Check-in

https://mategnu.de/basis/checkin

MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie
an **G**rundvorstellungen orientiert
nachhaltig **u**nterrichten

MaTeGnu Abschluss Basisqualifizierung
Einstieg in GeoGebra

Jürgen Roth

20.05.2025 MaTeGnu-Basisqualifizierung, Modul 5, Speyer

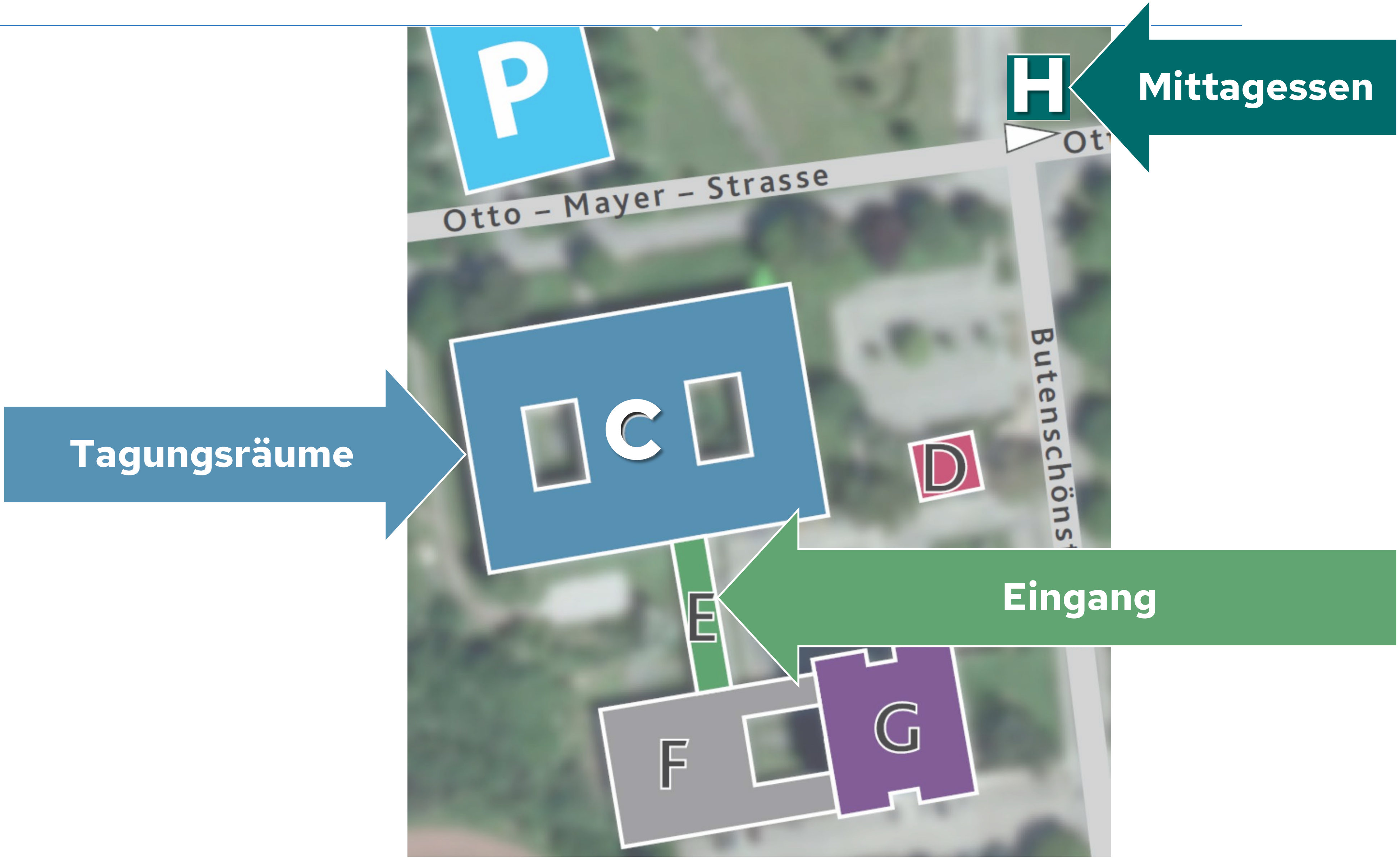
GeoGebra-Institut Landau (RLP)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Orientierung

