Lehr-Lern-Labore

Bedeutung für die Lehrkräftebildung

Jürgen Roth

28.06.2024 Studienseminare Stuttgart, Karlsruhe & Esslingen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Zeitplan

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zeit	Inhalt	Raum
13:30-13:45	Ankommen, Begrüßung, Kennenlernen	I 1.08
13:45-14:15	Vorstellung Mathematisches Umweltlabor	I 0.07
14:15-14:20	Wechselpause	
14:20-15:00	Vorstellung Mathematik-Labor „Mathe ist mehr"	I 1.08
15:00-15:20	Kaffeepause	I 1.08
15:20-16:00	Auseinandersetzung mit zwei Laborstationen des Mathematik-Labors	I 1.08/I 1.07
16:00-16:20	Vorstellung ViviAn	I 1.08
16:20-16:45	Auseinandersetzung mit ViviAn-Vignetten	I 1.08
16:45-17:00	Abschlussreflexion	I 1.08

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

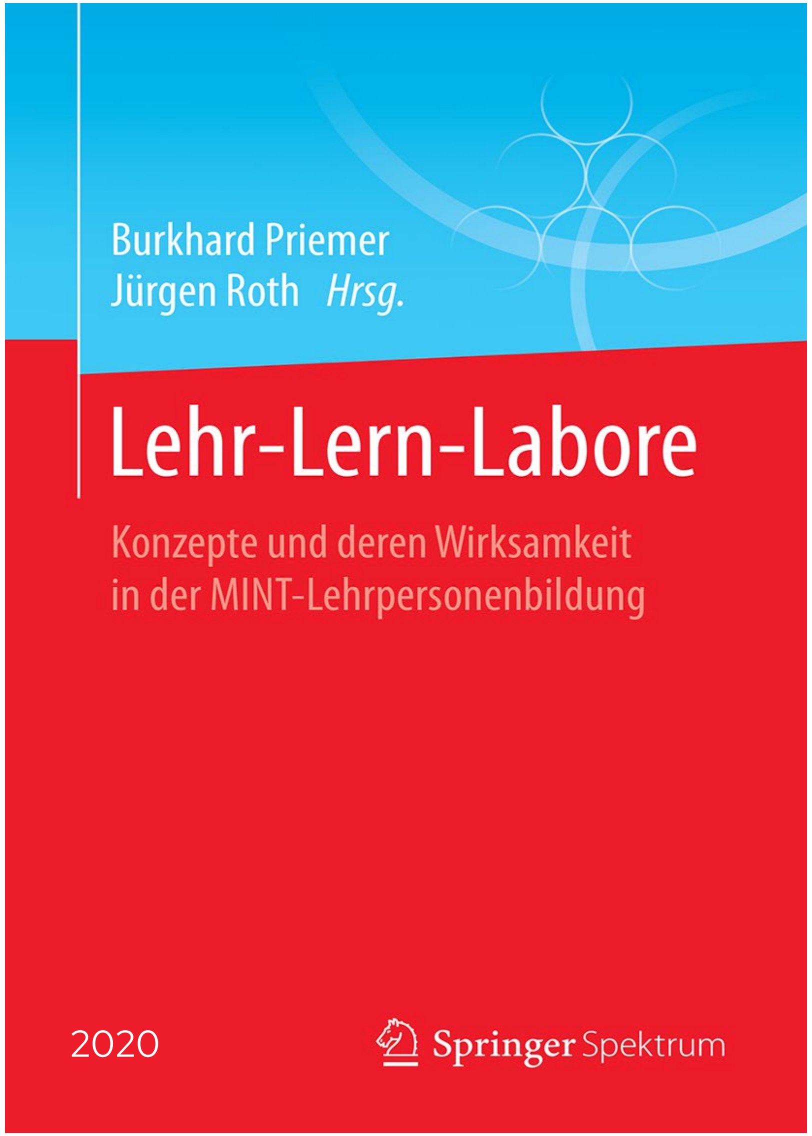
Lehr-Lern-Labore

Bedeutung für die Lehrkräftebildung

1. Lehr-Lern-Labore am Beispiel Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“
2. ViviAn – Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen
3. Lehr-Lern-Labore und ViviAn in der Lehrkräftebildung

1 Lehr-Lern-Labore am Beispiel Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Publikation: Lehr-Lern-Labore



Inhalte

I Lehr-Lern-Labore – Begriffsklärung und Ziele

II Konzepte und Veranstaltungsformate rund um Lehr-Lern-Labore

III Studien zur Professionalisierung von Lehramtsstudierenden im Rahmen von Lehr-Lern-Laboren

IV Wahrnehmung von Lehr-Lern-Labor-Angeboten durch Studierende

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung.
In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.
DOI: 10.1007/978-3-662-58913-7_5

Publikation: Die Zukunft des MINT-Lernens

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definitionen + Glossar
Herausgeberbeitrag

Aspekte eines Lehr-Lern-Labors

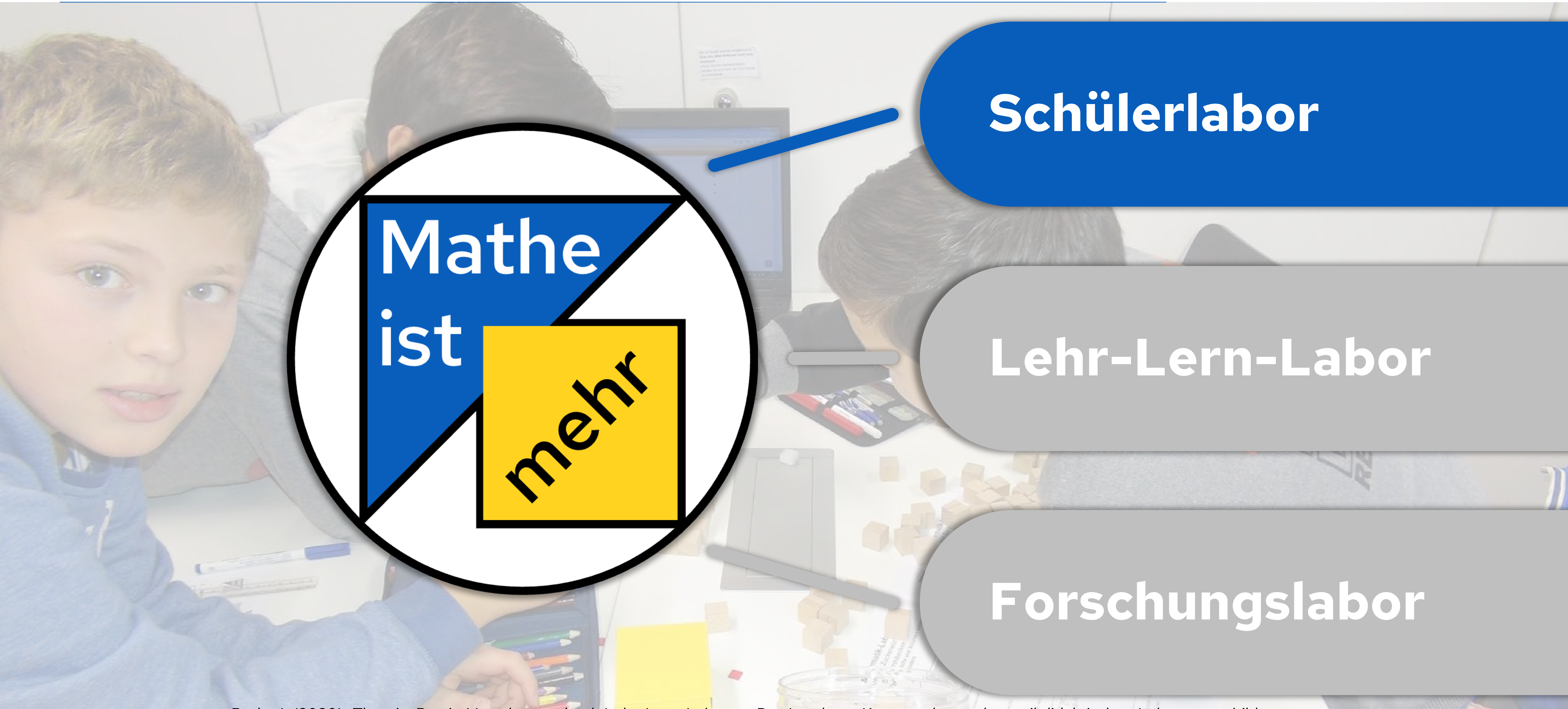
Schülerlabor

Lehr-Lern-Labor

Forschungslabor

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Aspekte eines Lehr-Lern-Labors



Mathe ist mehr

Schülerlabor

Lehr-Lern-Labor

Forschungslabor

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Schülerlabor Mathematik

RPTU | Mathe ist mehr
Mathematik-Labor
„Mathe ist mehr“

RPTU | Mathe ist mehr
Mathematik-Labor
„Mathe ist mehr“

https://mathe-labor.de

Startseite | Informationen | Stationen | Kontakt | Privat: MatheLabor@KARS

Ganze Schulklassen

Drei Doppelstunden

Ein Lehrplanthema

Infos

Konzept

Stationen

Kontakt

Laborstationen für Klasse 5 und 6

RPTU | Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Die Geburtstagsparty

Quader und Würfel

Ansehen

Mathematik und Kunst

Brüche und Bruchzahlen

Ansehen

Sternstunde Casino

Achsen- und Drehsymmetrie

Ansehen

Laborstationen für Klasse 5 und 6

RPTU | Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

WABI 1: Grundvorstellungen zu Brüchen

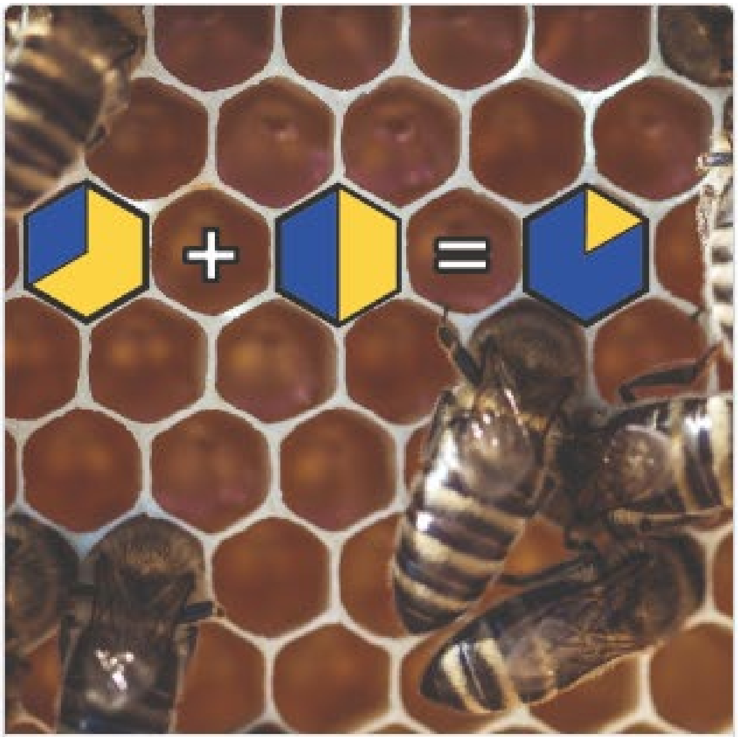
Bruchzahlen

Ansehen

WABI 1: Grundvorstellungen zu Brüchen

Bruchzahlen

Ansehen



WABI 2: Brüche addieren und subtrahieren

Bruchzahlen

Ansehen

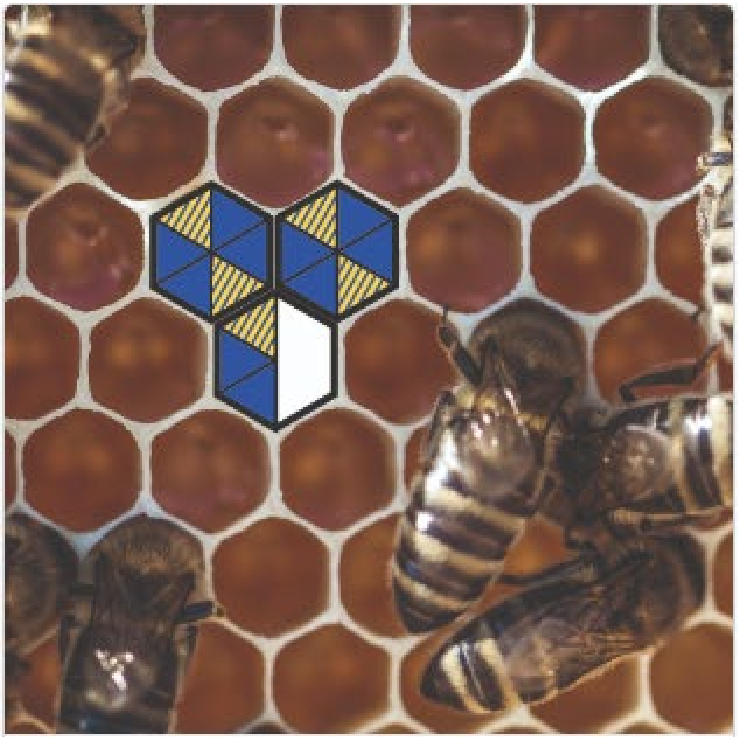
Laborstationen für Klasse 5 und 6

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

WABI 2: Brüche addieren und subtrahieren

Bruchzahlen

Ansehen



WABI 3: Multiplikation & Division von Bruchzahlen

Bruchzahlen

Ansehen

WABI 3: Multiplikation & Division von Bruchzahlen

Bruchzahlen

Ansehen

Laborstationen für Klasse 7 und 8

Aktivurlaub
Funktionale Zusammenhänge

Ansehen

Das Baumhaus-Projekt
Funktionale Zusammenhänge

Ansehen

Escape the Pirate Queen
Gleichungen

Ansehen

Laborstationen für Klasse 7 und 8

RPTU | Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Figurierte Zahlen

Terme und Termumformungen

Ansehen

M² - Mathe auf dem Maimarkt

Aufstellen und Umformen von Termen

Ansehen

Spieleabend

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ansehen

Laborstationen für Klasse 7 und 8

Unterwegs in Deutschland

Verkettung geometrischer

Abbildungen

Ansehen

Urlaub

Ganze Zahlen

Ansehen

Was ist gleich?

Gleichungen

Ansehen

Laborstationen für Klasse 9 und 10

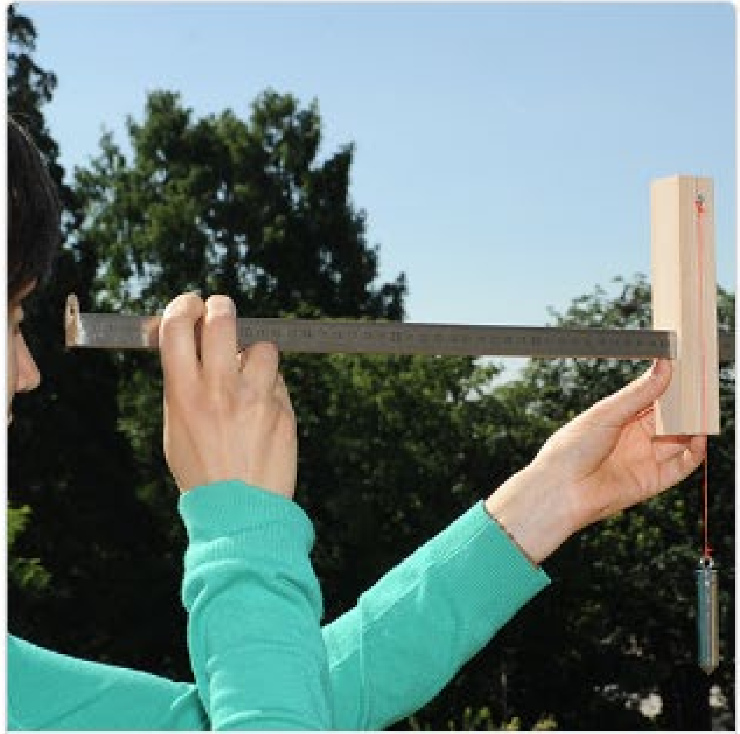
Die Spielshow

Stochastische Modelle -

Baumdiagramme und

Vierfeldertafeln

Ansehen



Jakobsstab & Co.

Strahlensätze

Ansehen

Landauer Kerwe

Exponentialfunktionen

Ansehen

Laborstationen für Klasse 9 und 10

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Löffelliste

Trigonometrie

Ansehen

Mathepark

Trigonometrische Funktionen

Ansehen

Olympia

Quadratische Funktionen

Ansehen

Pythagoras und der fiese Mathematikrat

Satz des Pythagoras beweisen

Ansehen

Laborstationen für Klasse 11 und 12

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Around the world

Funktionale Zusammenhänge der

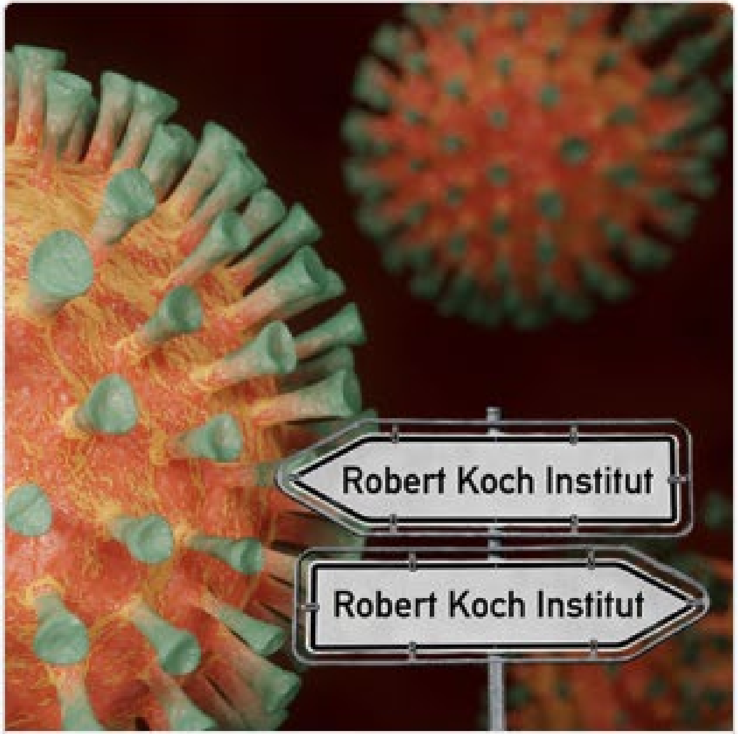
Sek I

Ansehen

Bedingt Sport Gesundheit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ansehen



Corona modellieren?

