

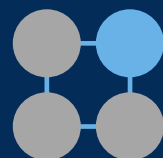


Denken & Arbeiten mit Funktionen

Fortbildungsreihe für Südtirol

Prof. Dr. Jürgen Roth

08.04.2024 juergen-roth.de



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R
TU
P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Mathematik lehren 226

Mit Funktionen denken und arbeiten



<https://juergen-roth.de/publikationen/>



<https://roth.tel/funktionen/>



<https://geogebra.org/m/nmsbbwja>



Denken & Arbeiten mit Funktionen

1. Grundvorstellungen
zum Funktionsbegriff ↪
2. Grundlegende Aspekte & typische Fehler
beim Arbeiten mit Funktionsgraphen ↪
3. Lernen des Funktionsbegriffs:
Grunderfahrungen vermitteln
und Aktivitäten gestalten ↪
4. Parameter und Funktionsgraphen;
Umkehrfunktion ↪

1

Denken und Arbeiten mit Funktionen

Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

1.1

Denken und Arbeiten mit Funktionen

Grundvorstellungen



Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

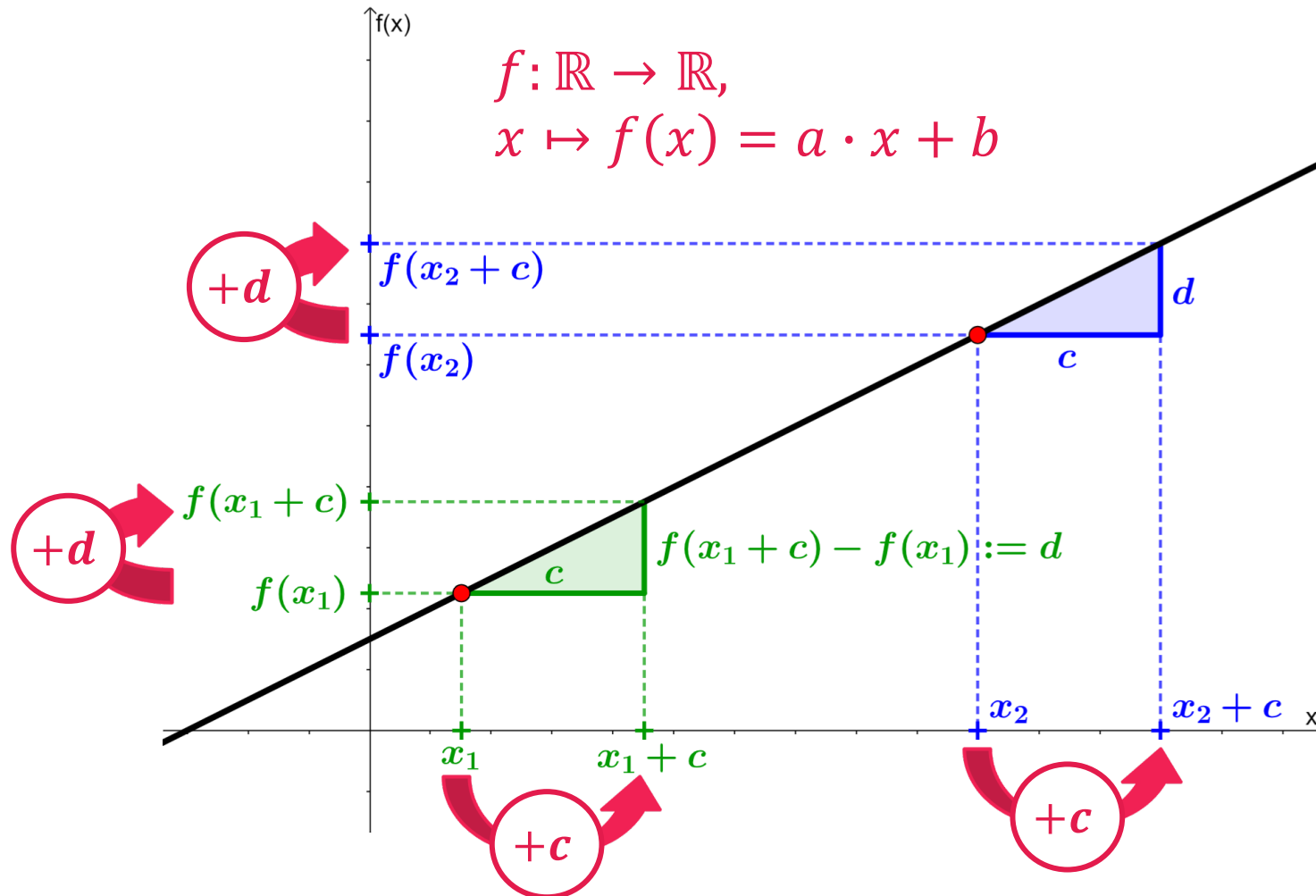
Primäre Grundvorstellungen

Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen



Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f(x + c)$$

$$= a \cdot (x + c) + b$$

DG

$$\equiv a \cdot x + a \cdot c + b$$

KG

$$\equiv \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

Verständnisanker

Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.

Prototypisch meint, dass alle wesentlichen Strukturelemente zum Verständnis des mathematischen Sachverhalts in dieser Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.

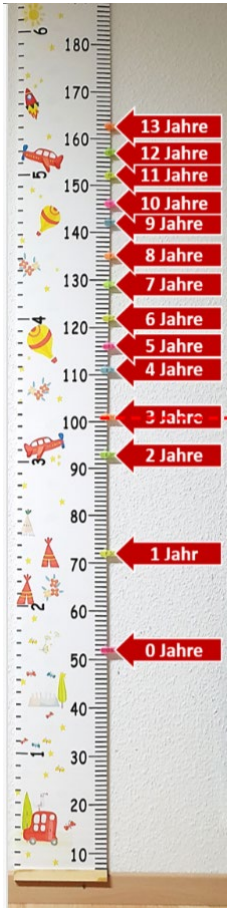
Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.

Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.



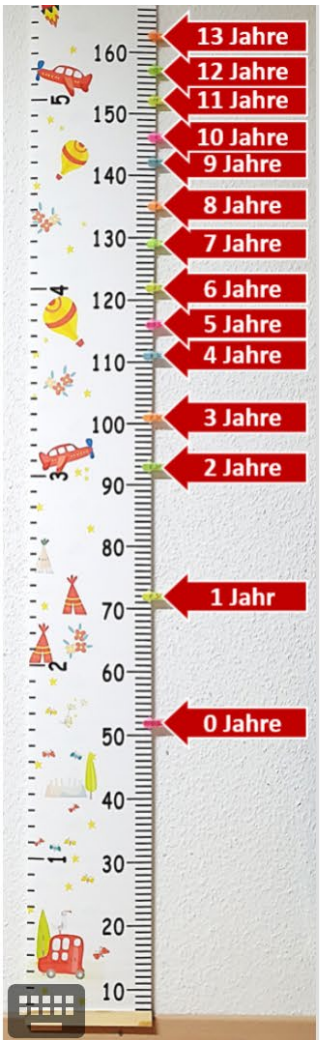
Beispiel

- Ein möglicher Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Funktionen ist z. B. der Zusammenhang zwischen dem Lebensalter und der Körpergröße eines Menschen.
- Dieser Zusammenhang ist allen Menschen vertraut und die Grundvorstellungen zu Funktionen können daran erfasst & durchschaut werden.

