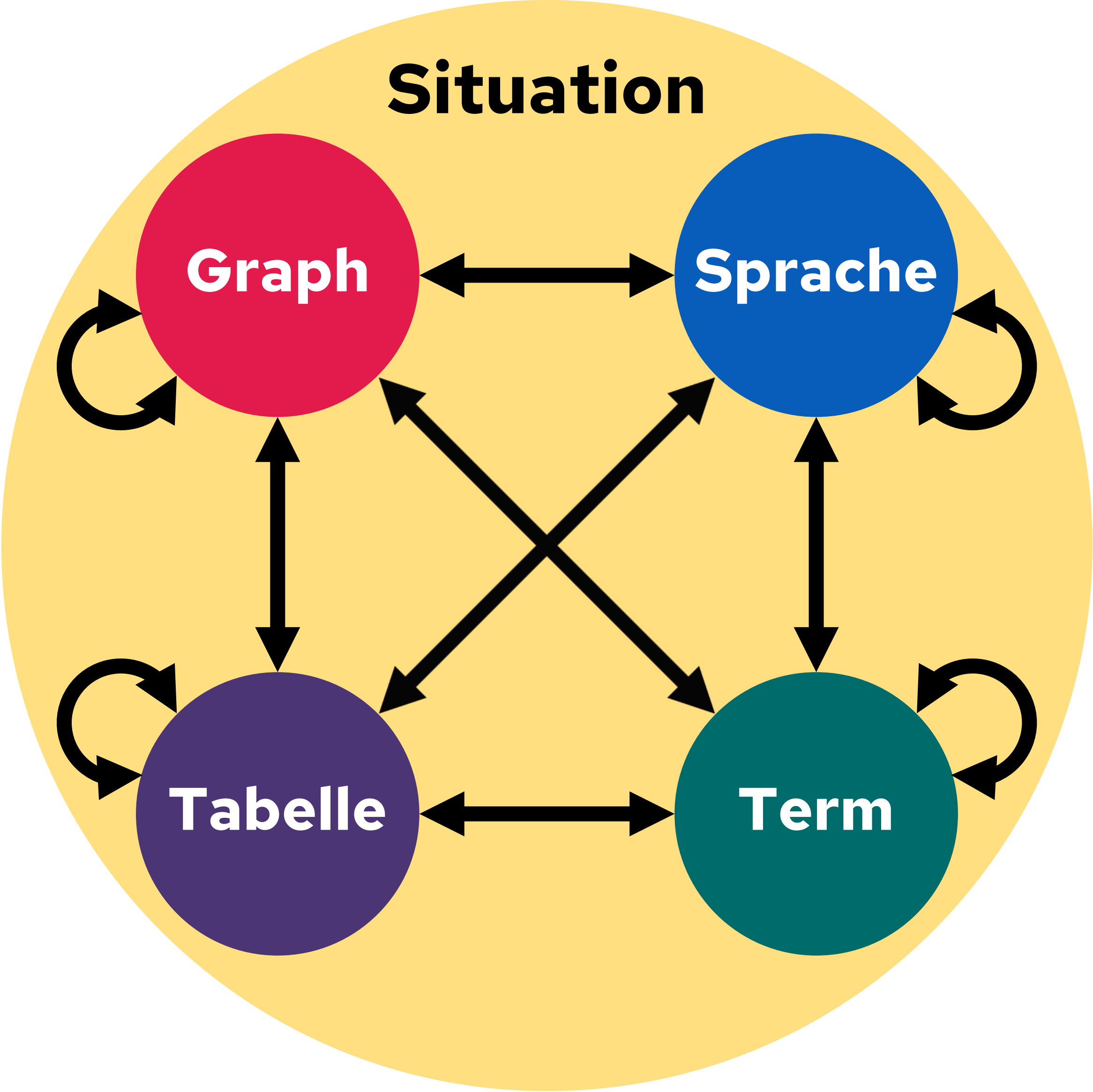
Bevölkerungswachstum & Nahrungsmittel

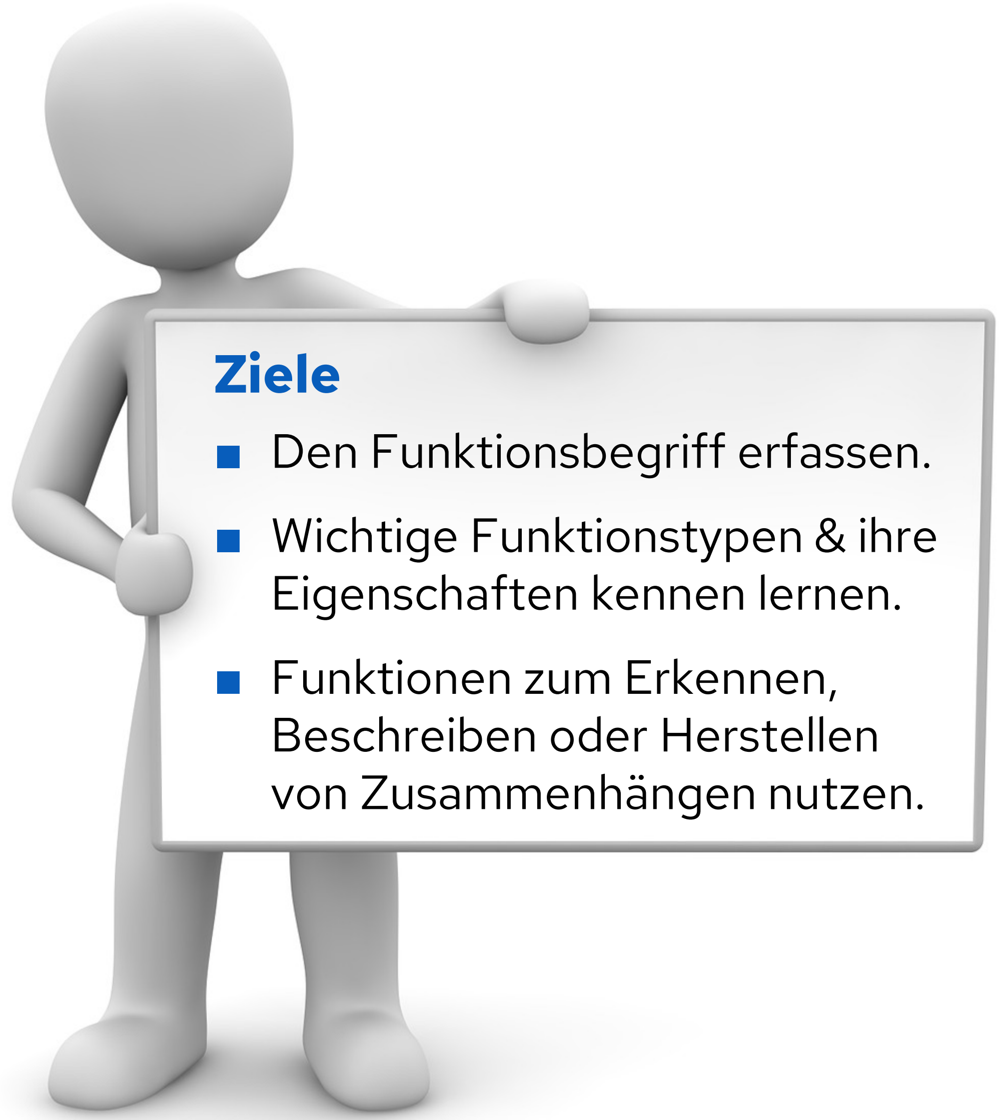
RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Bevölkerungswachstum & verfügbare Nahrungsmittel

- Der englische Philosoph Thomas R. Malthus veröffentliche im Jahr 1798 sein „Essay of the Principles of Population“.
- Er vermutete, dass die Nahrungsmittelerzeugung dem rasanten Bevölkerungswachstum im Zuge der industriellen Revolution nicht würde folgen können, und prognostizierte permanente Hungersnöte.
- Zur Begründung seiner Thesen entwickelte er einfache Modelle für das Wachstum von Populationen:
  Er nahm an, die Bevölkerung wachse exponentiell, die zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel jedoch nur linear.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben unter der unten angegebenen URL.

Der Funktionsbegriff im MU





Ziele

- Den Funktionsbegriff erfassen.
- Wichtige Funktionstypen & ihre Eigenschaften kennen lernen.
- Funktionen zum Erkennen, Beschreiben oder Herstellen von Zusammenhängen nutzen.

