

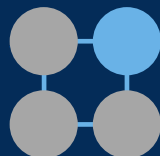


Funktionales Denken zielgerichtet fördern

Der Beitrag von Grundvorstellungen
und digitalen Lernumgebungen

Jürgen Roth

07.02.2024 Felix-Klein-Kolloquium, Kaiserslautern



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R

TU

P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Funktionales Denken zielgerichtet fördern

1. Grundvorstellungen zu Funktionen
2. Typische Schülerfehler beim Umgang mit Funktionen
3. (Digitale) Lernumgebungen
4. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien und Simulationen

1

Grundvorstellungen zu Funktionen

R
P **TU**

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

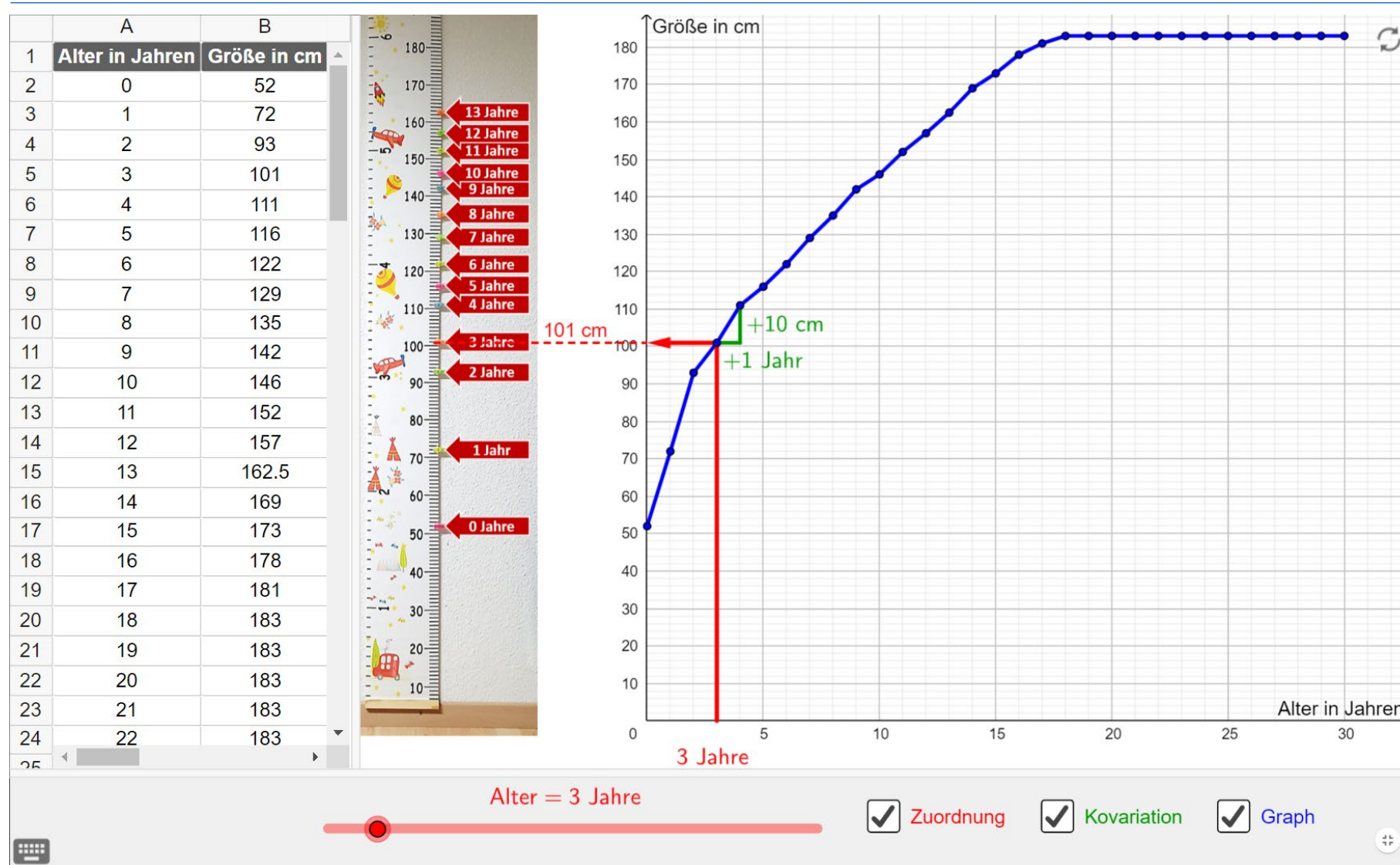
- Zuordnung
- Änderungsverhalten (Kovariation)
- Sicht als Ganzes

Funktionsterm

$$f(x) = 2 \cdot x$$

The graph illustrates the relationship between Variation (x-axis) and Kovariation (y-axis). The x-axis is labeled 'Variation' and ranges from 0 to 5. The y-axis is labeled 'Kovariation' and ranges from 0 to 10. A blue line represents the linear relationship, starting at (0,0) and ending at (5,10). Green arrows indicate the step-wise changes in x and y, labeled with '+1' and '+2'. A red vertical line at x=3 is labeled 'Zuordnung' (Assignment), and a red horizontal line at y=6 is labeled 'Kovariation'.

Zusammenhang: Alter $\mapsto$ Körpergröße



Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

**Prototypisches
Beispiel als
Verständnisanker**

Mentalen Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

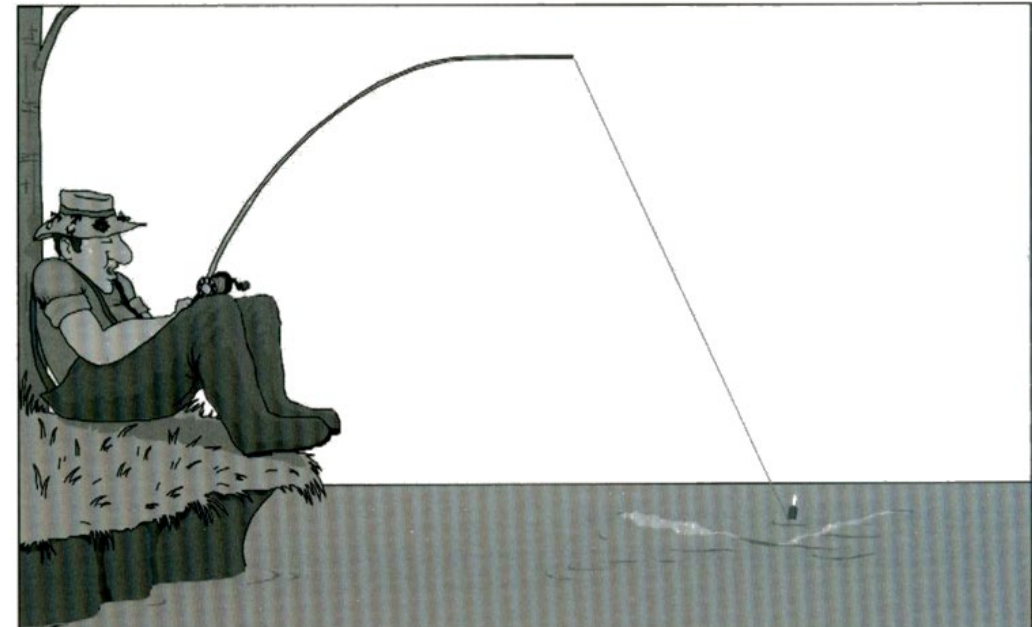
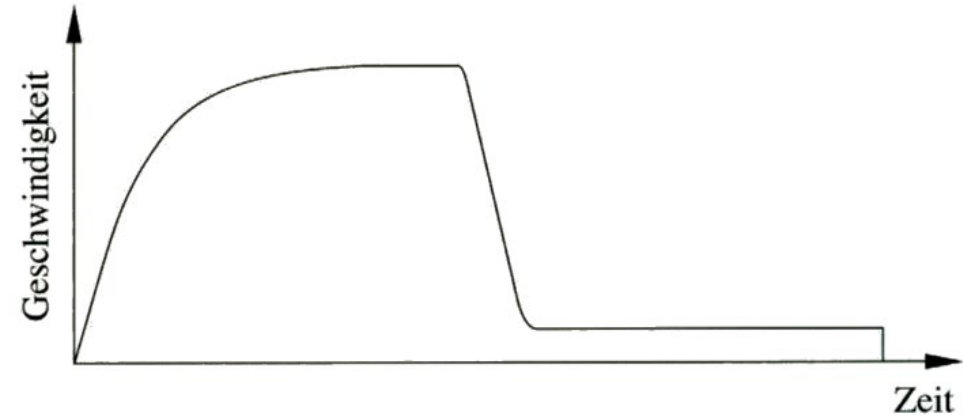
- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