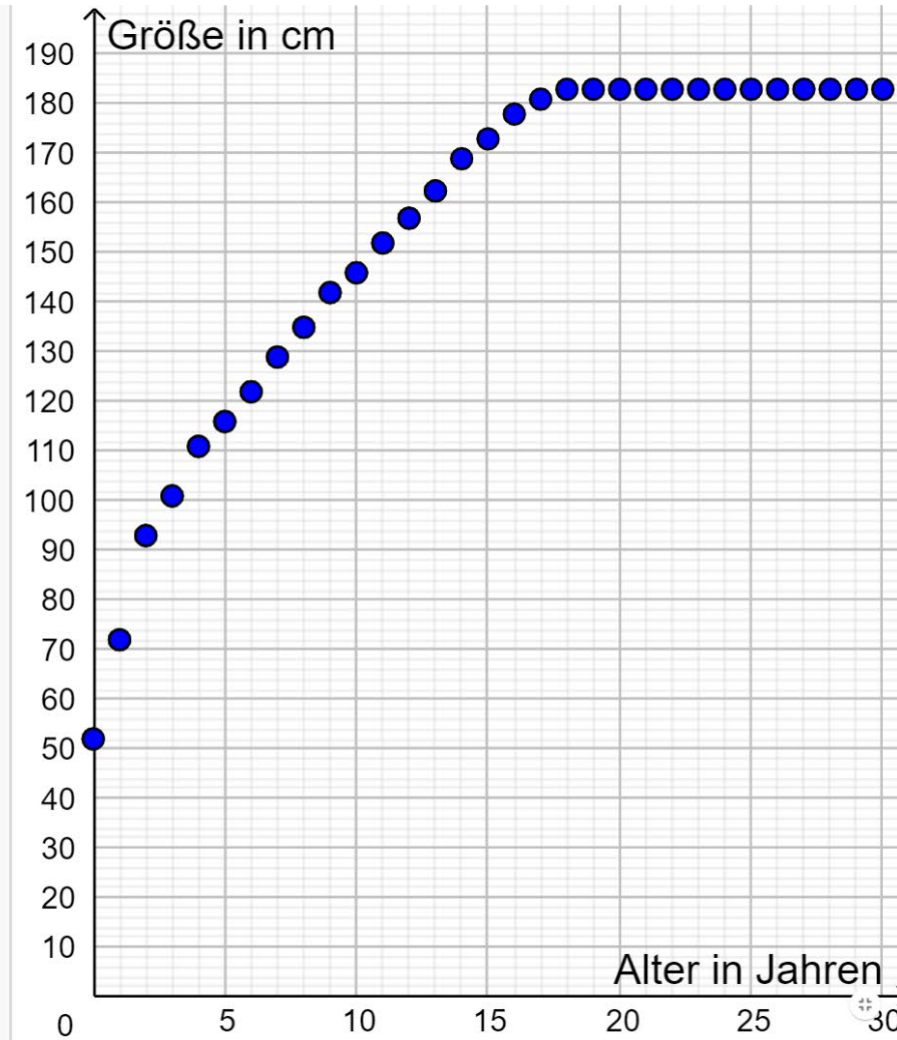


- Näheres zu diesem Verständnisanker:
Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](#). Mathematik lehren, 226, 2-9.

Zusammenhang: Alter $\mapsto$ Körpergröße



	A	B
1	Alter in Jahren	Größe in cm
2	0	52
3	1	72
4	2	93
5	3	101
6	4	111
7	5	116
8	6	122
9	7	129
10	8	135
11	9	142
12	10	146
13	11	152
14	12	157
15	13	162.5



Grundvorstellung
Zuordnung

Grundvorstellung
Kovariation

Grundvorstellung
Funktion als Ganzes



Experiment:

Schüler/innen ...

- rennen eine Treppe hinauf,
- messen nach dem Lauf in Abständen von 30s ihren Puls,
- halten den Zusammenhang paarweise in einer Tabelle fest.



Erfahrung: Jedem (Mess-)Zeitpunkt wird (genau) ein Puls zugeordnet.

Zuordnung

Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.



Fragestellung

Wie ändert sich der Puls in gleichen Zeitschritten?
Ändert er sich auch gleichmäßig, oder zunächst langsamer und dann schneller oder ... ?

- Hierfür reicht es nicht einzelne Wertepaare zu betrachten.
- Es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden.

Änderungsverhalten / Kovariation

Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.



