



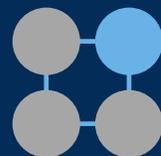
MaTeGnu

Mathematik mit Technologie an Grundvorstellungen orientiert nachhaltig unterrichten

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

Jürgen Roth

21.05.2025 MaTeGnu-Modul 1, Speyer



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R
P

TU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

- 1 Verständnis?!
- 2 Grundvorstellungen zur Ableitung
- 3 Ableitung als lokale Änderungsrate
- 4 Ableitung als Tangentensteigung



Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

- 1 **Verständnis?!**
- 2 Grundvorstellungen zur Ableitung
- 3 Ableitung als lokale Änderungsrate
- 4 Ableitung als Tangentensteigung



Mathematik-Kompetenzen am Ende der Oberstufe in Deutschland

(Rolfes et al. 2021)

- ca. $\frac{1}{3}$ verfügt **nicht** über das Mindestniveau mathematischer Grundbildung der **Sek. I**
- **nur 30%** beherrschen **grundlegende Inhalte** der **Sek. II-Mathematik** (LK: 56% GK: 16%)

(Fehlende) Voraussetzungen für Studierfähigkeit

- Fehlendes Verständnis
→ grundlegende Fähigkeiten nicht verfügbar (Knospe 2009)
- prozedurales Wissen alleine reicht nicht
→ konzeptuelle Basis zwingend erforderlich (Rach & Ufer 2020)
- formale Repräsentationen
→ nicht zwingend für Erfolg im Studium (Rach & Ufer 2020)





absolute & relative Änderungsmaße

unterscheiden und angemessen verwenden können

Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion

(bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können

Zusammenhang zwischen mittlerer (Differenzenquotient) und momentaner Änderungsrate (Differenzialquotient)

kennen, auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes beschreiben und in verschiedenen Situationen anwenden können

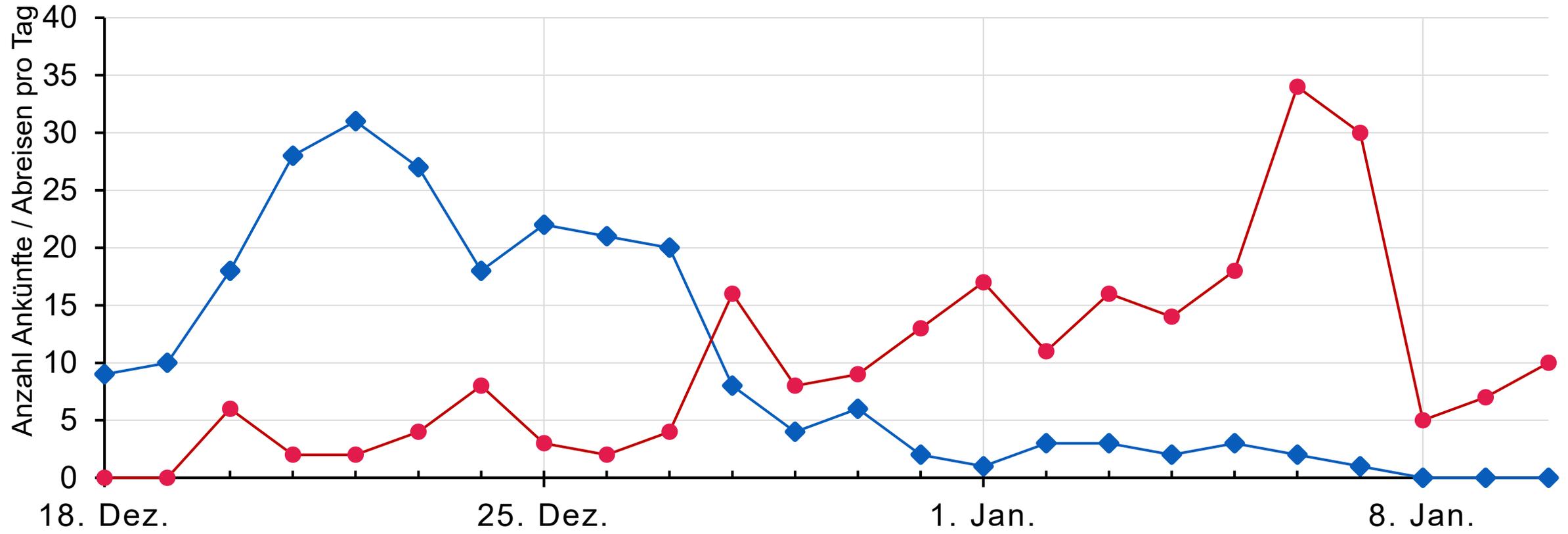
Unterschied zwischen Bestand und Änderung

in Anwendungssituationen erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

Bestandsgröße	Zuflüsse	Abflüsse
Anzahl der Studierenden einer Universität	Immatrikulationen	Exmatrikulationen, Ausscheiden aus der Universität
Benzinmenge im Tank	Tanken an der Tankstelle	Benzinverbrauch, Verdunstung
Kontostand	Zubuchungen	Abbuchungen
Anzahl der Gäste eines Hotels	ankommende Gäste	abreisende Gäste
Staatsverschuldung	Staatseinnahmen	Staatsausgaben

Ankünfte und Abreisen im Alpenhotel

◆ Ankünfte (Anzahl am Tag) ● Abreisen (Anzahl am Tag)



Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge

mit Hilfe der Ableitung beschreiben können (Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen)

Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten

deuten und beschreiben können

Bestimmtes Integral in Kontexten

deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Unterschied zwischen Änderungsfunktion & Wirkung bzw. Gesamteffekt

erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

- 1 Verständnis?!
- 2 Grundvorstellungen zur Ableitung**
- 3 Ableitung als lokale Änderungsrate
- 4 Ableitung als Tangentensteigung





Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

Primäre Grundvorstellungen

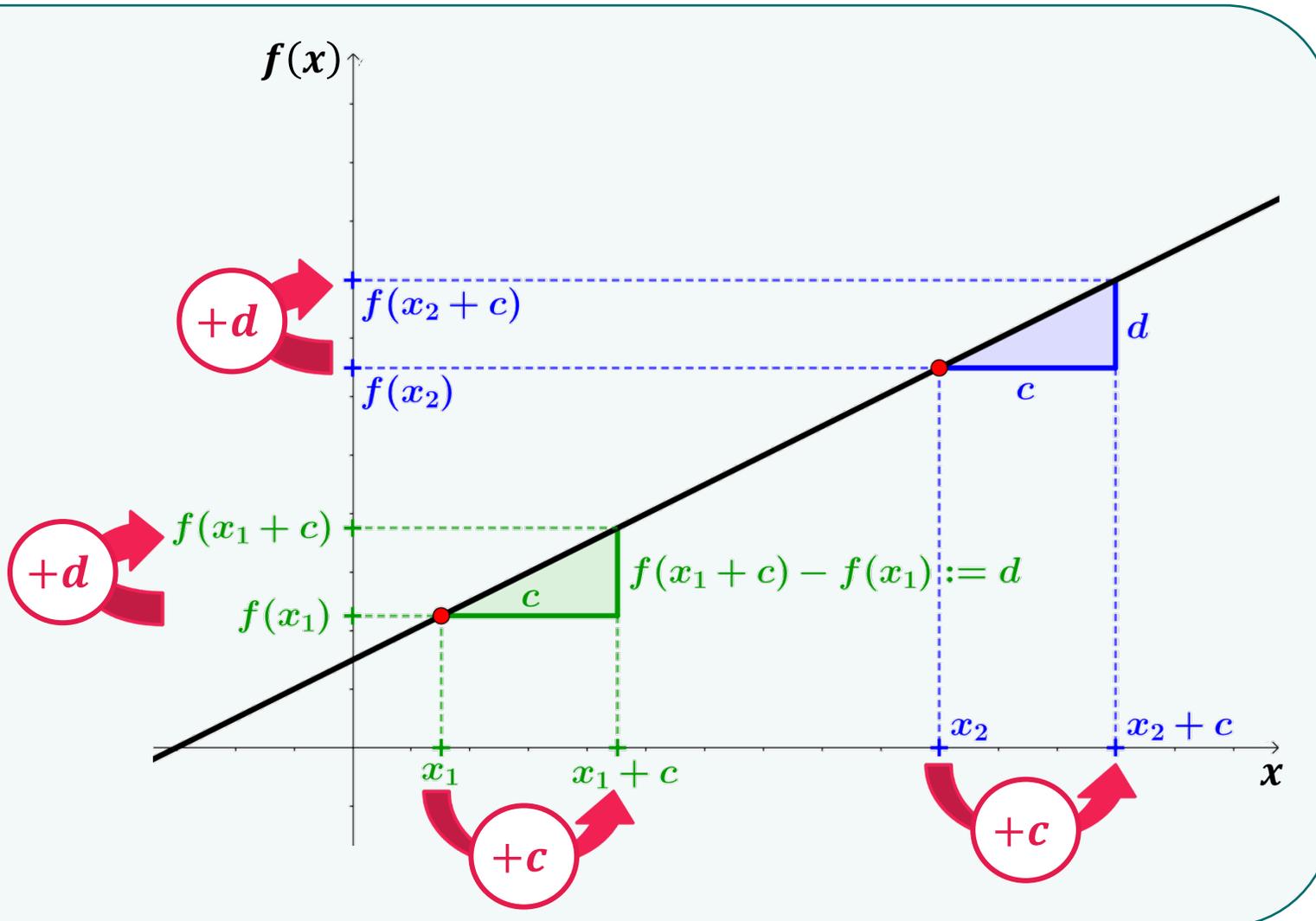
Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen

MaTeGnu



Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto f(x) = a \cdot x + b$$

$$f(x + c) \\ = a \cdot (x + c) + b$$

$$\stackrel{DG}{\equiv} a \cdot x + a \cdot c + b$$

$$\stackrel{KG}{\equiv} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker



Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Verständnisanker

Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt.