Malle, G. (2000). Funktionen untersuchen – ein durchgängiges Thema. *Mathematik lehren, 103*, S. 4-7

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 5: Exponentialfunktionen

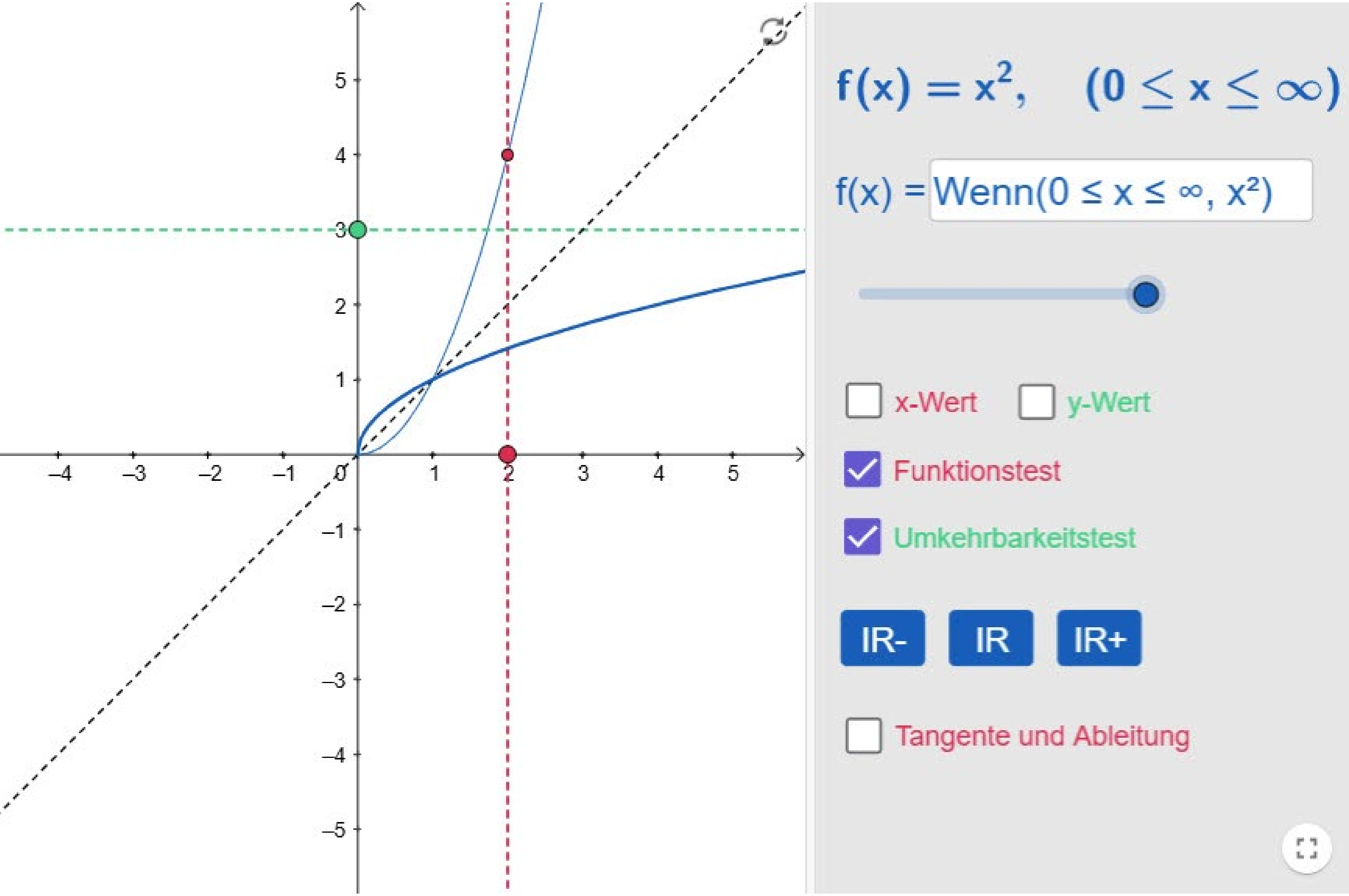
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

mategnu.de

RPTU

Umkehrfunktion?!

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Schritte zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1}, wenn die Funktion f umkehrbar ist.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$.

1. Schritt: Funktionsgleichung nach x auflösen

$$y = x^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\sqrt{y} = |x| \overset{x \geq 0}{=} x$$