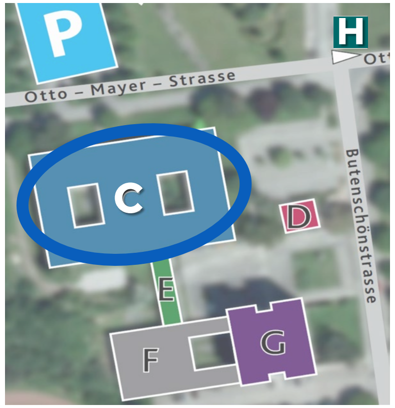
MaTeGnu

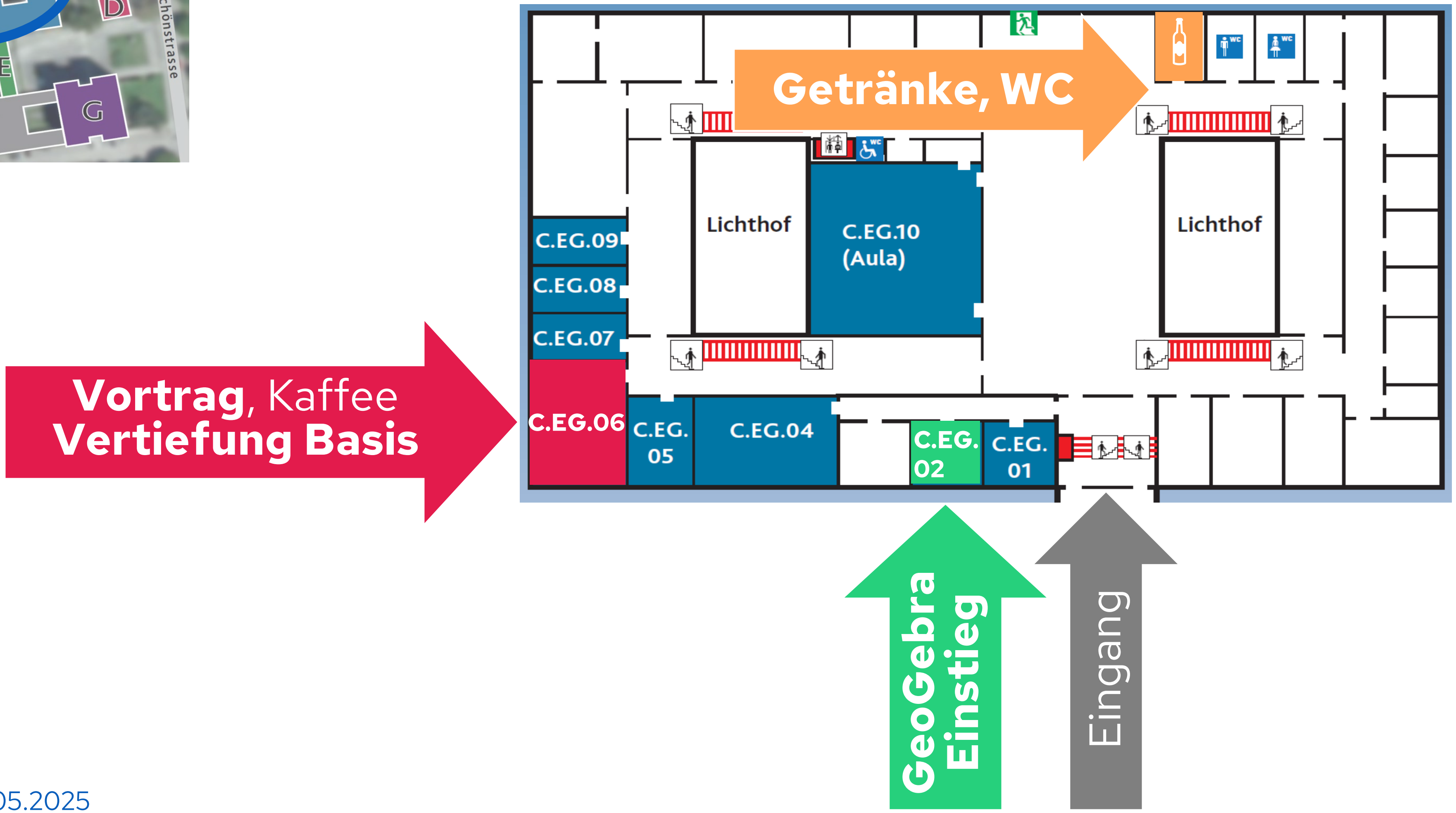


RPTU

Orientierung

MaTeGnu





Gebäude C
Erdgeschoss

RPTU

Zeitplan heute

MaTeGnu

Zeit	Aktivität		Raum
9:30–10:15	**Begrüßung und Vortrag**		C.EG.06
10:15-10:30	Wechselpause		
10:30-12:00	**Workshop-Phase I:**	**Einstieg: I. Schritte mit GeoGebra** oder **Vertiefung Basisqualifizierung I** GeoGebra-Simulationen selbst erstellen	C.EG.02 C.EG.06
12:00-13:00	Mittagspause		
13:00-14:30	**Workshop-Phase II:**	**Einstieg: II. Schritte mit GeoGebra** oder **Vertiefung Basisqualifizierung II** GeoGebra als Werkzeug in Stochastik	C.EG.02 C.EG.06
14:30-14:45	Wechselpause		
14:45-16:15	**Workshop-Phase III:**	**Einstieg: III. Schritte mit GeoGebra** oder **Vertiefung Basisqualifizierung III** Veränderte Aufgaben mit und durch GeoGebra	C.EG.02 C.EG.06
16:15-16:30	**Abschluss**		C.EG.06

MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie
an **G**rundvorstellungen orientiert
nachhaltig **u**nterrichten

Der Beitrag von GeoGebra zur Verständnisorientierung im MU

Jürgen Roth

20.05.2025 MaTeGnu-Basisqualifizierung, Modul 5, Speyer

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Der Beitrag von GeoGebra zur Verständnisorientierung im MU

1. Bausteine der Verständnisentwicklung
2. Beispiel: Konvergieren Folgen?
3. Beispiel: Kann man Exponential- & Logarithmusfunktionen ableiten?

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Der Beitrag von GeoGebra zur Verständnisorientierung im MU

1. **Bausteine der Verständnisentwicklung**
2. Beispiel: Konvergieren Folgen?
3. Beispiel: Kann man Exponential- & Logarithmusfunktionen ableiten?

Bausteine der Verständnisentwicklung

GeoGebra

Grundvorstellung

- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

Begriffe rund ums Verständnis

Grundfertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

Grundwissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Sätze, …)
- sollte auswendig gewusst werden

Inhalts- und Unterstützungsdimension

MaTeGnu

Unterstützung: Grad der Fokussierungshilfe / Inhalt: Zweck des MMS-Einsatzes	**Digitale Lernumgebung** Vorgeg. Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)	**Hybrid** Ergänzb. Konfiguration (einzelne Fokussierungshilfen)	**Digitales Werkzeug** leeres, unstrukturiertes MMS
Mit Änderungen argumentieren	☑		(☑)
Beweisidee vermitteln	☑		(☑)
Verständnisgrundlage für Begriffe und ihre Eigenschaften schaffen	☑	☑	(☑)
Experimentelles Arbeiten ▪ Entdecken von Zusammenhängen	☑	☑	☑
▪ Ideen finden i. Problemlöseprozess		☑	☑
Reflexion von Problemlöseprozessen	☑		☑
Selbständiges Problemlösen			☑

Roth, J. (2008). Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen? In U. Kortenkamp et al. (Hrsg.), *Informatische Ideen im MU*. (S. 131-138). Franzbecker.

RPTU

MaTeGnu

Der Beitrag von GeoGebra zur Verständnisorientierung im MU

1. Bausteine der Verständnisentwicklung
2. Beispiel: **Konvergieren Folgen?**
3. Beispiel: Kann man Exponential- & Logarithmusfunktionen ableiten?

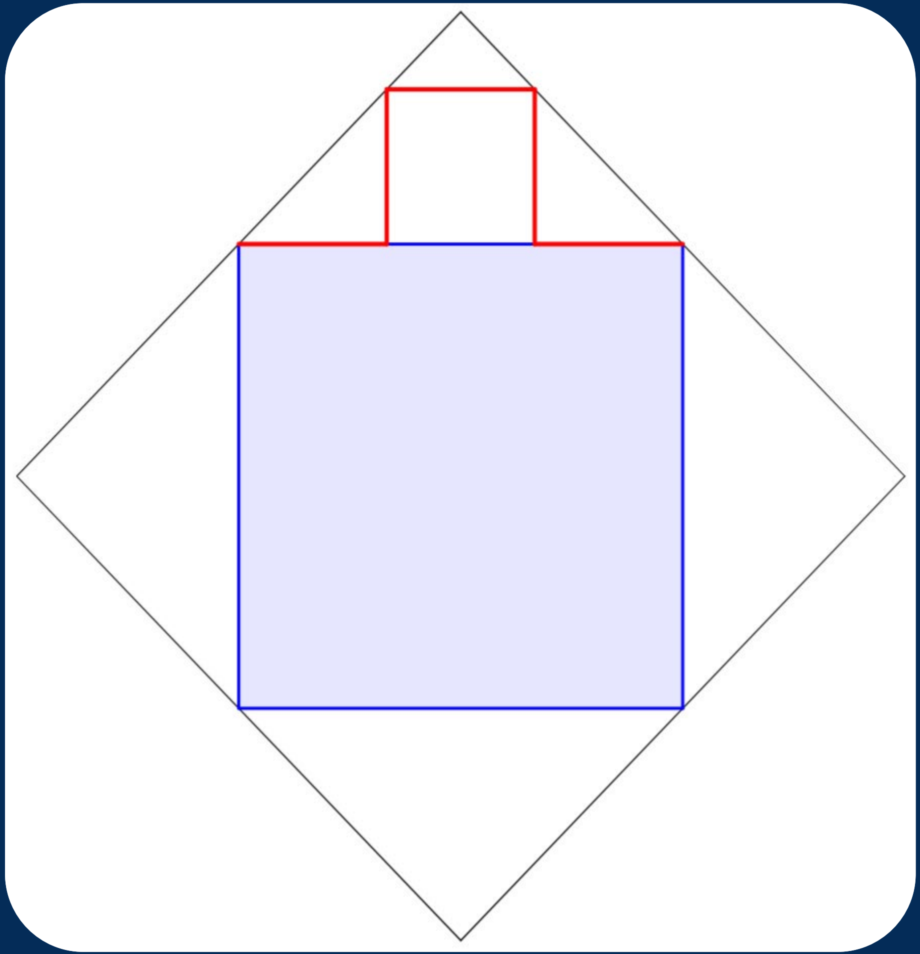
Konvergente und divergente Folgen

MaTeGnu

Figuren-Folge

Die Figuren entstehen aus dem blauen Quadrat schrittweise wie folgt:

- Jede bisherige Kante der Länge a_n wird gedrittelt.
- Das mittlere Drittel wird parallel zur bisherigen Kante um $\frac{a_n}{3}$ nach außen verschoben.
- Durch die Ergänzung von zwei weiteren Kanten der Länge $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$ bei $\frac{1}{3}a_n$ bzw. $\frac{2}{3}a_n$, die senkrecht auf der alten Kante stehen, wird die Figur geschlossen.
- Dadurch ergibt sich je alter Kante a_n eine neue Teilfläche $a_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n}{3}\right)^2$.
- Zudem wird dadurch jede alte Kante a_n durch fünf neue Kanten a_{n+1} ersetzt.

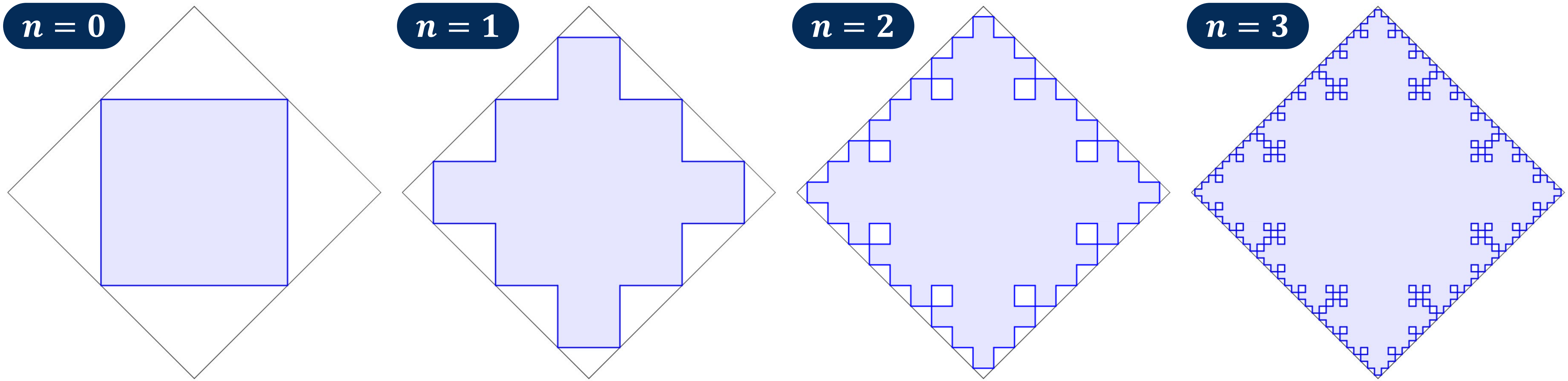


RPTU

Konvergente und divergente Folgen

MaTeGnu

Definition: Eine Folge ist eine Funktion, die jedem Element der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ genau ein Element einer Zielmenge $\boldsymbol{Z}$ zuordnet: $\mathbb{N} \to \boldsymbol{Z}, n \mapsto a_n$