Fragestellung

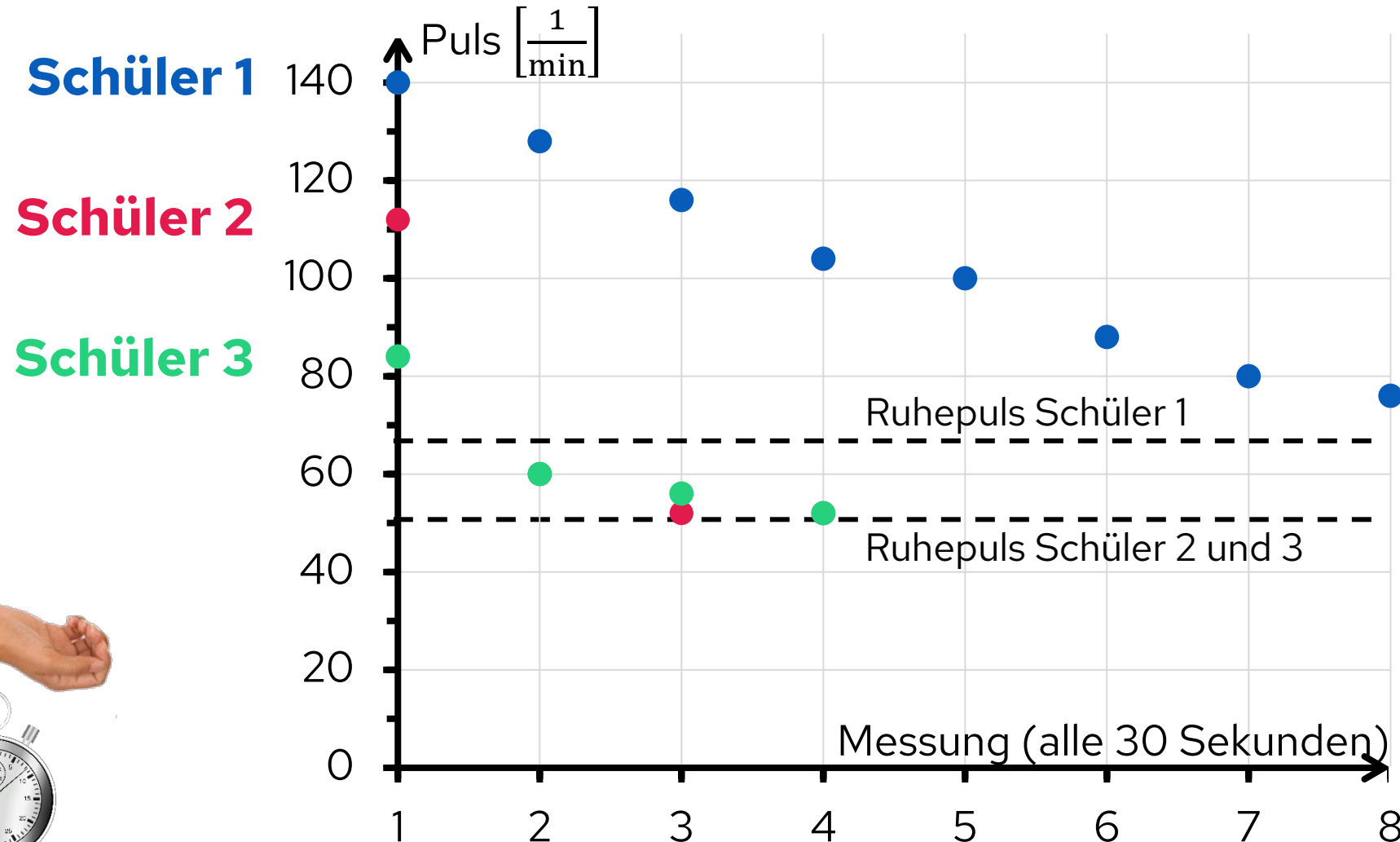
Wie sieht der funktionale Zusammenhang zwischen Zeitpunkt und Puls als Ganzes aus?

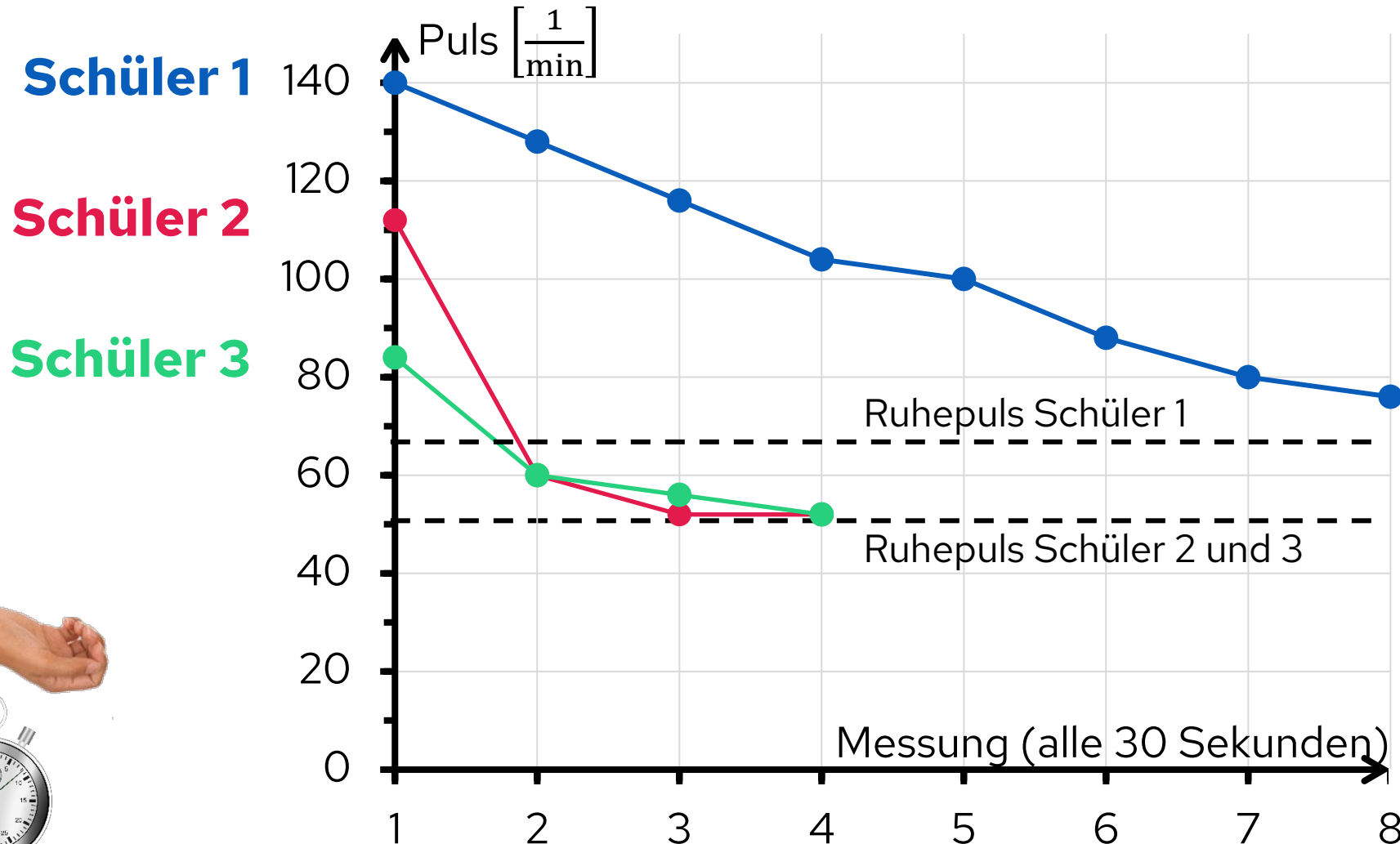
- Dazu muss man
 - systematisch Daten aufnehmen,
 - in Tabelle festhalten,
 - Graph zeichnen
- Kann erst am Graph als Ganzes betrachtet und anhand der Verläufe für verschiedene Läufer verglichen werden → Fitness.