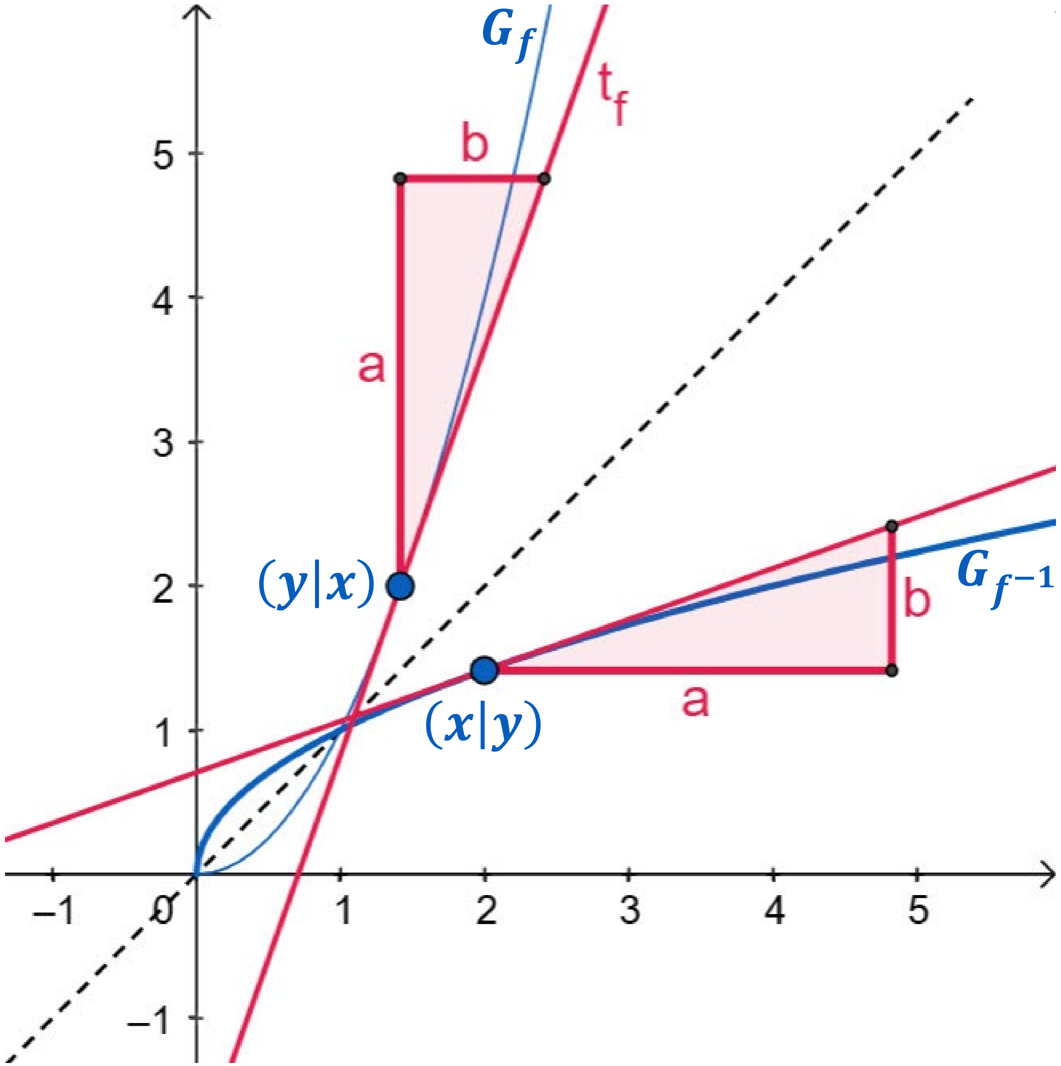
$$x = \sqrt{y}$$

2. Schritt: x und y vertauschen

$$y = \sqrt{x}$$

Roth, J. (2017). Zum y-Wert den x-Wert finden – Trigonometrische Funktionen umkehren. *Mathematik lehren 204*, 33-35
https://www.geogebra.org/m/uw7h8ymq

Ableitung der Umkehrfunktion



Ableitung der Umkehrfunktion: Geometrischer Zugang

Wegen der Achsensymmetrie der Graphen der Funktion f und ihrer Umkehrfunktion f^{-1} gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Steigung von f^{-1} in einem Punkt $(x|y)$ und der Steigung von f im entsprechenden Punkt $(y|x)$ unter Nutzung der Tangentensteigungen $\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{a}{b}$:

- $f^{-1\prime}(x) = \frac{b}{a}$
- $f'(y) = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

 https://www.geogebra.org/m/uw7h8ymq

Ableitung der Umkehrfunktion

Ableitung der Umkehrfunktion: Algebraisch-analytischer Zugang

- Für eine umkehrbare Funktion f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} gilt:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad (*)$$

- Differenzieren der Gleichung $(*)$ nach x liefert unter Anwendung der Kettenregel:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot {f^{-1}}'(x) = 1 \qquad \mid : f'\left(f^{-1}(x)\right)$$

$${f^{-1}}'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Voraussetzung: f ist an der Stelle $f^{-1}(x)$ differenzierbar und $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$.