Epidemiologie kennenlernen

Ansehen

Laborstationen für Klasse 11 und 12

Freizeitpark

Differentialrechnung

Ansehen

Math for future

Modellieren im Bereich

Winkelberechnung

Ansehen

Mensch und Klima

Konfidenzintervalle

Ansehen

Laborstationen für Klasse 11 und 12

Stochastik-Triathlon

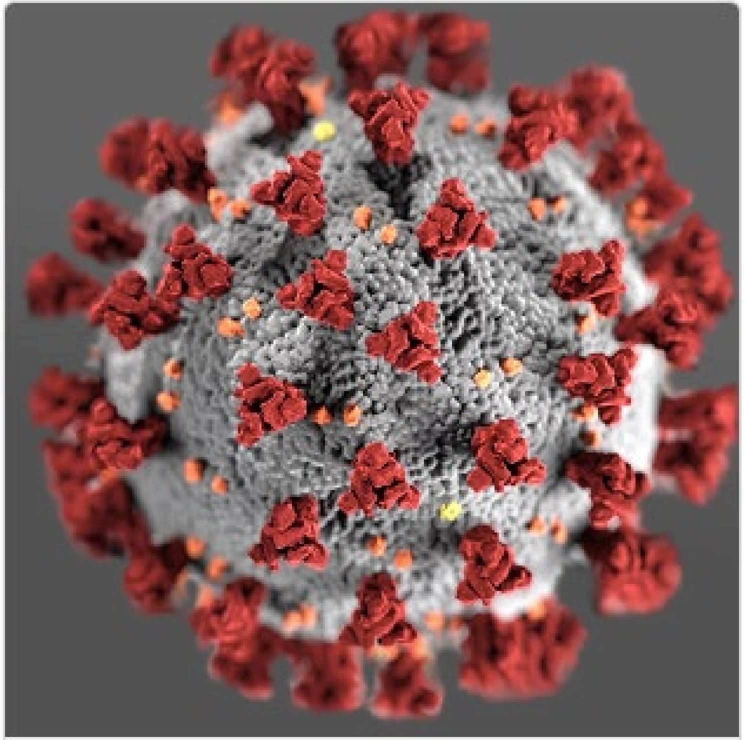
Einführung Stochastik

Ansehen

USA - ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Integralrechnung

Ansehen



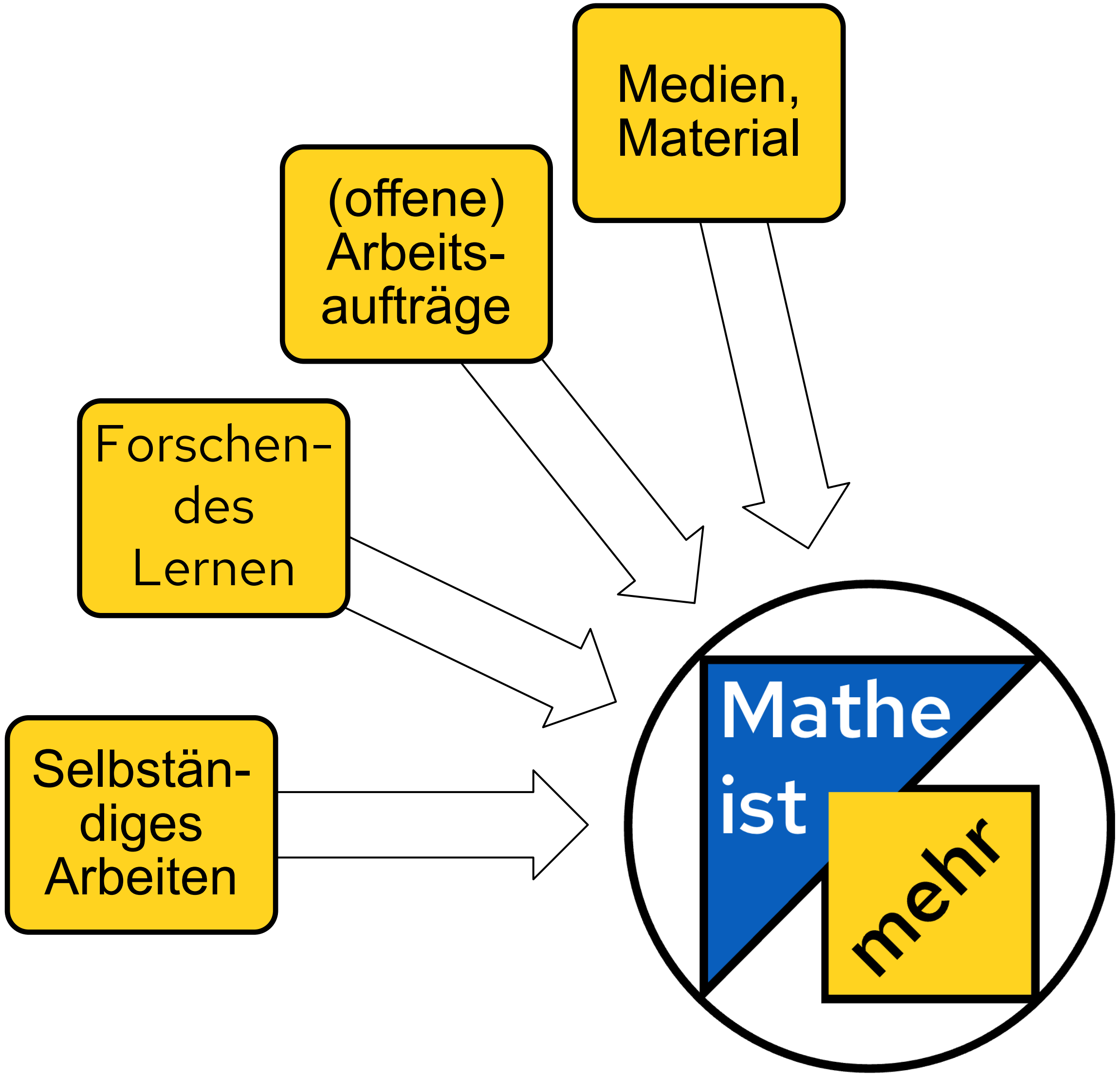
Wort des Jahres

Integralrechnung

Ansehen

Mathematik-Labor
„Mathe ist mehr“

Lernumgebungen



Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *Mathematik lehren, 184*, 2-9.
Roth. J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht & D. Walter (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Medien vernetzen

Videos

**Gegen-
ständliche
Materialien**

**Papier
und
Bleistift**

Simulationen

Medien vernetzen

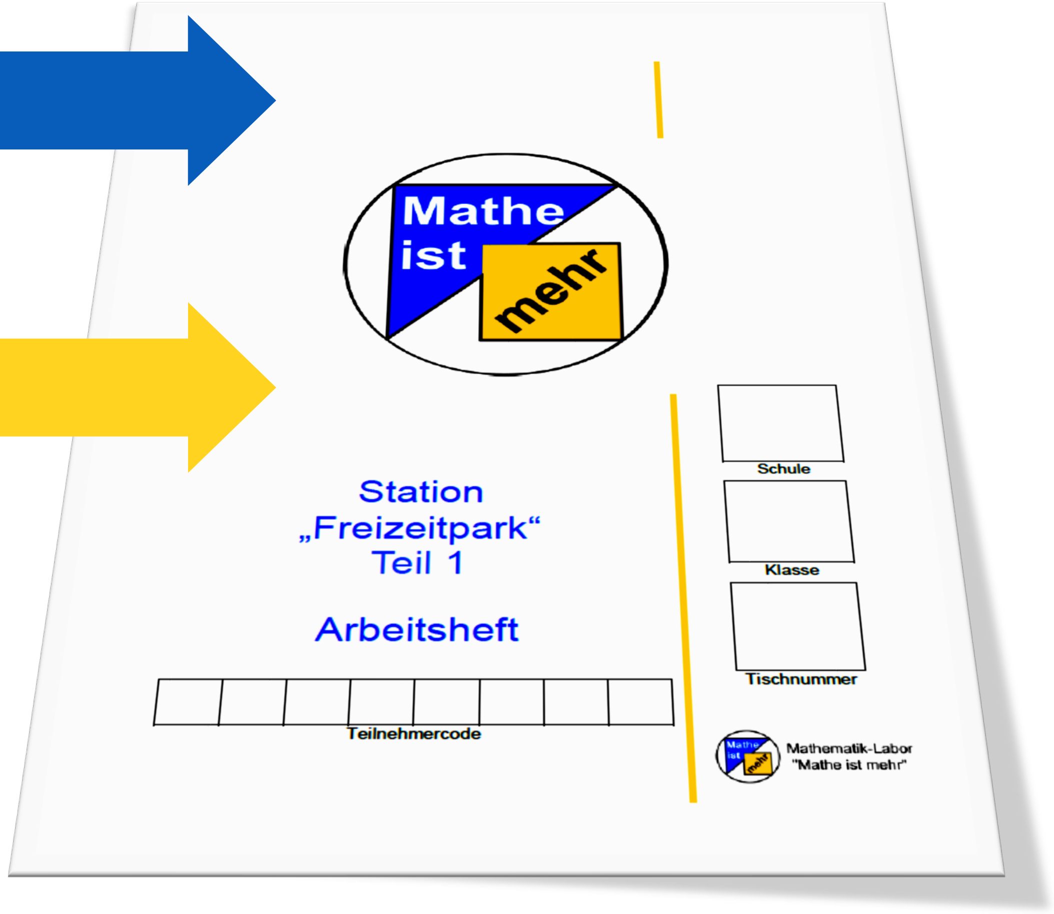
Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Grundlagen der Laborarbeit

Mathematik-Labor
„Mathe ist mehr“

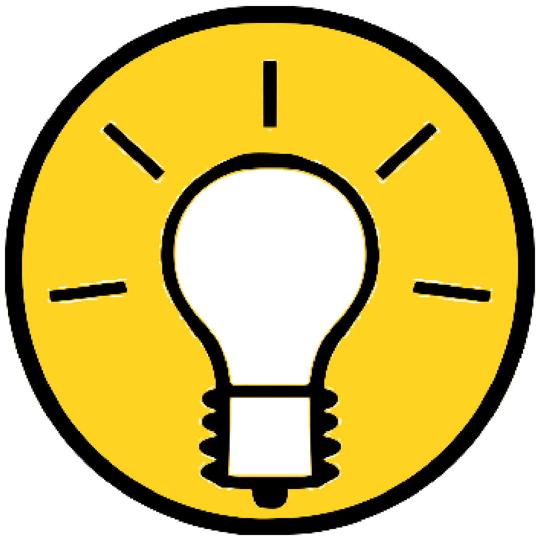
Arbeitsaufträge

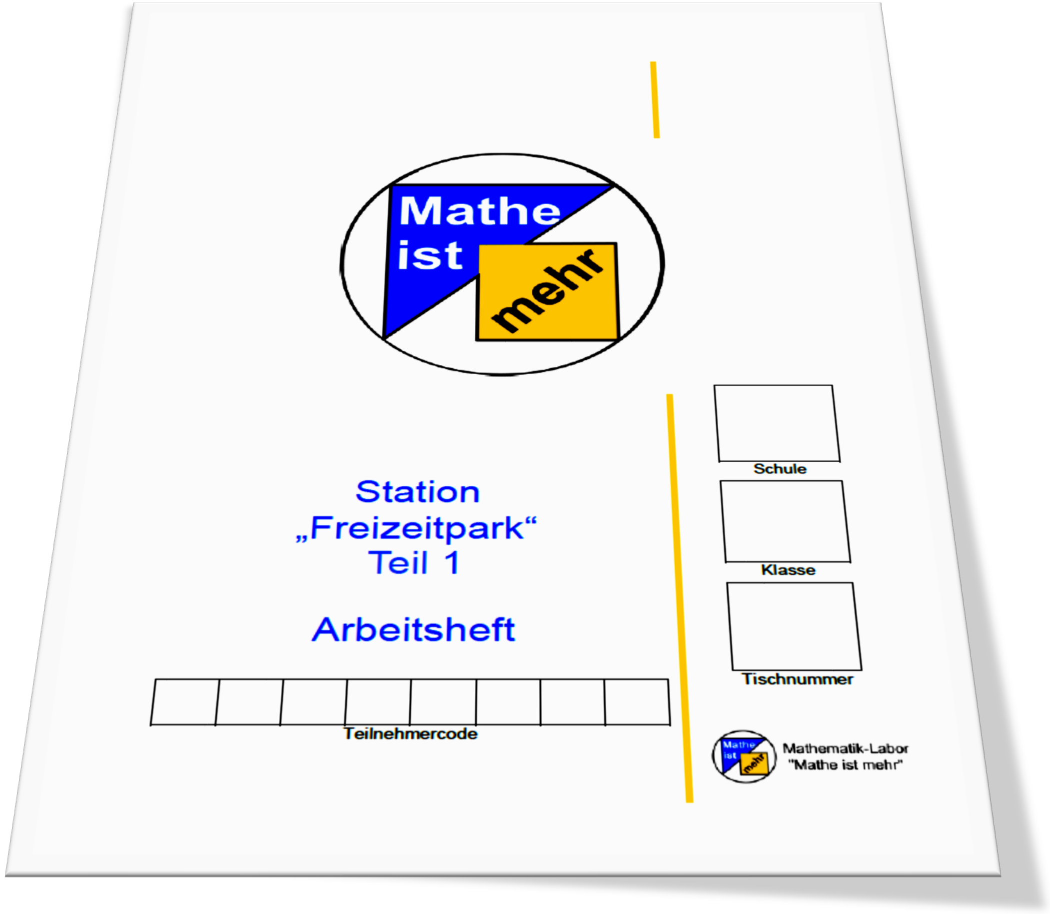
Erarbeitungsprotokoll



Arbeitsheft

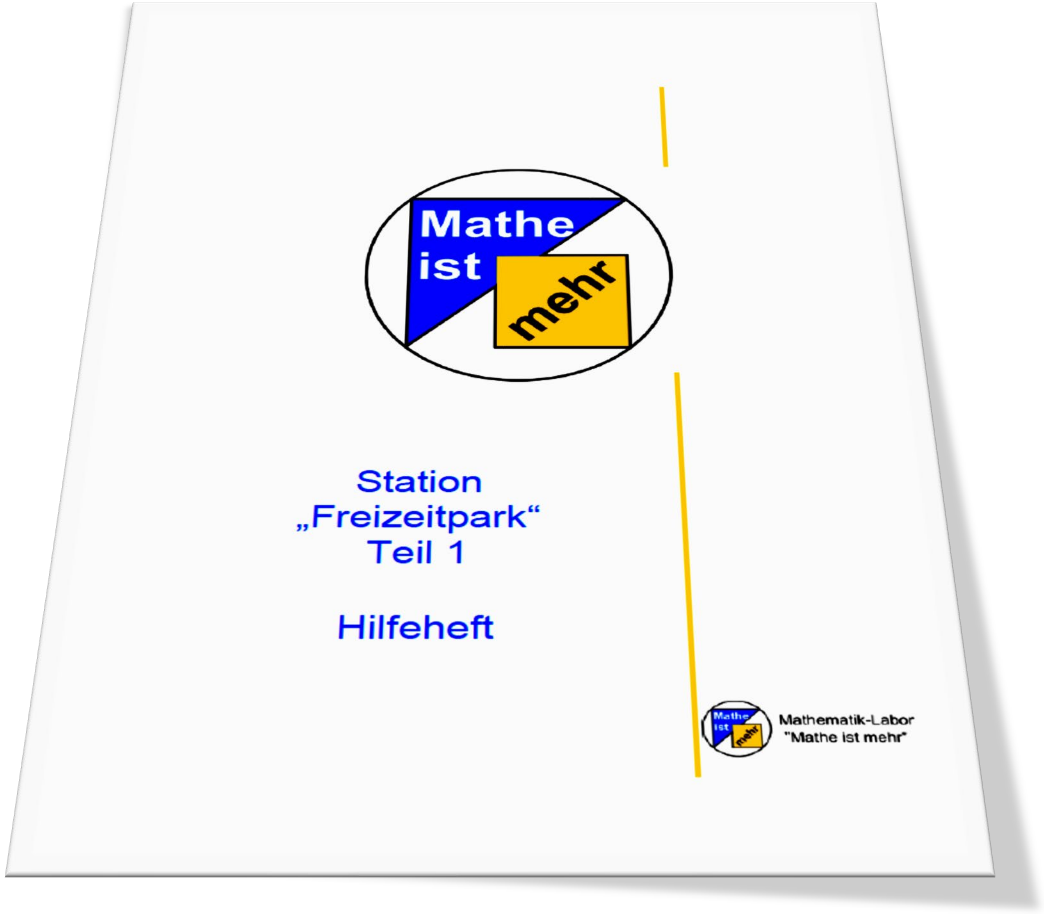
Grundlagen der Laborarbeit





Gruppenergebnis diskutieren und festhalten

Grundlagen der Laborarbeit

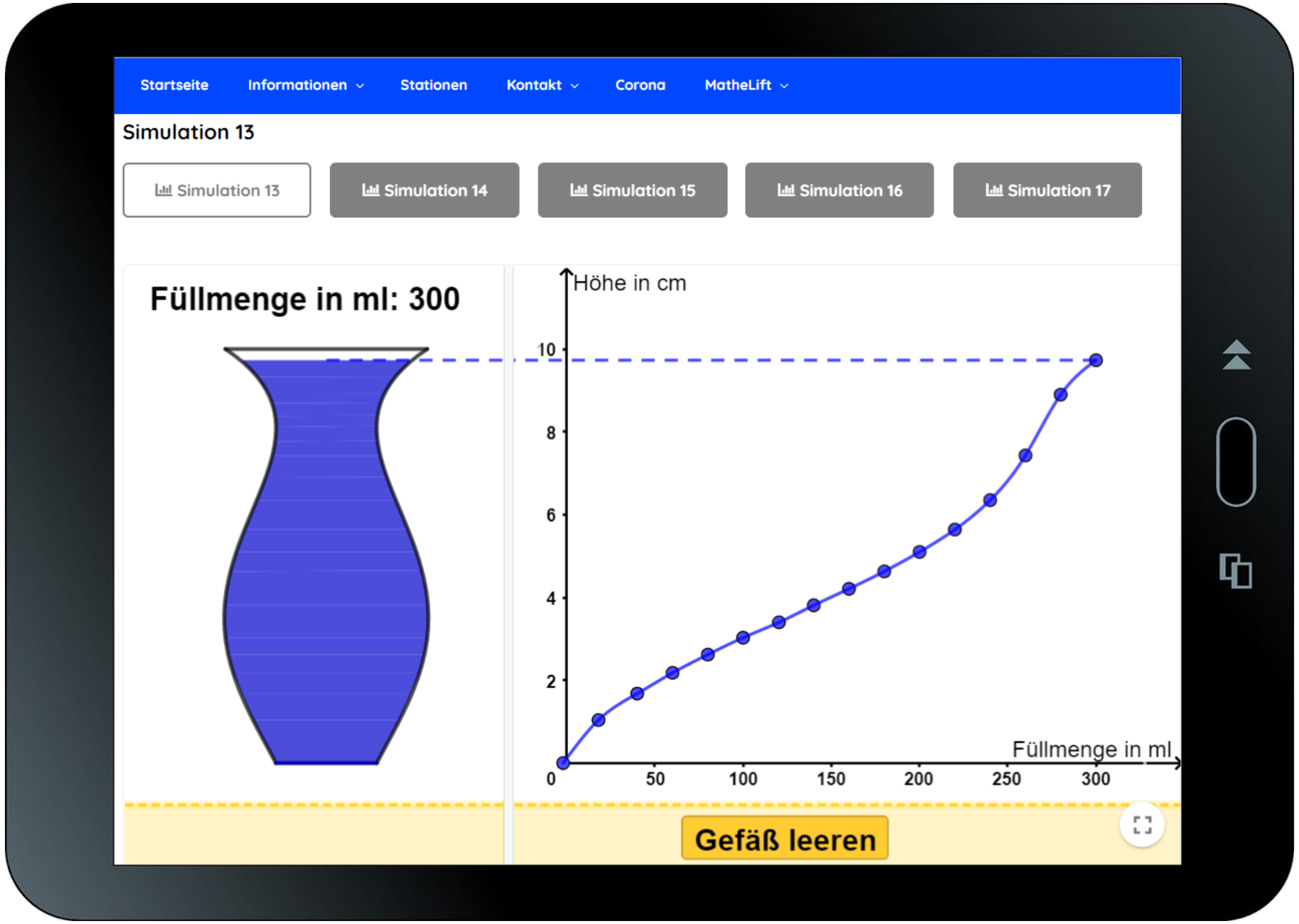


Hilfe vorhanden

Grundlagen der Laborarbeit

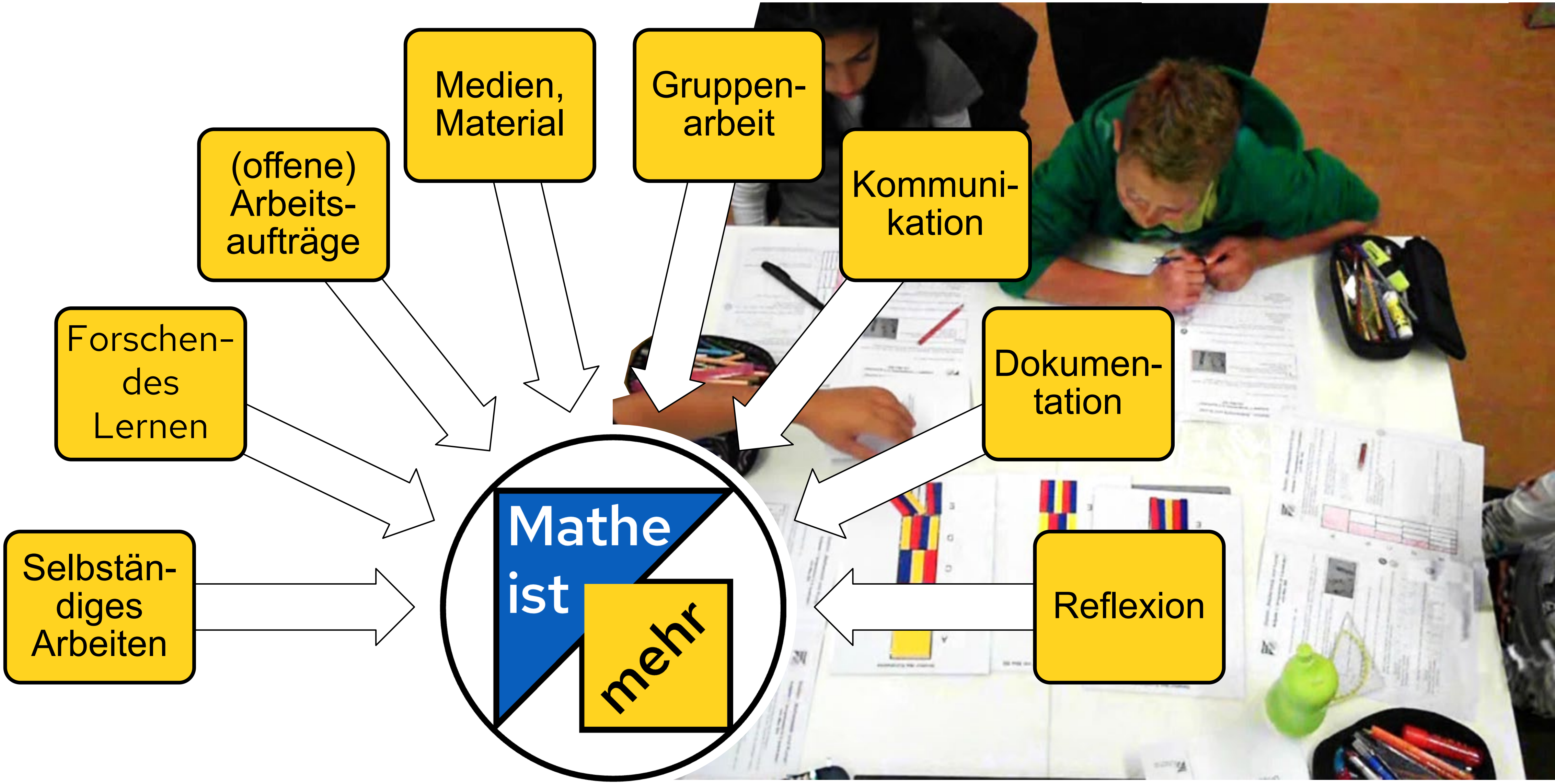
Material nutzen

Grundlagen der Laborarbeit



Simulation / Video nutzen

Lernumgebungen



Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *Mathematik lehren, 184*, 2-9.