Funktion als Ganzes

Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**





Perspektiven zur
Sicht als Ganzes bei
Funktionsgraphen:

- (1) Vergleich von Abschnitten im selben Graph
- (2) Vergleich verschiedener Graphen
- (3) Für einen Funktionstyp typischer Verlauf





Zuordnung

Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Änderungsverhalten / Kovariation

Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Funktion als Ganzes

Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

**Prototypisches
Beispiel als
Verständnisanker**

Mentalen Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Funktionen: Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellungen

- Zuordnung
- Änderungsverhalten (Kovariation)
- Sicht als Ganzes

Tabelle

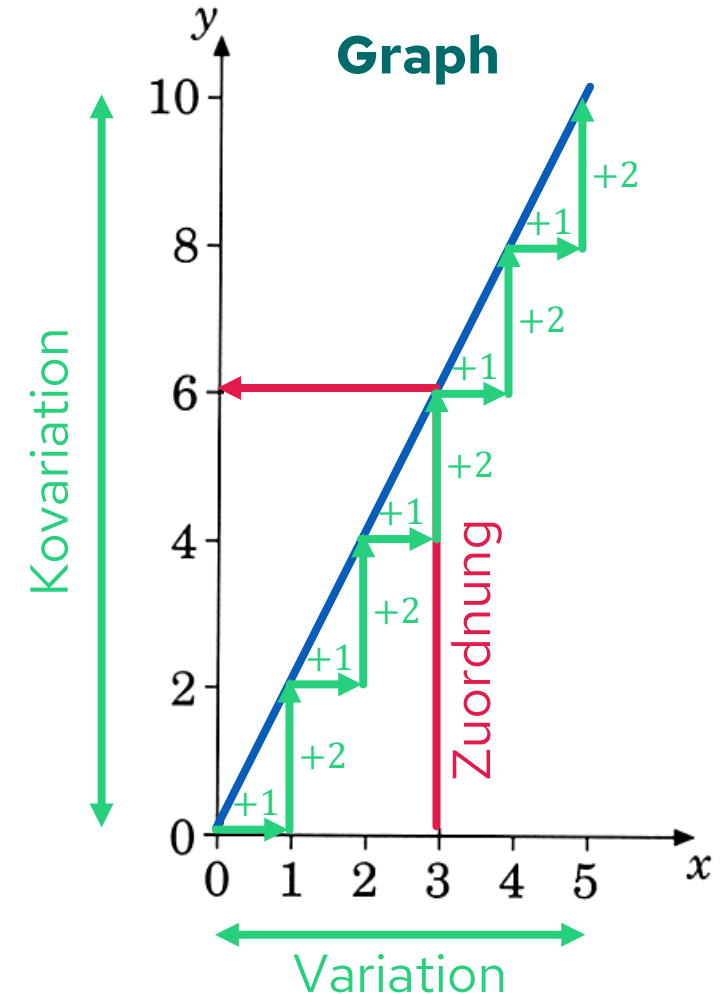
x	$f(x)$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

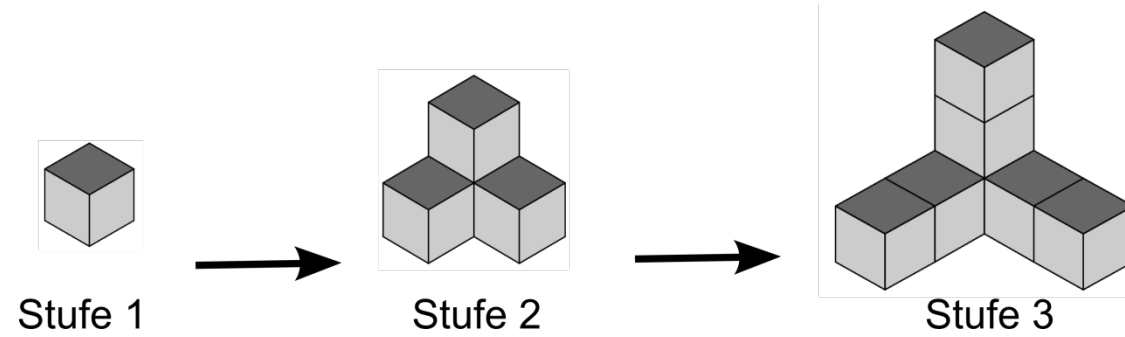
Diagram illustrating the mapping (Zuordnung) from x to $f(x)$ in a table. The table shows the function $f(x) = 2 \cdot x$. The mapping is labeled "Zuordnung" (Assignment) with a red arrow. The change in x is labeled "Variation" (green arrow, +1) and the change in $f(x)$ is labeled "Kovariation" (green arrow, +2).

Funktionsterm

$$f(x) = 2 \cdot x$$

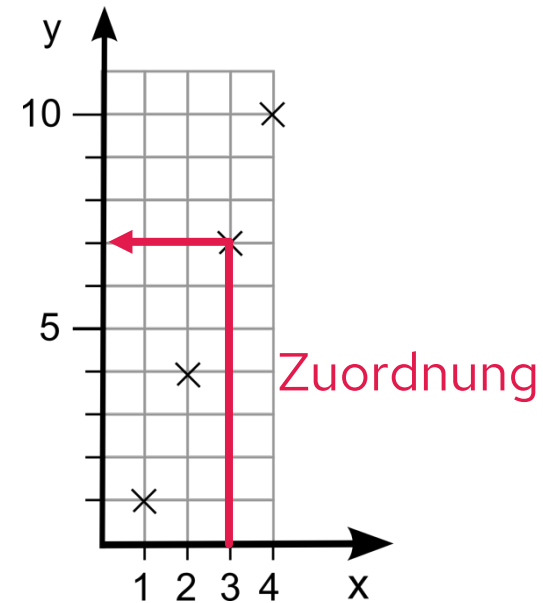
Zuordnung



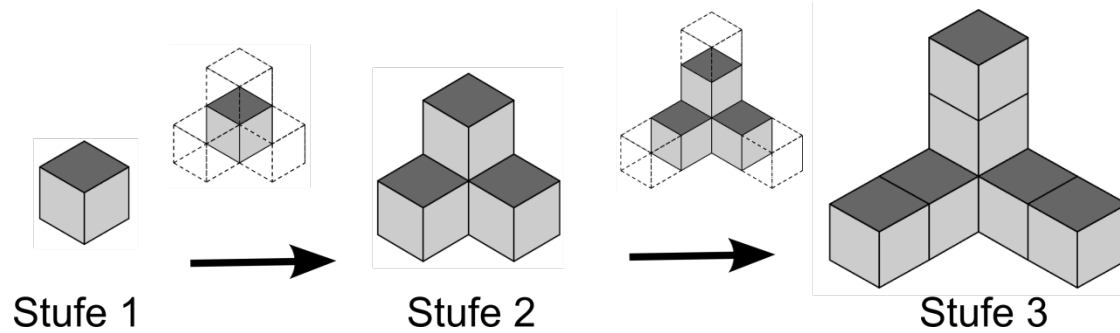


x	y
1	1
2	4
3	7
4	10


Zuordnung



Änderungsverhalten (Kovariation)