Eine **Situation** eignet sich als Verständnisanker, wenn

- sie leicht durchschaut werden kann und
- alle für ein Verständnis wesentlichen Strukturelemente vorkommen und gedeutet werden können.

Ziel des Aufbaus eines Verständnisankers

Lernende können in neuen Situationen, in denen der mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.



Beispiel

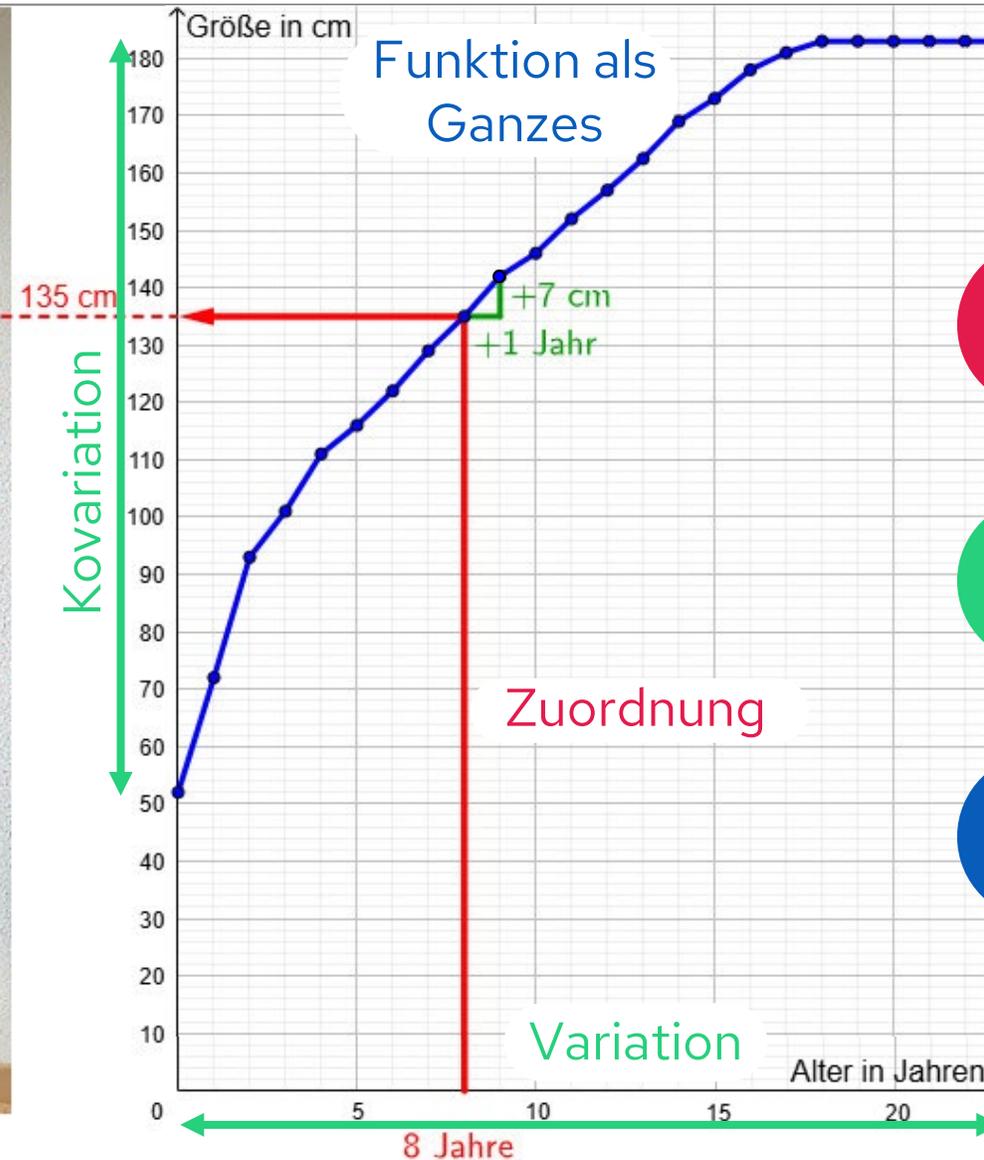
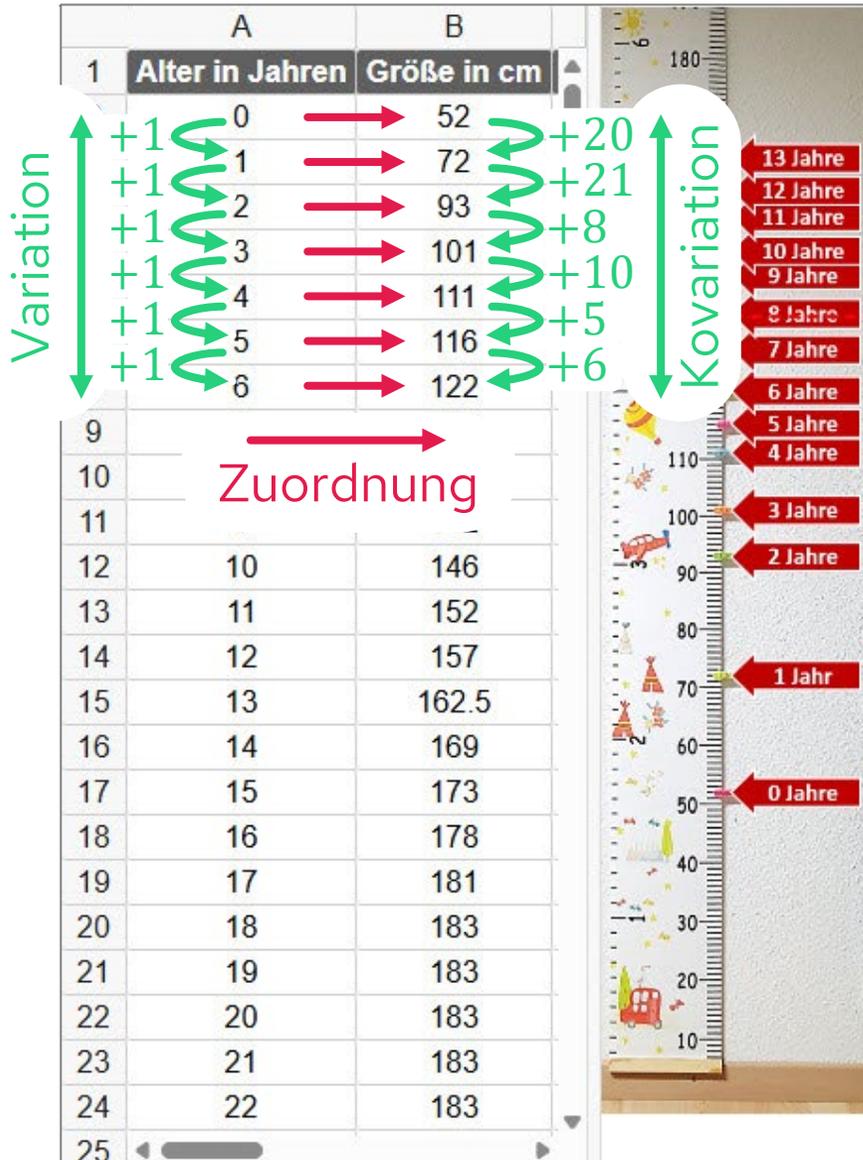
Ein Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Funktionen ist der Zusammenhang zwischen dem Lebensalter und der Körpergröße eines Menschen.

Näheres zu diesem Verständnisanker:
Roth, J. & Lichti, M. (2021).

Funktionales Denken entwickeln und fördern.
Mathematik lehren, 226, 2-9.