Roth. J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht & D. Walter (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

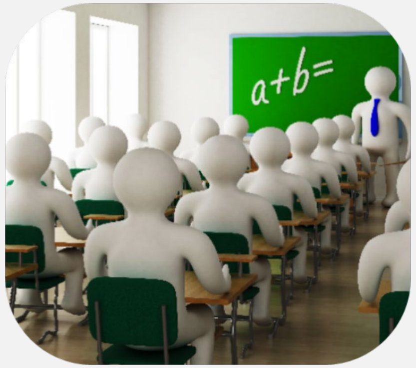
Laborräume

Vernetzung mit dem Unterricht

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

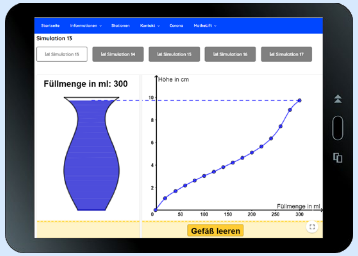
https://mathe-labor.de

Lernort Schule

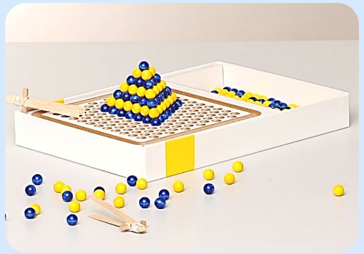


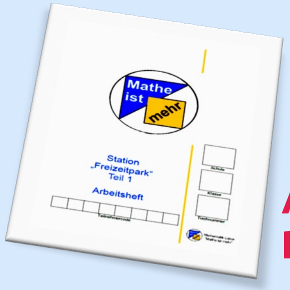
Vorbereitung

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“



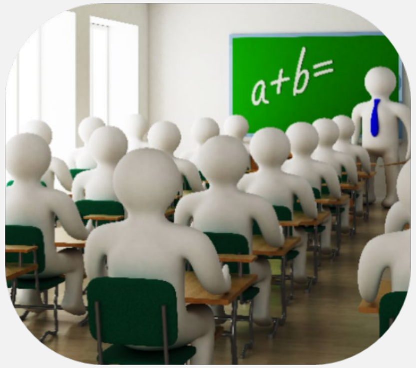
Forschendes Lernen





Arbeitsheft

Lernort Schule



Nachbereitung

Lehrplan

Roth, J. (2013). Vernetzen als durchgängiges Prinzip – Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“. In A. S. Steinweg (Hrsg.), Mathematik vernetzt, Band 3 der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ (S. 65-80). Bamberg: UBP (University of Bamberg Press).

Aspekte eines Lehr-Lern-Labors

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Mathe ist mehr

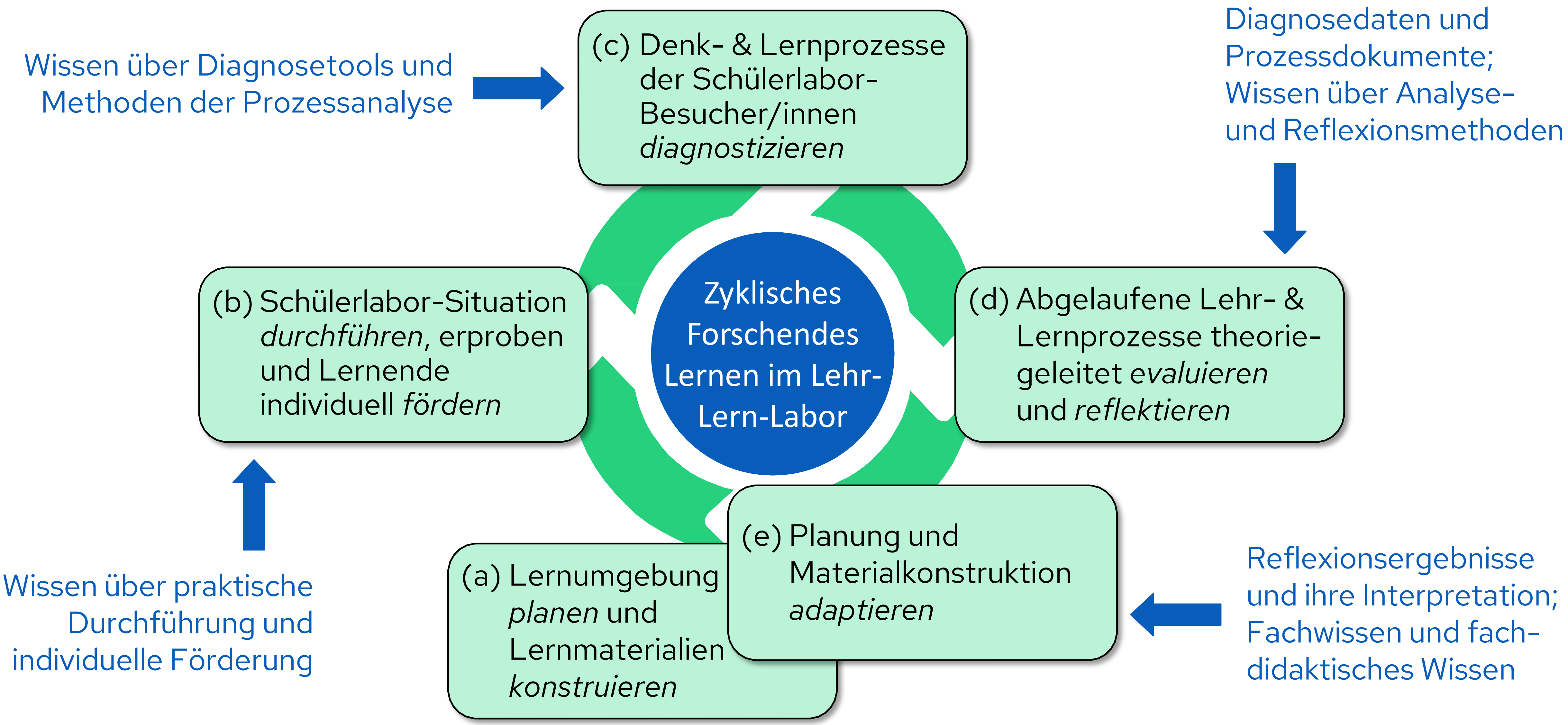
Schülerlabor

Lehr-Lern-Labor

Forschungslabor

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Lehr-Lern-Labor
Zyklisches Forschendes Lernen



Roth, J. & Priemer, B. (2020). Das Lehr-Lern-Labor als Ort der Lehrkräftebildung – Ergebnisse der Arbeit eines Forschungs- und Entwicklungsverbunds. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 1-10). Heidelberg: Springer Spektrum.

Landauer Konzept:
Mathematikdidaktische Lehrkräftebildung

RPTU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

BA-Studium

Modul 1: Fach-didaktische Grundlagen

- **Fachdidaktische Grundlagen**
  V: 2 SWS
  ViviAn

Modul 5: Fach-didaktische Bereiche

- **Didaktik der Algebra**
  V: 2 SWS
  Ü: 1 SWS
  ViviAn
- **Didaktik der Geometrie**
  V: 2 SWS
  Ü: 1 SWS
  ViviAn
- **Didaktik der Zahlbereichserweiterungen**
  V: 2 SWS
  Ü: 1 SWS
  ViviAn

Bachelor-arbeit

MA-Studium

Vertie-fendes Praktikum

Modul 12: Fach-didaktische Bereiche

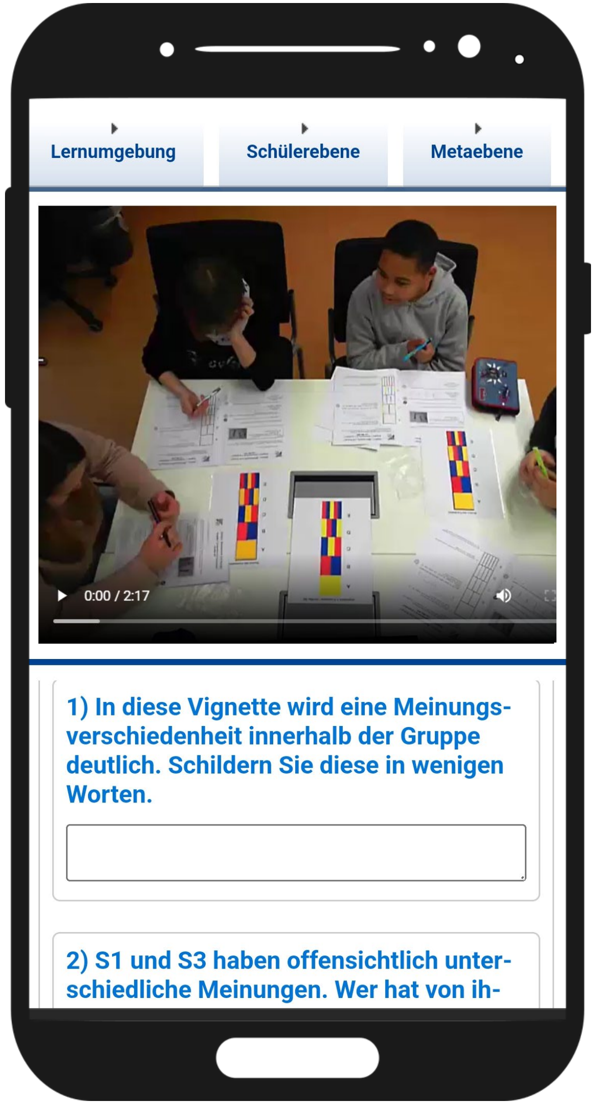
- **Didaktik der Stochastik**
  V: 1 SWS
  S: 1 SWS
- **Didaktik der Analysis**
  V: 1 SWS
  S: 1 SWS
- oder
- **Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie**
  V: 1 SWS + S: 1 SWS
- **Lehr-Lern-Labor-Seminar**
  S: 3 SWS
- oder
- **Fachdidaktisches Forschungsseminar**
  S: 3 SWS

Master-arbeit

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung.
In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), *Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung* (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

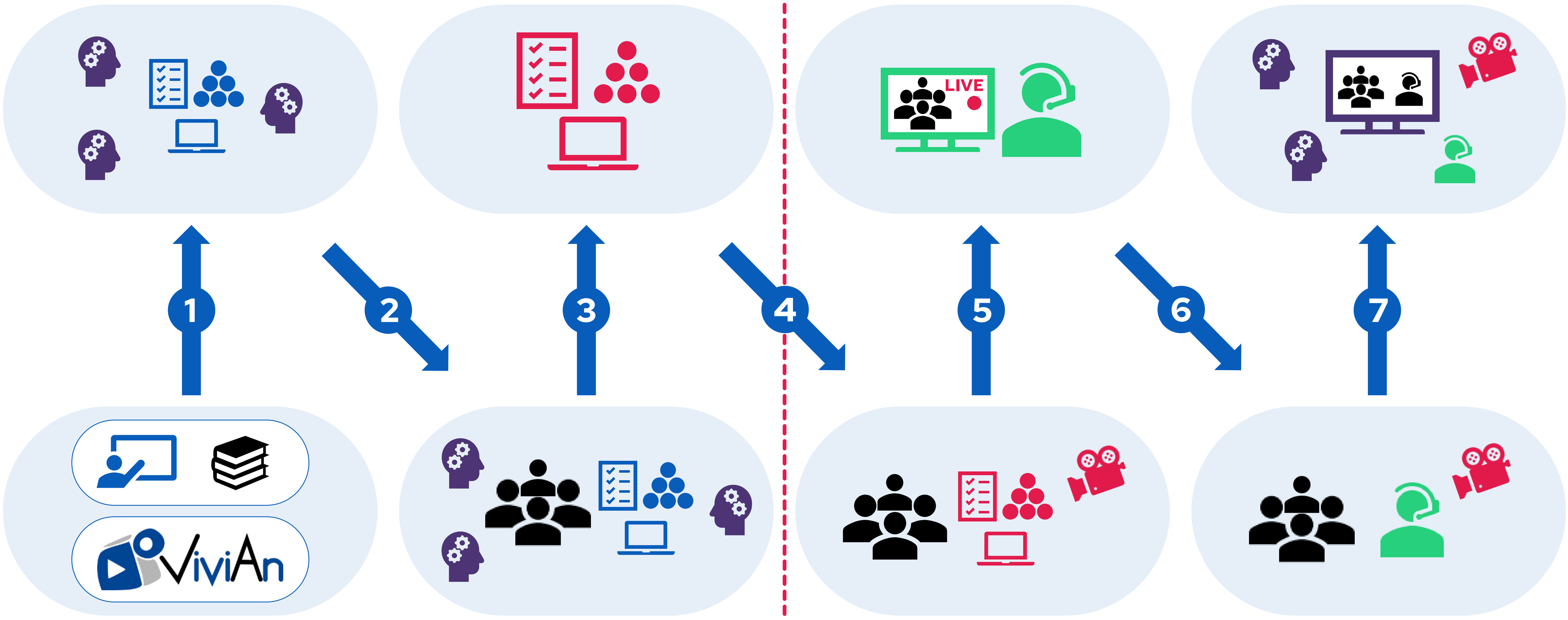
Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Lehr-Lern-Labor-Seminar: Das Konzept

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Studierende(r) | Arbeitsheft | Gegenständliches Material | Simulation | Schülerinnen und Schüler | Videoaufnahme

Roth, J. & Priemer, B. (2020). Das Lehr-Lern-Labor als Ort der Lehrkräftebildung – Ergebnisse der Arbeit eines Forschungs- und Entwicklungsverbunds. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 1-10). Heidelberg: Springer Spektrum.

Aspekte eines Lehr-Lern-Labors

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Forschung der Arbeitsgruppe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Fachdidaktische Entwicklungsforschung

Empirische Grundlagenforschung

Unterrichtsforschung

Umgang mit Heterogenität

Computereinsatz

(digitale) Lernumgebungen

Fachsprache

Funktionsbegriff

Experimentieren und Simulieren

Argumentationsprozesse

Figurenbegriff

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Bruchzahlbegriff

Repräsentationen

Darstellungen

Prozessdiagnose

Grundvorstellungen

ViviAn – Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Unterrichtshandeln

Hochschuldidaktische Forschung

Zeitplan

Zeit	Inhalt	Raum
13:30-13:45	Ankommen, Begrüßung, Kennenlernen	I 1.08
13:45-14:15	Vorstellung Mathematisches Umweltlabor	I 0.07
14:15-14:20	Wechselpause	
14:20-15:00	Vorstellung Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“	I 1.08
15:00-15:20	Kaffeepause	I 1.08
15:20-16:00	Auseinandersetzung mit zwei Laborstationen des Mathematik-Labors	I 1.08/I 1.07
16:00-16:20	Vorstellung ViviAn	I 1.08
16:20-16:45	Auseinandersetzung mit ViviAn-Vignetten	I 1.08
16:45-17:00	Abschlussreflexion	I 1.08

2

ViviAn

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Diagnostische Kompetenz

Diagnostische Kompetenz hilft Lernprozesse zu gestalten.

Diagnostische Kompetenz ist „ein Bündel von Fähigkeiten, um

- den Kenntnisstand,
- die Lernfortschritte und
- die Leistungsprobleme

einzelner Schüler, **Schülerdiagnose**

sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben **Aufgabendiagnose**

im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können,

sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann." **Unterrichtshandeln**

Weinert , F. E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche für das Lernen in der Schule, Päd. Institut Bad Kreuznach, 16

Prozess des Diagnostizierens

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Geeignete Daten sichten / selbst erheben

Förderrelevante Beobachtungen beschreiben

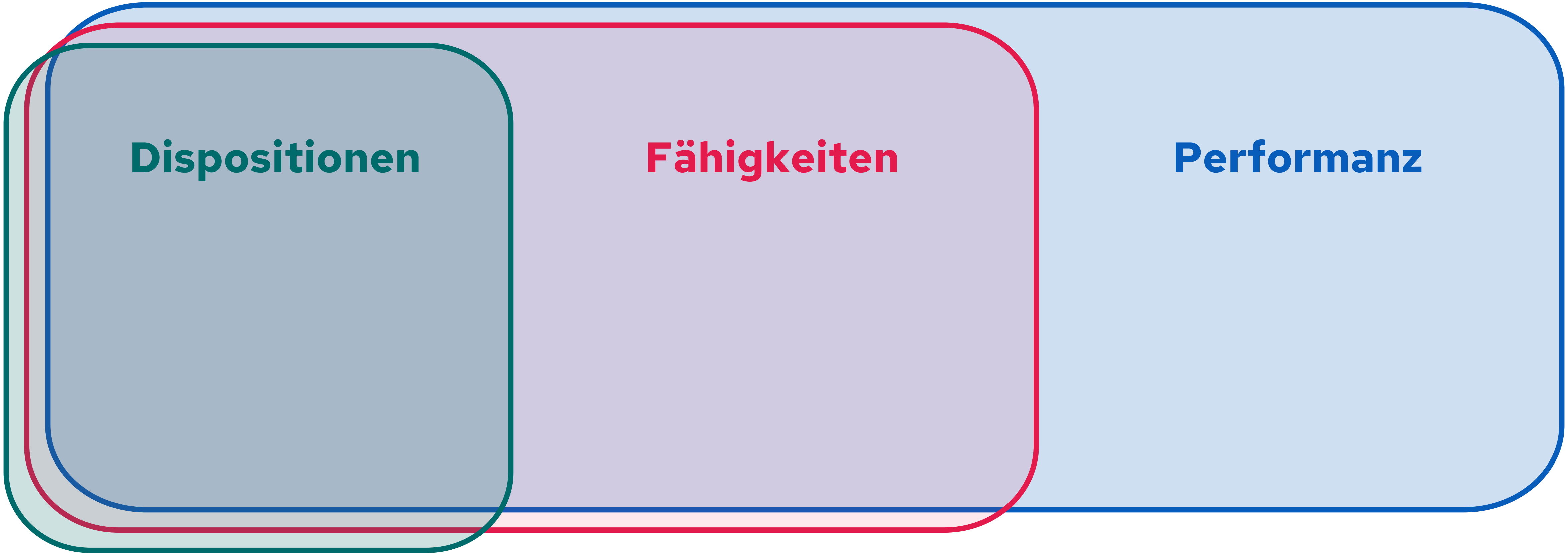
Beobachtungen differenziert deuten

Ursachen ergründen

Konsequenzen für Förderung ableiten

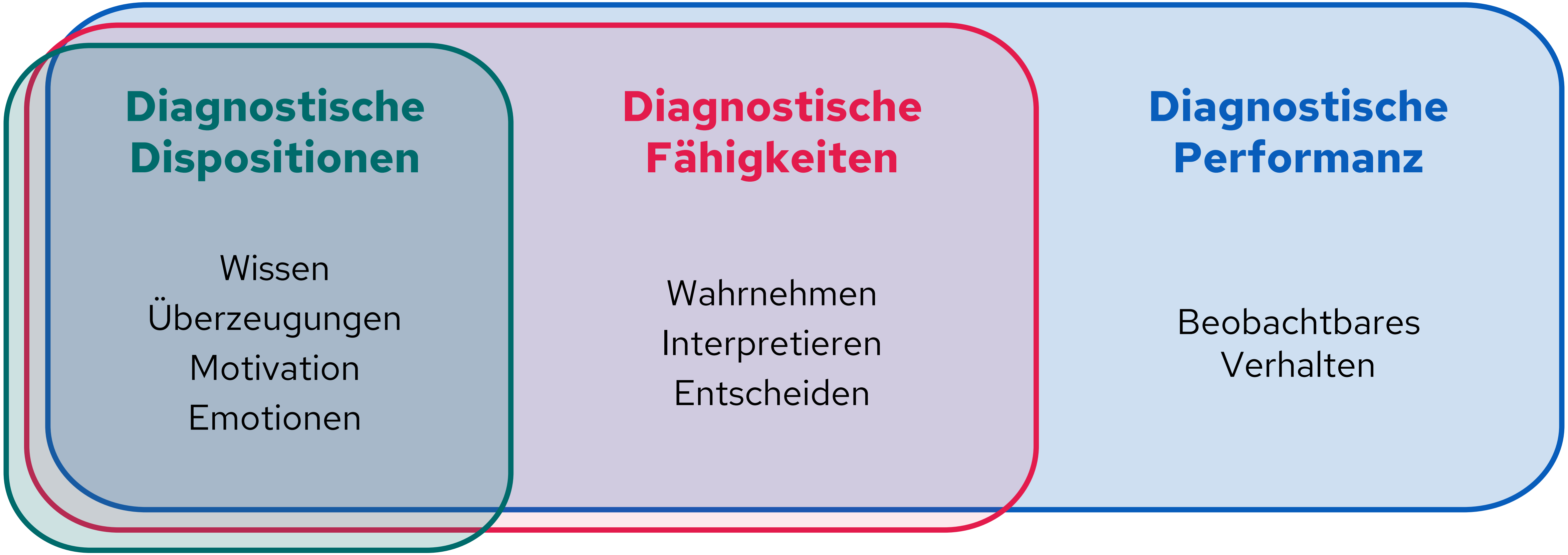
Bartel, M.-E., Beretz, A.-K., Lengnink, K. & Roth, J. (2018). Prozessbegleitende Diagnose beim Mathematiklernen – Kompetenzentwicklung von Lehramtsstudierenden im Rahmen von Lehr-Lern-Laboren. MNU, 71(6), 375-382