x	y
1	1
2	4
3	7
4	10

Variation

+1

+1

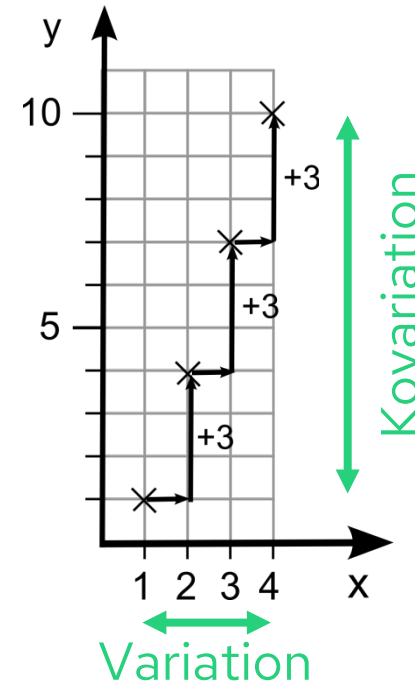
+1

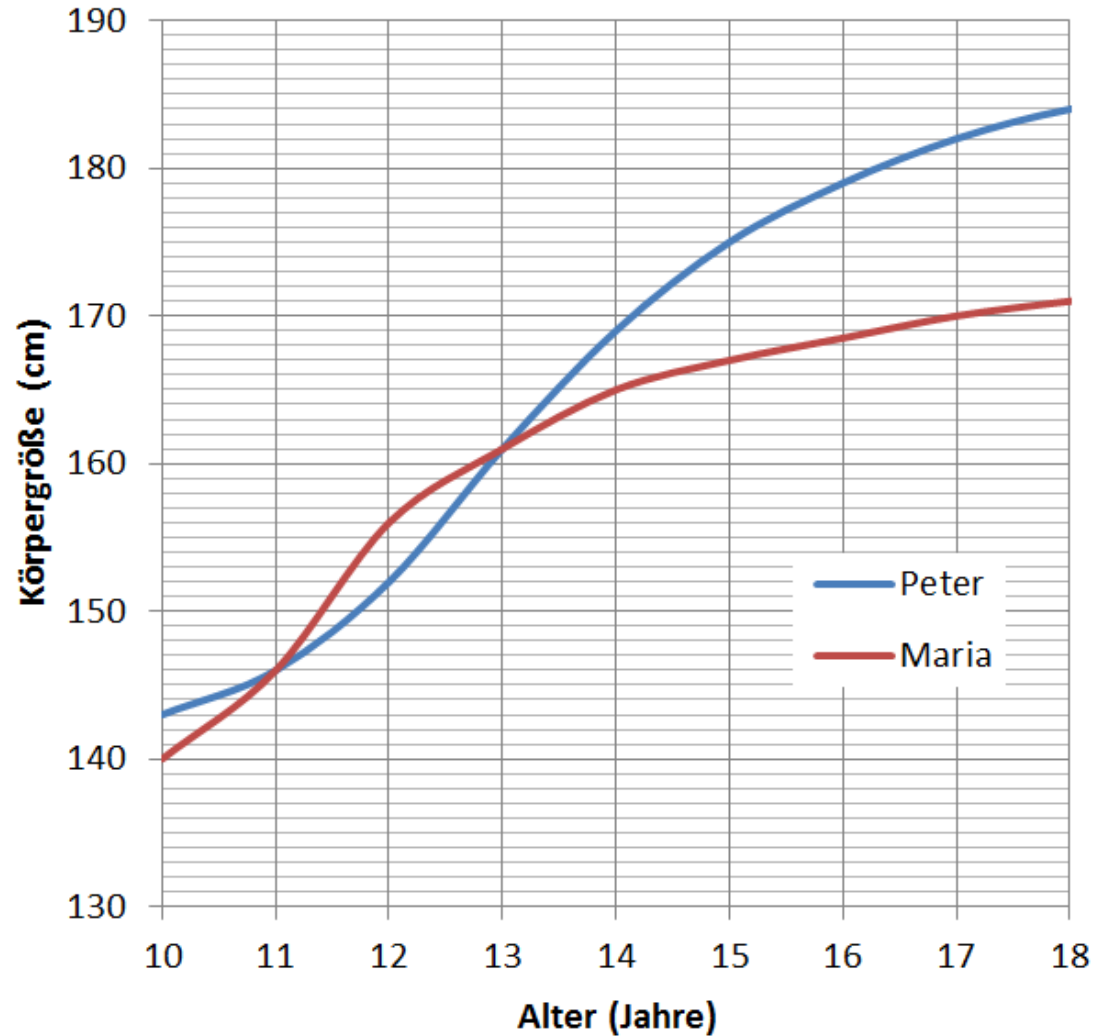
+3

+3

+3

Kovariation





Zuordnung

Wie groß ist Peter mit 15 Jahren?

Kovariation

Welche Aussage über das Wachstum im Alter von 11 Jahren ist richtig?

- ☐ Peter wächst schneller als Maria.
- ☐ Maria wächst schneller als Peter.
- ☐ Maria und Peter wachsen gleich schnell.