<https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w>

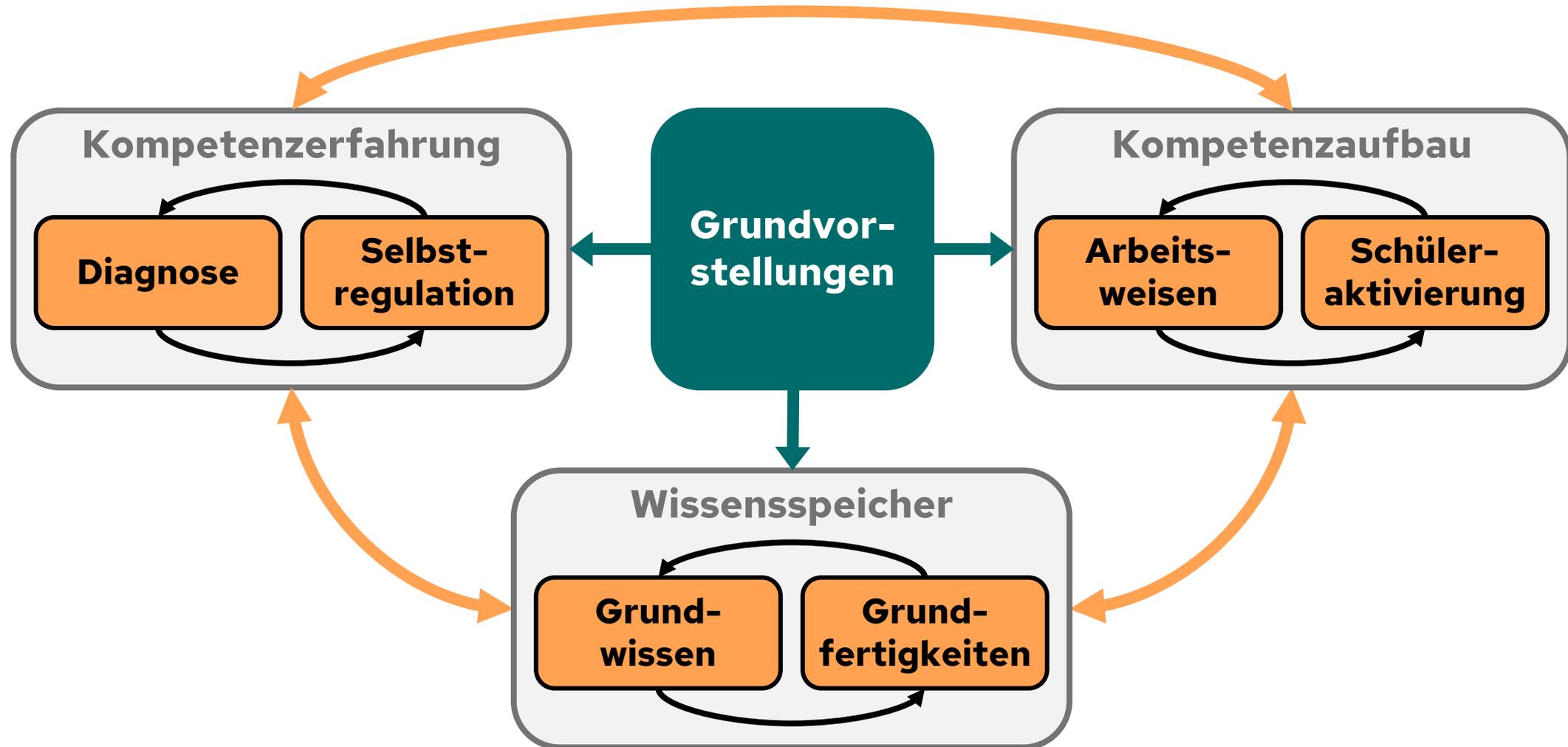
Zusammenhang: Alter \mapsto Körpergröße

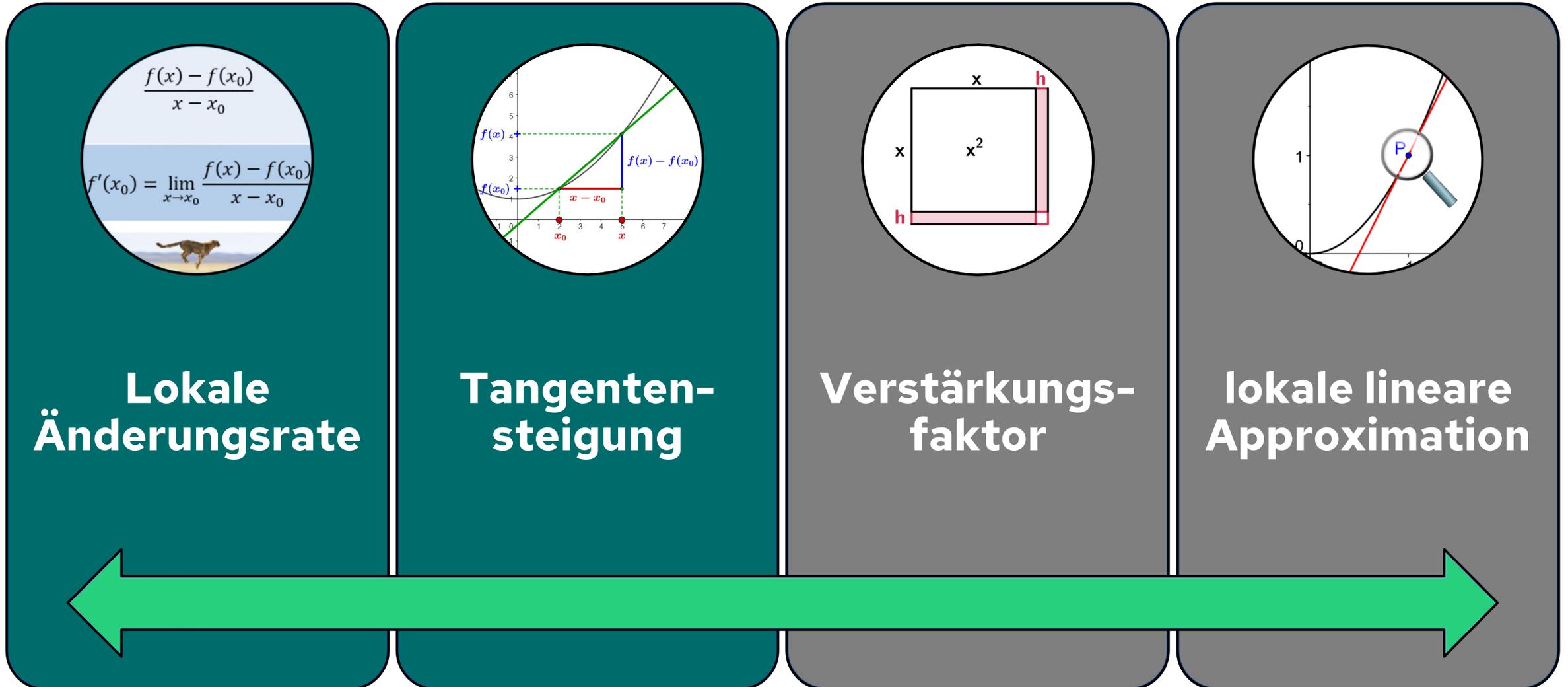


Grundvorstellung
Zuordnung

Grundvorstellung
Kovariation

Grundvorstellung
Funktion als Ganzes

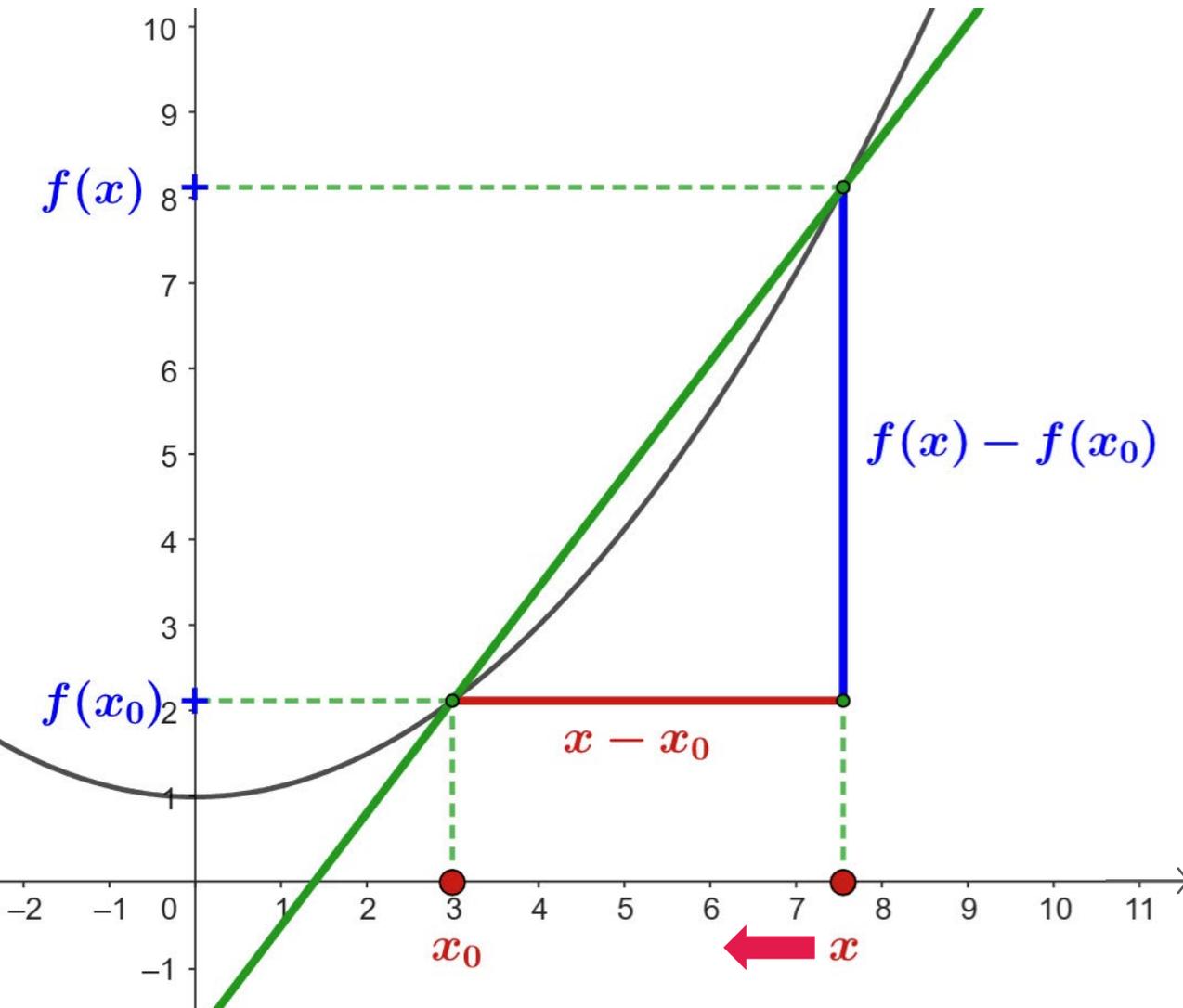






Beschreibungsebene	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
formal	$f(x_0)$	$f(x) - f(x_0)$	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
inhaltlich	Bestand zum Zeitpunkt x_0	absoluter Zuwachs in der Zeit von x_0 bis x	relativer Zuwachs im Zeitintervall $[x_0, x]$ (mittlere Änderungsrate)	momentane (lokale) Änderungsrate zum Zeitpunkt x_0