a_n: Folge der Flächeninhalte der Figuren

f_n: Folge der Figuren

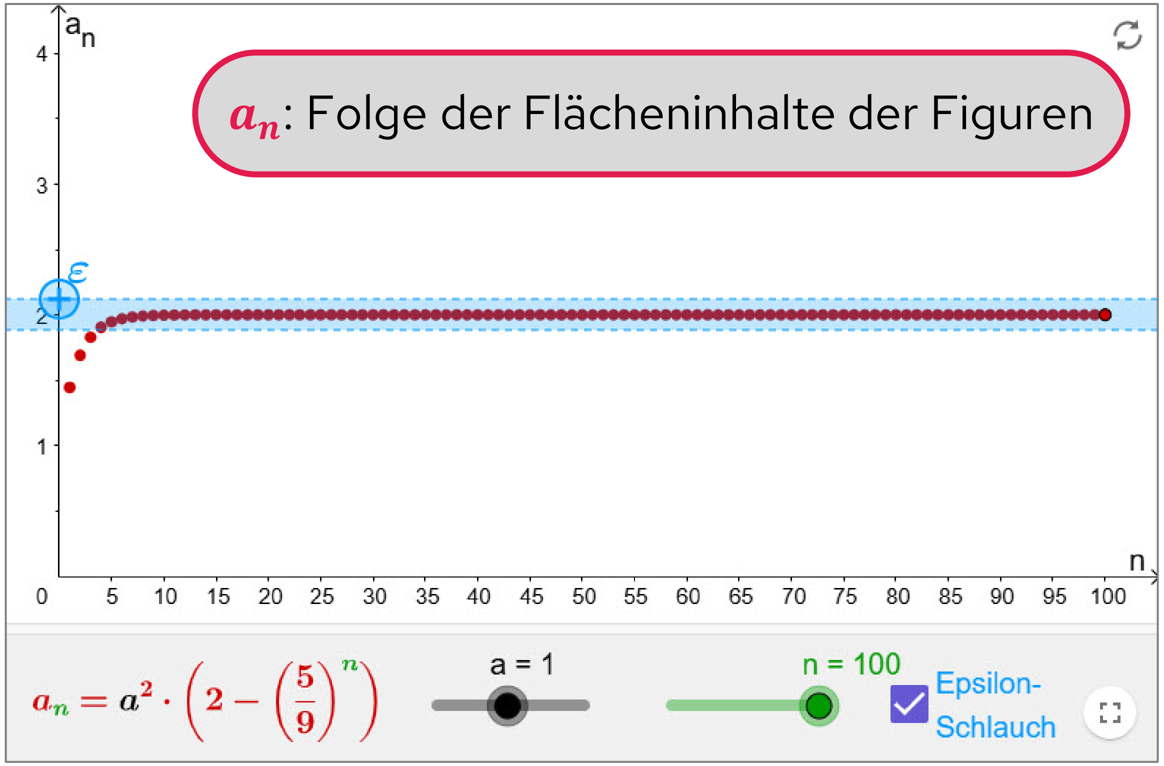
u_n: Folge der Umfänge der Figuren

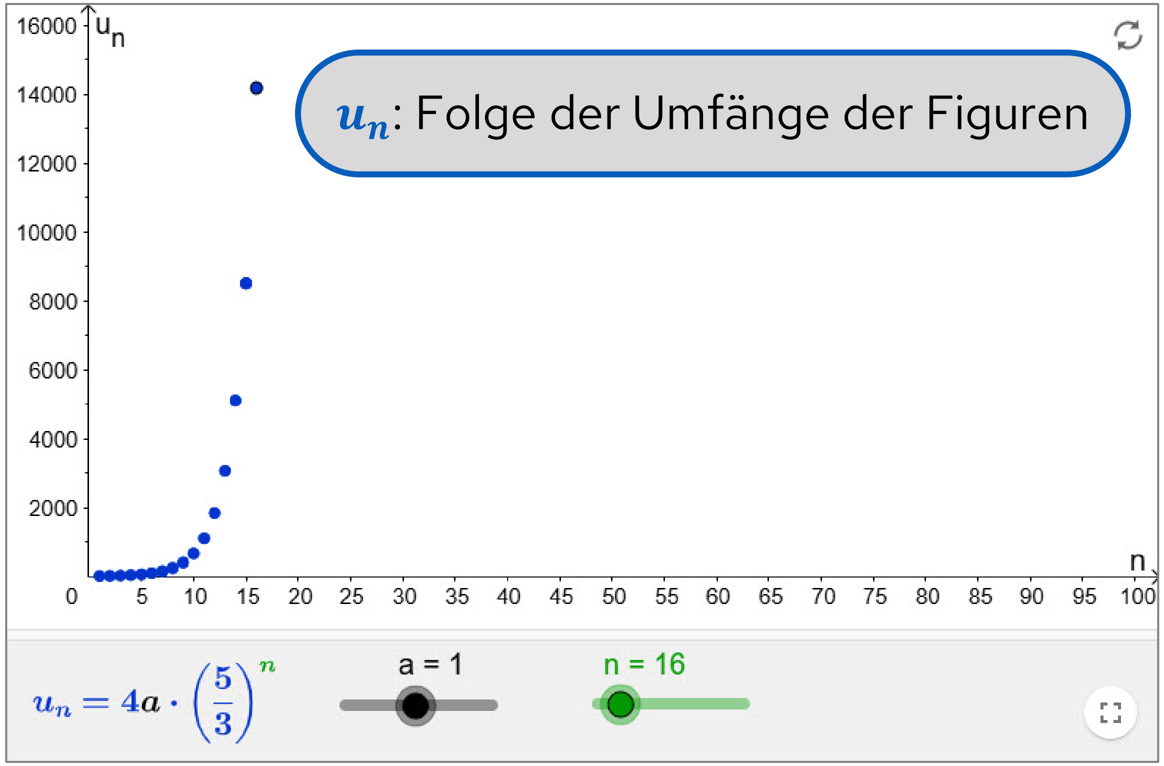
Konvergente und divergente Folgen

MaTeGnu

Definition: Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent gegen** a, wenn es zu jeder Toleranz $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

a heißt dann **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$





RPTU

Grenzwertbegriff: Grundvorstellungen

MaTeGnu

Annäherungsvorstellung
Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Umgebungsvorstellung
Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

Objektvorstellung: Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte oder geometrische Objekte – angesehen, die durch eine Folge – etwa eine Zahlenfolge oder eine Folge von geometrischen Objekten – konstruiert oder definiert werden.

 Vgl. Greefrath, G. et al. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer Spektrum, 103-107

Sprechweisen für Grenzprozesse

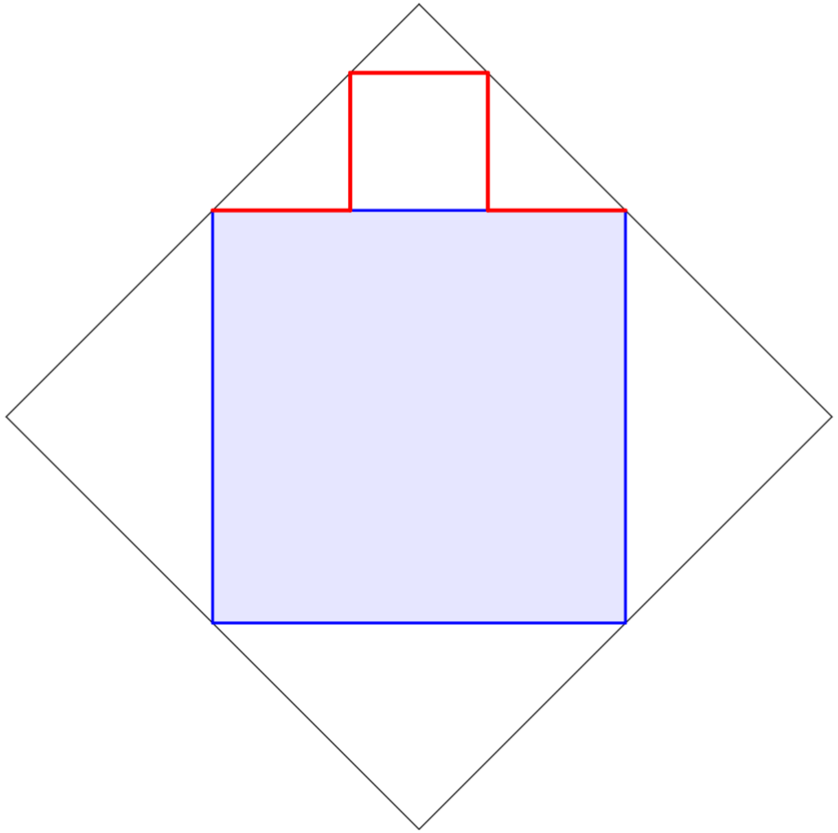
MaTeGnu

Aufgabe: Konvergenz von $a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ für $n \to \infty$: Welche Sprechweisen sind dafür geeignet?

Sprechweisen	Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung
„$a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt dem Wert 2 beliebig nahe, wenn n gegen ∞ läuft.“ (1)	(1) Ohne Einschränkung geeignet.
„$a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ strebt gegen 2 für n gegen ∞.“ (2)	(2) Ohne Einschränkung geeignet.
„ $a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt dem Wert 2 immer näher, wenn n gegen ∞ läuft.“ (3)	(3) Problematisch! $2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt auch der 3 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. (1))!
„ $a_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ kommt dem Wert 2 immer näher, ohne ihn jemals zu erreichen.“ (4)	(4) Grenze zur inhaltlichen Verfälschung überschritten! Auch konstanten Folgen sind konvergent.