1.2

Denken und Arbeiten mit Funktionen

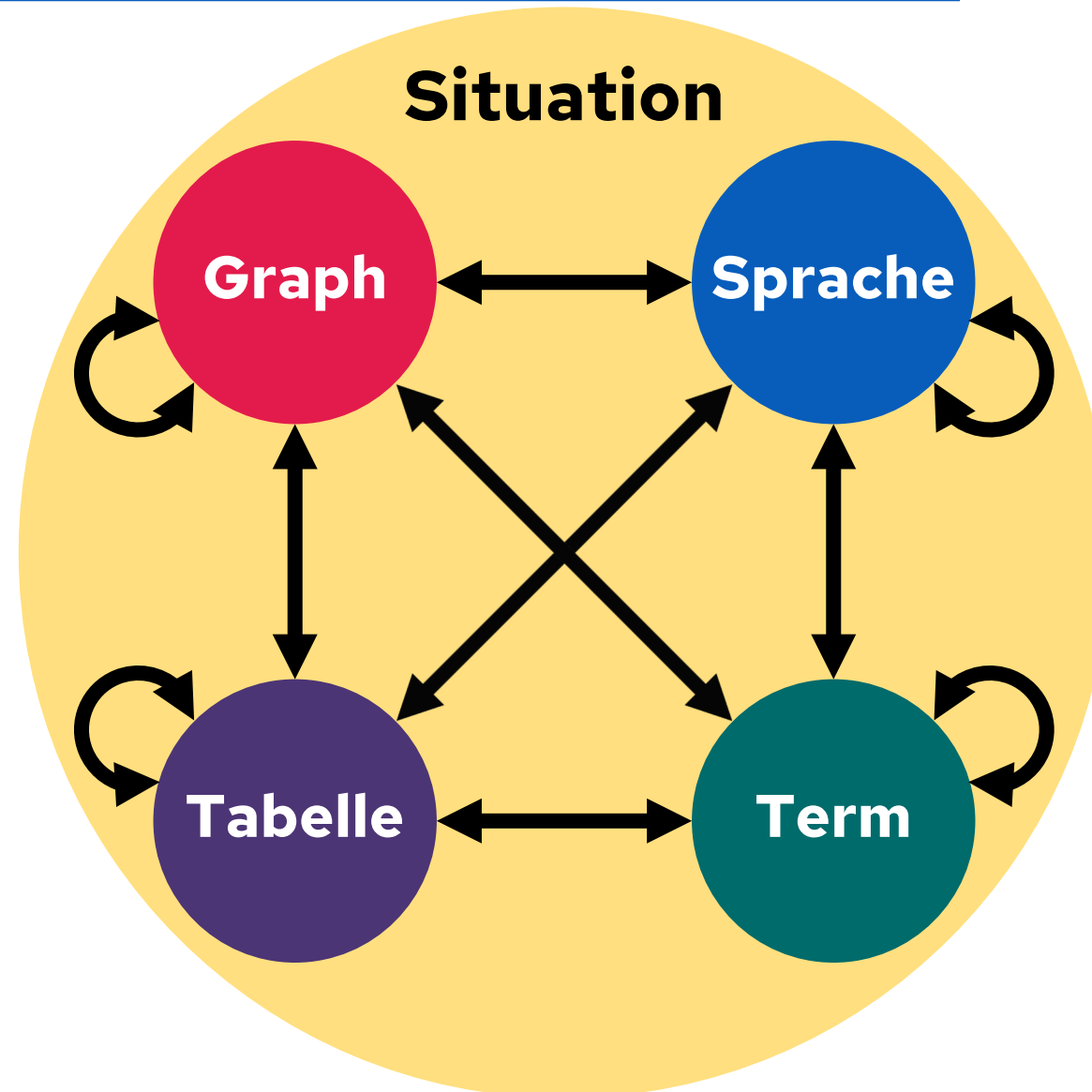
Darstellungsformen

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: **Darstellungsformen**

↔
Darstellungswechsel


Darstellungsformen

↻
**Mit bzw. in einer
Darstellung arbeiten**



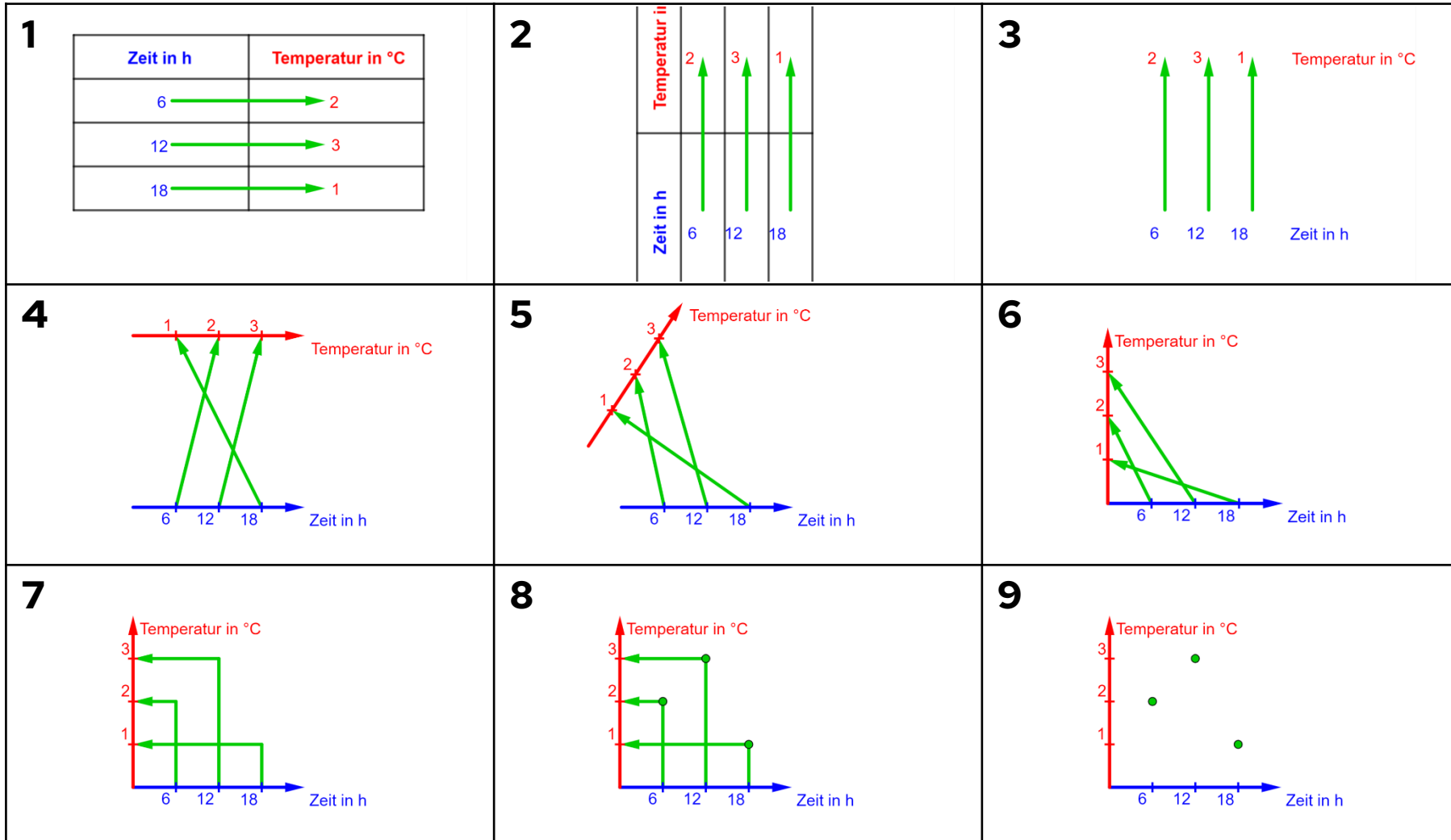
Darstellungsformen ↔ Grundvorstellungen

Darstellungsformen →

Grundvorstellungen →

	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	Tätigkeit: Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet. Hauptzweck: Markante Punkte erfassen	Tätigkeit: Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet. Hauptzweck: Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen	Tätigkeit: Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet. Hauptzweck: Bestimmen einzelner Werte	Tätigkeit: Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen. Hauptzweck: Erfassen einzelner Werte
Kovariation	Tätigkeit: Unterteilung in Abschnitte mit unterschiedlichem Änderungsverhalten Hauptzweck: Änderungsverhalten qualitativ erfassen	Tätigkeit: Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung. Hauptzweck: Änderungsverhalten quantifizieren	Tätigkeit: Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen. Hauptzweck: Änderungsverhalten quantifizieren	Tätigkeit: Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten. Hauptzweck: Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Sicht als Ganzes	Tätigkeit: Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder für Teilbereiche typisieren. Hauptzweck: Charakteristischen Verlauf erfassen	Tätigkeit: Differenzen-, Produkt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen. Hauptzweck: Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	Tätigkeit: Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren. Hauptzweck: Charakteristika quantitativ erfassen	Tätigkeit: Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus. Hauptzweck: Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

Darstellungsformen erfassen: Das Beispiel Funktionsgraph



Das Applet zeigt, wie aus den Zuordnungen von Zeit und Temperatur, die oben links in der Tabelle dargestellt sind, der Funktionsgraph der Zeit-Temperatur-Funktion unten rechts entsteht.