Kompetenz



 Blömeke et al. 2015

Diagnostische Kompetenz



 Blömeke et al. 2015 → Leuders et al. 2018

DiaCoM-Rahmenmodell

Explaining Teachers' Diagnostic Judgements by Cognitive Modeling

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(SC) Situationscharakteristika
konzeptualisiert als

Rahmung
- Zeitdruck
- Ziele
- Relevanz
- …

Hinweisreize
- Aufgaben
- Lernende
- Antworten
- …

(DB) Diagnostisches Verhalten
konzeptualisiert als beobachtbare

Prozess-indikatoren
- lautes Denken
- Blickbewegungen
- …

Ergebnis-indikatoren
- Verbalisierung
- Auswahl
- …

extern

intern

(PC) Personencharakteristika
konzeptualisiert als

Zustände (states)
Mindset, Stress, Emotionen, …

Eigenschaften (traits)
Wissen, Motivation, Überzeugungen, …

(DT) Diagnostisches Denken
konzeptualisiert als Informationsverarbeitung

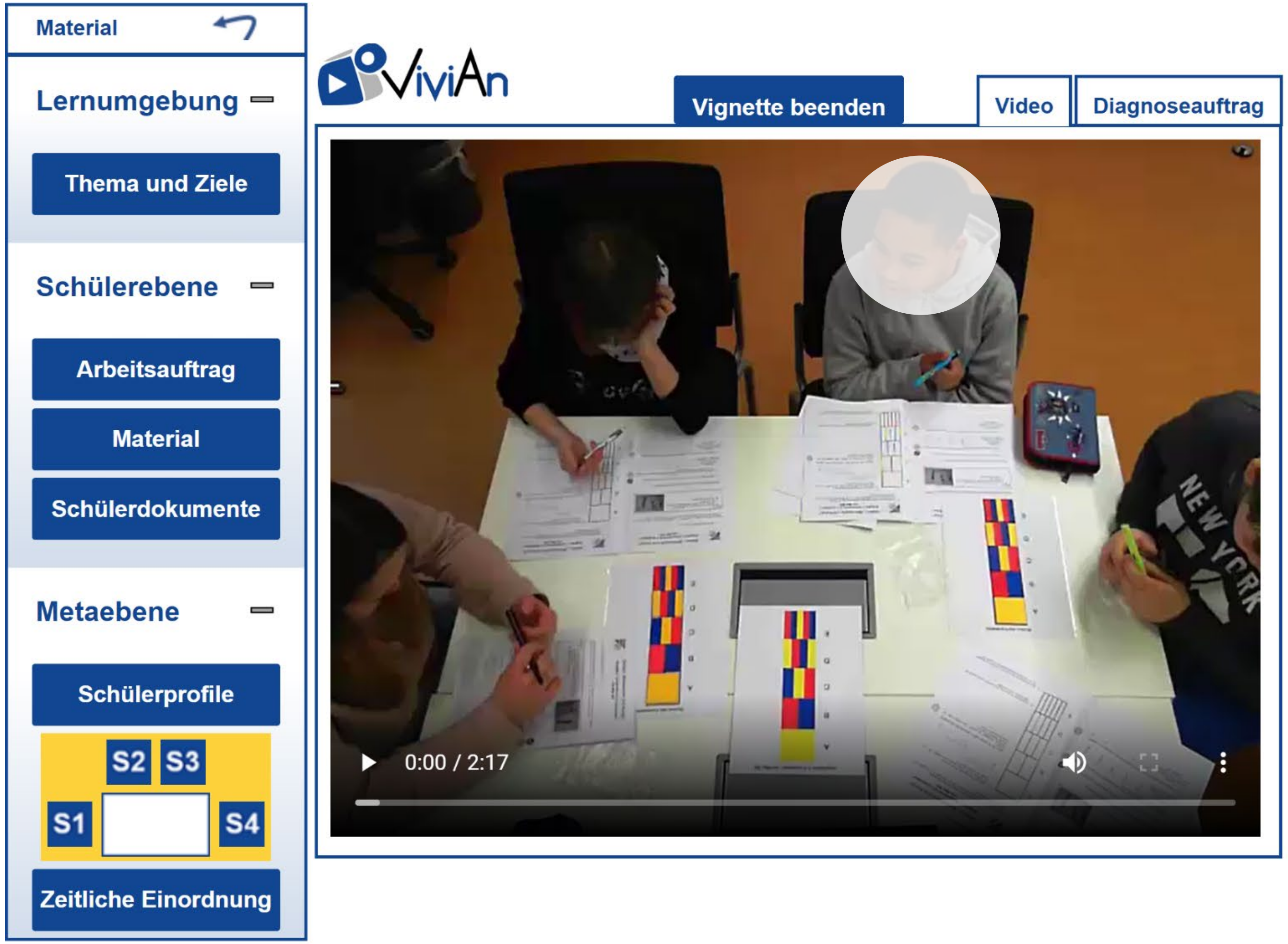
wahrnehmen

interpretieren
- analytisches Denken
- Automatisches Verarbeiten

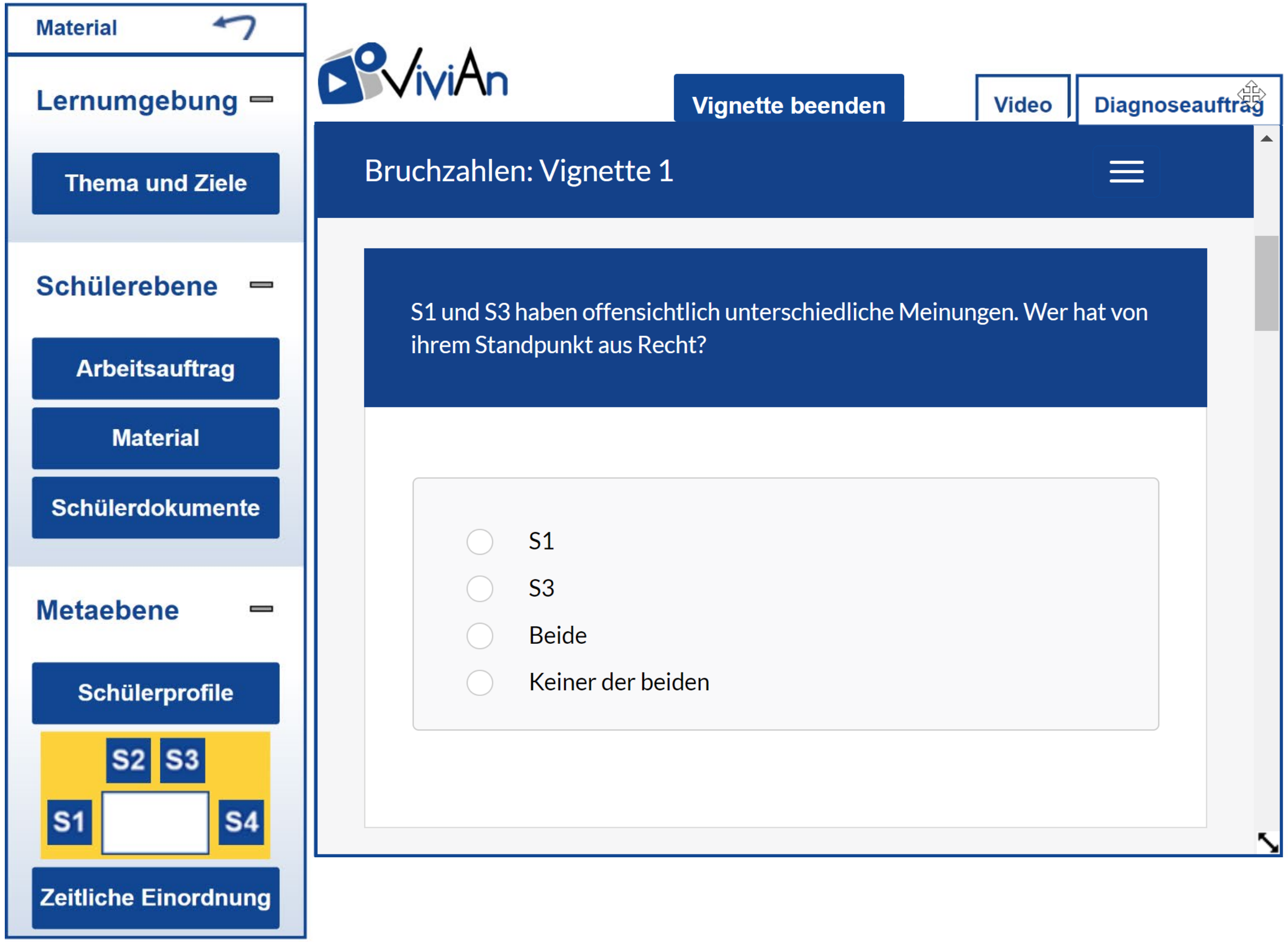
entscheiden
- auswählen
- integrieren
- …

 Loibl, Leuders & Dörfler 2020; Leuders, Loibl & Dörfler 2020

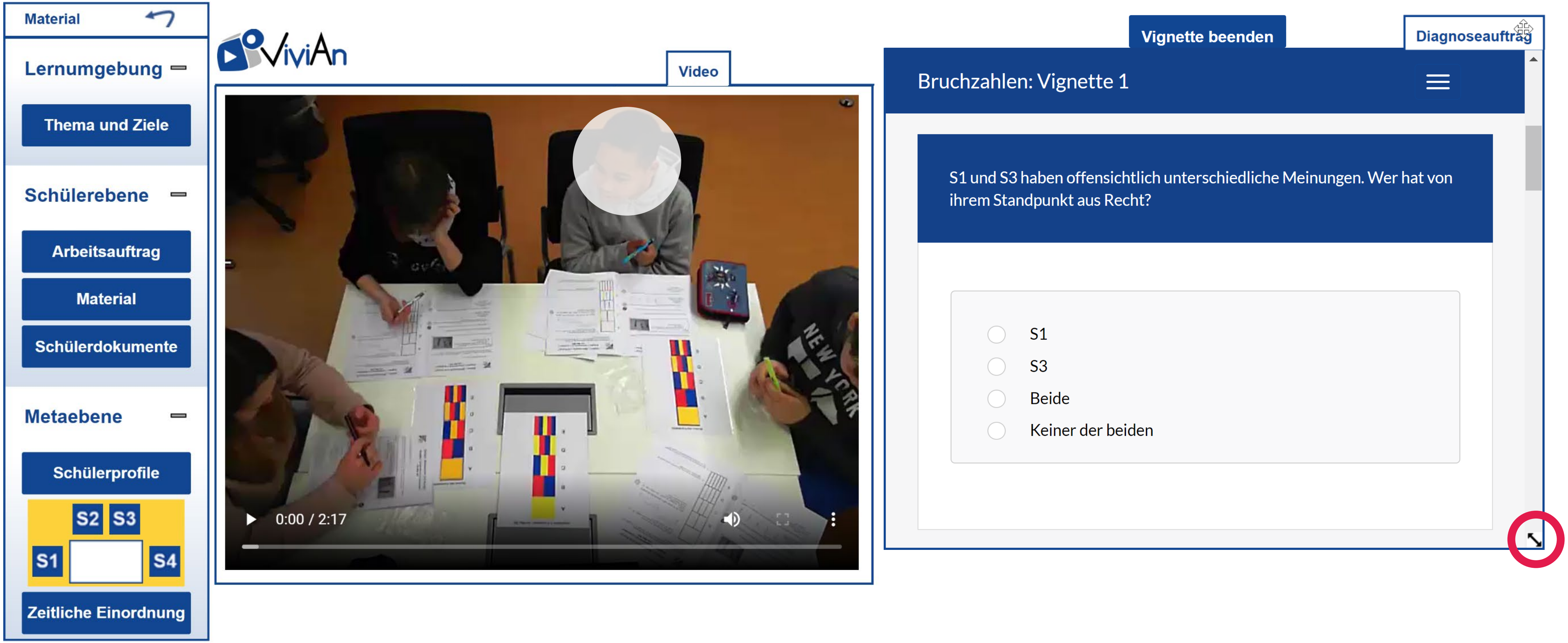
Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



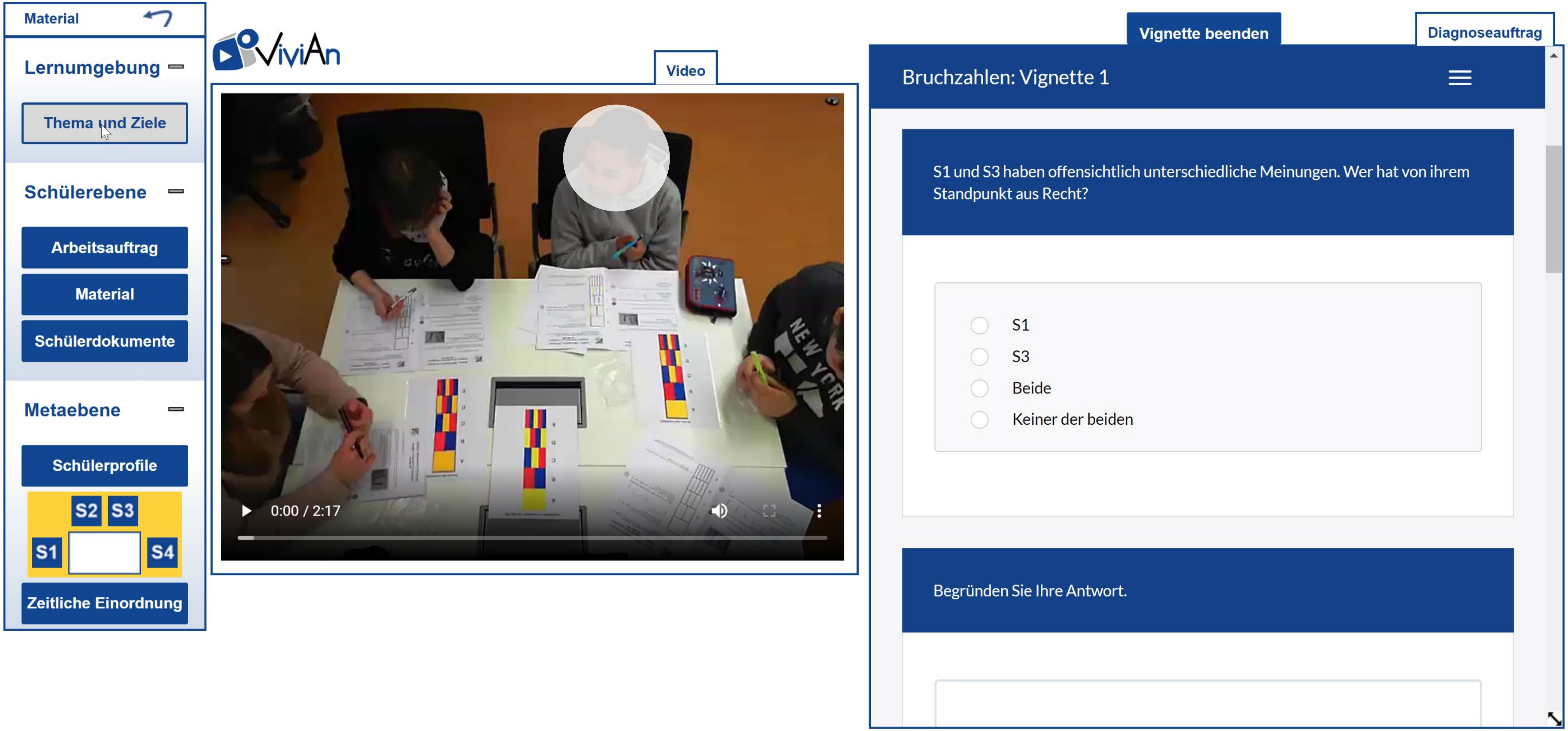
Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

ViviAn

Material

Lernumgebung

Thema und Ziele

Schülerebene

Arbeitsauftrag

Material

Schülerdokumente

Metaebene

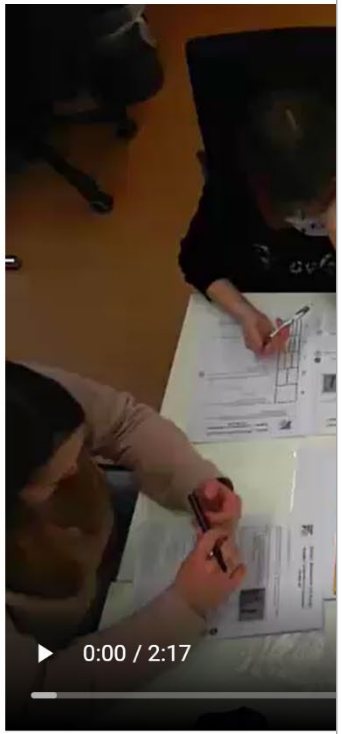
Schülerprofile

S2 S3

S1 S4

Zeitliche Einordnung

ViviAn



Vignette beenden

Diagnoseauftrag

Thema und Ziele

Die Station **„Mathematik und Kunst“** des Mathematik-Labors führt den Bruchzahlbegriff und die Addition von Bruchzahlen inhaltlich-anschaulich ein. Brüche werden hier mit Hilfe eines Flächenmodells untersucht.