Konvergente und divergente Folgen

MaTeGnu



Folge U_n der Umfänge

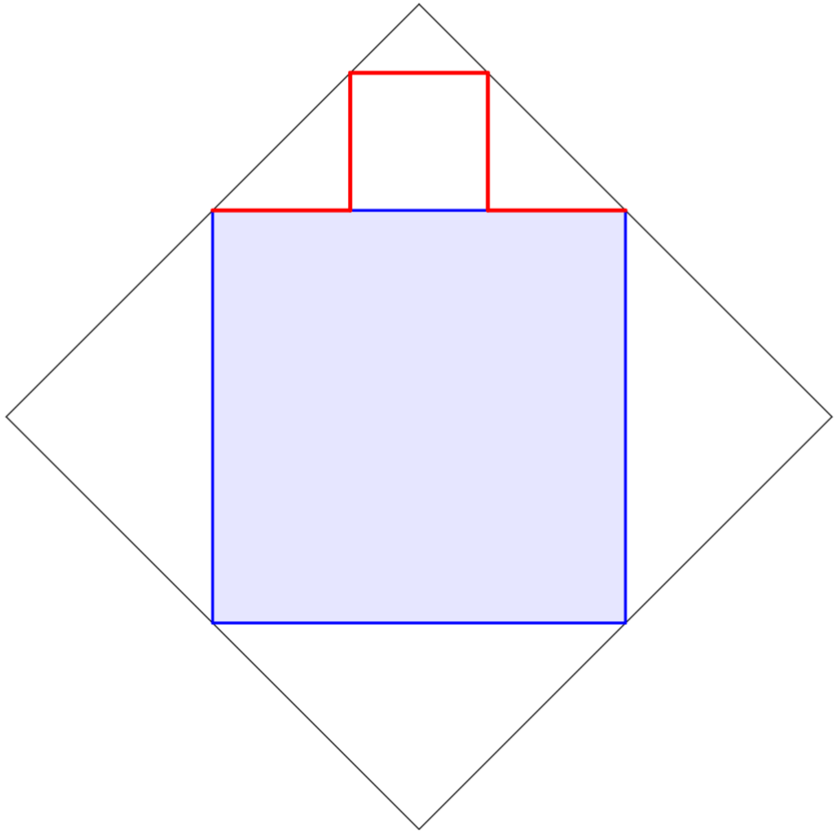
- $U_0 = 4 \cdot a = 4 \cdot 1\text{ cm} = 4\text{ cm}$
- $U_1 = U_0 + \frac{2}{3} \cdot U_0 = U_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = U_0 \cdot \frac{5}{3}$
- $U_2 = U_1 \cdot \frac{5}{3} = \left(U_0 \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{5}{3} = U_0 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2$
- $U_n = U_0 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Folge A_n der Flächeninhalte

- $A_0 = a^2 = (1\text{ cm})^2 = 1\text{ cm}^2$
- $A_1 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot a^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3^2}\right)$
- $A_2 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{a}{3^2}\right)^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3^2} + \frac{4 \cdot 5}{(3^2)^2}\right)$
- $A_3 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 5^0}{(3^1)^2} + \frac{4 \cdot 5^1}{(3^2)^2} + \frac{4 \cdot 5^2}{(3^3)^2}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{3} \frac{\left(4 \cdot 5^{k-1}\right)}{3^{2 \cdot k}}\right)$
- $A_n = a^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(4 \cdot 5^{k-1}\right)}{3^{2 \cdot k}}\right) = a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{5^{k-1}}{3^{2 \cdot k}}\right)$

Konvergente und divergente Folgen

MaTeGnu



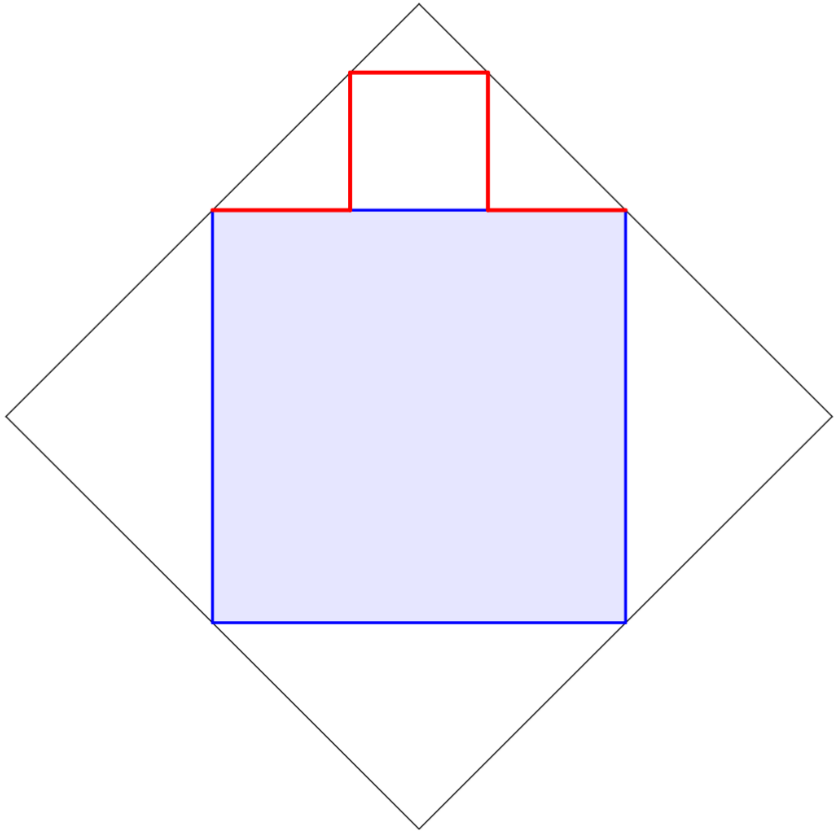
Folge A_n der Flächeninhalte (einfachere Darstellung)

$$\begin{aligned}
A_n &= a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{5^{k-1}}{3^{2\cdot k}}\right) \\
&= a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{5^k}{3^{2\cdot k}}\right)\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5^k}{9^k}\right)\right) \\
&= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \left[\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k\right) - \left(\frac{5}{9}\right)^0\right]\right) \\
&= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k}_{\text{geom. Reihe}} - \frac{4}{5}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{9}} - \frac{4}{5}\right) \\
&= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}\right) - \frac{4}{5}\right) \\
&= a^2 \cdot \left(1 + \frac{9}{5} - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1} - \frac{4}{5}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{5} - \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) \\
&= a^2 \cdot \left(2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

RPTU

Konvergente und divergente Folgen

MaTeGnu



Konvergenzverhalten

- **Folge U_n der Umfänge divergiert für $n \to \infty$**

$$U_n = 4 \cdot a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot a \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{5}{3}}_{>1}\right)^n}_{\to\infty \text{ für } n\to\infty} = \infty$$

- **Folge A_n der Flächeninhalte konvergiert für $n \to \infty$**

$$A_n = a^2 \cdot \left(2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a^2 \cdot \left(2 - \underbrace{\left(\underbrace{\frac{5}{9}}_{0<\frac{5}{9}<1}\right)^n}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}\right) = a^2 \cdot 2$$

 https://www.geogebra.org/m/jythrpug

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Der Beitrag von GeoGebra zur Verständnisorientierung im MU

1. Bausteine der Verständnisentwicklung
2. Beispiel: Konvergieren Folgen?
3. Beispiel: **Kann man Exponential- & Logarithmusfunktionen ableiten?**

Ableitung von Exponentialfunktionen

MaTeGnu

1. Schritt

Für die Exponentialfunktionen

$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$f_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Eigenschaft von Exponentialfunktionen

Für Exponentialfunktionen

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ gilt:

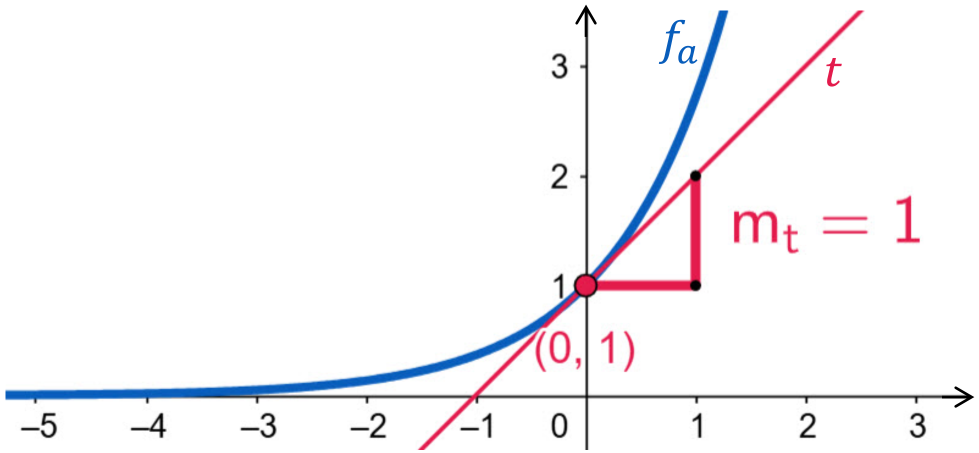
$$f_a'(x) = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f_a(x) \cdot f_a{}'(0)$$

oder kurz $\quad f_a' = f_a'(0) \cdot f_a$

2. Schritt

Der Ausdruck $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ kann als Ableitung $f_a{}'$ an der Stelle 0 gedeutet werden, denn es gilt:

$$f_a'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$



RPTU

Ableitung der natürl. Exponentialfunktion

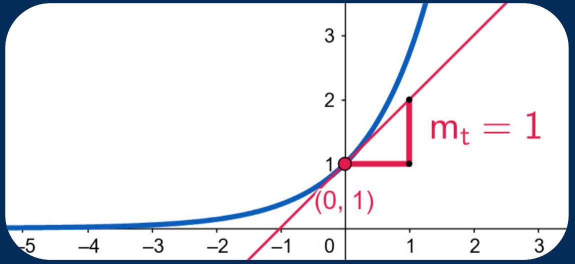
MaTeGnu

Eigenschaft von Exponentialfunktionen

$$f_a'(x) = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f_a(x) \cdot f_a{}'(0)$$

3. Schritt

- Der Faktor $f_a'(0)$ ist die Steigung des Graphen der Exponentialfunktion f_a im Punkt $(0|1)$.
- Wenn a den Bereich $\mathbb{R}^+$ durchläuft, nimmt die Steigung $f_a'(0)$ im Punkt $(0|1)$ jeden reellen Wert an und ist umso größer, je größer a ist.
- $f_a'(0)$ wächst also mit größer werdendem a streng monoton. Es gibt folglich genau einen Wert für a, bei dem die Steigung des Graphen der Exponentialfunktion f_a im Punkt $(0|1)$ den Wert 1 hat.



Definition: Eulersche Zahl e

Der Wert für a, bei dem die Steigung des Graphen der Exponentialfunktion f_a im Punkt $(0|1)$ den Wert 1 hat, heißt **Eulersche Zahl e**.

Ergebnis

- Die **Eulersche Zahl e** ist also eindeutig dadurch bestimmt, dass für $f_e(x) = e^x$ gilt:

$$f_e'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

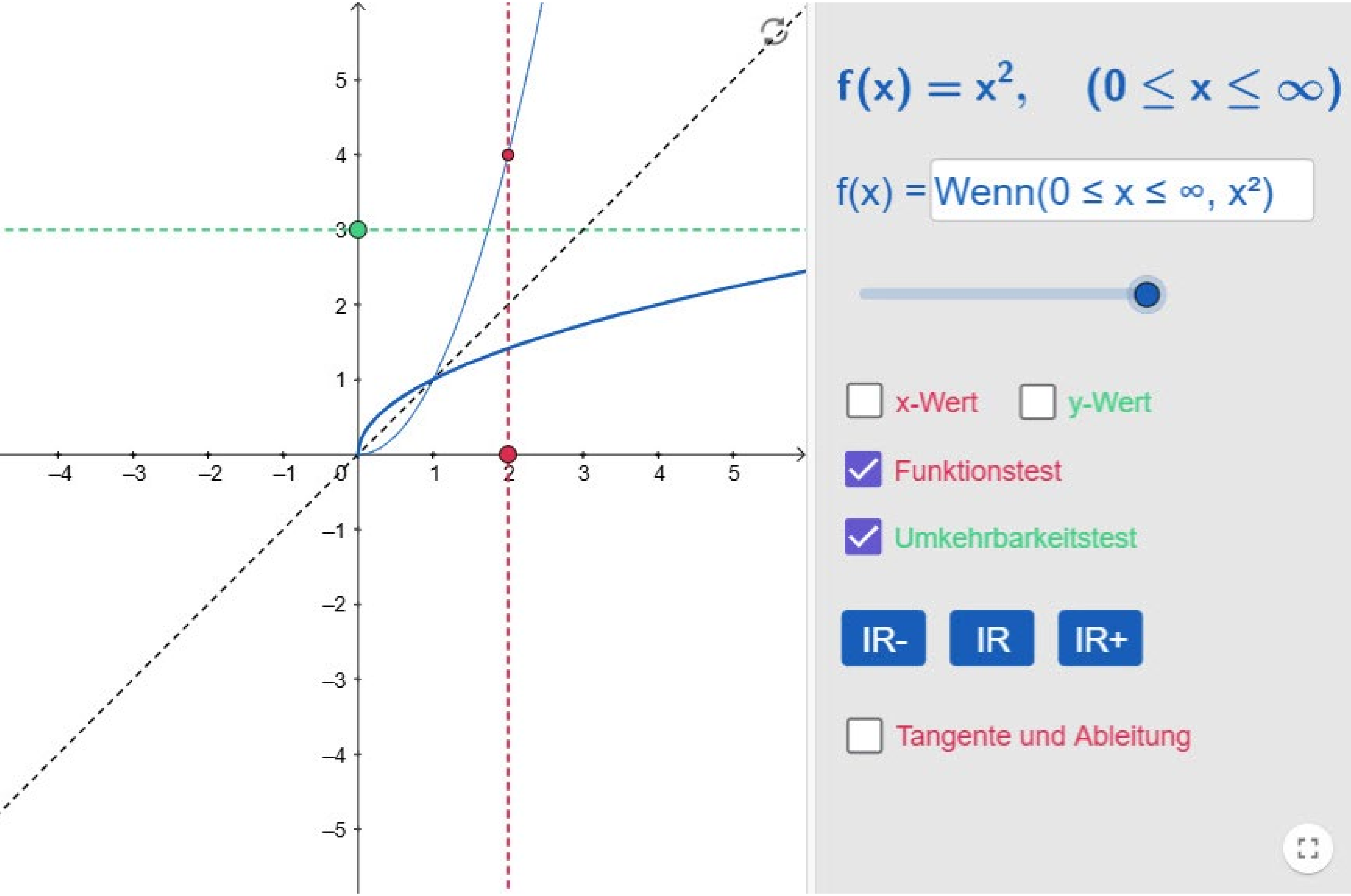
- Damit folgt: $f_e'(x) = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

Ableitung der natürl. Exponentialfunktion

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$ ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $(e^x)' = e^x$.

Umkehrfunktion?!

MaTeGnu



Schritte zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1}, wenn die Funktion f umkehrbar ist.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$.