Dafür müssen die Elemente der beteiligten Mengen jeweils der Größe nach angeordnet werden können.

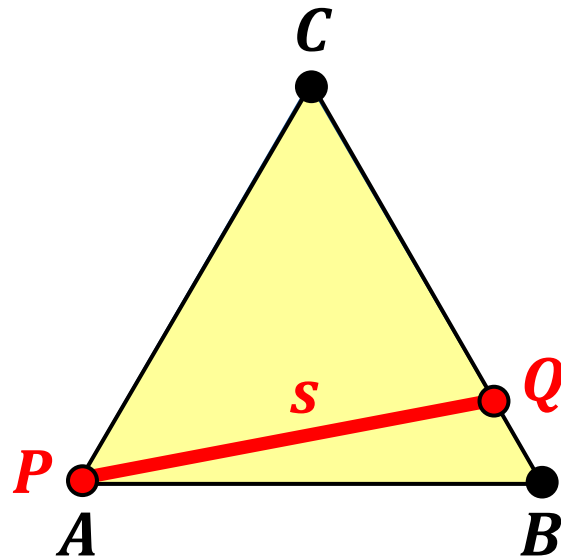
Grundvorstellung
Zuordnung

1.3

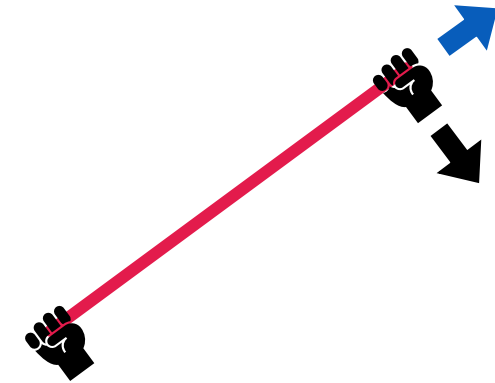
Denken und Arbeiten mit Funktionen

Funktionaler Zusammenhang am Beispiel Dreieckssehne

Beispiel: Dreieckssehne



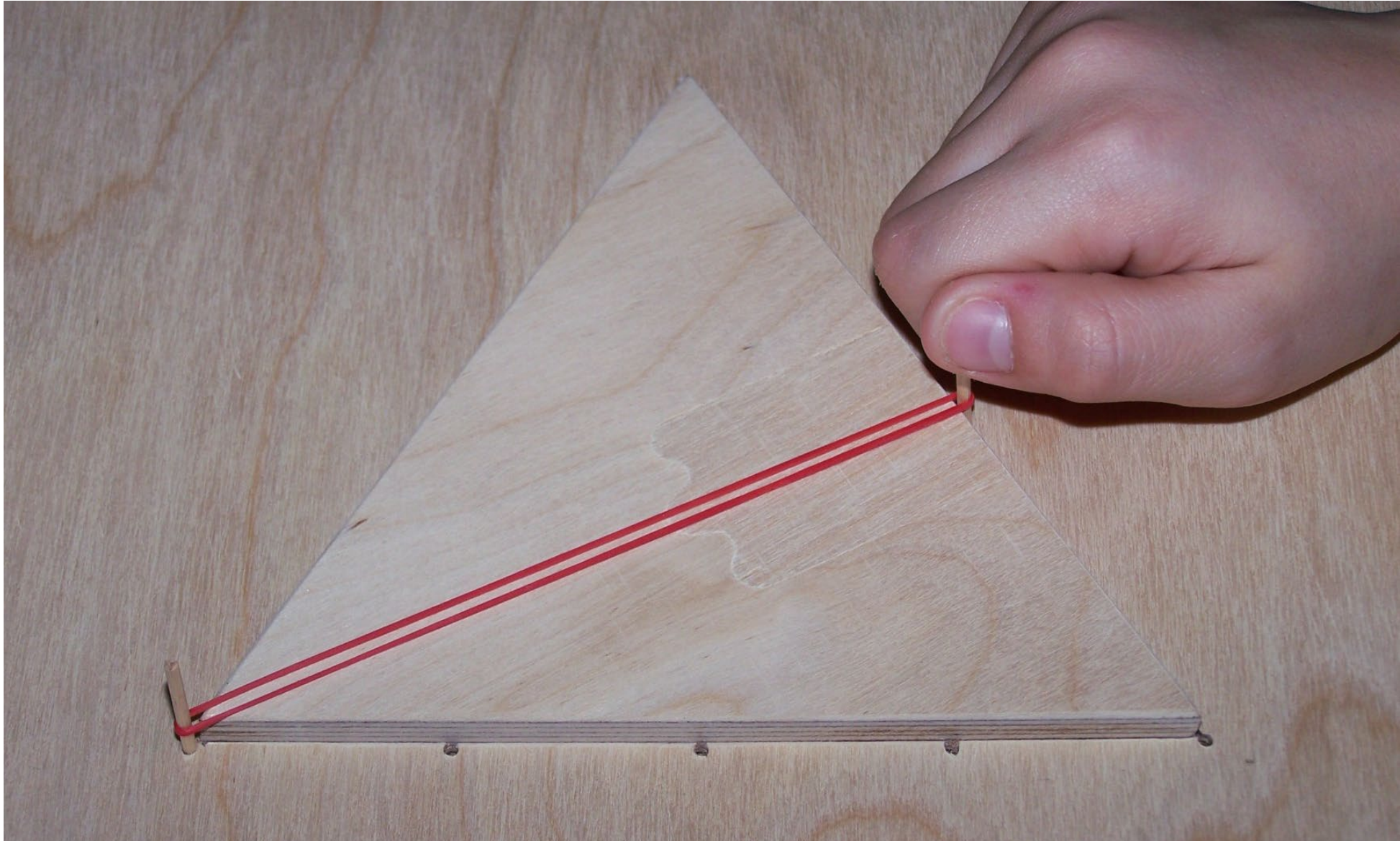
Gummiband-
modell



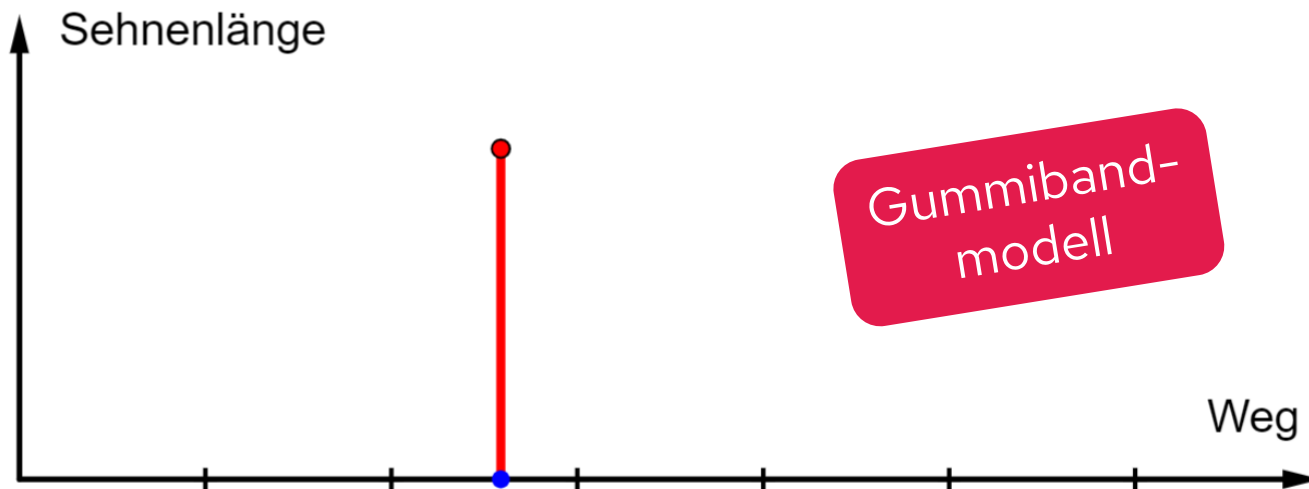
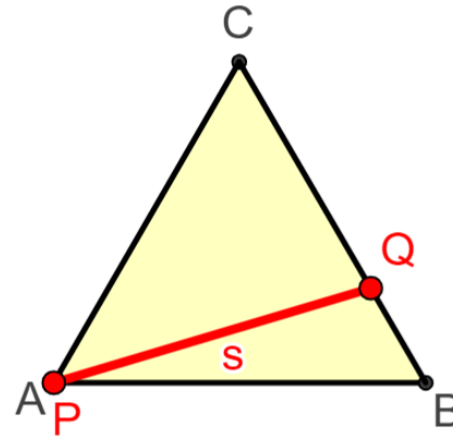
Grundvorstellungen

- Zuordnung
- Änderungsverhalten (Kovariation)
- Sicht als Ganzes

Holzmodell: Dreieckssehne



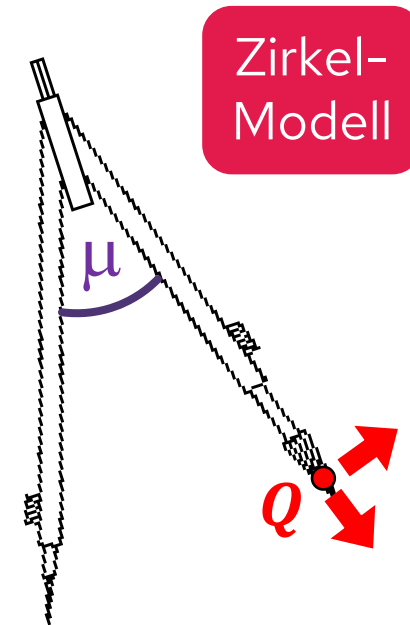