terminologisch	Funktionswert	Differenz der Funktionswerte	Differenzenquotient	Ableitung

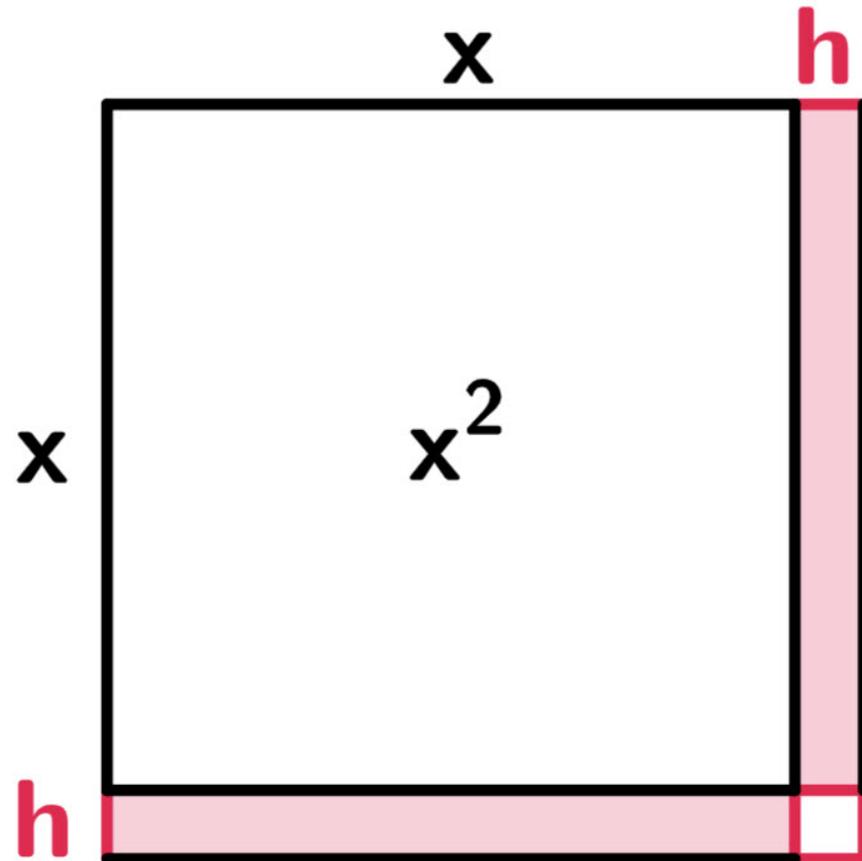
algebraisch | analytisch



Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P

Tangente als Grenzlage von Sekanten

Bestimmung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

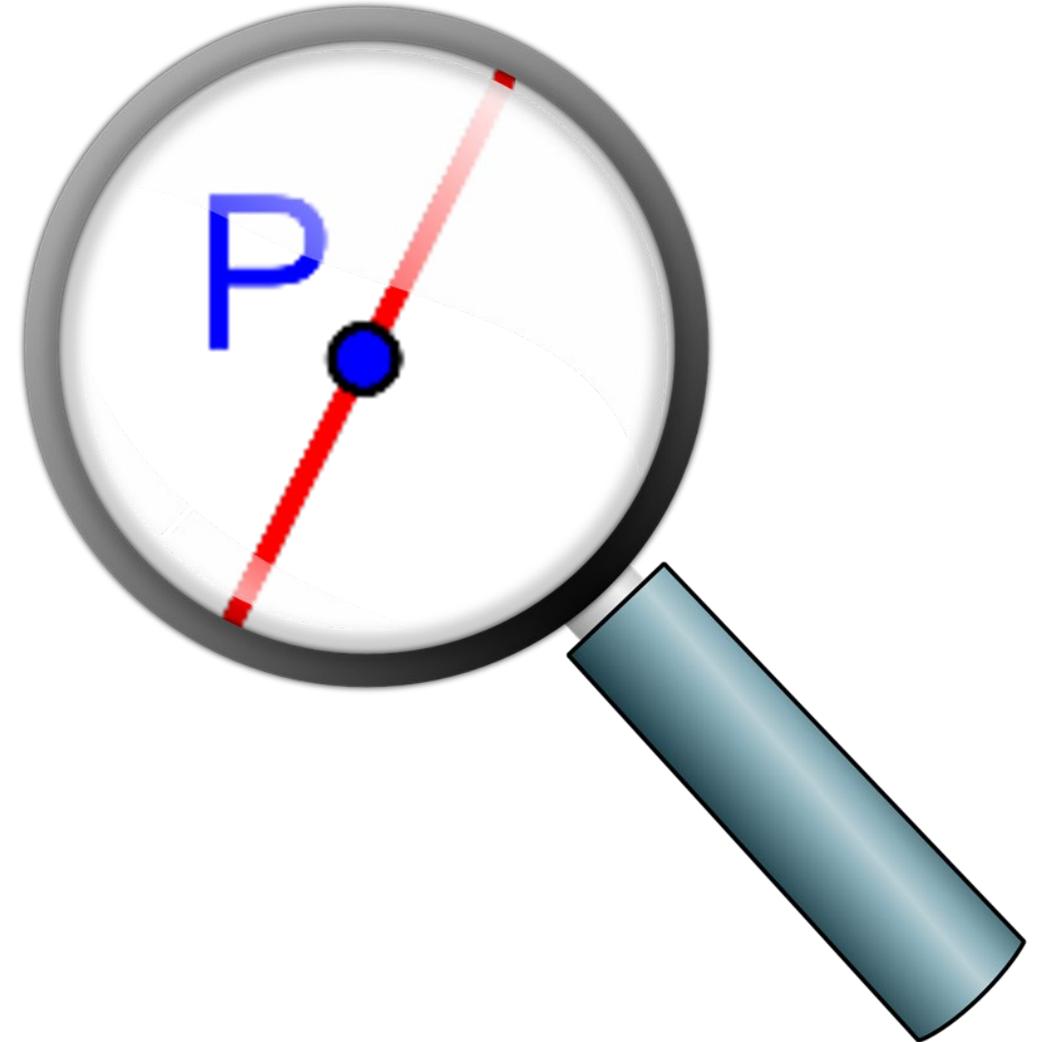
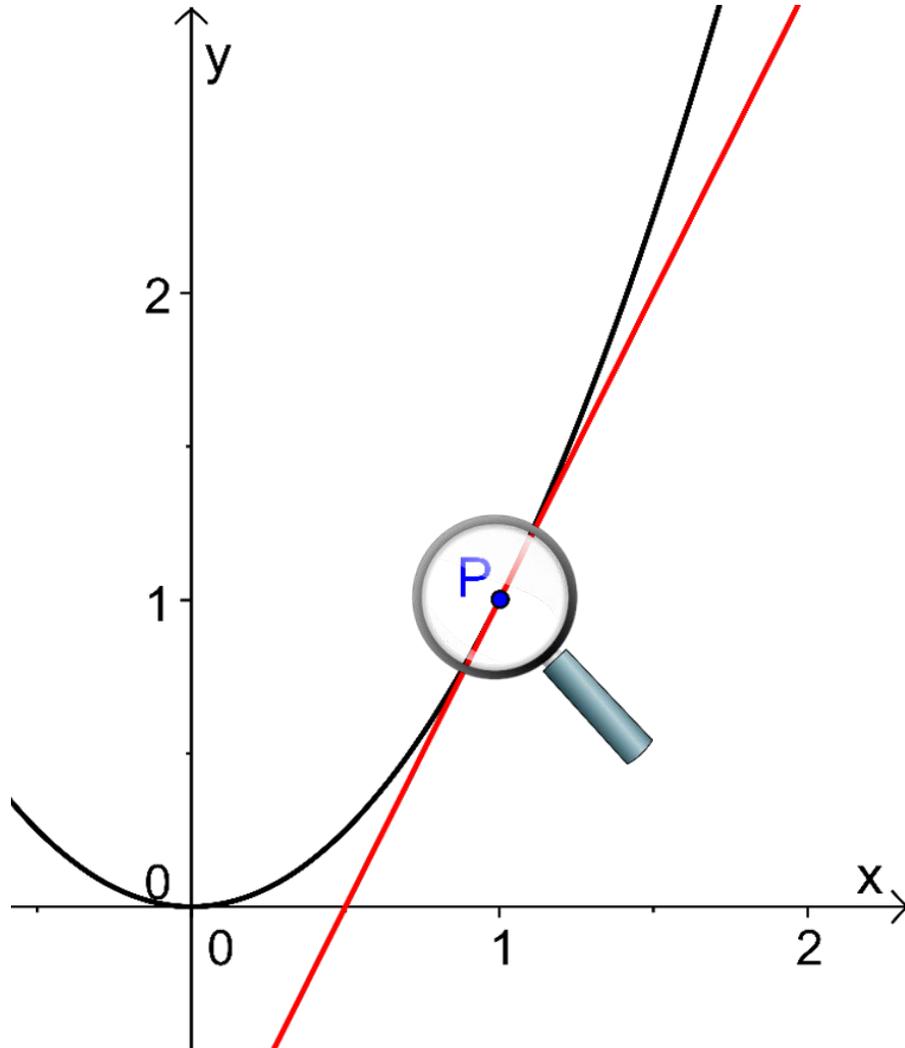
Die Ableitung gibt an, wie stark sich die Änderung der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable auswirkt.