1. Schritt: Funktionsgleichung nach x auflösen

$$y = x^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\sqrt{y} = |x| \overset{x \geq 0}{=} x$$

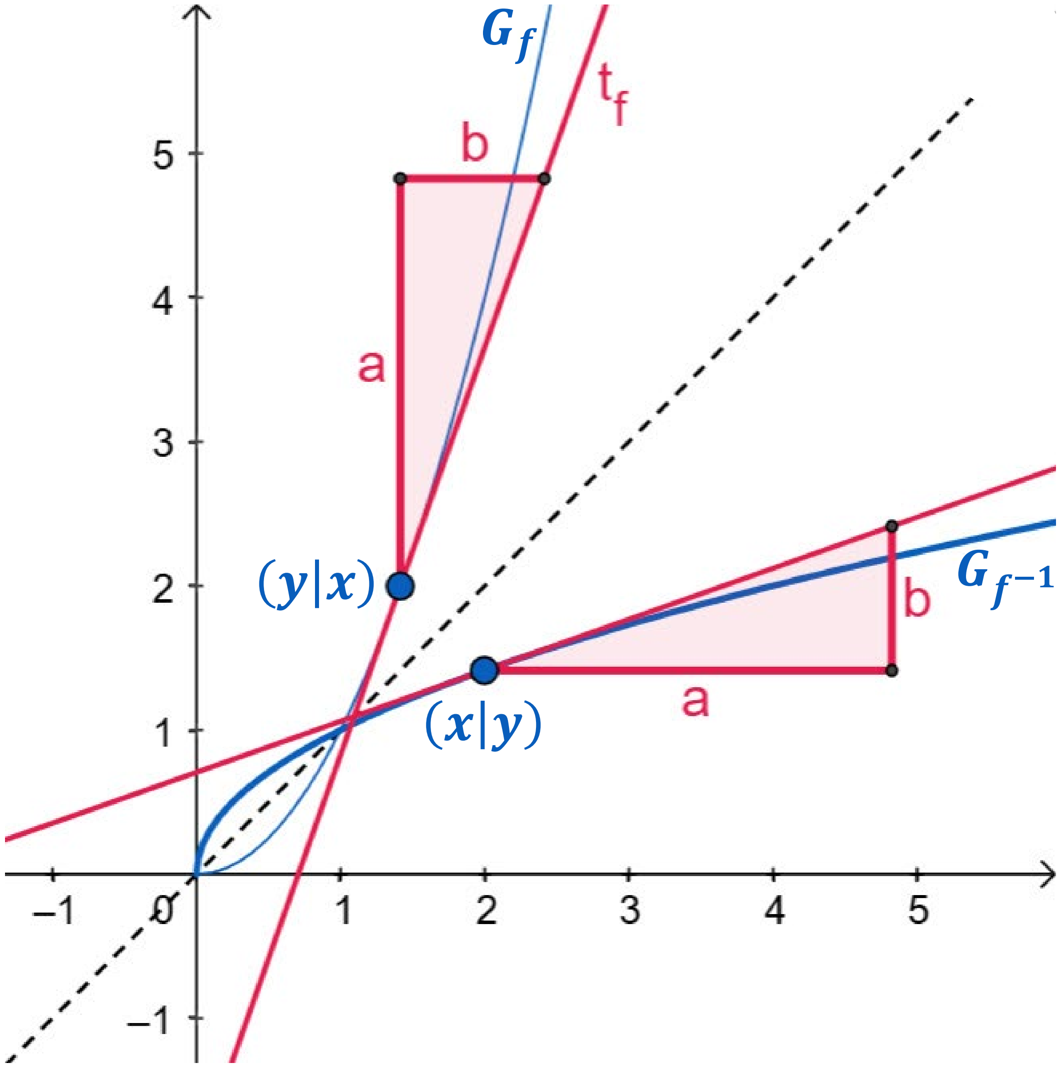
$$x = \sqrt{y}$$

2. Schritt: x und y vertauschen

$$y = \sqrt{x}$$

Roth, J. (2017). Zum y-Wert den x-Wert finden – Trigonometrische Funktionen umkehren. *Mathematik lehren 204*, 33-35
https://www.geogebra.org/m/uw7h8ymq

Ableitung der Umkehrfunktion



Ableitung der Umkehrfunktion: Geometrischer Zugang

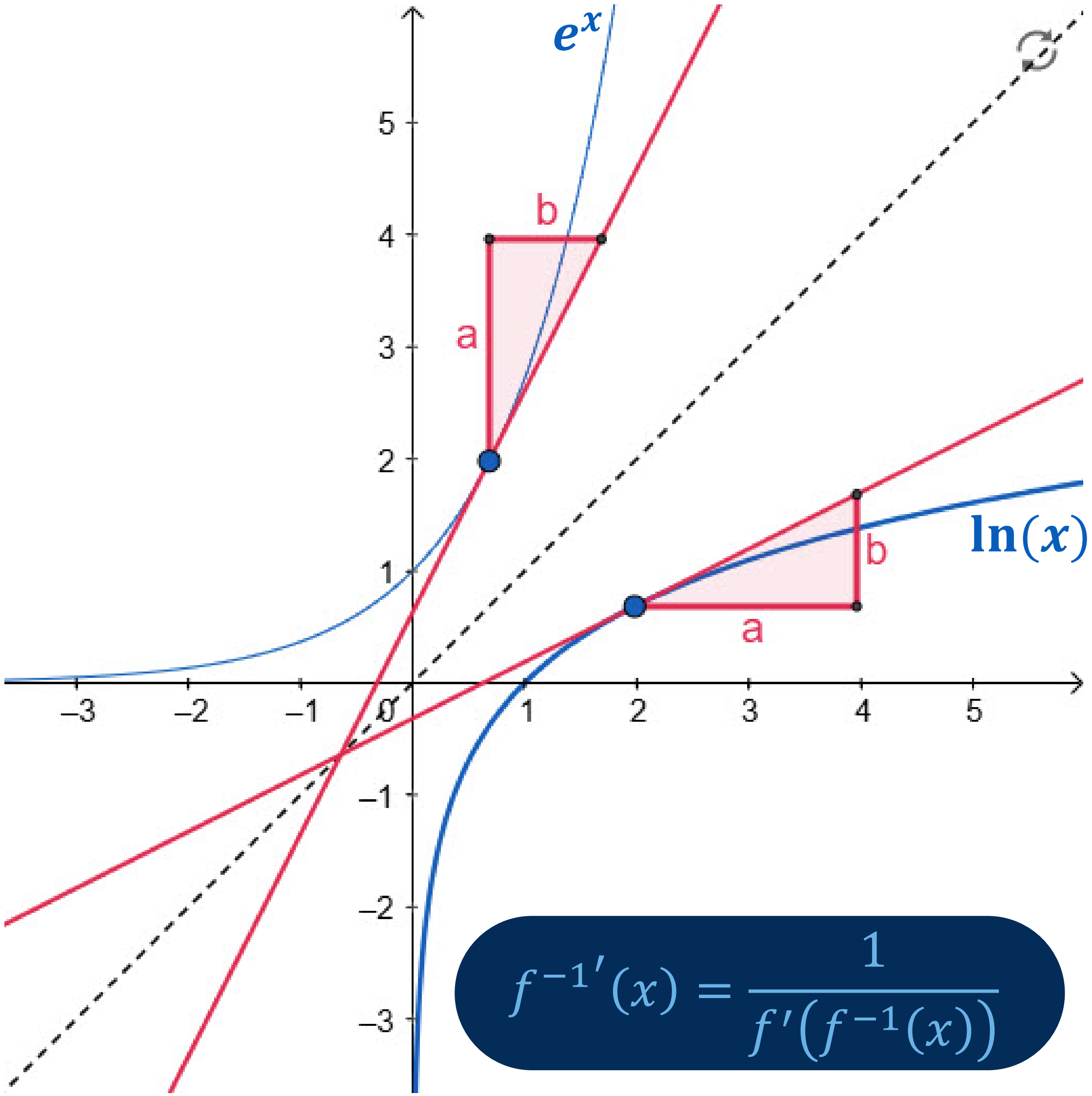
Wegen der Achsensymmetrie der Graphen der Funktion f und ihrer Umkehrfunktion f^{-1} gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Steigung von f^{-1} in einem Punkt $(x|y)$ und der Steigung von f im entsprechenden Punkt $(y|x)$ unter Nutzung der Tangentensteigungen $\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{a}{b}$:

- $f^{-1\prime}(x) = \frac{b}{a}$
- $f'(y) = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

MaTeGnu RPTU

Ableitung der Umkehrfunktion



$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Bemerkungen

- $\ln(x) := \log_e(x)$ ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion e^x.
- Aus der Regel für die Ableitung der Umkehr-funktion lässt sich durch Einsetzen direkt die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $\ln(x) := \log_e(x)$ bestimmen:

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

Die Funktion $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ist in ganz $\mathbb{R}^+$ differenzierbar mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Bausteine der Verständnisentwicklung

GeoGebra

Grundvorstellung

- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

Begriffe rund ums Verständnis

Grundfertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

Grundwissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Sätze, …)
- sollte auswendig gewusst werden

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
mategnu.de

RPTU

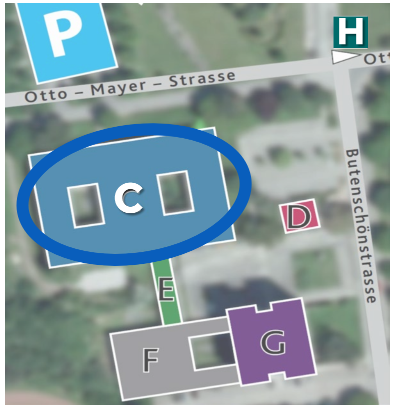
Zeitplan heute

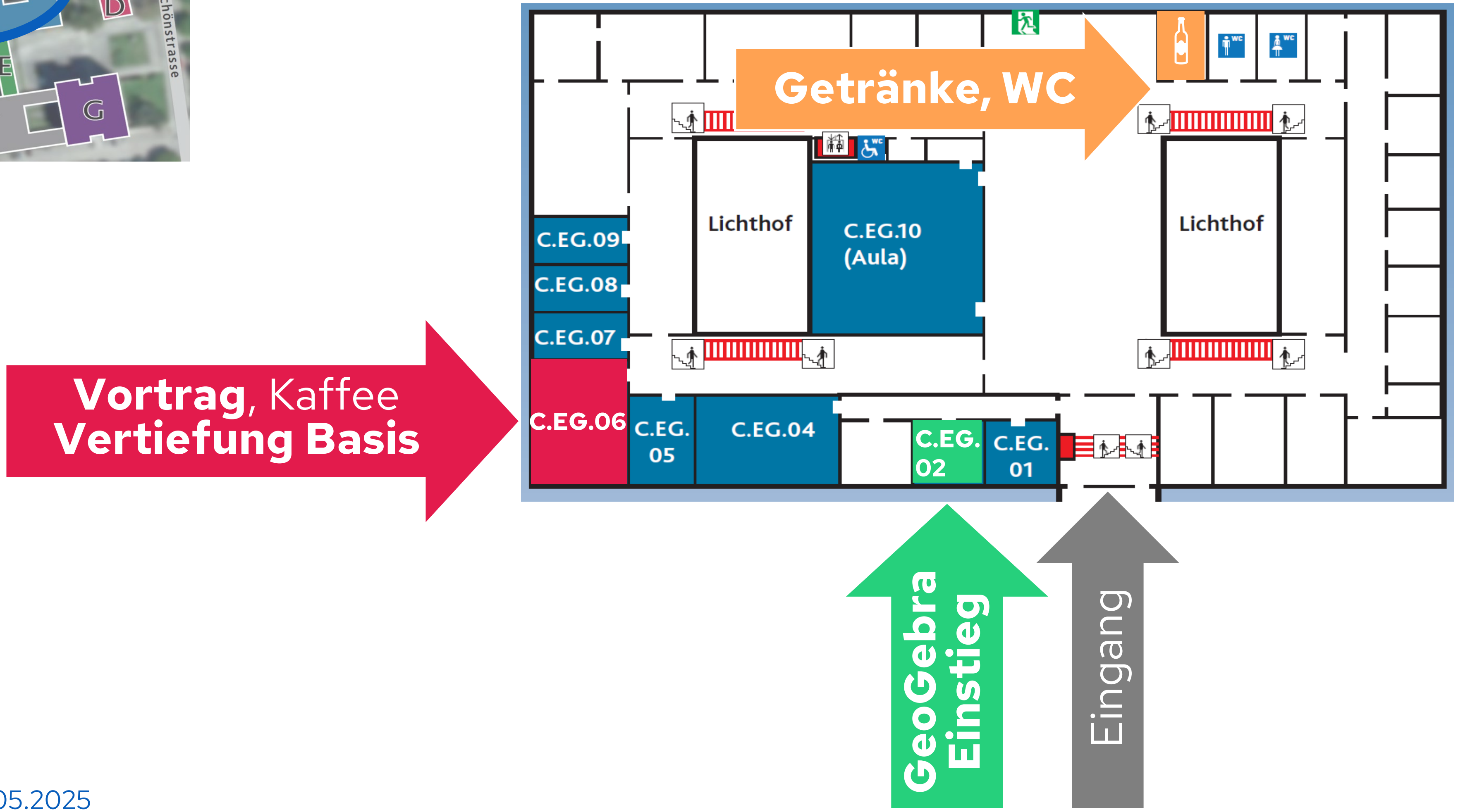
MaTeGnu

Zeit	Aktivität		Raum
9:30–10:15	**Begrüßung und Vortrag**		C.EG.06
10:15-10:30	Wechselpause		
10:30-12:00	**Workshop-Phase I:**	**Einstieg: I. Schritte mit GeoGebra** oder **Vertiefung Basisqualifizierung I** GeoGebra-Simulationen selbst erstellen	C.EG.02 C.EG.06
12:00-13:00	Mittagspause		
13:00-14:30	**Workshop-Phase II:**	**Einstieg: II. Schritte mit GeoGebra** oder **Vertiefung Basisqualifizierung II** GeoGebra als Werkzeug in Stochastik	C.EG.02 C.EG.06
14:30-14:45	Wechselpause		
14:45-16:15	**Workshop-Phase III:**	**Einstieg: III. Schritte mit GeoGebra** oder **Vertiefung Basisqualifizierung III** Veränderte Aufgaben mit und durch GeoGebra	C.EG.02 C.EG.06
16:15–16:30	**Abschluss**		C.EG.06

Orientierung

MaTeGnu





Gebäude C
Erdgeschoss

RPTU

Orientierung

MaTeGnu