2

Typische Schülerfehler beim Umgang mit Funktionen

Graph-als-Bild-Fehler

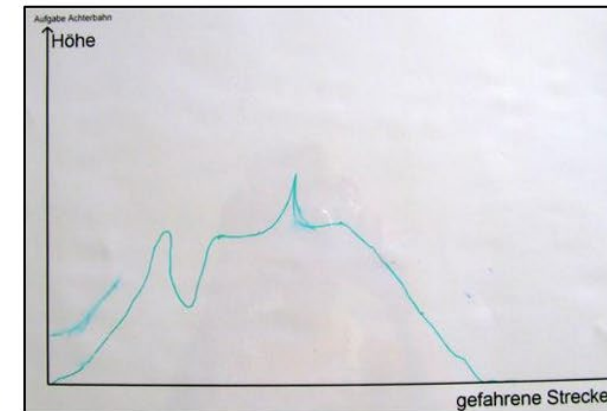
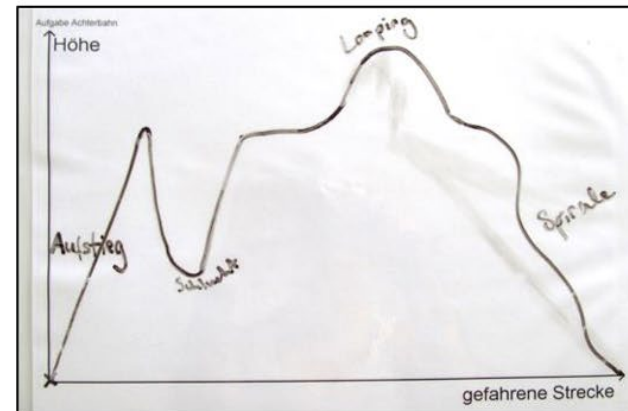
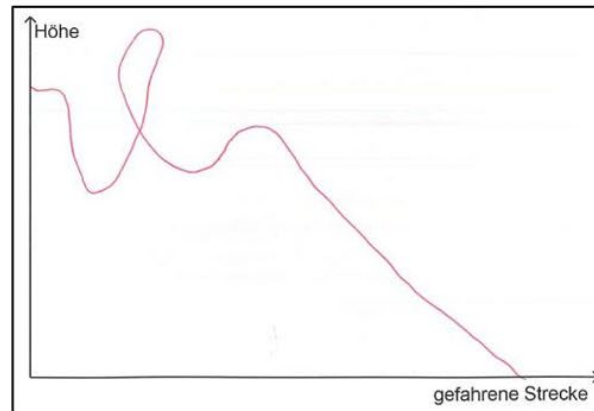
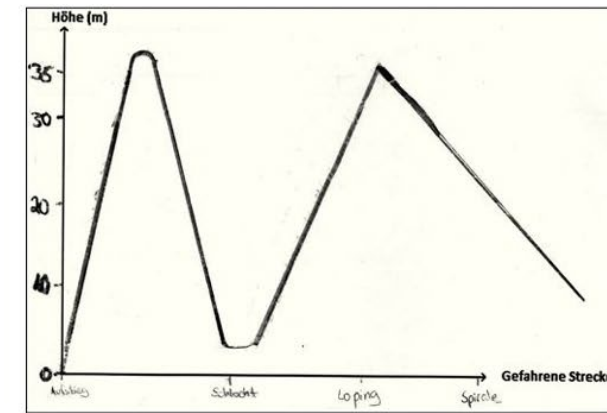
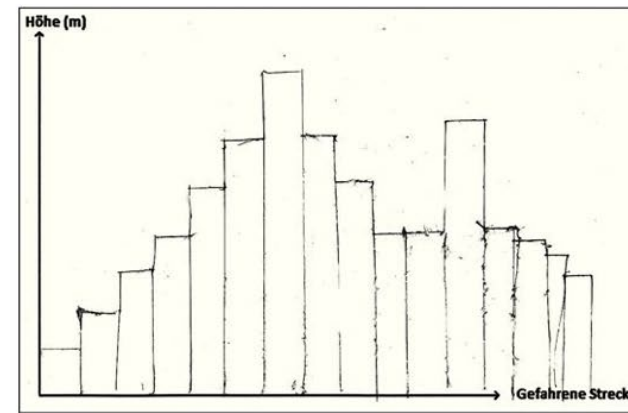
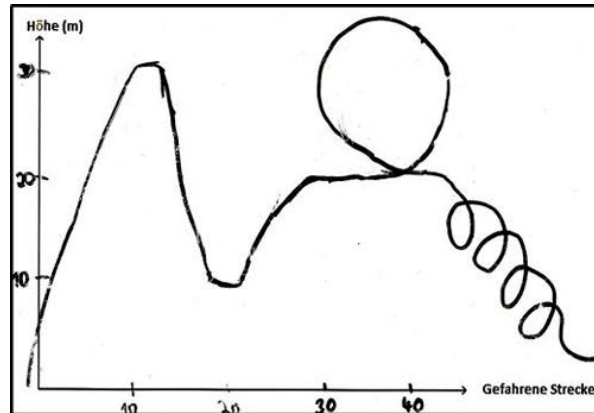
Ein Graph wird nicht als Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs sondern als Abbild (Foto) der Realität interpretiert bzw. konstruiert.



„Graph als Bild“-Fehler

Achterbahnfahrt

Es ist ein Graph zu skizzieren, bei dem der auf der Achterbahn gefahrenen Strecke die Höhe des Wagens über dem Boden zugeordnet wird.



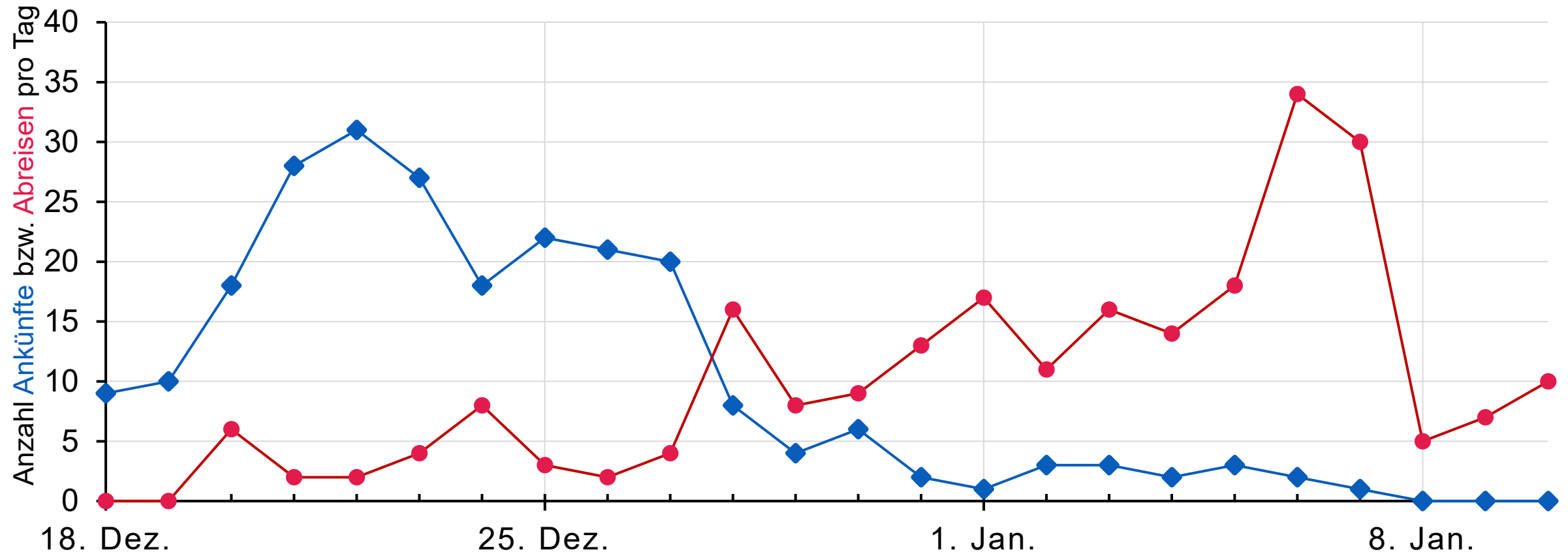
Bei einer Achterbahn folgen nach dem **Aufstieg**, eine „**Schlucht**“ (d.h. hier geht es erst steil nach unten und dann gleich wieder nach oben), ein „**Looping**“ und eine „**Spirale abwärts**“. Skizziert einen Graphen, in dem der auf der Achterbahn gefahrenen Strecke die Höhe des Wagens über dem Boden zugeordnet wird.

Bestand und Änderung

Wann waren die meisten Gäste im Hotel?

Ankünfte und Abreisen im Alpenhotel

◆ Ankünfte (Anzahl am Tag) ● Abreisen (Anzahl am Tag)

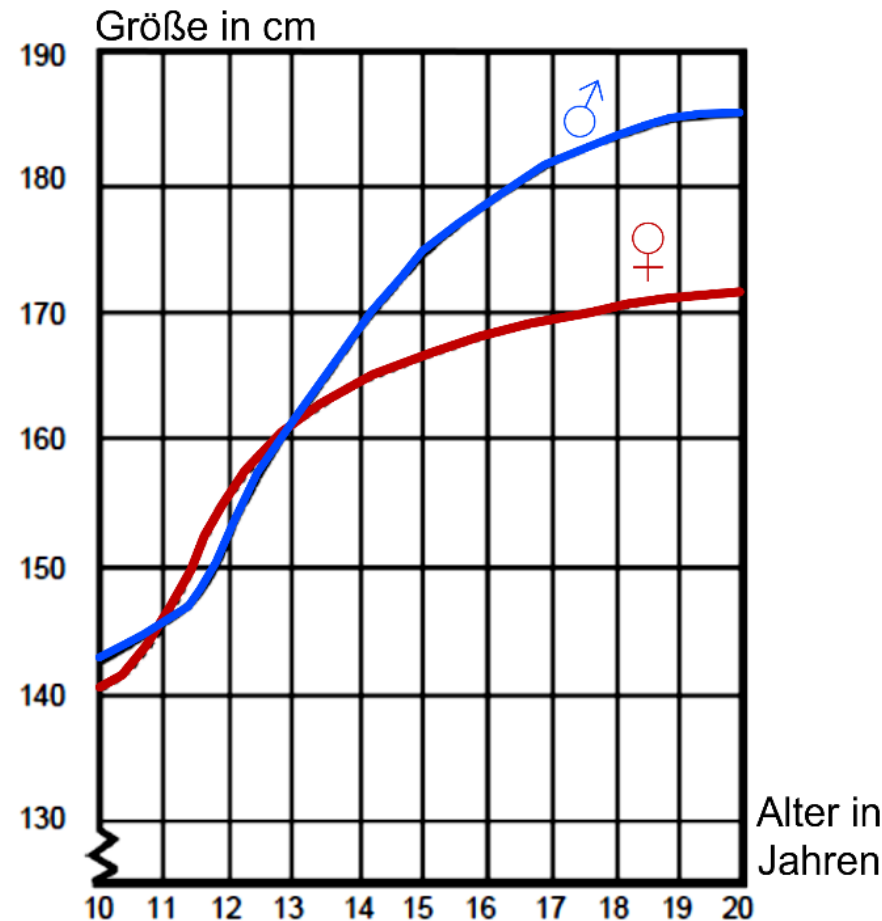


Verwechslung von Bestand und Änderung

Wenn nach der Änderung an einer bestimmten Stelle bzw. in einem bestimmten Bereich gefragt wird.

Statt der Änderung wird häufig der Bestand fokussiert.

Wenn mehrere Graphen oder verschiedene Teilbereiche eines Graphen miteinander verglichen werden und z. B. nach der größeren Änderung gefragt wird.