Ziel: Die Schülerinnen und Schüler sollen sich folgende am Lehrplan orientierte Inhalte selbstständig erarbeiten:

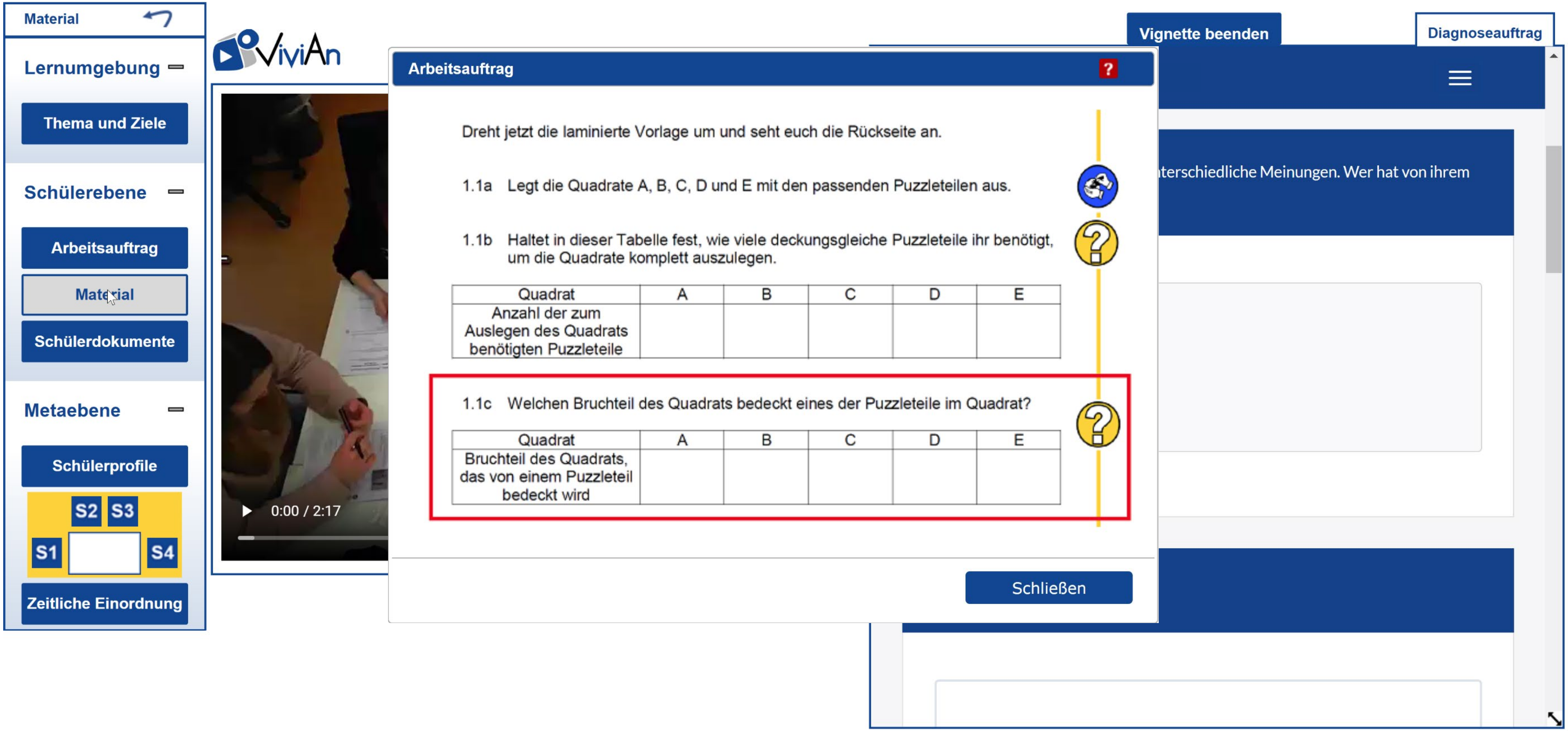
- Grundvorstellung zu Bruchzahlen („Teil eines Ganzen“ und „Quasikardinalzahlaspekt“)
- Größenvergleich von Brüchen (anschaulich)
- Verfeinern von Brüchen
- Inhaltliche-anschauliche Addition von Brüchen

Da die Station als Einführung in diesen Themenbereich konzipiert ist, wird kein Vorwissen benötigt. Es ist sogar notwendig, dass eine Einführung in die formalen Regeln der Bruchrechnung (etwa der Addition) erst im Anschluss an den Stationsbesuch erfolgt. Hierbei kann auf die inhaltlich-anschaulichen Grundvorstellungen aufgebaut werden, die die Schülerinnen und Schüler beim Arbeiten an der Station entwickeln.

Schließen

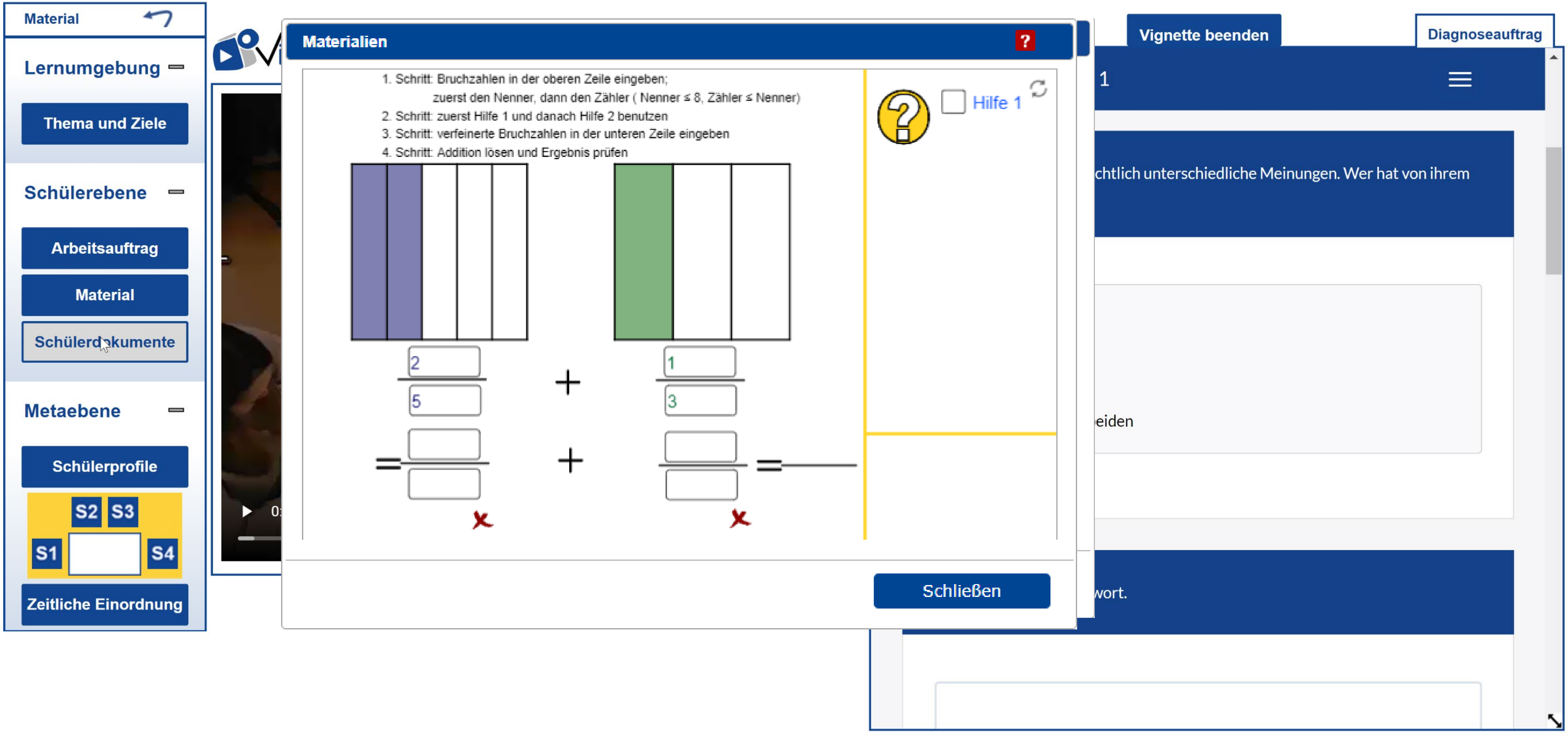
nterschiedliche Meinungen. Wer hat von ihrem

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



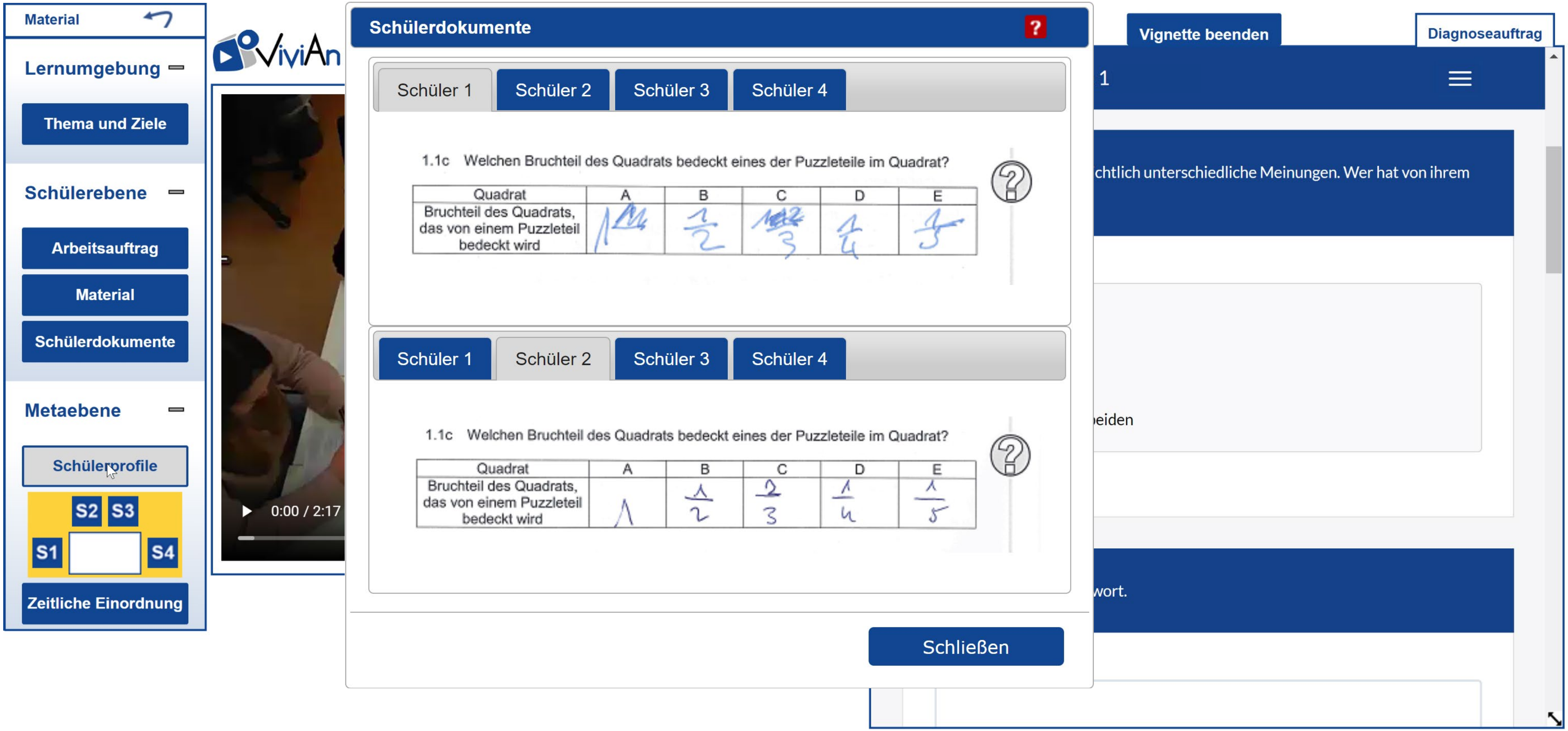
RPTU

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



RPTU

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



RPTU

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

ViviAn

Material

Lernumgebung

Thema und Ziele

Schülerebene

Arbeitsauftrag

Material

Schülerdokumente

Metaebene

Schülerprofile

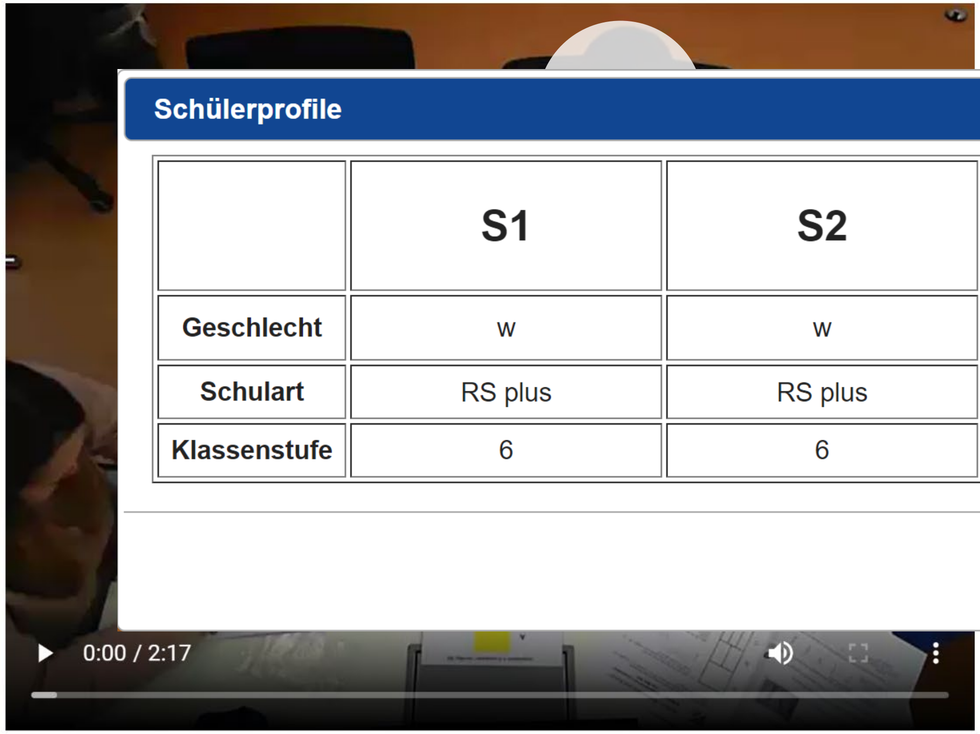
S2 S3

S1 S4

Zeitliche Einordnung

ViviAn

Video



Schülerprofile

	S1	S2	S3	S4
Geschlecht	w	w	m	m
Schulart	RS plus	RS plus	RS plus	RS plus
Klassenstufe	6	6	6	6

Schließen

Vignette beenden

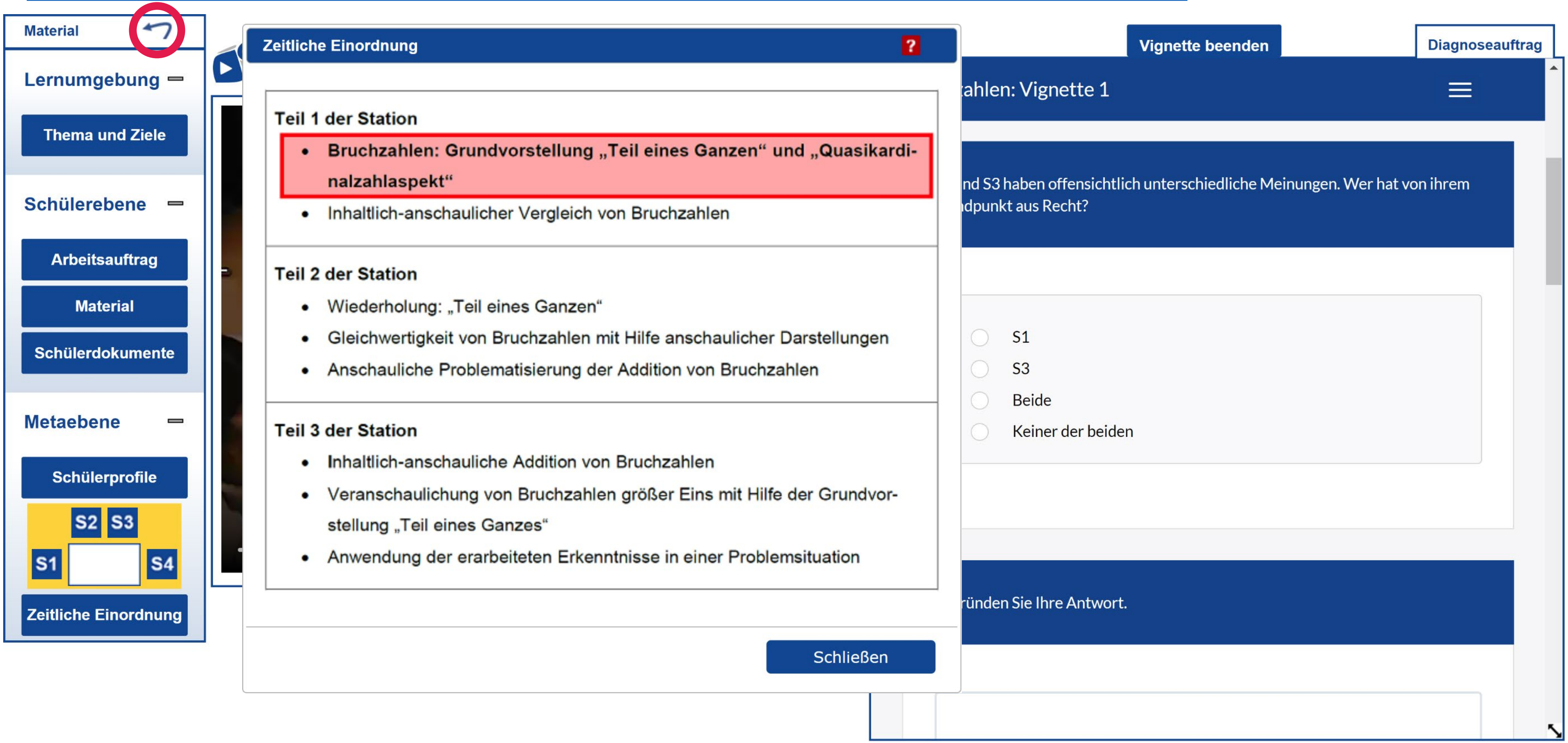
Diagnoseauftrag

Bruchzahlen: Vignette 1

…einungen. Wer hat von ihrem

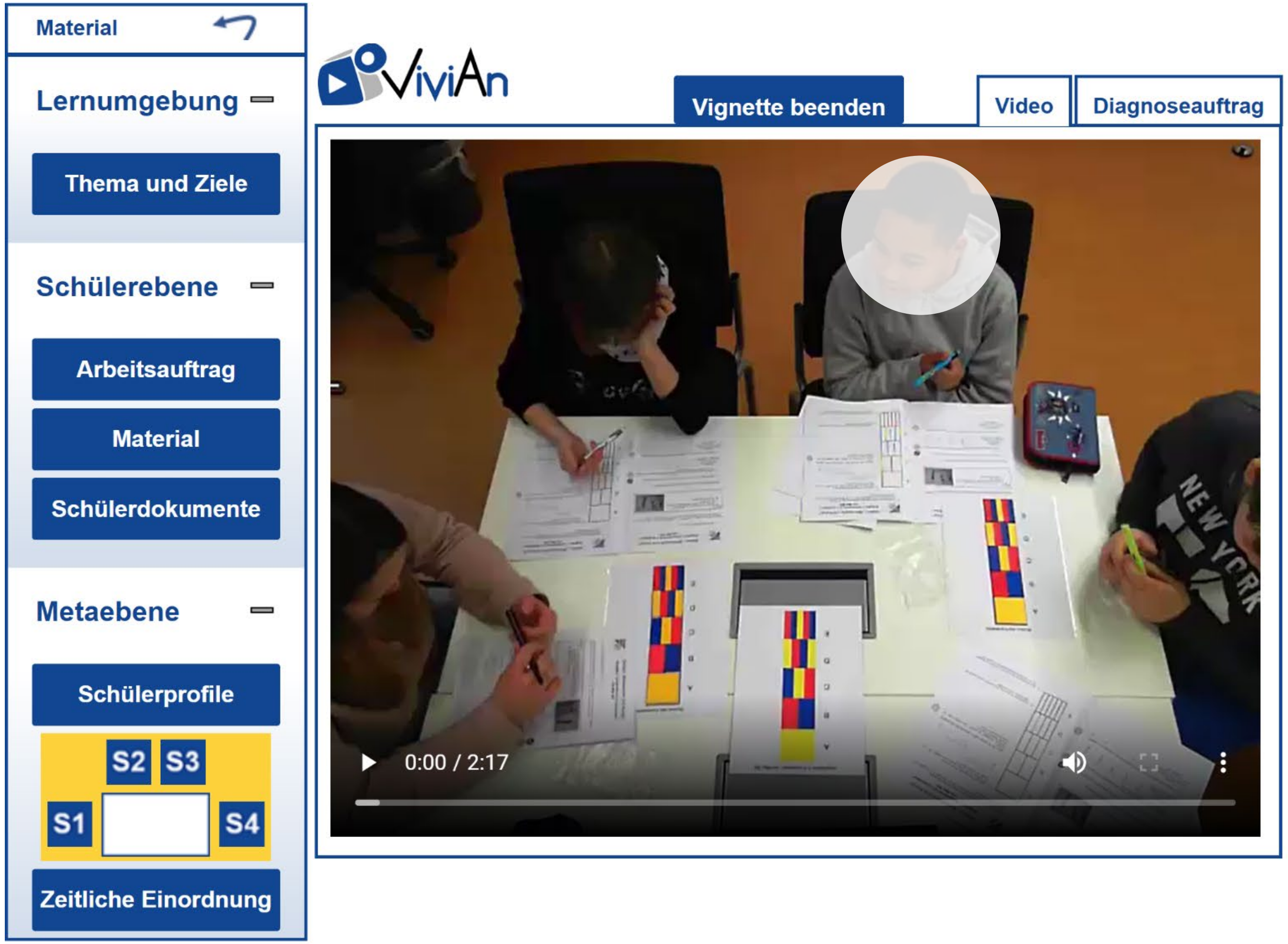
Begründen Sie Ihre Antwort.