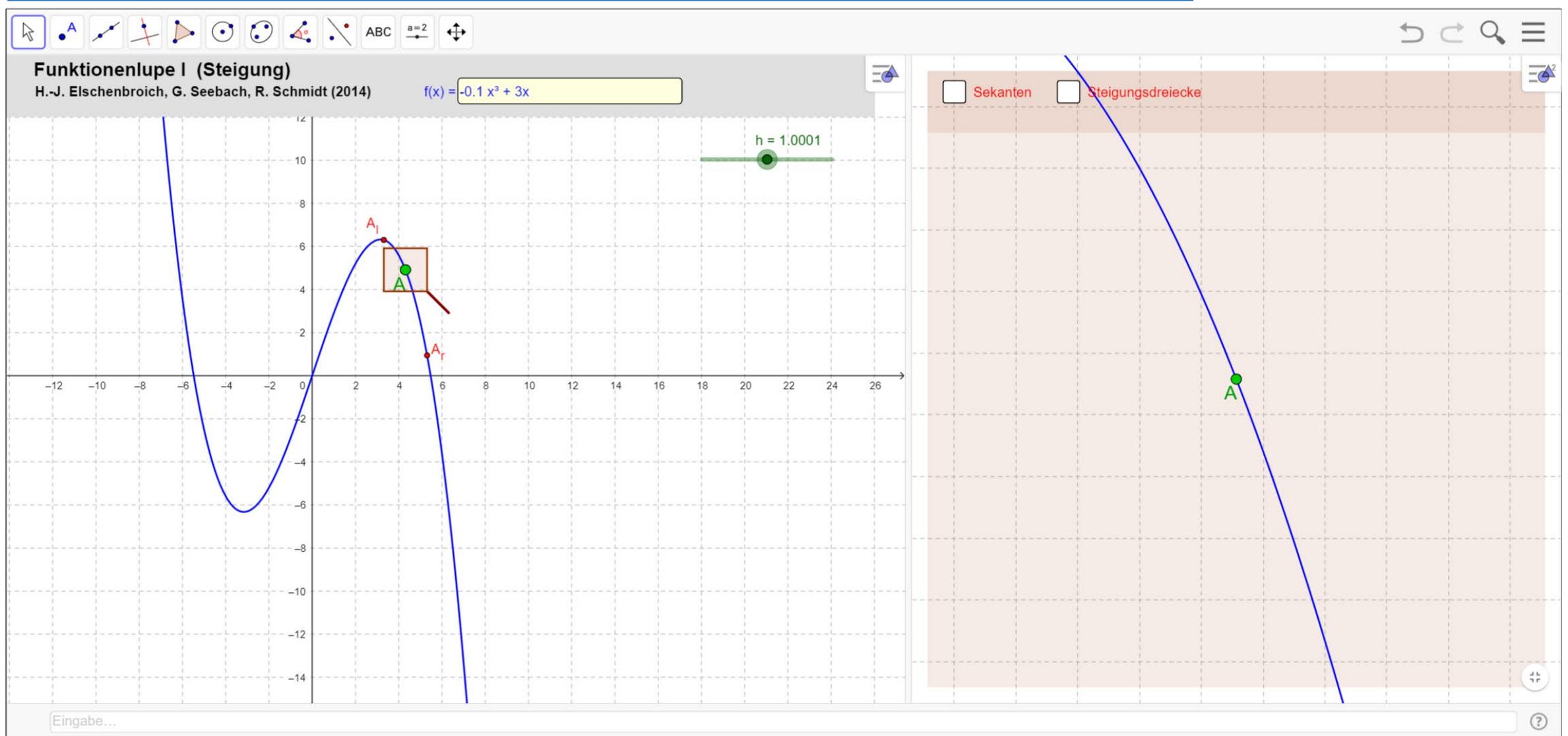
Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle bzw. starke Änderung der Funktionswerte.

Für kleine Änderungen Δx gilt:

$$\Delta y \approx \underbrace{f'(x)}_{\text{Verstärkungsfaktor}} \cdot \Delta x$$

Verstärkungsfaktor





Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

- 1 Verständnis?!
- 2 Grundvorstellungen zur Ableitung
- 3 Ableitung als lokale Änderungsrate**
- 4 Ableitung als Tangentensteigung



- Geparden erreichen über längere Strecken eine **Durchschnittsgeschwindigkeit** von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und sind mit einer momentanen **Spitzengeschwindigkeit** von $93 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ die schnellsten Landtiere.
- In Versuchen wurden Hochgeschwindigkeitskameras und am Boden installierte Kraftmessplatten eingesetzt.

Wilson, A. M. et al. (2013). Locomotion dynamics of hunting in wild cheetahs, Nature, doi:10.1038/nature12295



Kernfrage

- Wie bestimmt man mit den Videoaufnahmen die Geschwindigkeiten?
- Ein Applet simuliert die Videoaufnahmen.

<https://mategnu.de/m/l1>



Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: **Der Gepard, das schnellste Landtier**

Absolute Änderung: Zwischen zwei Zeitpunkten x_1 und x_2 zurückgelegter Weg $f(x_2) - f(x_1)$.

Bewegungen: Die Weg-Zeit-Funktion $x \mapsto f(x)$ ordnet jedem Zeitpunkt x den bis dahin zurückgelegten Weg $f(x)$ zu.

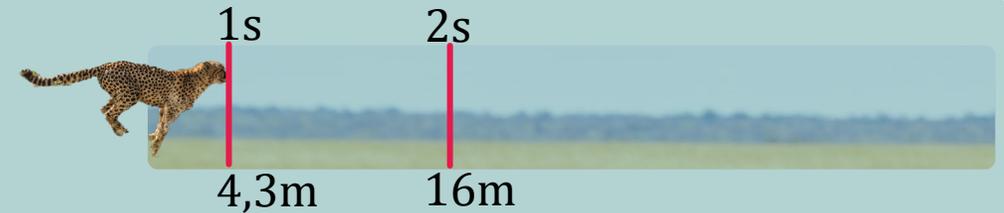
Erste Sekunde

$$f(1s) - f(0s) = 4,3m - 0m = 4,3m$$



Zweite Sekunde

$$f(2s) - f(1s) = 16m - 4,3m = 11,7m$$



Dritte Sekunde

$$f(3s) - f(2s) = 33,3m - 16m = 17,3m$$



Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: **Der Gepard, das schnellste Landtier**

Absolute Änderung: Zwischen zwei Zeitpunkten x_1 und x_2 zurückgelegter Weg $f(x_2) - f(x_1)$.