Vergleich innerhalb eines Graphen

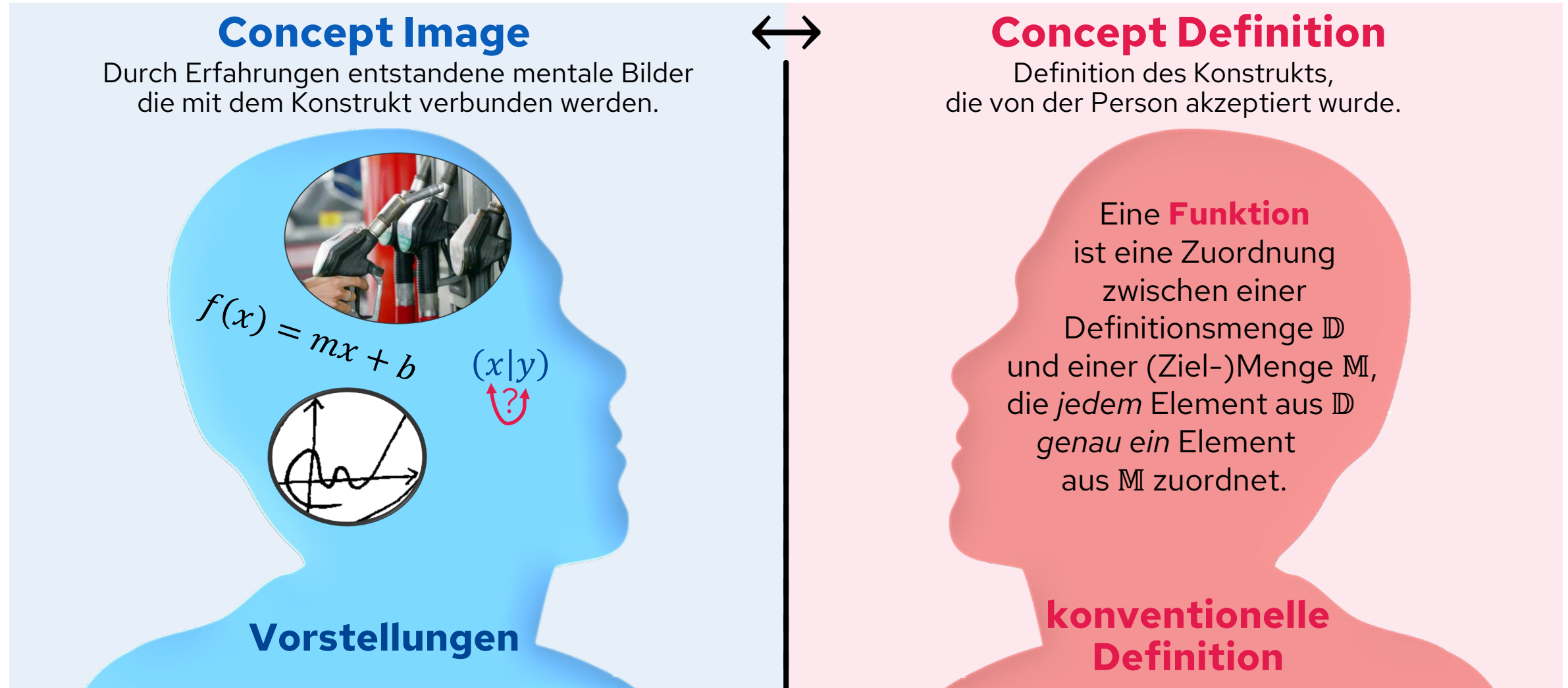
Innerhalb welchen Jahres wachsen die Jungen am stärksten?

Vergleich zwischen zwei Graphen

Welche Jugendliche wachsen zwischen dem 10. und 11. Geburtstag stärker, männliche oder weibliche?

Concept Image ↔ Concept Definition

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education I (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.



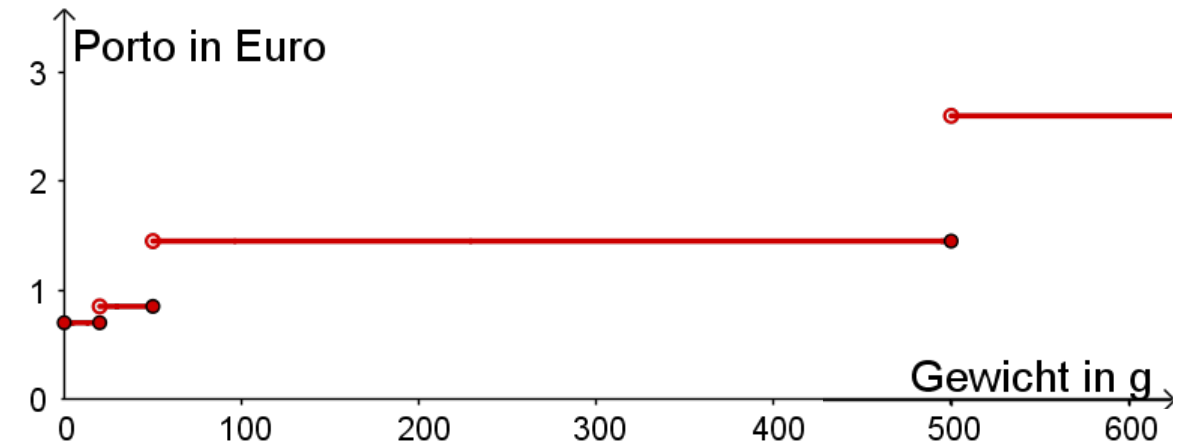
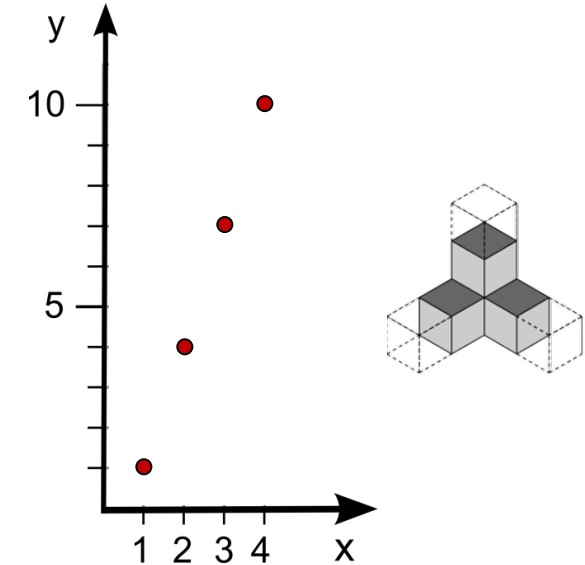
Concept Image ↔ Concept Definition

Concept Image & Concept Definition

- ... existieren nebeneinander und sind oft miteinander vereinbar.
- ... sind nicht immer gleichzusetzen und können sich gegenseitig stören.

Graphen, die neu oder ungewohnt erscheinen,

- passen nicht zu den mentalen Bildern und somit nicht ins **Concept Image**.
- werden oft nicht als Funktionsgraphen angesehen, obwohl sie definitionsgemäß Funktionen darstellen und die Definition einer Funktion (**Concept Definition**) durchaus verinnerlicht wurde.



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Material ↶

Lernumgebung —

Thema und Ziele

Schülerebene —

Arbeitsauftrag

Material

Schülerdokumente

Metaebene —

Schülerprofile

S2 S3

S1 S4

Zeitliche Einordnung

ViviAn

Vignette beenden

Video

Diagnoseauftrag



<https://vivan.projects.rptu.de> 

Roth, J. (2020). [Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung](#). In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), *Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung* (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Rieger, M. B., Ossadnik, H., Pfaffmann, C. & Roth, J. (2023). [Design und Evaluation einer interaktiven Tutorien-Umgebung für das Videoanalysetool ViviAn](#). In J. Aufenanger & M. Bigos (2023). [Digitalisierung in der Lehrer:innenbildung – Corona als Katalysator?!](#) (S. 312-324). Weinheim: Beltz Juventa.

3

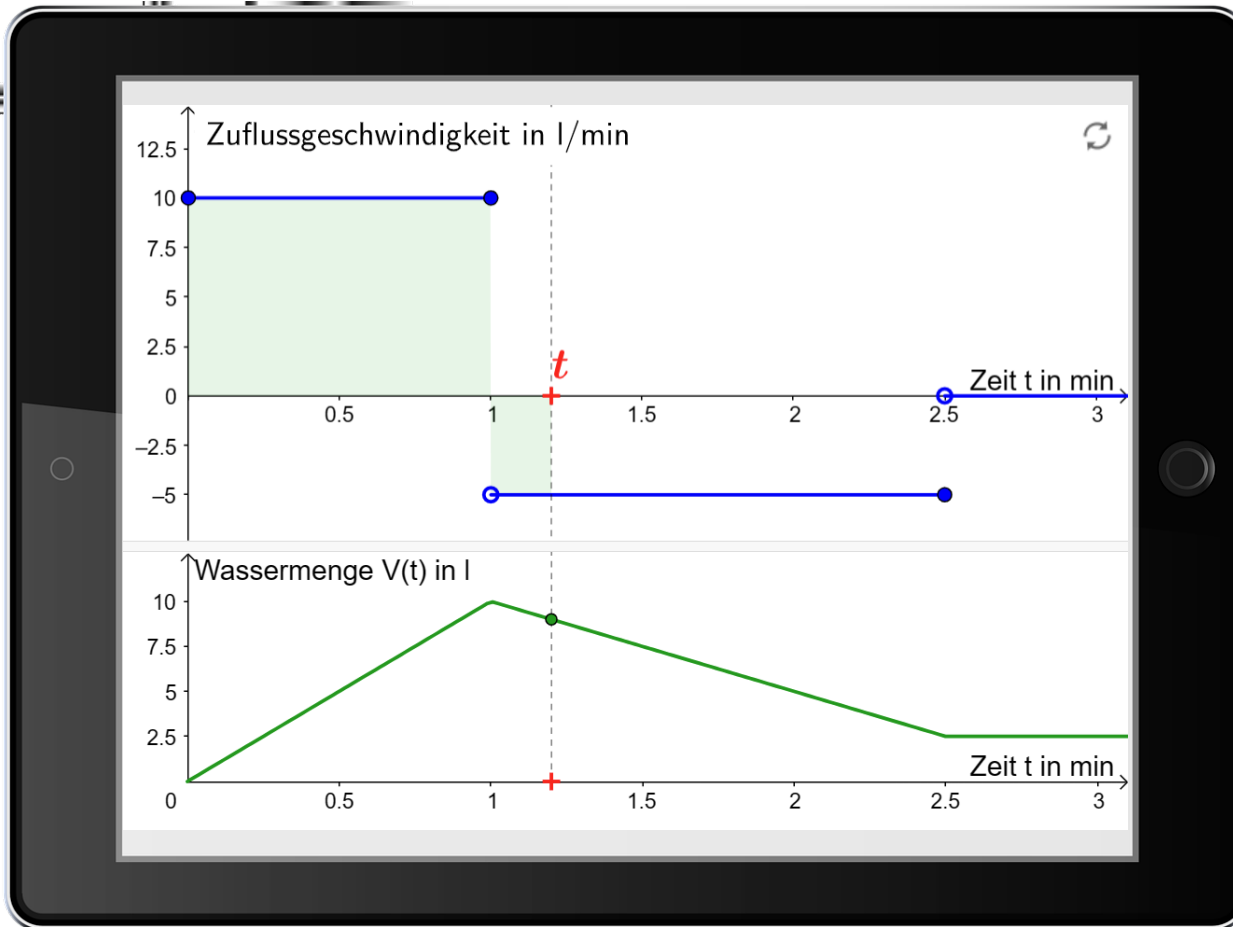
Digitale Lernumgebungen

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.



Definition: Digitale Lernumgebung



Digitale Lernumgebung

- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
 - von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
 - die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten, digital angereichert wurde.