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

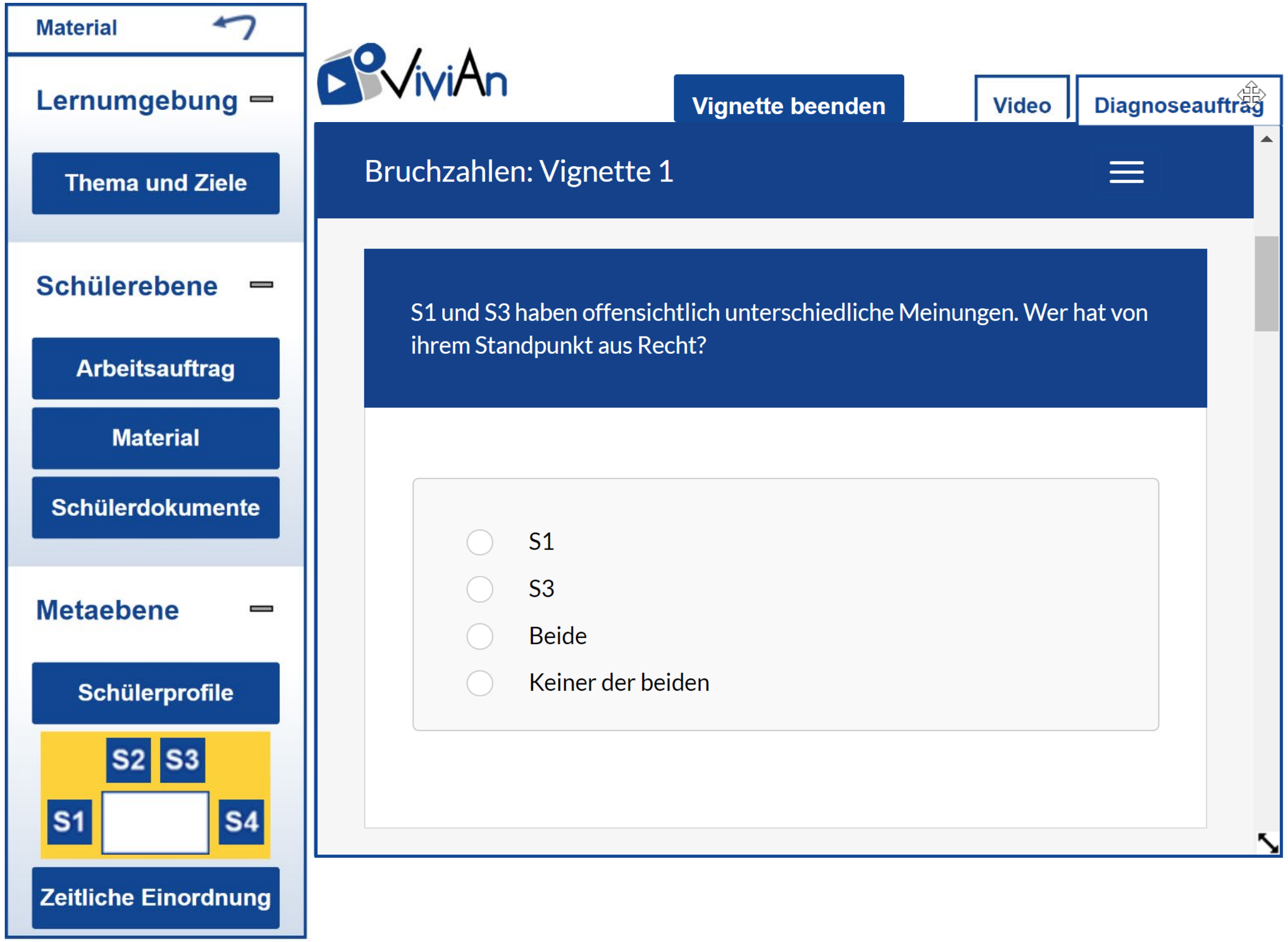


RPTU

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Material

Lernumgebung

Thema und Ziele

Schülerebene

Arbeitsauftrag

Material

Schülerdokumente

Metaebene

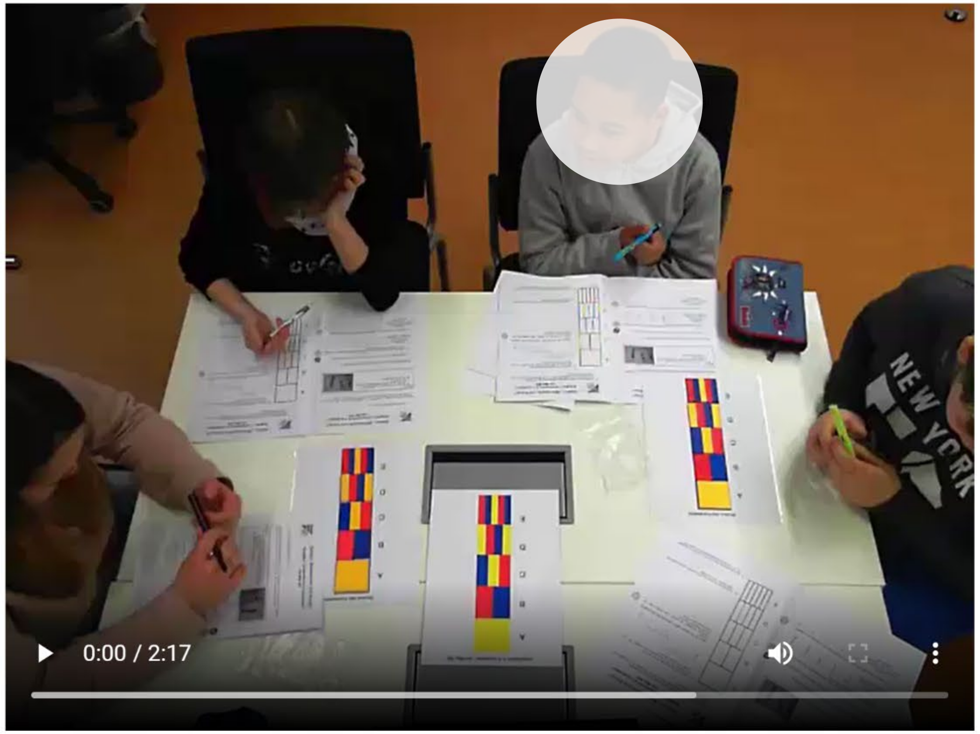
Schülerprofile

S2 S3

S1 S4

Zeitliche Einordnung

Video



Vignette beenden

Diagnoseauftrag

Bruchzahlen: Vignette 1

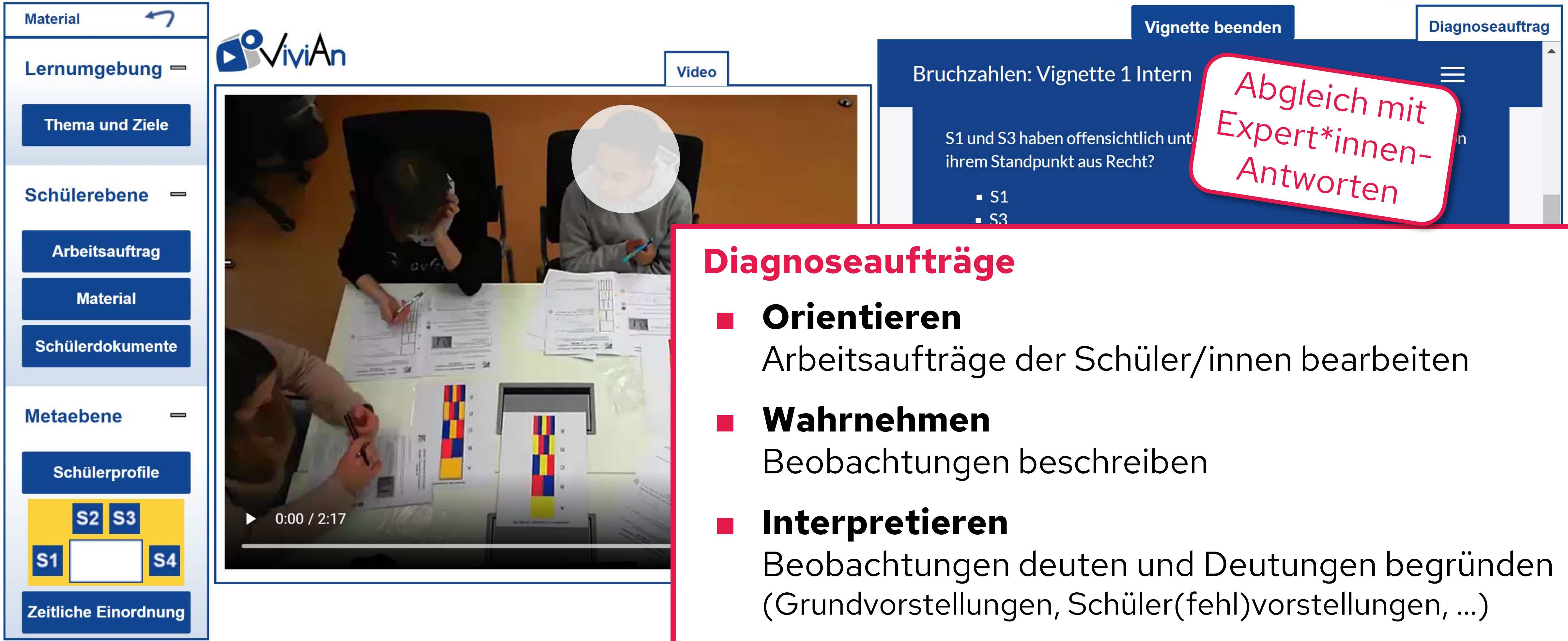
S1 und S3 haben offensichtlich unterschiedliche Meinungen. Wer hat von ihrem Standpunkt aus Recht?

- (•) S1
- ( ) S3
- ( ) Beide
- ( ) Keiner der beiden

Begründen Sie Ihre Antwort.

Schülerin 1 hat erfasst, dass ein Ganzes auch als Bruch geschrieben werden kann.

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen



Diagnoseaufträge

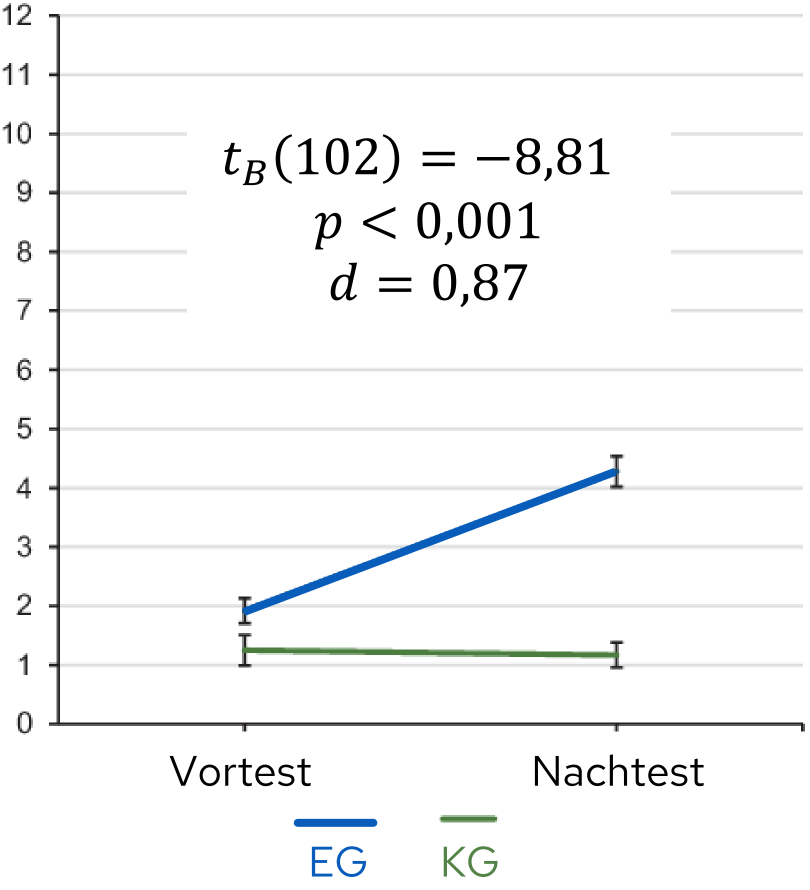
- **Orientieren**
  Arbeitsaufträge der Schüler/innen bearbeiten
- **Wahrnehmen**
  Beobachtungen beschreiben
- **Interpretieren**
  Beobachtungen deuten und Deutungen begründen (Grundvorstellungen, Schüler(fehl)vorstellungen, ...)
- **Entscheiden**
  Unterrichtshandeln vorschlagen und begründen

Diagnoseförderung mit ViviAn

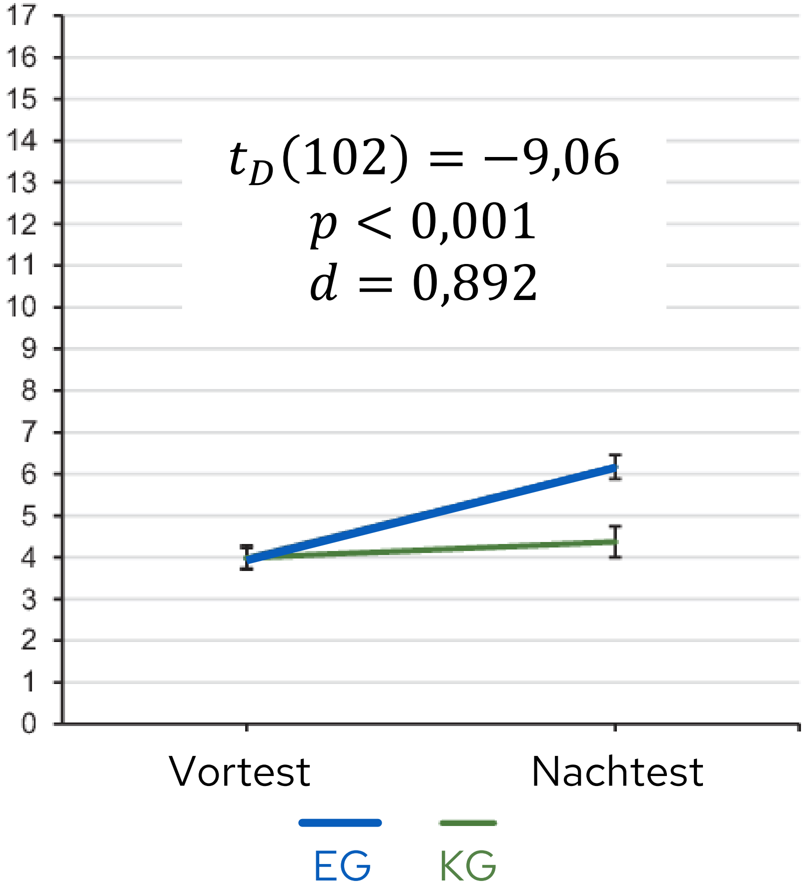
$N_{EG} = 103$
$N_{KG} = 89$

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

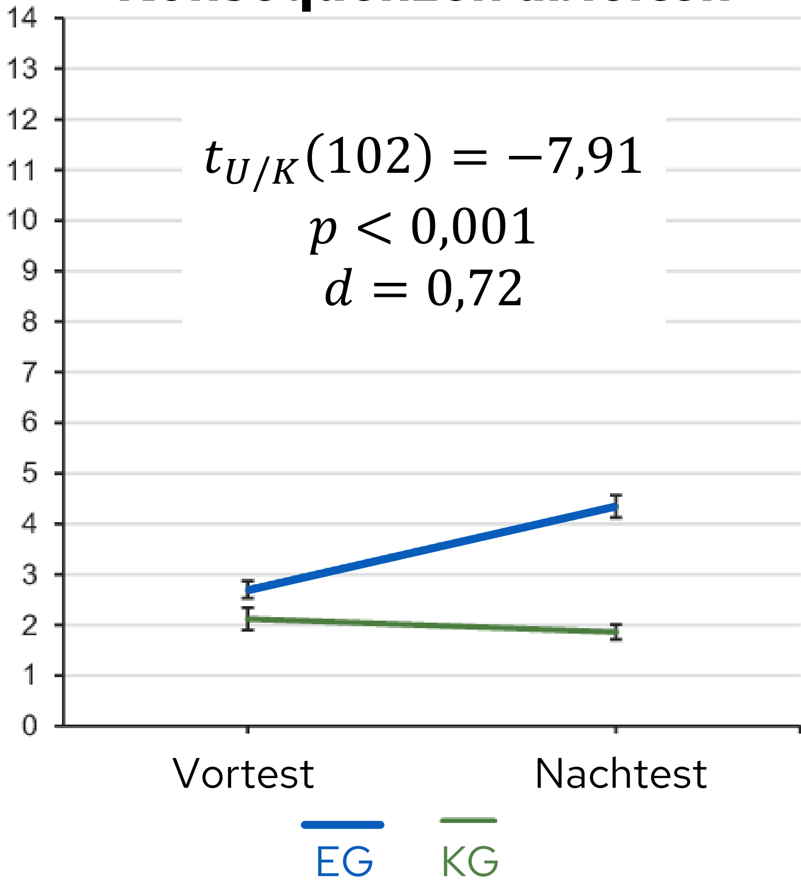
Beschreiben



Deuten



Ursachen finden / Konsequenzen ableiten



 Enenkiel, P., Bartel, M.-E., Walz, M. & Roth, J. (2022). Diagnostische Fähigkeiten mit der videobasierten Lernumgebung ViviAn fördern. *JMD, (43)*1, 67-99

3

Lehr-Lern-Labore und ViviAn in der Lehrkräftebildung

Landauer Konzept:
Mathematikdidaktische Lehrkräftebildung

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Modul 1: Fachdidaktische Grundlagen

Fachdidaktische Grundlagen
V: 2 SWS
ViviAn

Modul 5: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Algebra
V: 2 SWS
Ü: 1 SWS
ViviAn

Didaktik der Geometrie
V: 2 SWS
Ü: 1 SWS
ViviAn

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen
V: 2 SWS
Ü: 1 SWS
ViviAn

Bachelorarbeit

BA-Studium

Vertiefendes Praktikum

Modul 12: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Stochastik
V: 1 SWS
S: 1 SWS

Didaktik der Analysis
V: 1 SWS
S: 1 SWS

oder

Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
V: 1 SWS + S: 1 SWS

Lehr-Lern-Labor-Seminar
S: 3 SWS

oder

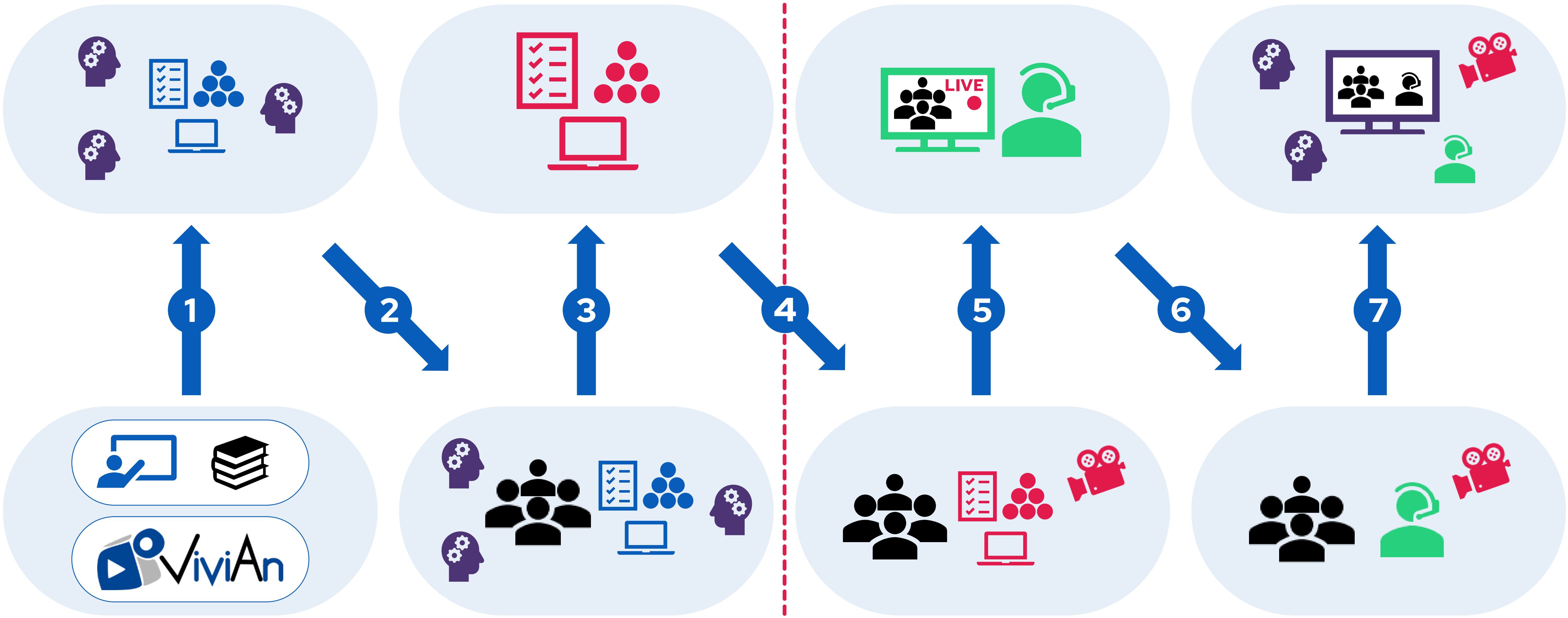
Fachdidaktisches Forschungsseminar
S: 3 SWS

Masterarbeit

MA-Studium

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung.
In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), *Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung* (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Lehr-Lern-Labor-Seminar: Das Konzept



Studierende(r)

Arbeitsheft

Gegenständliches Material

Simulation

Schülerinnen und Schüler

Video-aufnahme

Roth, J. & Priemer, B. (2020). Das Lehr-Lern-Labor als Ort der Lehrkräftebildung – Ergebnisse der Arbeit eines Forschungs- und Entwicklungsverbunds. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 1-10). Heidelberg: Springer Spektrum.