In den zwei Sekunden von $x_1 = 1s$ bis $x_2 = 3s$ zurückgelegter Weg

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= f(3s) - f(1s) \\ &= 33,3m - 4,3m = 29m \end{aligned}$$



	Zeitpunkt x	zurückgelegter Weg $f(x)$	
	0s	0m	
Zeitänderung $\Delta x = 1s$	1s	4,3m	Wegänderung $\Delta f(x) = 4,3m$
Zeitänderung $\Delta x = 1s$	2s	16m	Wegänderung $\Delta f(x) = 11,7m$
Zeitänderung $\Delta x = 2s$	3s	33,3m	Wegänderung $\Delta f(x) = 29m$
Zeitänderung $\Delta x = 1s$			Wegänderung $\Delta f(x) = 17,3m$

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: **Der Gepard, das schnellste Landtier**

Relative Änderung / Änderungsrate: Durchschnittsgeschwindigkeit

Um die mittleren Geschwindigkeiten in unterschiedlich langen Zeitintervallen $[x_1, x_2]$ und $[x_3, x_4]$ vergleichen zu können, muss man jeweils die **Wegdifferenz** $f(x_2) - f(x_1)$ auf die zugehörige **Zeitdifferenz** $x_2 - x_1$ beziehen:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Im Zeitintervall $[2s, 3s]$ werden im Mittel $\frac{33,3m - 16m}{3s - 2s} = \frac{11,7m}{1s} = 17,3 \frac{m}{s}$, also 17,3 Meter pro Sekunde zurückgelegt.



Im Zeitintervall $[1s, 3s]$ werden im Mittel $\frac{33,3m - 4,3m}{3s - 1s} = \frac{29m}{2s} = 14,5 \frac{m}{s}$, also 14,5 Meter pro Sekunde zurückgelegt.



Im Zeitintervall $[2s, 3s]$ ist die **mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit)** mit $17,3 \frac{m}{s}$ also höher als im Zeitintervall $[1s, 3s]$ mit $14,5 \frac{m}{s}$.



Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellste Landtier

Lokale Änderungsrate: Momentangeschwindigkeit

Wie groß ist die **Momentangeschwindigkeit (lokale Änderungsrate)** zu einem Zeitpunkt $x_0 = 2s$?



Idee: Mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen betrachten, die $x_0 = 2s$ als Intervallgrenze besitzen.



Zeitintervall $[x_1, x_0]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$ im Zeitintervall $[x_1, x_0]$	Zeitintervall $[x_0, x_2]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ im Zeitintervall $[x_0, x_2]$
$[1s; 2s]$	$\frac{16m - 4,3m}{2s - 1s} = 11,7 \frac{m}{s}$	$[2s; 3s]$	$\frac{33,3m - 16m}{3s - 2s} = 23,25 \frac{m}{s}$
$[1,9s; 2s]$	$\frac{16m - 14,5483m}{2s - 1,9s} = 14,517 \frac{m}{s}$	$[2s; 2,1s]$	$\frac{17,5077m - 16m}{2,1s - 2s} = 15,077 \frac{m}{s}$
$[1,99s; 2s]$	$\frac{16m - 15,8522803m}{2s - 1,99s} = 14,77197 \frac{m}{s}$	$[2s; 2,01s]$	$\frac{16,1482797m - 16m}{2,01s - 2s} = 14,82797 \frac{m}{s}$
$[1,999s; 2s]$	$\frac{16m - 15,9852028003m}{2s - 1,999s} = 14,7971997 \frac{m}{s}$	$[2s; 2,001s]$	$\frac{16,0148027997m - 16m}{2,001s - 2s} = 14,8027997 \frac{m}{s}$

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: **Der Gepard, das schnellste Landtier**

Momentangeschwindigkeit

- Je kleiner das Intervall $[x_0, x]$ wird, je näher also x an $x_0 = 2s$ heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit dem Wert $14,8 \frac{m}{s}$.
- Die mittlere Geschwindigkeit kommt dem Wert $14,8 \frac{m}{s}$ beliebig nah, wenn x genügend nah bei $x_0 = 2s$ liegt.
- Damit ist die **Momentangeschwindigkeit** (lokale Änderungsrate) zum Zeitpunkt $x_0 = 2s$ bestimmt. Sie beträgt hier $14,8 \frac{m}{s}$.



Lokale
Änderungsrate

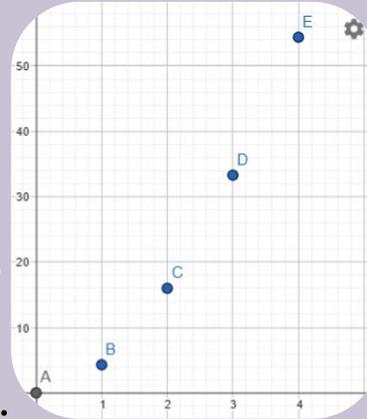
Ableitung: Verbale Definition im Kontext

- Der Wert, dem sich die mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ beliebig nah annähert, wenn x gegen x_0 läuft, heißt **Ableitung $f'(x_0)$ von f an der Stelle x_0** .
- Man schreibt dafür: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Modellierung des Zusammenhangs

- Messwerte im Koordinatensystem darstellen
- **Vermutung:** Parabelast
⇒ Quadratischer Zusammenhang $f(x) = a \cdot x^2$, mit unbekanntem Parameter a .



- Mit $f(x) = a \cdot x^2$ ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[x_0, x] = [2s, x]$ der Wert:
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(2s)}{x-2s} = \frac{a \cdot (x^2-(2s)^2)}{x-2s} = a \cdot \frac{(x+2s) \cdot (x-2s)}{x-2s} = a \cdot (x + 2s)$$
- $a \cdot (x + 2s)$ kommt dem Wert $14,8 \frac{m}{s}$ beliebig nahe, wenn x genügend nahe bei $x_0 = 2s$ liegt.
- Damit lässt sich der Parameter a aus $a \cdot (2s + 2s) = 14,8 \frac{m}{s}$ berechnen: $a = \frac{14,8 \frac{m}{s}}{2s+2s} = 3,7 \frac{m}{s^2}$.
- **Überprüfen:** Eingabe der Funktionsgleichung $f(x) = 3,7 \cdot x^2$ in GeoGebra.

Aufgabe: Konvergenz von $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ für $x \rightarrow 2s$: Welche Sprechweisen sind dafür geeignet?

Sprechweisen

" $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beliebig nahe, wenn x gegen $2s$ läuft." 1

" $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ strebt gegen $14,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für x gegen $2s$." 2

" $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ immer näher, wenn x gegen $2s$ läuft." 3

" $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ immer näher, ohne ihn jemals zu erreichen." 4

Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung

1 Ohne Einschränkung geeignet.

2 Ohne Einschränkung geeignet.

3 Problematisch! $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt auch der 10 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. 1)!

4 Grenze zur inhaltlichen Verfälschung überschritten! Bei konstanten Funktionen konvergiert der Differenzenquotient (gegen 0).

Wissensspeicher: Ableitung als lokale Änderungsrate

Beispiel: Gepard 	Bedeutung	Mathematischer Ausdruck	Kontext 2	Kontext 3
Bis zum Zeitpunkt x_0 zurückgelegter Weg	Bestand	$f(x_0)$		
In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg	Absolute Änderung	$f(x) - f(x_0)$		
Durchschnitts- geschwindigkeit im Zeit RAUM von x_0 bis x	Mittlere (durchschnittliche) Änderungsrate	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
Momentan- geschwindigkeit zum Zeit PUNKT x_0	Momentane (lokale) Änderungsrate	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		

Vorteile

des Zugangs zum Ableitungsbegriff als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate:

- Kinematischer Kontext ist Teil der Alltagserfahrungen von Jugendlichen. (Straßenverkehr, Computerspiele, Sport, ...)
- Zeitliche Änderung von Geschwindigkeiten
→ Zugang zum Begriff Momentanbeschleunigung
- Das Beispiel ist als universelles Modell überall tragfähig, wo ein Änderungsverhalten punktuell beschrieben werden soll.
→ Diese Grundvorstellung ist in vielen Zusammenhängen notwendig.
- Anschlussfähig an anderen Grundvorstellungen
→ Start mit der Ableitung als Tangentensteigung führt oft zu einseitiger Sichtweise.

Geparden beschleunigen auch am besten und können mit einem „Satz“ knapp 11 km/h an Tempo hinzugewinnen.