Digitale Lernumgebungen

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“



Aktivurlaub

Funktionale Zusammenhänge

Ansehen



Around the world

Funktionale Zusammenhänge der
Sek I

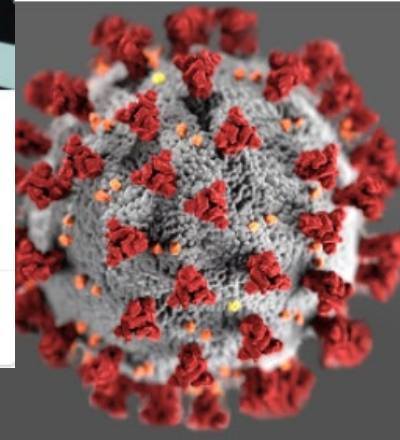
Ansehen



USA - ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Integralrechnung

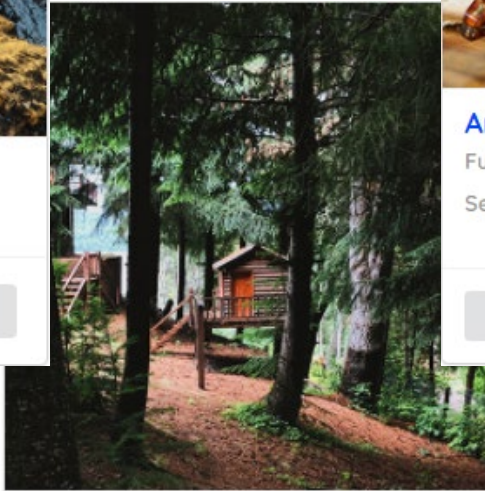
Ansehen



Wort des Jahres

Integralrechnung

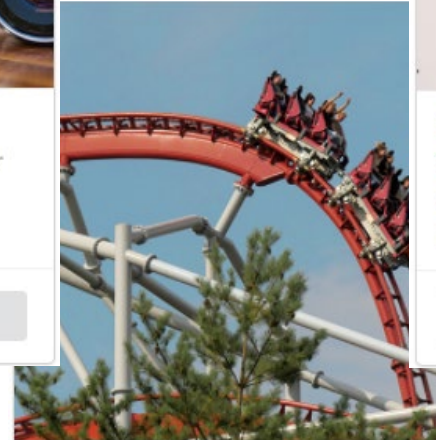
Ansehen



Das Baumhaus-Projekt

Funktionale Zusammenhänge

Ansehen



Freizeitpark

Differentialrechnung

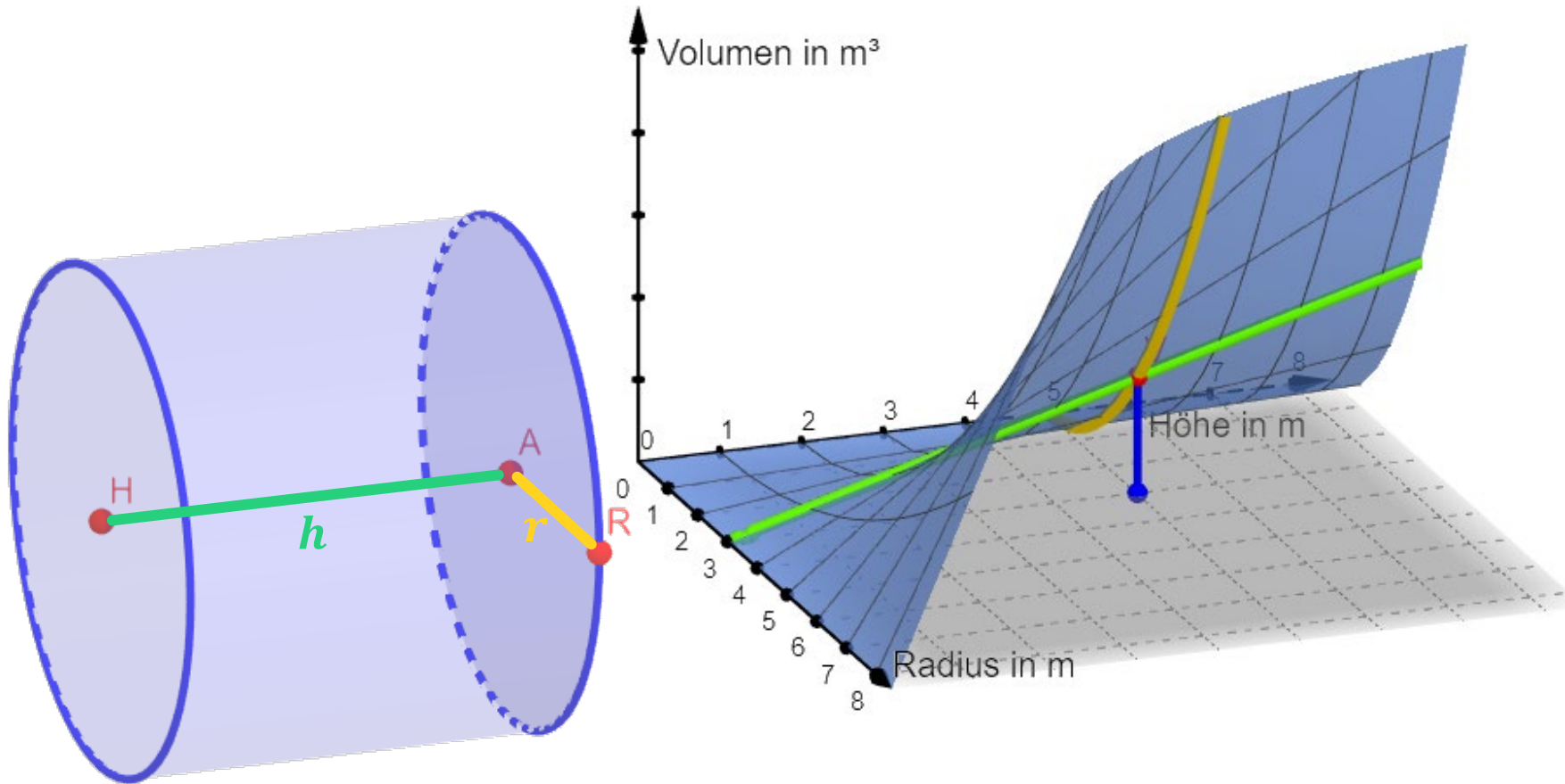
Ansehen



Mathematik-Labor
"Mathe ist mehr"



Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(\mathbf{r}, \mathbf{h}) = \mathbf{r}^2 \pi \cdot \mathbf{h}$$

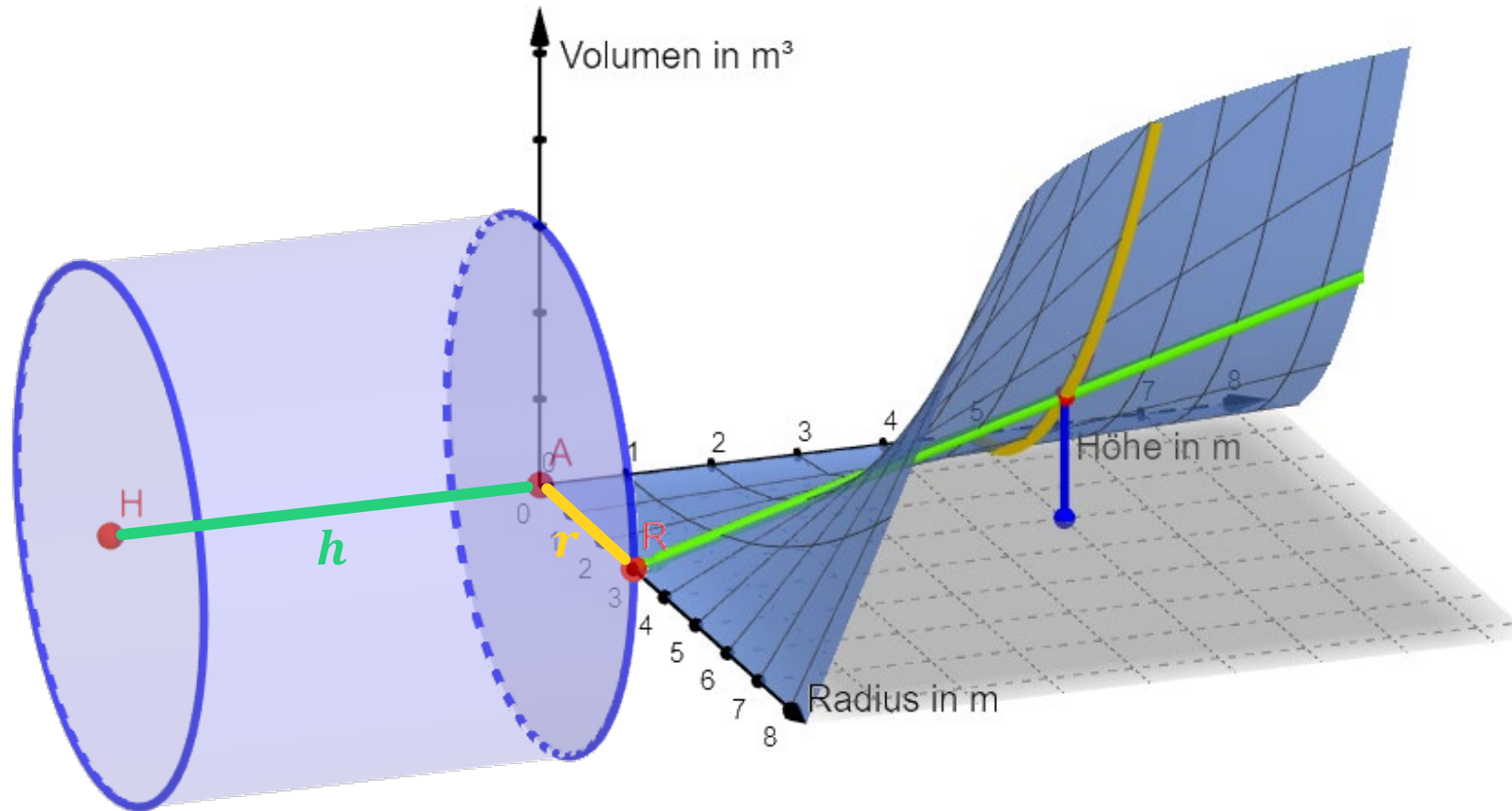
Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher

Zylindervolumen

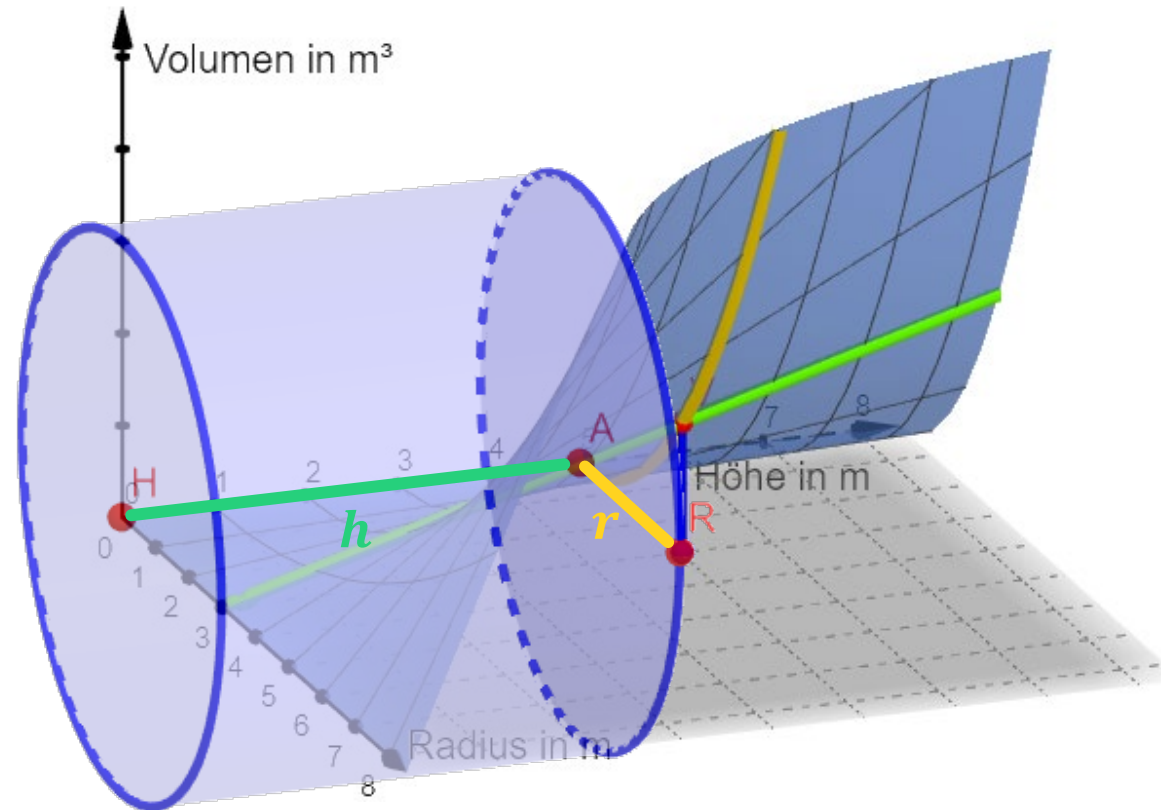
$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$



Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



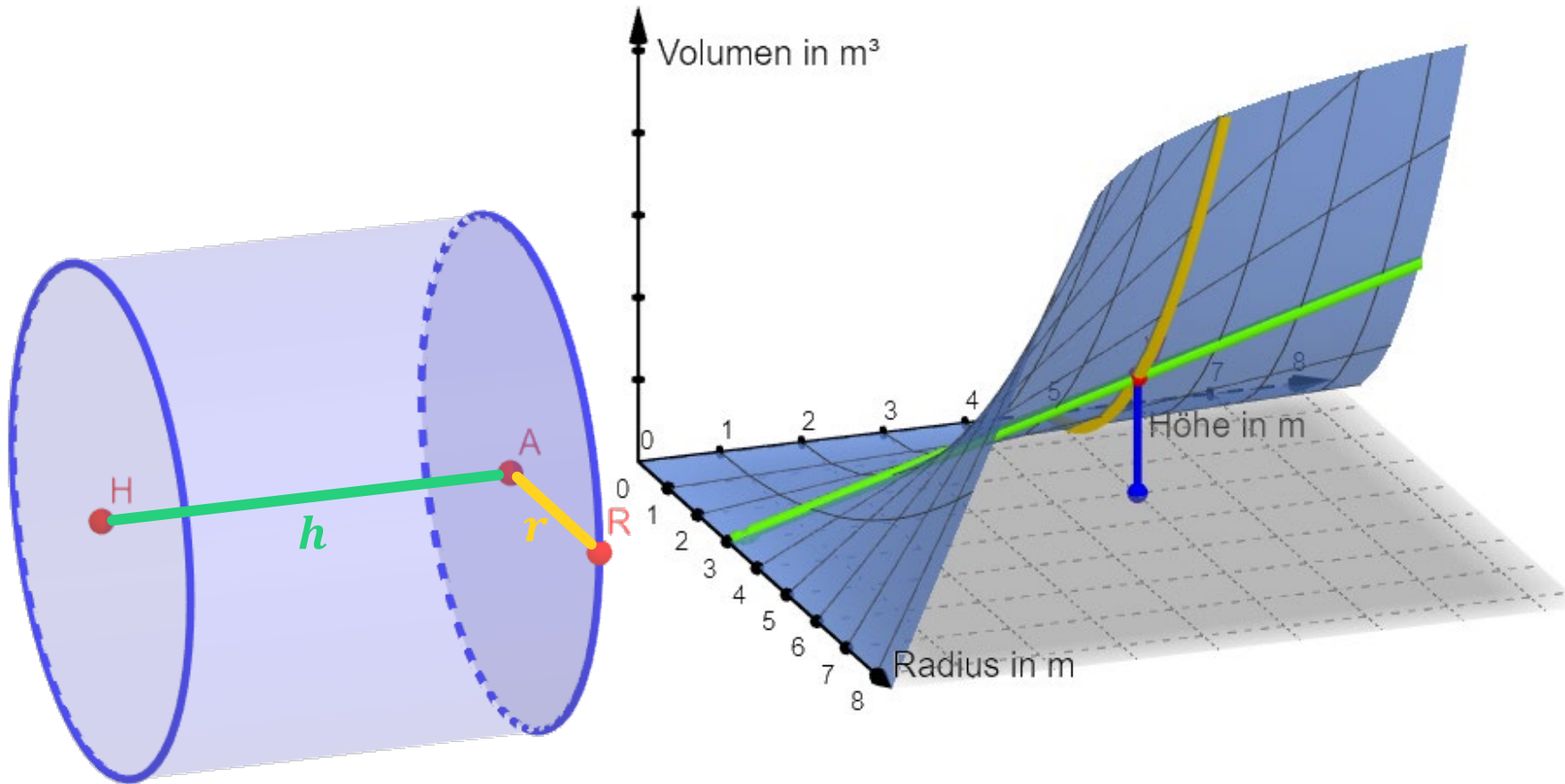
Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(\mathbf{r}, \mathbf{h}) = \mathbf{r}^2 \pi \cdot \mathbf{h}$$

Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(\mathbf{h}) = (r^2 \pi) \cdot \mathbf{h}$$

$$V_h(\mathbf{r}) = (\pi h) \cdot \mathbf{r}^2$$

4

Experimentieren mit gegenständlichen Materialien und Simulationen



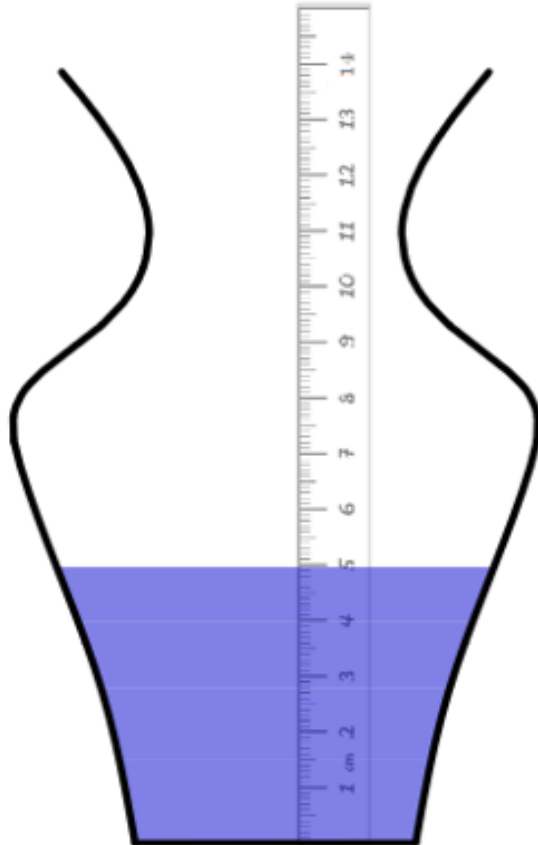
Positive Aspekte

- Funktionale Zusammenhänge werden erlebbar (Ludwig & Oldenburg, 2007)
- Lernen wird nachhaltiger (vom Hofe, 2003)
- Arbeitsweisen einprägsamer (Vollrath, 1978)
- Zugriff auf Inhalte dauerhafter (Barzel & Ganter, 2010)
- Deutung graphisch / tabellarisch dargestellter Zusammenhänge (Barzel & Ganter, 2010)
- Motivation (Ludwig & Oldenburg, 2007)

Füllmenge in ml: 80

+ 20 ml

Gefäß leeren



Positive Aspekte

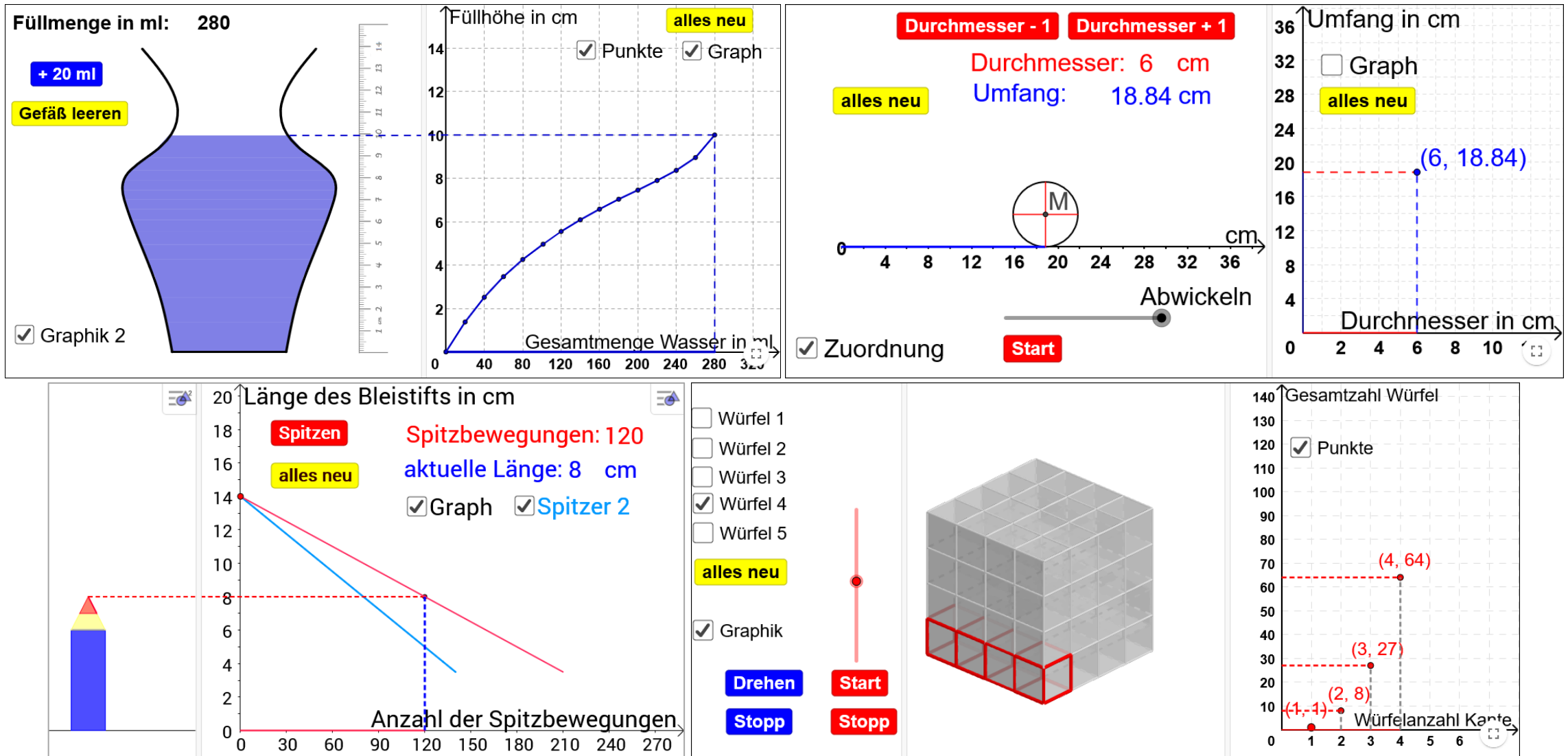
- Funktionen erkunden (Elschenbroich, 2011)
- Änderungsverhalten erleben (Vollrath & Roth, 2012)
- Systematische Variation (Roth, 2008)
- Multi-Repräsentations-System (Ballacheff & Kaput, 1997)
- Mittler zwischen Lernenden und mathematischem Phänomen (Danckwerts et al., 2000; Hoyles & Noss, 2003)
- Erleichterte Durchführung (Barzel 2010)