Struktur der Nutzung von ViviAn in allen Phasen der Lehrkräftebildung

Zeitplan

Zeit	Inhalt	Raum
13:30-13:45	Ankommen, Begrüßung, Kennenlernen	I 1.08
13:45-14:15	Vorstellung Mathematisches Umweltlabor	I 0.07
14:15-14:20	Wechselpause	
14:20-15:00	Vorstellung Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“	I 1.08
15:00-15:20	Kaffeepause	I 1.08
15:20-16:00	Auseinandersetzung mit zwei Laborstationen des Mathematik-Labors	I 1.08/I 1.07
16:00-16:20	Vorstellung ViviAn	I 1.08
16:20-16:45	Auseinandersetzung mit ViviAn-Vignetten	I 1.08
16:45-17:00	Abschlussreflexion	I 1.08

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

2.5.1 Grundvorstellung zur Ähnlichkeit

2.5.2 Eigenschaften zueinander ähnlicher Figuren

2.5.3 Strahlensätze

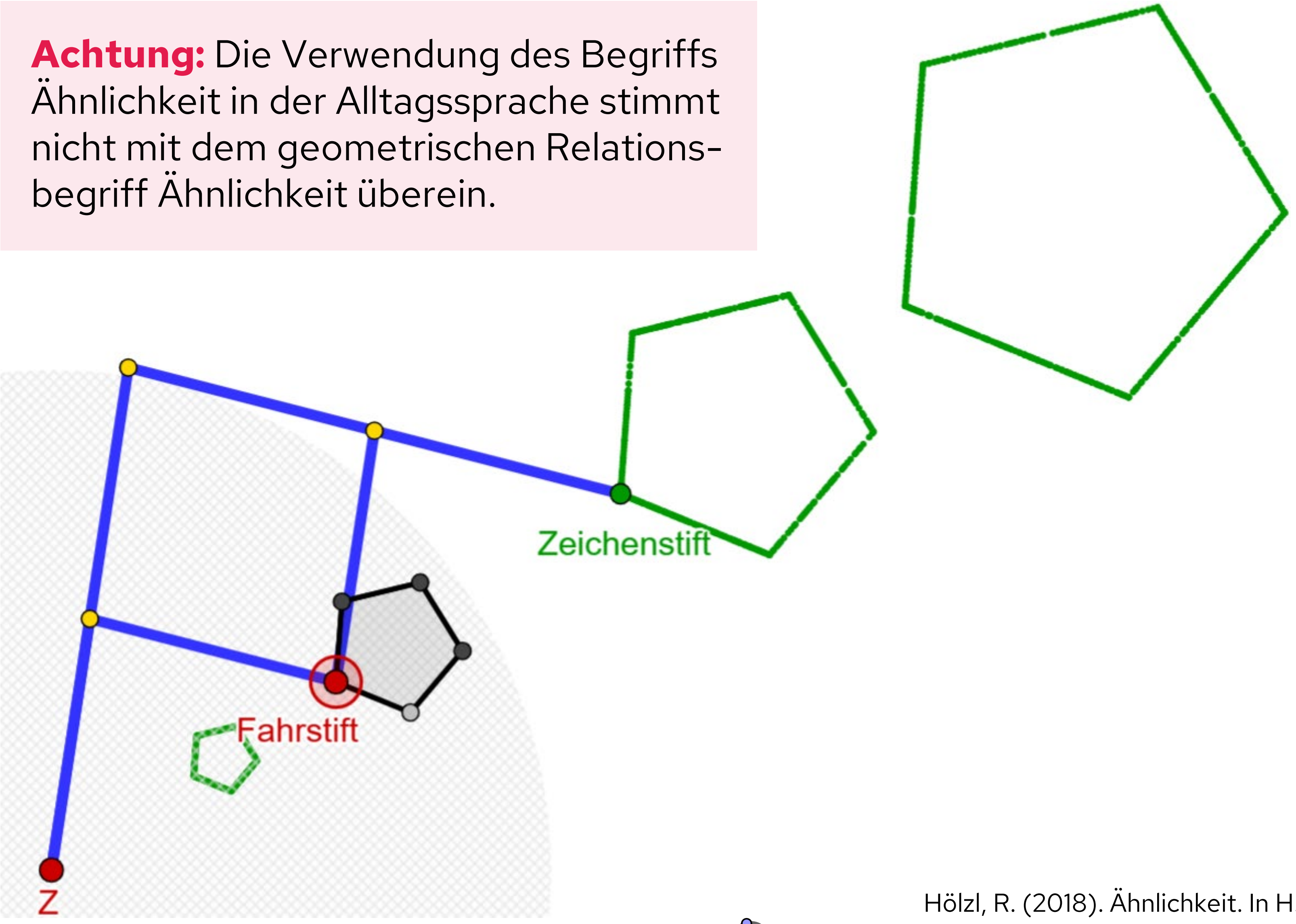
2.5.4 Zentrische Streckung

2.5.5 Typische Schwierigkeiten

2.5.6 Diagnostische Kompetenz

Pantograf:
Grundvorstellung zur Ähnlichkeit

Achtung: Die Verwendung des Begriffs Ähnlichkeit in der Alltagssprache stimmt nicht mit dem geometrischen Relationsbegriff Ähnlichkeit überein.

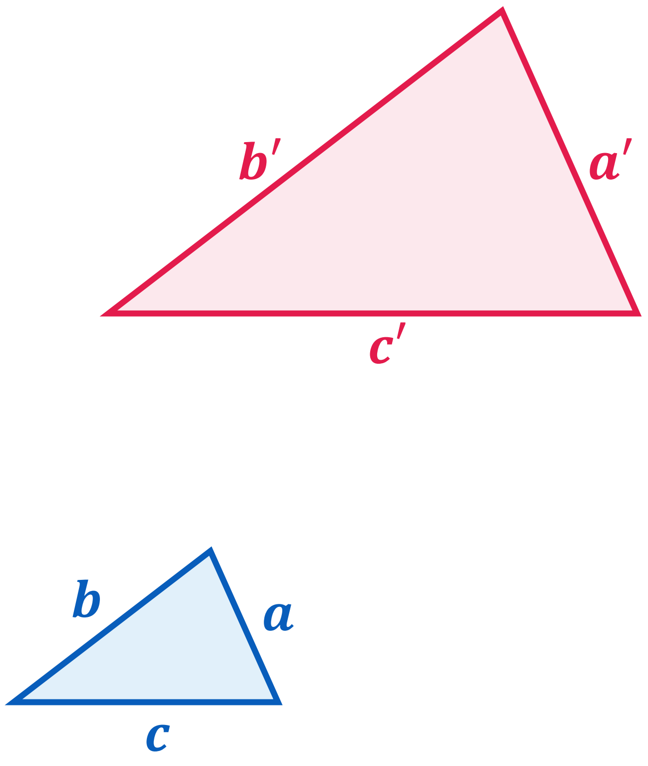


Grundvorstellung zur Ähnlichkeit:

Figuren sind ähnlich zueinander, wenn eine Figur durch **maßstäbliche Vergrößerung** oder **Verkleinerung** aus der anderen Figur hervorgeht.

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 205f). Berlin: Springer Spektrum.

Aus der Grundvorstellung abgeleitete Einsichten



Formalisierung der Grundvorstellung zur Ähnlichkeit mit Hilfe des Vergrößerungsfaktors k:

$$a' = k \cdot a \;\wedge\; b' = k \cdot b \;\wedge\; c' = k \cdot c$$

Einsicht 1: Längen entsprechender Seiten zueinander ähnlicher Figuren, stehen im selben Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Umformen liefert:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \;\wedge\; \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \;\wedge\; \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$$

Weitere Umformungen zeigen:

Einsicht 2: Zueinander ähnliche Figuren, stimmen in entsprechenden Seitenverhältnissen überein.

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \;\wedge\; \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c} \;\wedge\; \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S. 205f). Berlin: Springer Spektrum.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

2.5.1 Grundvorstellung zur Ähnlichkeit

2.5.2 Eigenschaften zueinander ähnlicher Figuren

2.5.3 Strahlensätze

2.5.4 Zentrische Streckung

2.5.5 Typische Schwierigkeiten

2.5.6 Diagnostische Kompetenz

Fachliche Zugänge zur Ähnlichkeit

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Figurenbezogener Zugang (nach Euklid)

- Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie gleiche Innenwinkel und entsprechende Seitenverhältnisse besitzen.
- Kern dieses Zugangs sind die Strahlensätze, mit denen Aussagen über ähnliche (Teil-)Figuren gefolgert werden.

Abbildungsgeometrischer Zugang

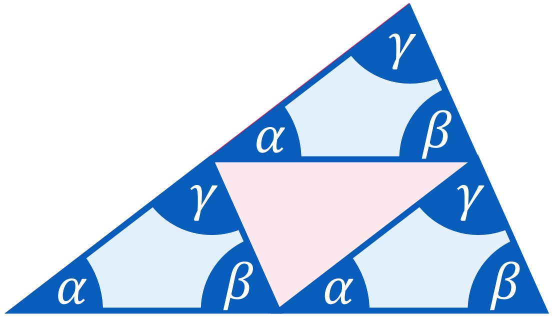
- Zwei Figuren sind ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die eine Figur auf die andere abbildet.
- Ähnlichkeitsabbildung: Verkettung (mindestens) einer zentrischen Streckung mit beliebig vielen Kongruenzabbildungen

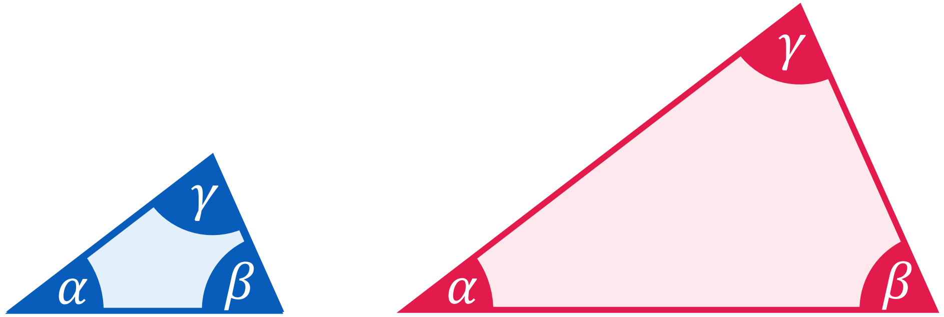
Anmerkungen für den Unterricht:

- Für den Unterricht sollten beide Aspekte adressiert werden.
- Der Einstieg sollte über die Grundvorstellung der Erzeugung von Ähnlichkeit durch maßstäbliche Vergrößerung bzw. Verkleinerung erfolgen.
- Auch die Beziehung zwischen Ähnlichkeit und Kongruenz, nämlich Kongruenz als Spezialfall der Ähnlichkeit bei Vergrößerungsfaktor 1, sollte thematisiert bzw. von den Lernenden über entsprechende Aufgaben entdeckt werden.

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 203). Berlin: Springer Spektrum.

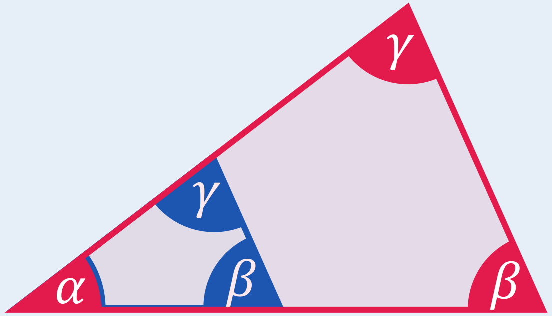
Eigenschaften ähnlicher Figuren





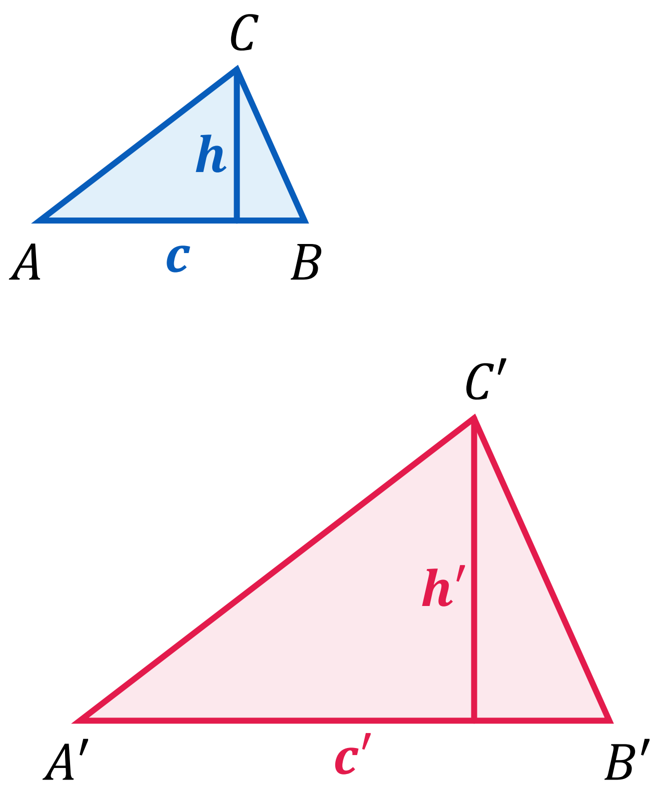
Entdeckungen

- Entsprechende Winkel in ähnlichen Figuren sind gleich groß.



- Wird eine Figur mit einem Vergrößerungsfaktor $\boldsymbol{k}$ $\left(\frac{1}{2}, 2, 3, \ldots\right)$ maßstäblich vergrößert bzw. verkleinert (halbiert, verdoppelt, verdreifacht, …), dann werden
  - alle Streckenlängen in der Figur ver–$\boldsymbol{k}$–facht (halbiert, verdoppelt, verdreifacht, …) und
  - der Flächeninhalt der Figur ver–$\boldsymbol{k}^2$–facht (geviertelt, vervierfacht, verneunfacht, …).

Eigenschaften ähnlicher Figuren



Bemerkung:
Für Figuren F' und F, die durch den Vergrößerungsfaktor k auseinander hervorgehen, kann man sich den Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$ anhand der Flächeninhaltsformel $A_\Delta = \frac{1}{2} gh$ für Dreiecke klarmachen:

(1) $c' = k \cdot c$

(2) $h' = k \cdot h$

$$\Rightarrow A_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot c' \cdot h'$$

$$\overset{(1),(2)}{\triangleq} \frac{1}{2} \cdot (k \cdot c) \cdot (k \cdot h)$$

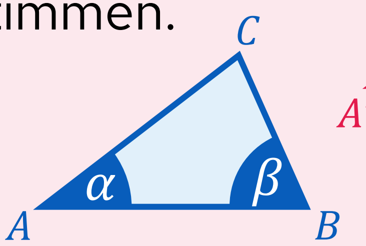
$$\overset{AG,KG}{\triangleq} k^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot h\right)$$

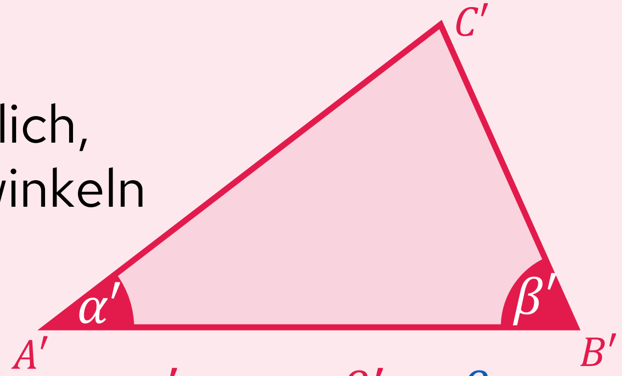
$$= k^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Ähnlichkeitssatz 1

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Innenwinkeln übereinstimmen.

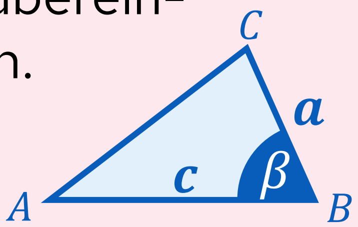


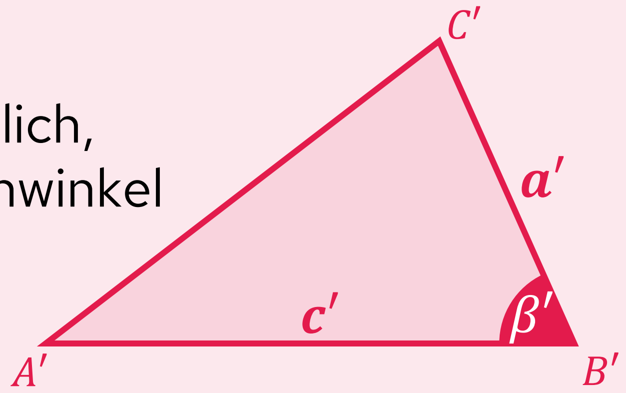


$$\alpha' = \alpha \wedge \beta' = \beta$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Ähnlichkeitssatz 2

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Innenwinkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.