Verständnisorientierung in der Differentialrechnung

- 1 Verständnis?!
- 2 Grundvorstellungen zur Ableitung
- 3 Ableitung als lokale Änderungsrate
- 4 Ableitung als Tangentensteigung**



Aspekte bei diesem Zugang

Zu beachten ist:

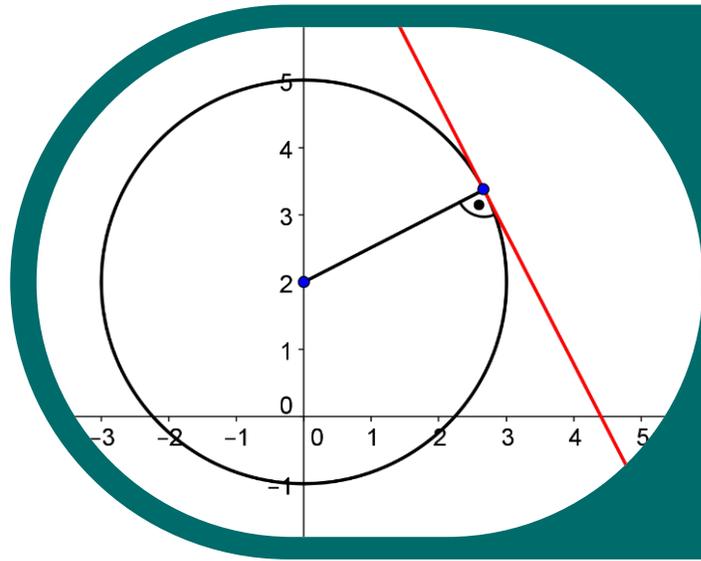
Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P

Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff

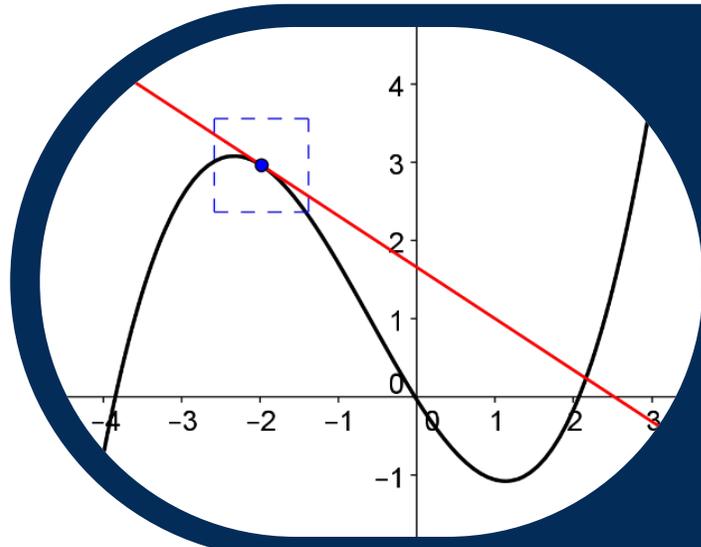
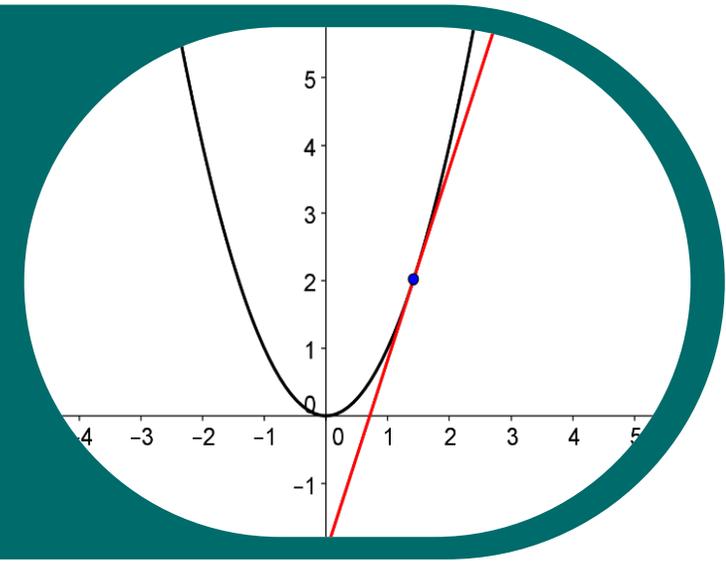
Tangente als Grenzlage von Sekanten

Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

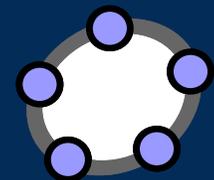
Was ist eine Tangente?



Geometrische Sichtweise:
Tangente als globale Stützgerade



Analytische Sichtweise:
Tangente als lokale Schmiegegerade



Aspekte bei diesem Zugang

Zu beachten ist:

Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P

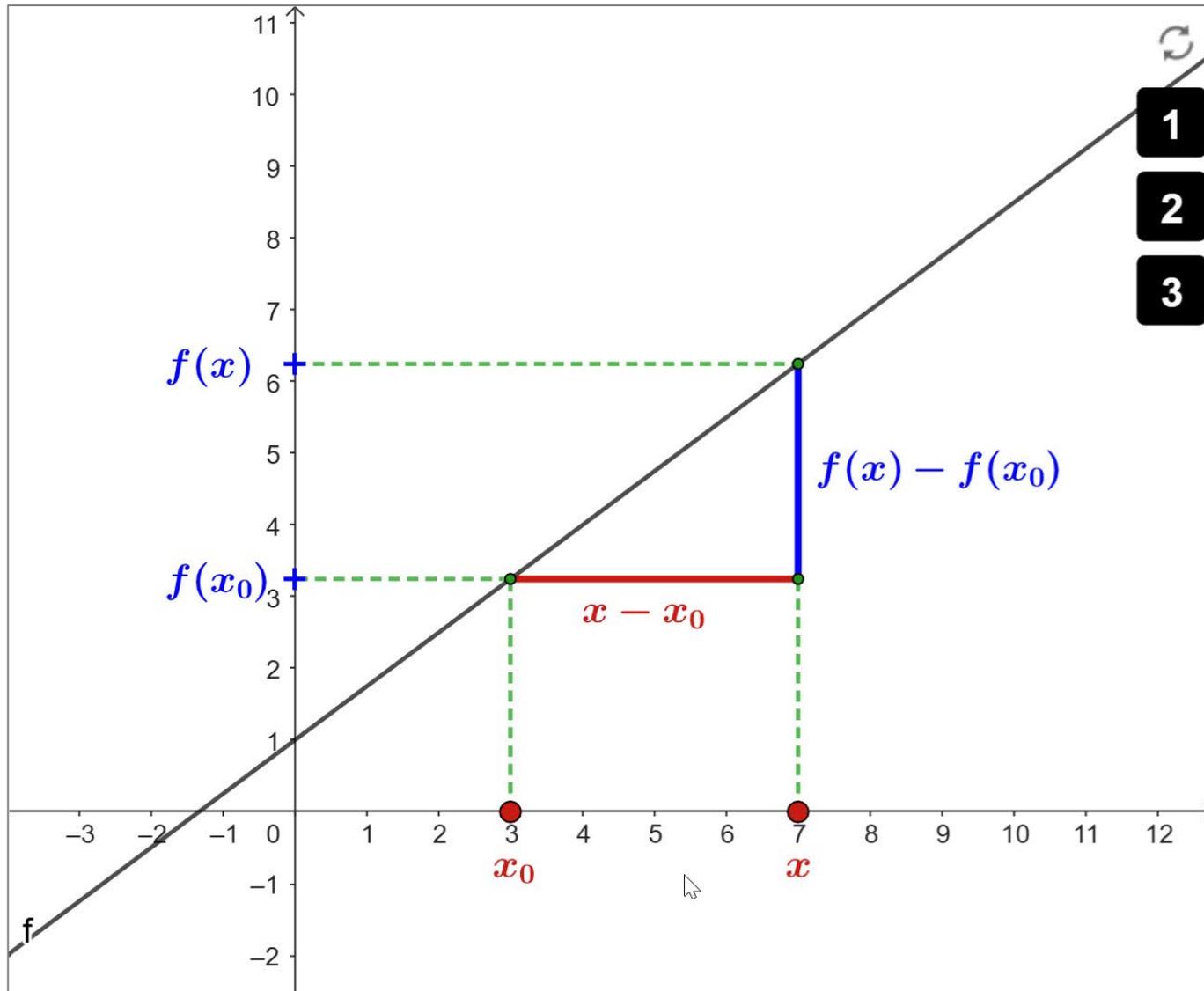
Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff

Tangente als Grenzlage von Sekanten

Liegt quer zur Schmiege-Vorstellung der Tangente

Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Gibt es einen Grenzfall von Sekanten? Eine Gerade durch einen Punkt ist gar nicht eindeutig festgelegt.



$$f(x) = \frac{3}{4}x + 1$$

- Zuordnung Absolute Änderung
- Änderungsrate (relative Änderung)