Gegenständliche Materialien ↔ Simulationen

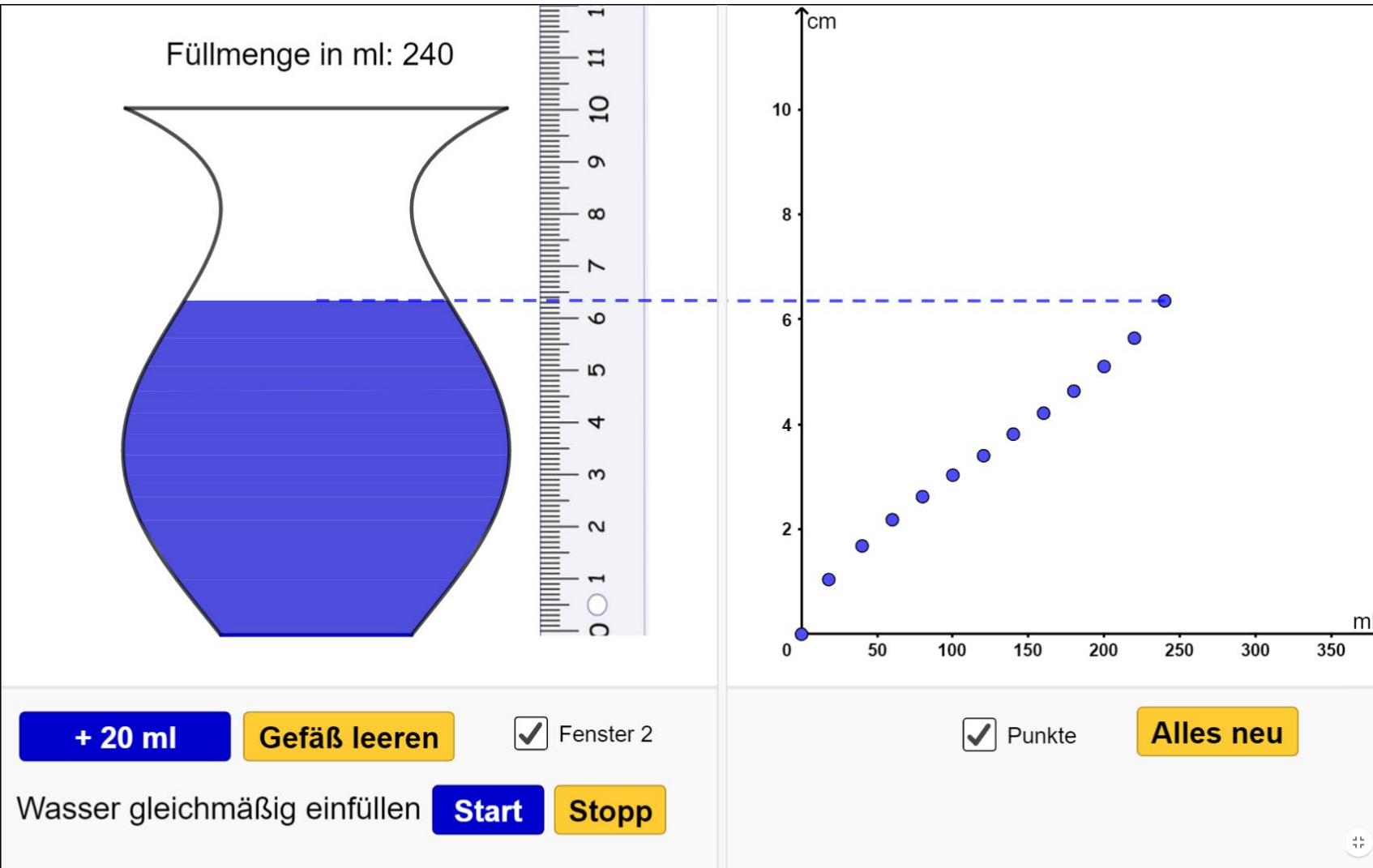
Auswahl der Situationen

- Umsetzbarkeit
- Vergleichbare Aktionen
- Medienvorteile nutzen
- Durchführbarkeit
- Verschiedene funktionale Zusammenhänge



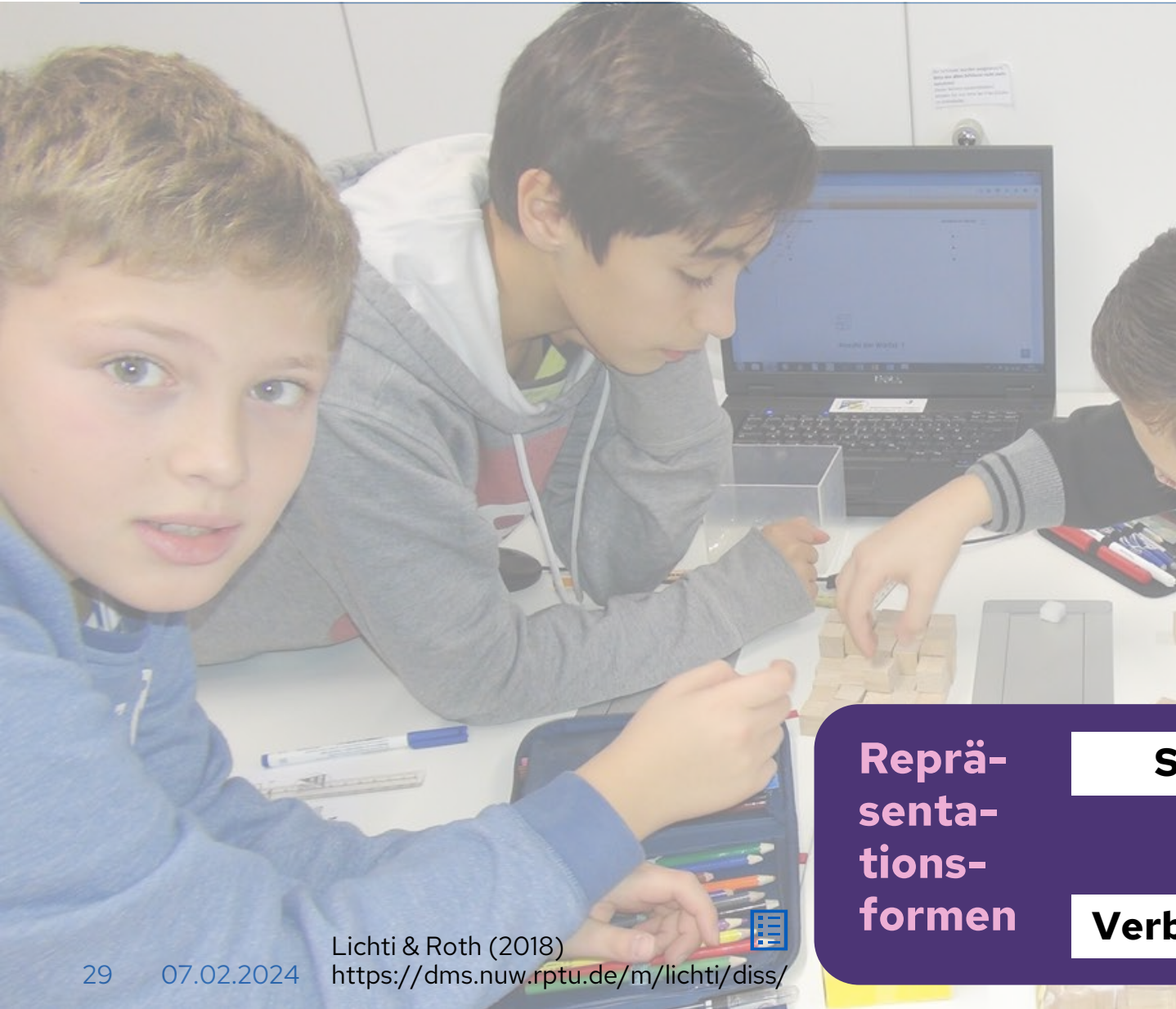


Exkurs: Gestaltung von GeoGebra-Simulationen



Gestaltungsaspekte

- Steuer- und Analysebereiche trennen
- Fokussierungshilfen
 - Verbindungslinien
 - Farbgebung
 - Ein- und Ausblenden von Elementen
 - ...
- Beschriftung ↔ Objekt
- Nur relevante Objekte auswahl- und variierbar
- ...



Arbeitsaufträge

- Ermittlung von Werten (Messen)
- Erstellen einer Wertetabelle
- Arbeiten mit Graphen
 - **Material-Gruppe:** Zeichnen
 - **Simulation-Gruppe:** Entstehung beobachten
 - **Beide Gruppen:** Zusätzlich zeichnen & mit Graphen arbeiten
- Interpolation, Anwendung & Transfer

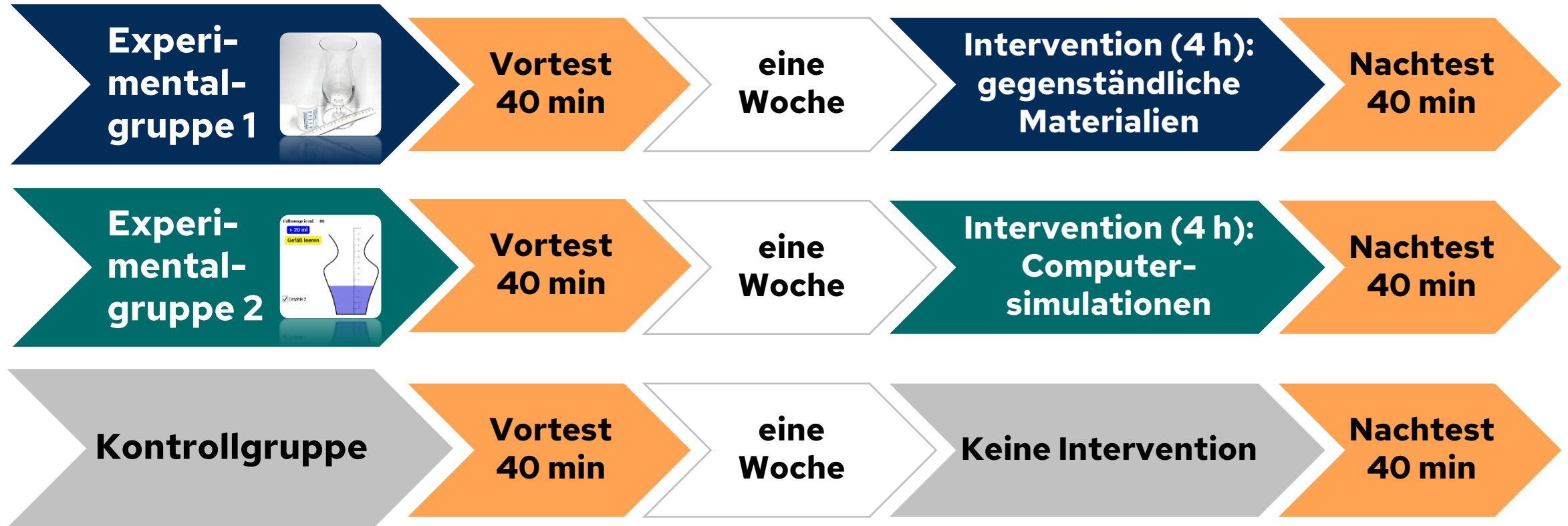
Reprä-
senta-
tions-
formen

Situation

Graph

Verbale Beschr.