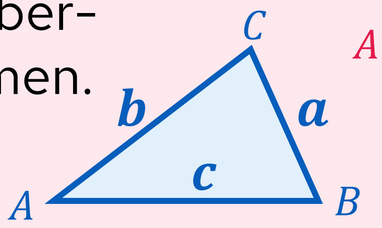


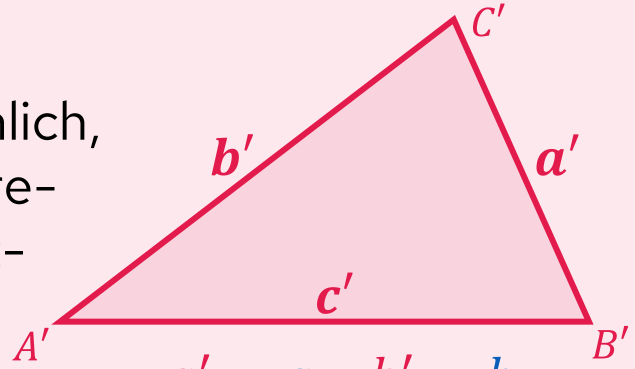


$$\beta' = \beta \wedge \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Ähnlichkeitssatz 3

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

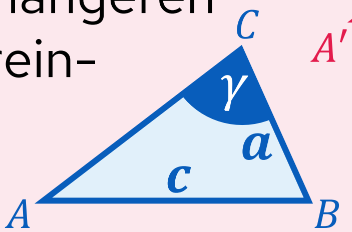


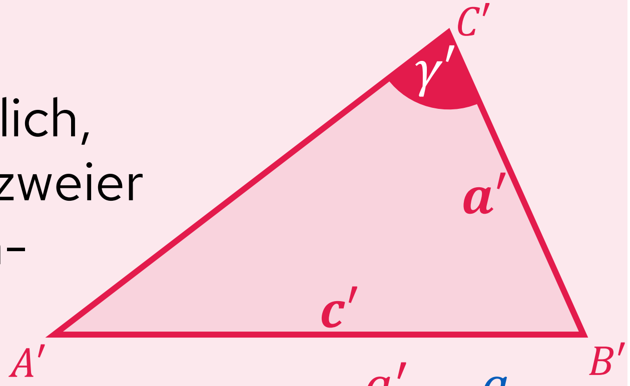


$$\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} \wedge \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Ähnlichkeitssatz 4

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen.





$$\gamma' = \gamma \wedge \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 215f). Berlin: Springer Spektrum.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

2.5.1 Grundvorstellung zur Ähnlichkeit

2.5.2 Eigenschaften zueinander ähnlicher Figuren

2.5.3 Strahlensätze

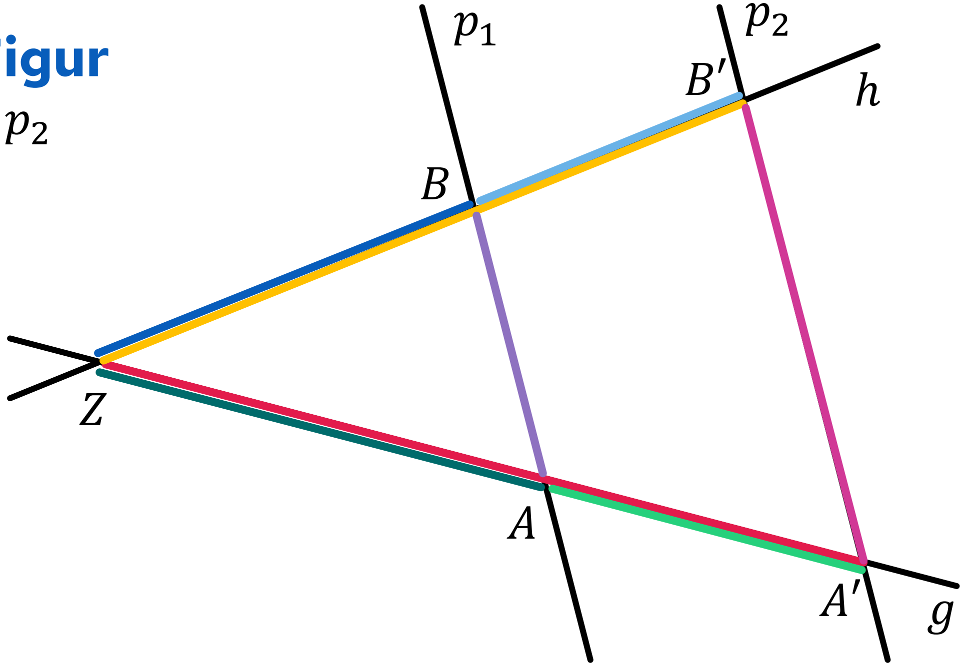
2.5.4 Zentrische Streckung

2.5.5 Typische Schwierigkeiten

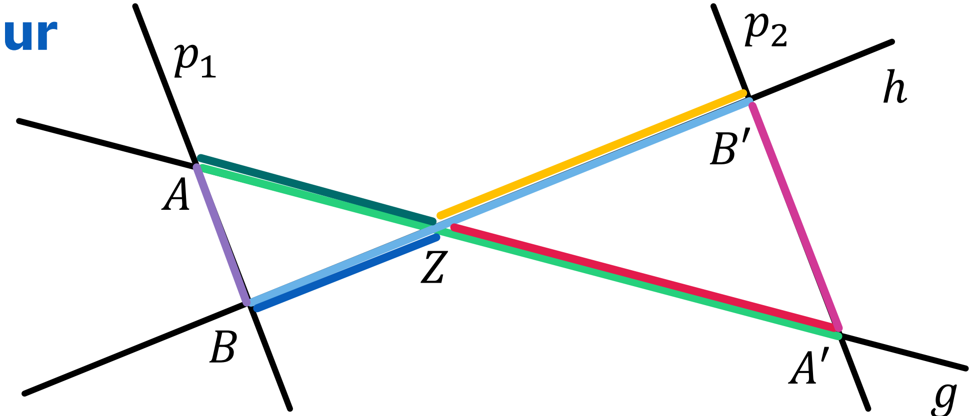
2.5.6 Diagnostische Kompetenz

Strahlensätze - Verhältnisgleichungen

V-Figur
$p_1 \parallel p_2$



X-Figur
$p_1 \parallel p_2$



Strahlensatzkonfiguration
Zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt Z schneiden, werden von zwei zueinander parallelen Geraden p_1 und p_2 geschnitten.

1. Strahlensatz
Bei einer Strahlensatzkonfiguration verhalten sich die Längen der Streckenabschnitte auf der Gerade h wie die Längen der entsprechenden Streckenabschnitte auf der Gerade g.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

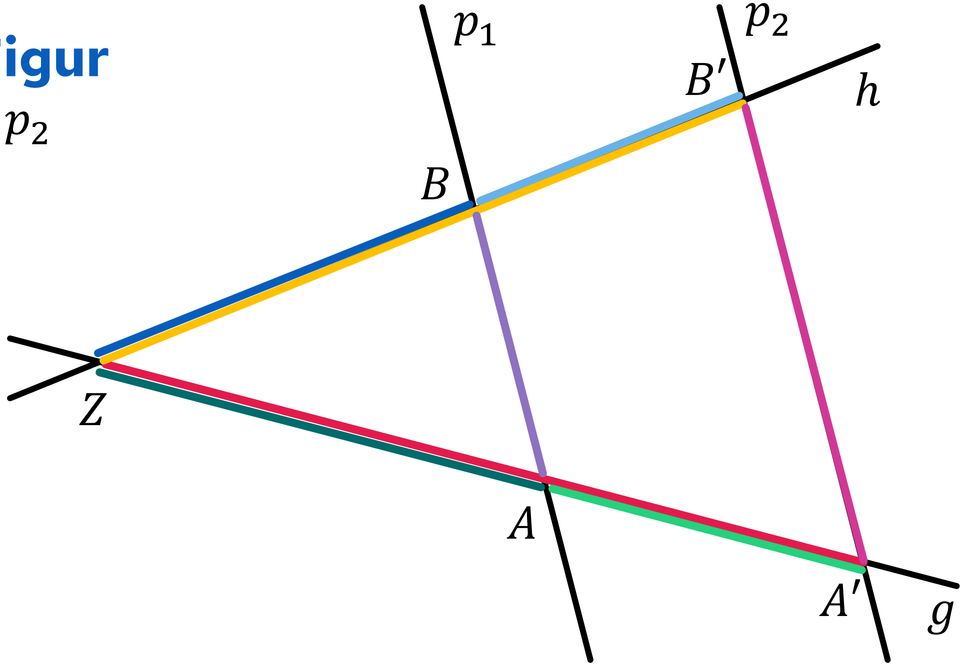
$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{ZB'}}$$

2. Strahlensatz
Bei einer Strahlensatzkonfiguration verhalten sich die Längen der Streckenabschnitte auf der Geraden g (bzw. h) wie die Längen der entsprechenden Parallelenabschnitte.

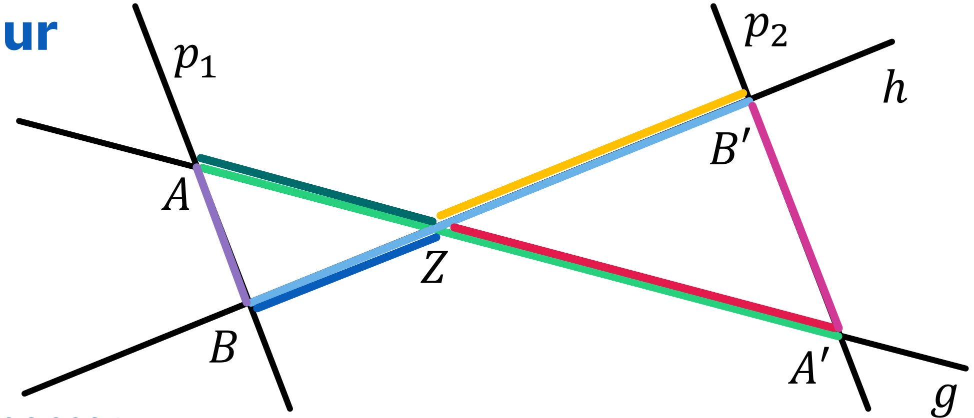
$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

Strahlensätze - Verhältnisgleichungen

V-Figur
$p_1 \parallel p_2$



X-Figur
$p_1 \parallel p_2$



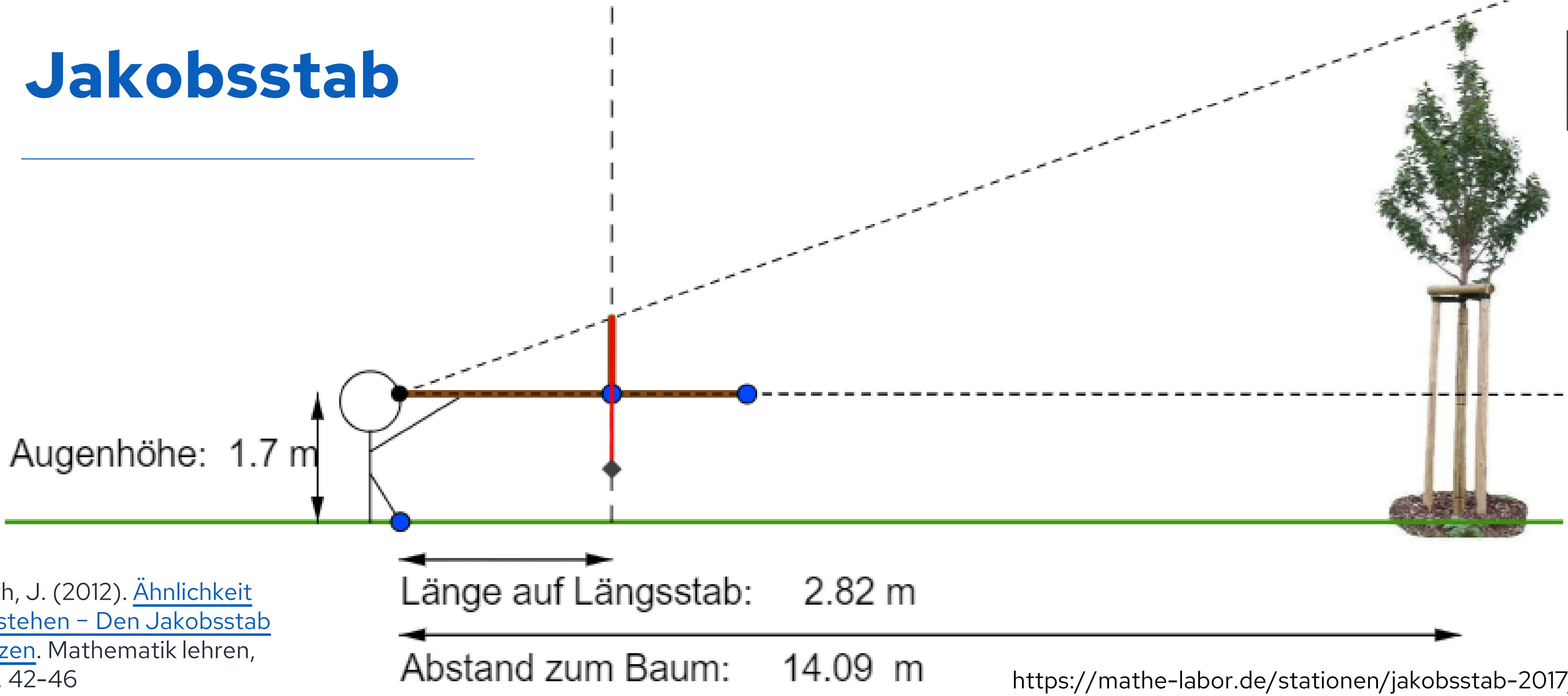
Bemerkungen

- Die Strahlensätze lassen sich über die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔZAB und $\Delta ZA'B'$ oder die zentr. Streckung $Z_{Z,k}$ mit Streckungszentrum Z und Streckungsfaktor $k = \pm \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$ beweisen.
- In den Strahlensätzen werden aus der Parallelität $p_1 \parallel p_2$ der Geraden p_1 und p_2 Aussagen zu Streckenverhältnissen gefolgert.
- Umgekehrt lässt sich aus der Gleichheit bestimmter Streckenverhältnisse auf die Parallelität der Geraden p_1 und p_2 schließen:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \quad \Rightarrow \quad p_1 \parallel p_2$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}} \quad \Rightarrow \quad p_1 \parallel p_2$$

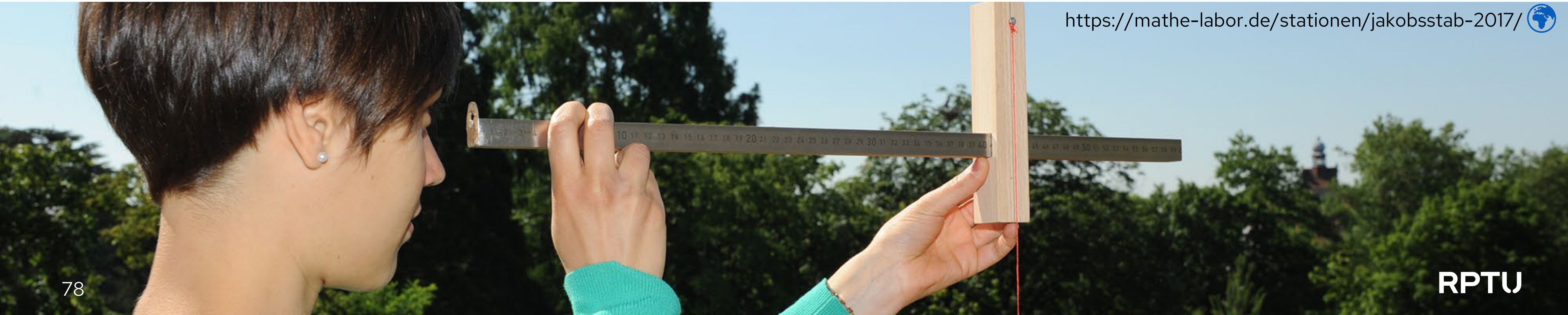
Jakobsstab



Roth, J. (2012). [Ähnlichkeit verstehen – Den Jakobsstab nutzen](). Mathematik lehren, 172, 42-46

https://mathe-labor.de/stationen/jakobsstab-2017/a/teil2/ → Simulation 5

https://mathe-labor.de/stationen/jakobsstab-2017/



Historische Erdvermessung

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

2.5.1 Grundvorstellung zur Ähnlichkeit

2.5.2 Eigenschaften zueinander ähnlicher Figuren

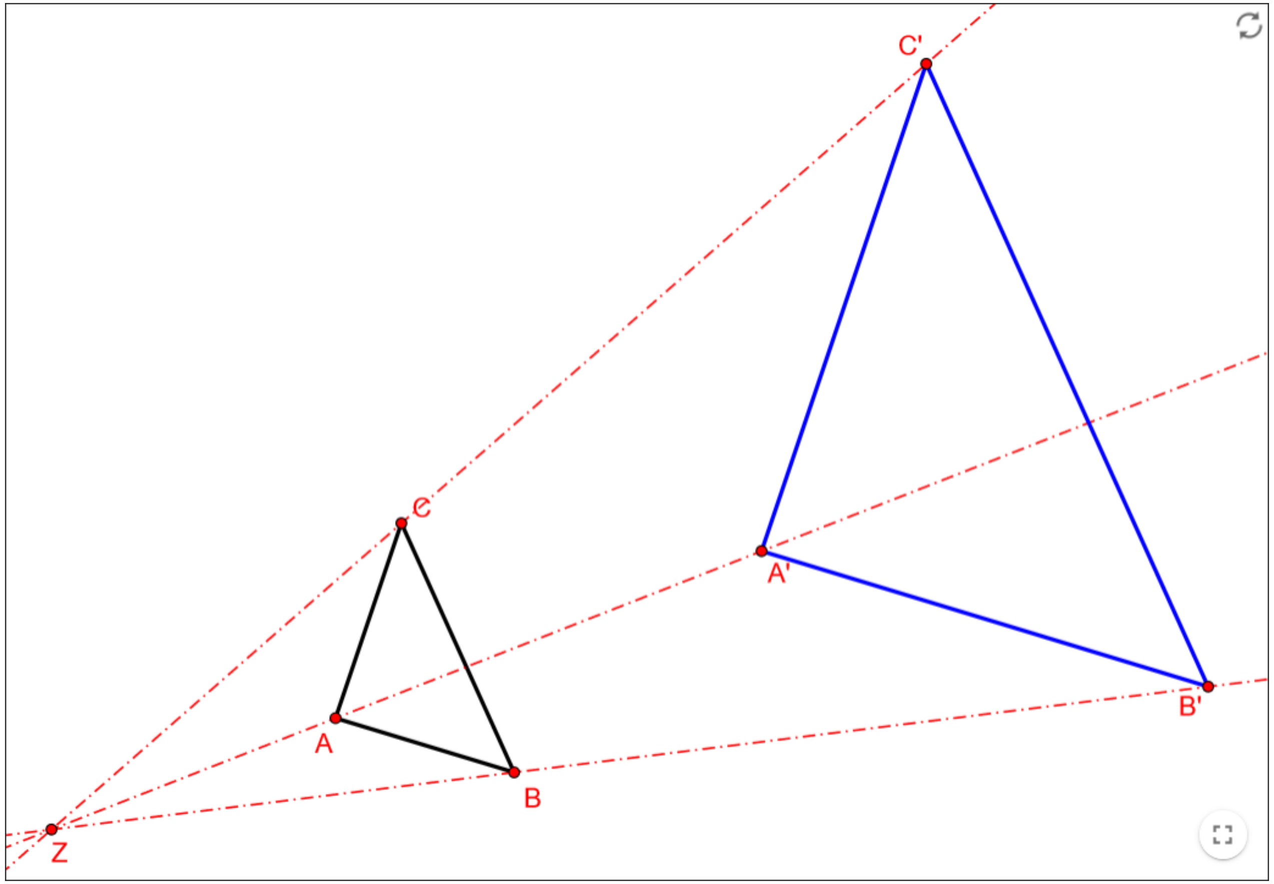
2.5.3 Strahlensätze

2.5.4 Zentrische Streckung

2.5.5 Typische Schwierigkeiten

2.5.6 Diagnostische Kompetenz

Zentrische Streckung



Eine **zentrische Streckung $Z_{Z,k}$** wird durch einen Punkt, das Streckungszentrum Z, und eine reelle Zahl, den Streckungsfaktor k, eindeutig festgelegt.

Bemerkungen

Die Gerade AA' durch einen Punkt A und seinen Bildpunkt $A' = Z_{Z,k}(A)$ wird durch Z in zwei Halbgeraden zerlegt.

- $k > 0$: A und A' liegen auf derselben Halbgerade bzgl. Z.
- $k = 1$: $Z_{Z,1} = id$ (identische Abbildung)
- $k = 0$: Für alle Punkte P der Ebene gilt: $P' = Z_{Z,0}(P) = Z$
- $k < 0$: A und A' liegen auf verschiedenen Halbgeraden bzgl. Z.
- $k = -1$: $Z_{Z,-1} = P_z$ (Punktspiegelung)

 https://www.geogebra.org/m/chThYhGT

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

2.5.1 Grundvorstellung zur Ähnlichkeit

2.5.2 Eigenschaften zueinander ähnlicher Figuren

2.5.3 Strahlensätze

2.5.4 Zentrische Streckung

2.5.5 Typische Schwierigkeiten

2.5.6 Diagnostische Kompetenz

Typische Probleme von Lernenden

Aufstellen von Verhältnisgleichungen

- Identifizieren von Strecken, die geeignet ins Verhältnis gesetzt werden können.
- Schwierigkeit Längen entsprechender Seiten flexibel ins Verhältnis zu setzen.
- Versuch „Merkregeln“ oder bereits bearbeitete Aufgaben strukturgleich zu nutzen.

  Beispiel: Eine Aufgabenbearbeitung, bei der jeweils eine längere zu einer kürzeren Seite ins Verhältnis gesetzt wurde, wird zu einer Merkregel „lang zu kurz“ verallgemeinert. Dies führt dazu, dass nur noch solche Verhältnisse gesucht und gebildet werden.

Geom. Verständnis des Ähnlichkeitsbegriffs

- Fehlende Grundvorstellung zur Ähnlichkeit von Figuren
- Unfähigkeit zueinander ähnliche Dreiecke zu erkennen

Verständnis des Verhältnisbegriffs

- Bruchzahlen, Prozente und Proportionen werden nicht als unterschiedliche Perspektiven, auf denselben Sachverhalt wahrgenommen sondern als unabhängige Aspekte abgespeichert.
- Da Verhältnisse einheitsfrei sind, können Zusammenhänge zu Einheiten in realen Situationen beliebig hergestellt werden. Dies fällt Lernenden schwer.
- Probleme bei der Unterscheidung zwischen absoluten Verhältnissen (Bei Fußballspielen macht es einen Unterschied ob sie 3:1 oder 6:2 ausgehen.) und relativen Verhältnissen, also Proportionalitätskonstanten.

Barzel, B. & Kleine, M. (2013). Verhältnisse erkennen und nutzen. *Mathematik lehren, 179*, 2–8.

Veranstaltungsfeedback

Veranstaltungsfeedback

- https://roth.tel/feedback

Fragen

(Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.)

- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)
- Was wünschen Sie sich für die Veranstaltung?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de