Bemerkungen

- Aus der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion lässt sich direkt die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $\ln(x) = \log_e(x)$ bestimmen:

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

- Vgl. die Folien 48 und 49 für die Definition der Eulerschen Zahl e und die Herleitung der Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion.
- Vgl. Greefrath et al. (2016) für weitere Ableitungsregeln, die sich daraus herleiten lassen.

Greefrath, G. et al. (2016),. Didaktik der Analysis. Springer Spektrum, 162f

Ableitung von Exponentialfunktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

1. Schritt

Für die Exponentialfunktionen $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$f_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

2. Schritt

Der Ausdruck $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$ kann als Ableitung $f_a{}'$ an der Stelle 0 gedeutet werden, denn es gilt:

$$f_a'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Eigenschaft von Exponentialfunktionen

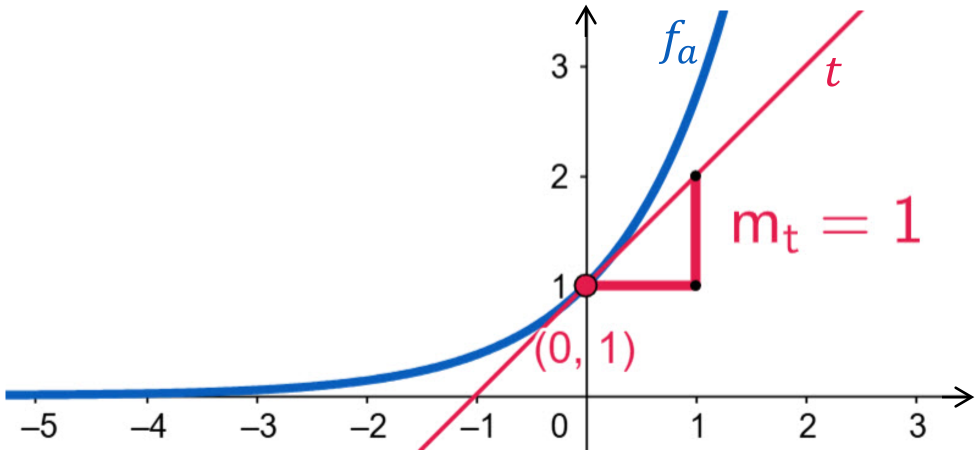
Für Exponentialfunktionen

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$f_a'(x) = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f_a(x) \cdot f_a{}'(0)$$

oder kurz $\qquad f_a' = f_a'(0) \cdot f_a$



Ableitung von Exponentialfunktionen

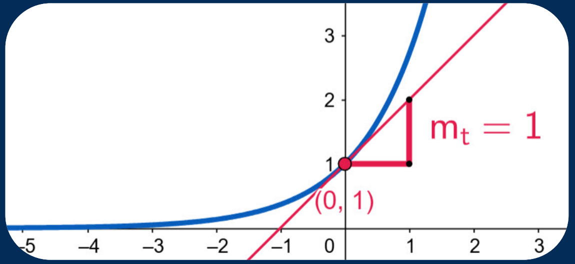
RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Eigenschaft von Exponentialfunktionen

$f_a'(x) = a^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = f_a(x) \cdot f_a{}'(0)$

3. Schritt

- Der Faktor $f_a'(0)$ ist die Steigung des Graphen der Exponentialfunktion f_a im Punkt $(0|1)$.
- Wenn a den Bereich $\mathbb{R}^+$ durchläuft, nimmt die Steigung $f_a'(0)$ im Punkt $(0|1)$ jeden reellen Wert an und ist umso größer, je größer a ist.
- $f_a'(0)$ wächst also mit größer werdendem a streng monoton. Es gibt folglich genau einen Wert für a, bei dem die Steigung des Graphen der Exponentialfunktion f_a im Punkt $(0|1)$ den Wert 1 hat.



Definition: Eulersche Zahl e

Der Wert für a, bei dem die Steigung des Graphen der Exponentialfunktion f_a im Punkt $(0|1)$ den Wert 1 hat, heißt **Eulersche Zahl e**.

Ergebnis

- Die **Eulersche Zahl e** ist also eindeutig dadurch bestimmt, dass gilt:

$$f_e'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

- Damit folgt: $f_e'(x) = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x$

Ableitung der natürl. Exponentialfunktion

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$ ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = e^x$.

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
mategnu.de

RPTU