Tabelle

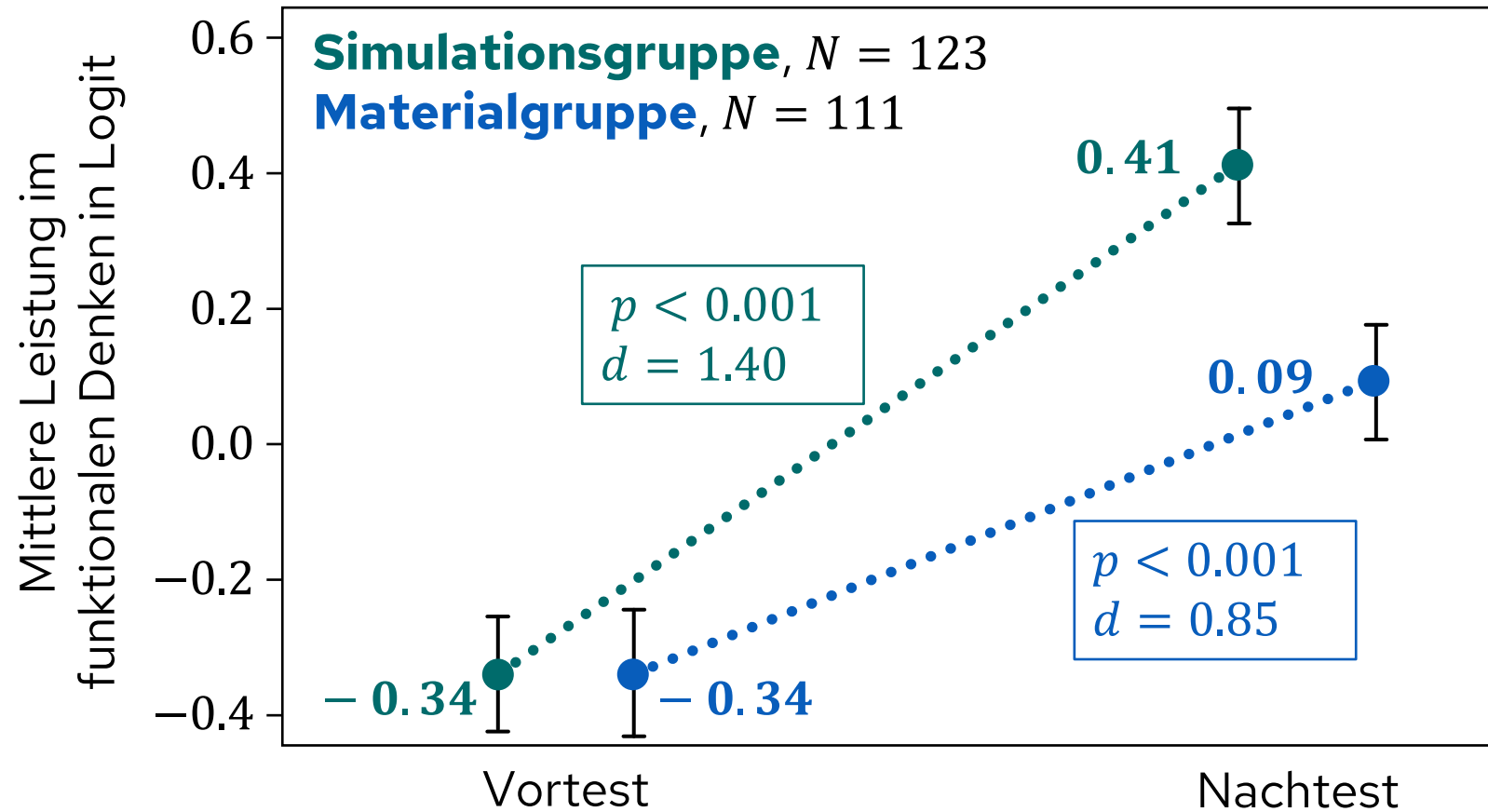


- Dreizehn 6. Klassen ($N=282$)
- Schuljahr 2015/16 vor den Sommerferien

Lichti, M. & Roth, J. (2018). How to Foster Functional Thinking in Learning Environments Using Computer-Based Simulations or Real Materials. *Journal for STEM Education Research*, 1(1-2), pp. 148-172. DOI: 10.1007/s41979-018-0007-1 <https://rdcu.be/99Tc>

Lichti, M. & Roth, J. (2019). Functional thinking – A three-dimensional construct? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(2), 169-195 DOI 10.1007/s13138-019-00141-3, <https://rdcu.be/bqRk8>





Erklärung?

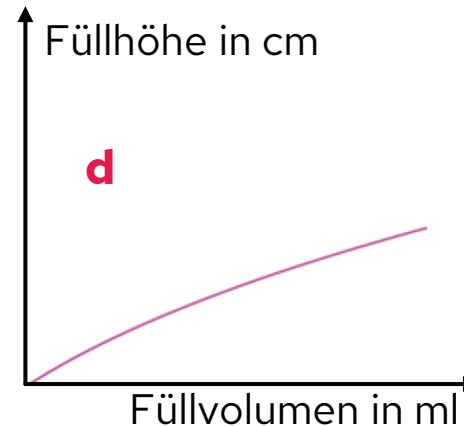
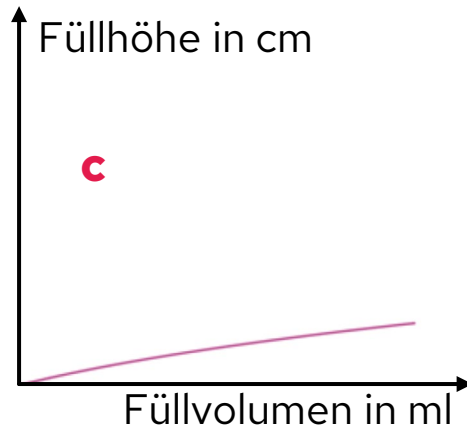
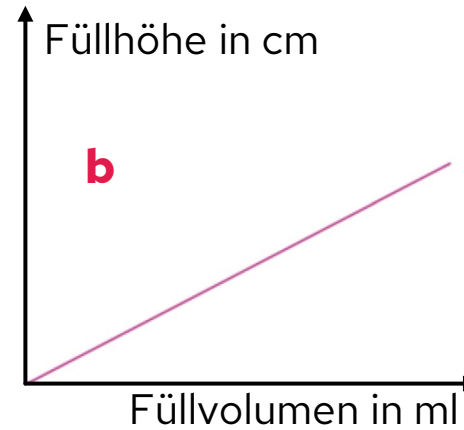
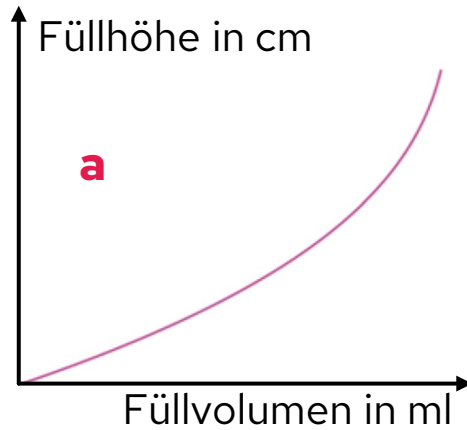


Qualitative Inhaltsanalyse

Aufgaben aus
Intervention
und Post-Test
mit offenen
Antwortformaten



Gefäße füllen: Aufgabe



Kategorie	Beispiel
Form des Gefäßes	Das Glas wird breiter.
Verlauf des Graphen	Weil der Graph ziemlich flach ist.
Anstieg des Wassers	Erst steigt das Wasser langsamer, dann schneller.
Zustand	Der Graph ist steil. Die Schüssel ist flach.
Veränderung	Der Graph wird nach und nach steiler.

Hier siehst du verschiedene Gefäße und Füllgraphen.
Ordne sie einander zu und begründe deine Wahl.

Materialgruppe

Lernende argumentieren signifikant häufiger

- mit der Form des Gefäßes
($\chi^2 = 14.79$, $df = 1$, $p < 0.001$, $V = 0.15$)
- mit Zuständen
($\chi^2 = 4.361$, $df = 1$, $p = 0.037^*$, $V = 0.08$)

Simulationsgruppe

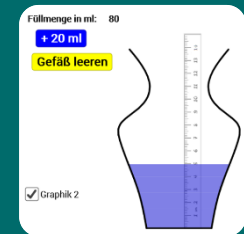
Lernende argumentieren signifikant häufiger

- mit dem Verlauf des Graphen
($\chi^2 = 6.62$, $df = 1$, $p = 0.01^*$, $V = 0.10$)
- mit Veränderung
($\chi^2 = 6.955$, $df = 1$, $p = 0.008^{**}$, $V = 0.11$)