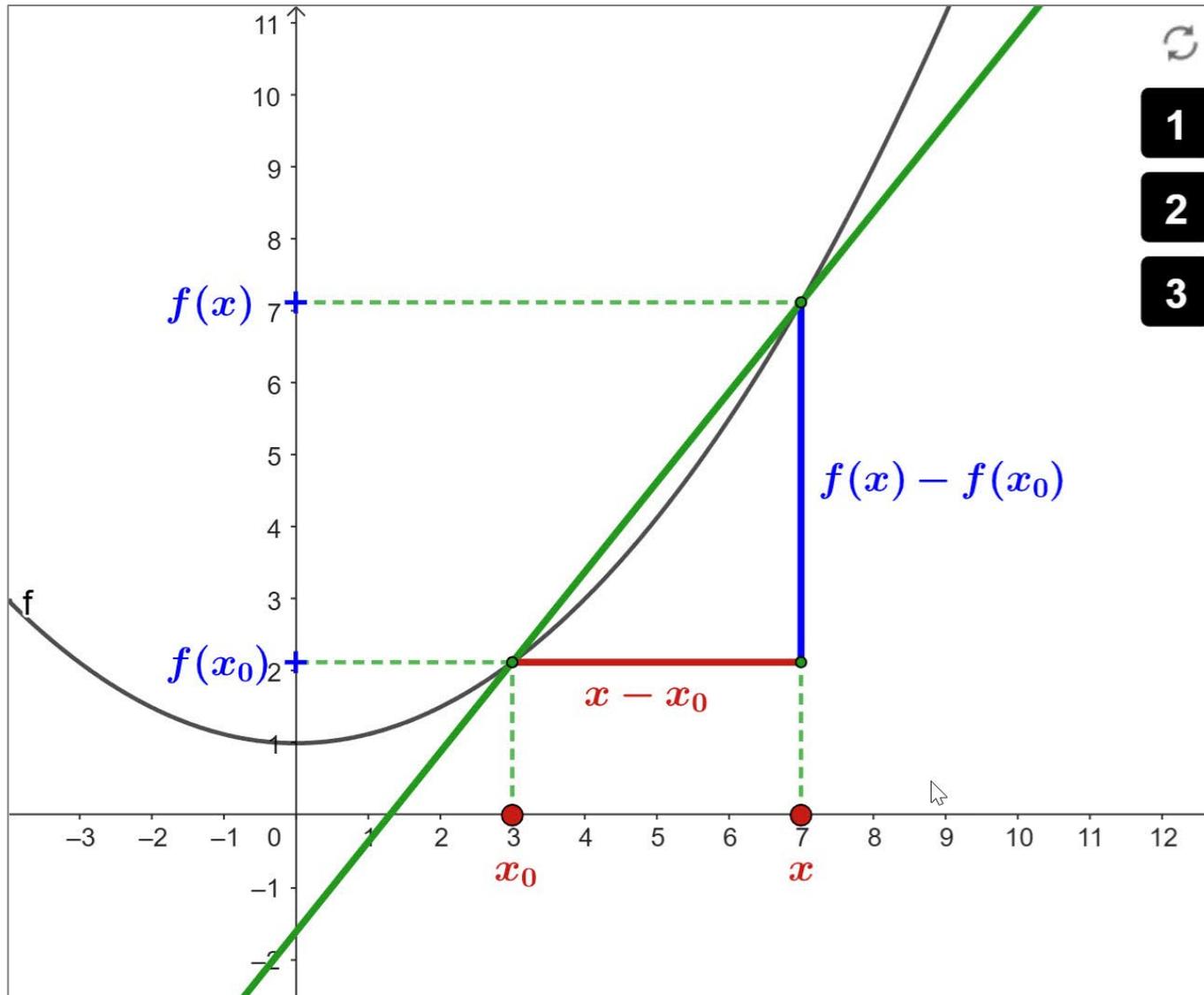
Absolute Änderung der x -Werte

$$x - x_0 = 7 - 3 = 4$$

Absolute Änderung der Funktionswerte

$$f(x) - f(x_0) = 6.25 - 3.25 = 3$$

Lokale Steigung als Tangentensteigung



- 1
- 2
- 3

$$f(x) = \frac{1}{8} x^2 + 1$$

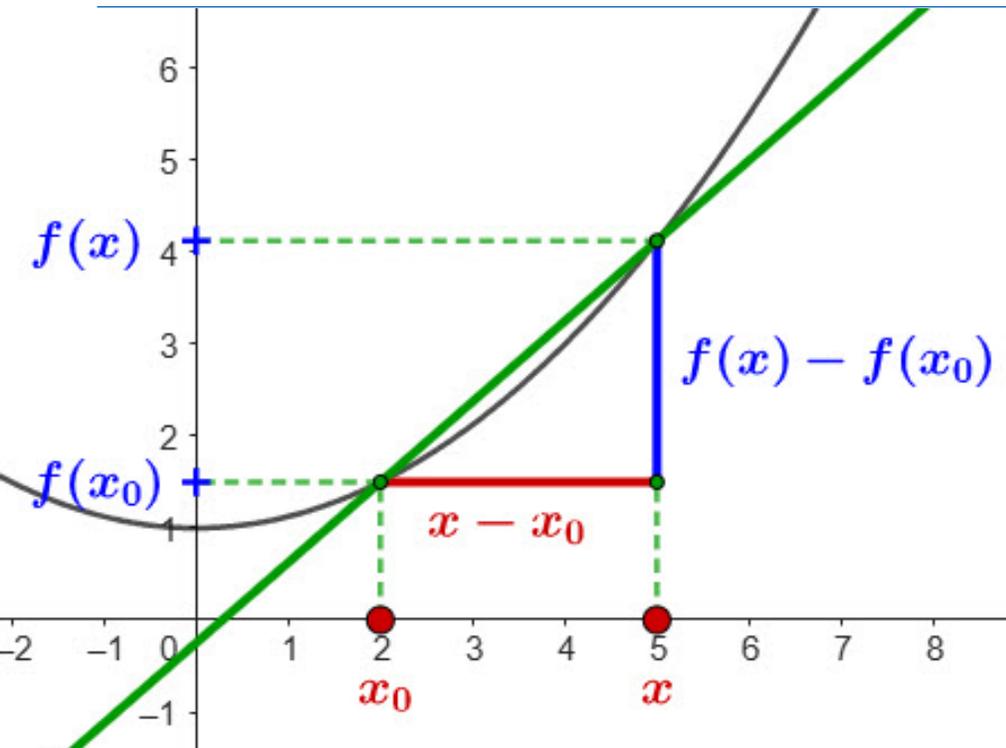
- Zuordnung
- Absolute Änderung
- Änderungsrate (relative Änderung)

Absolute Änderung der x-Werte
 $x - x_0 = 7 - 3 = 4$

Absolute Änderung der Funktionswerte
 $f(x) - f(x_0) = 7.125 - 2.125 = 5$

Änderungsrate (Relative Änderung)
 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{7.125 - 2.125}{7 - 3} = 1.25$

- Sekante
- Tangente



Sprechweise

Die Sekantensteigung kommt der Zahl $\frac{1}{8}$ beliebig nahe, wenn x gegen $x_0 = 2$ strebt.

Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + 1$

Gesucht: Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 2$

Sekantensteigung

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot x^2 + 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot 2^2 + 1\right)}{x - 2} \\ &= \frac{\frac{1}{8} \cdot (x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} \\ x \neq 2 &\rightarrow = \frac{1}{8} \cdot (x + 2) \end{aligned}$$

Tangentensteigung

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{8} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{8} \cdot (x + 2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definition: Differenzierbarkeit und Ableitung

Definition

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Der Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit

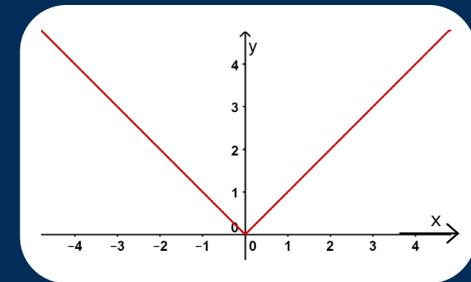
$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bezeichnet.

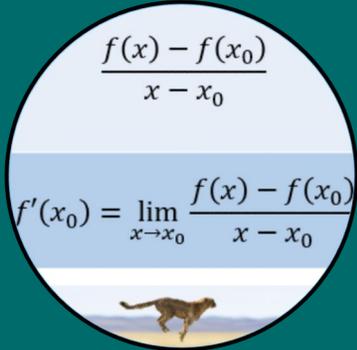
Bemerkungen

- Der Grenzwert muss derselbe sein, unabhängig davon, ob man sich der Stelle x_0 von links oder von rechts nähert. Nur in diesem Fall ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.

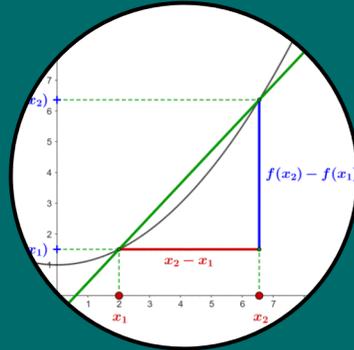
- Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist z. B. an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.



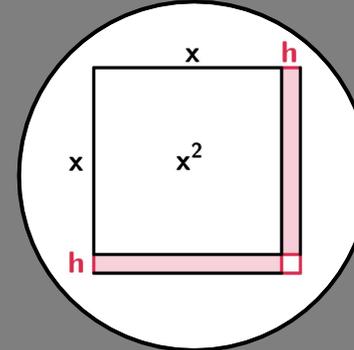
- Genau genommen muss x_0 im Inneren der Definitionsmenge \mathbb{D} von f liegen, weil sonst nur eine einseitige Annäherung an x_0 möglich ist.



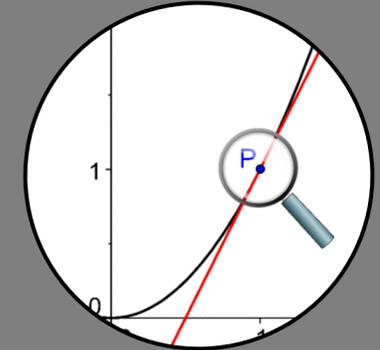
**Lokale
Änderungsrate**



**Tangenten-
steigung**



**Verstärkungs-
faktor**



**lokale lineare
Approximation**

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de

mategnu.de



RPTU