Material
Reale Situation
und Zustand



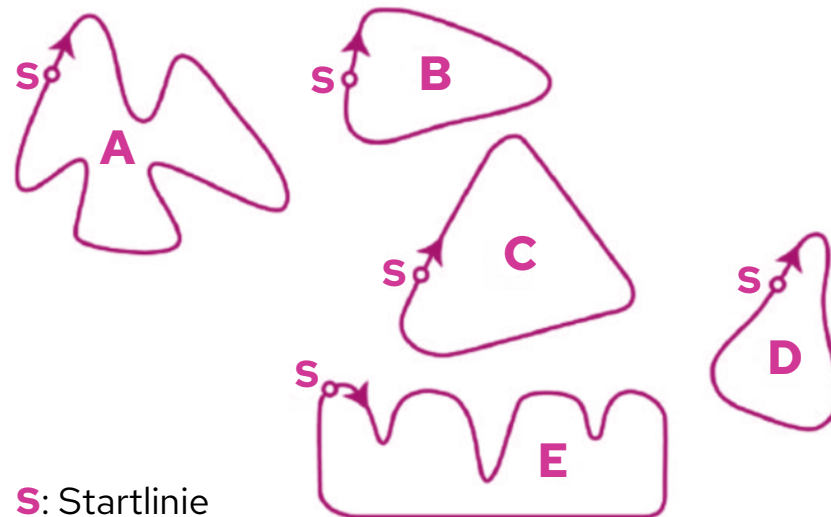
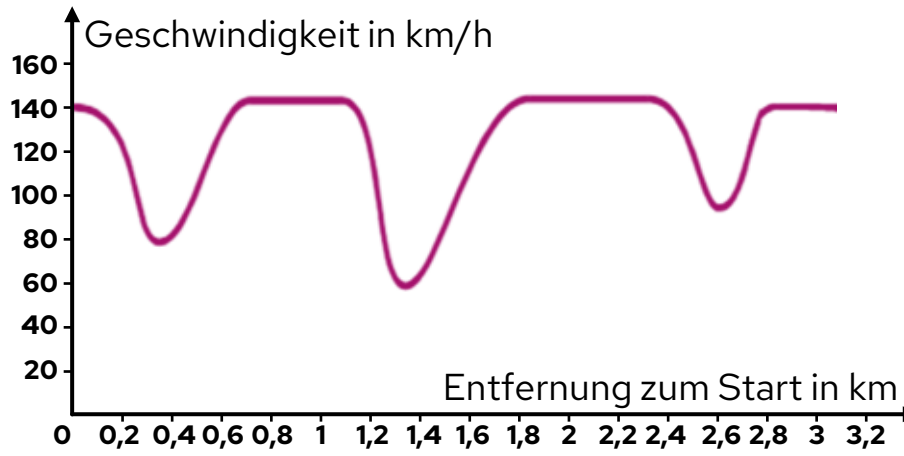
Simulation
Graphische
Repräsentation
und Veränderung



Dieser Graph zeigt, wie sich die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen, flachen Rennstrecke verändert.

Auf welcher der fünf Rennstrecken (man betrachtet sie von oben) ist der Wagen gefahren?

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C
- ☐ D
- ☐ E



S: Startlinie

Kategorie	Beispiel
Geschwindigkeit und Kurven	Ein Auto muss in Kurven langsamer werden.
Verschiedene Kurven	Es gibt drei Kurven: Zwei flache und eine steile.
Graph-als-Bild-Fehler	Weil die Bahn wie der Graph aussieht.
Falsche Interpretation der Rennstrecken	Die Rennstrecke [A] hat drei Kurven.

Materialgruppe

- Schüler*innen können Wissen über Zusammenhang von Geschwindigkeit und Kurven signifikant häufiger **nicht** anwenden ($\chi^2 = 6.304$, $df = 1$, $p = 0.012^*$, $V = 0.21$)
- Graph-als-Bild-Fehler: 36 %

Simulationsgruppe

- Graph-als-Bild-Fehler: 0 %

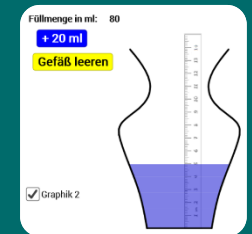
Material

Graph-als-Bild-Fehler



Simulation

Verknüpfung Graph und reale Situation



Quantitative Analyse

- Entwicklung Funktionalen Denkens

Simulation > Material

Qualitative Analyse

- Argumentation mit Funktionsgraphen
- Argumentation mit realen Situation
- Argumentation mit Änderungen
- Argumentation mit Zuständen
- qualitative Betrachtung (Interpretation und/oder Zeichnen) eines Graphen
- Einzelne Wertepaare (Interpretation und/oder Zeichnen)

Simulation > Material

Simulation < **Material**

Simulation > Material

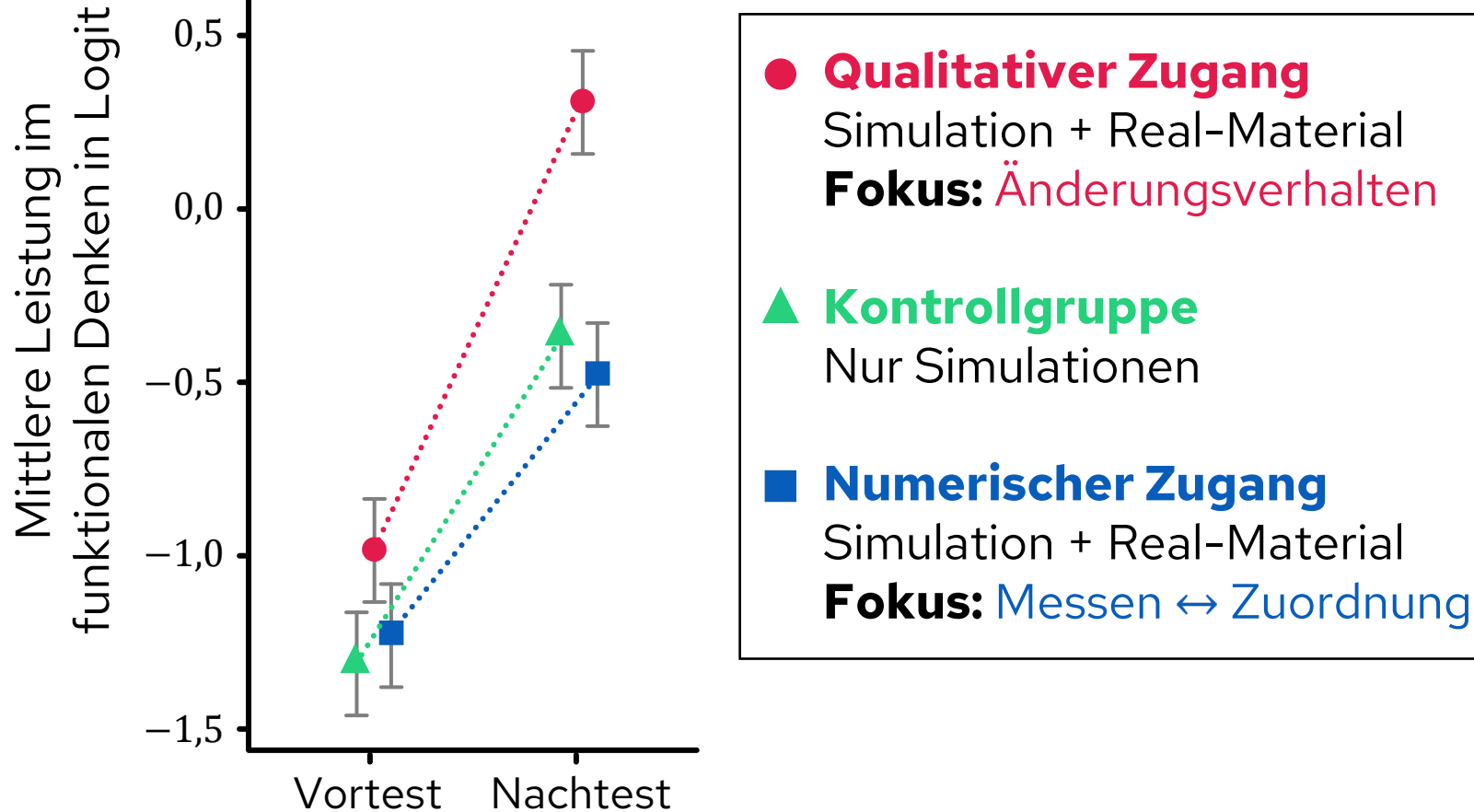
Simulation < **Material**

Simulation > Material

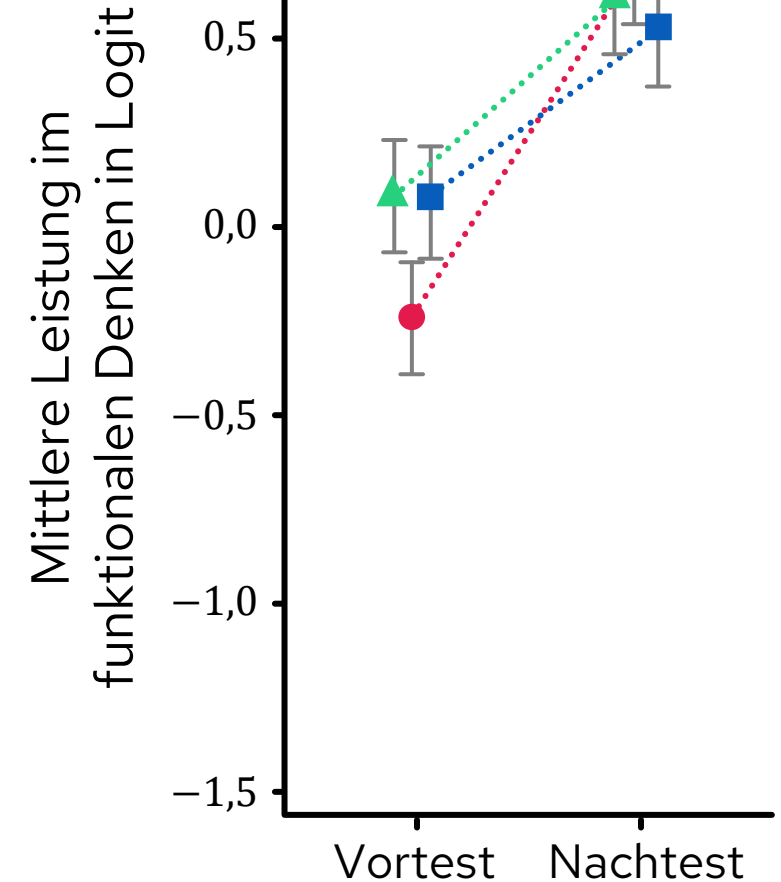
Simulation < **Material**

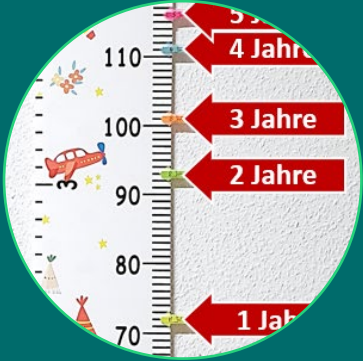


Integrierte Gesamtschule



Gymnasium

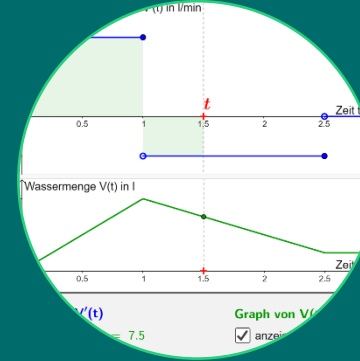




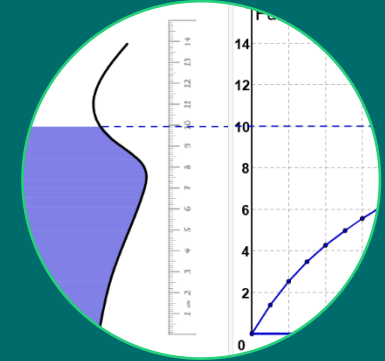
Grundvorstellungen
zu Funktionen



Typische
Schülerfehler



Digitale
Lernumgebungen



Experimentieren
mit Real-Materialien
und Simulationen

ML 226 Mit Funktionen denken und arbeiten • <https://roth.tel/funktionen>

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de



RPTU