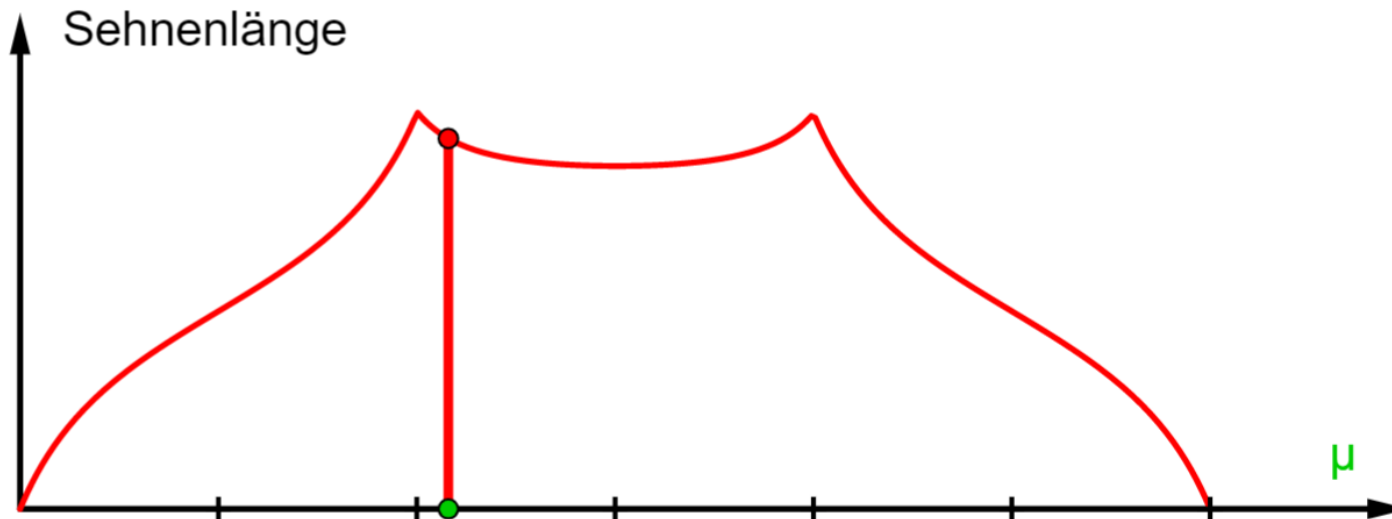
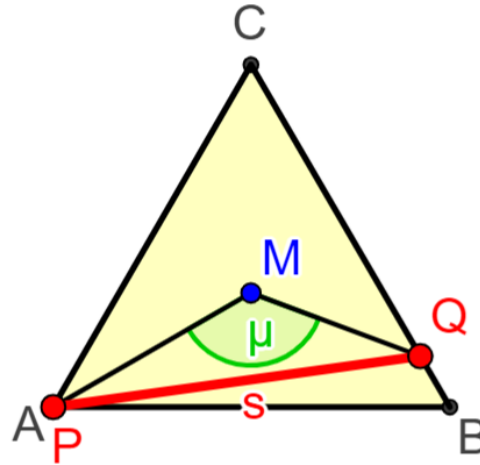
Arbeitsaufträge: Dreieckssehne



Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Graphen der Zuordnung $x \mapsto s(x)$.

- Achten Sie dabei insbesondere auch auf das Änderungsverhalten.
- Diskutieren Sie alle Details des Verlaufs Ihres Graphen in der Gruppe.
- Interpretieren und erklären Sie Eigenschaften des Graphen anhand von Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks und umgekehrt.

Dreieckssehne: Modellierung der Bewegung von Q eindeutig?



Bilder

- Denkprozesse anstoßen
- Ergebnisse zusammenfassen

„Modelle“

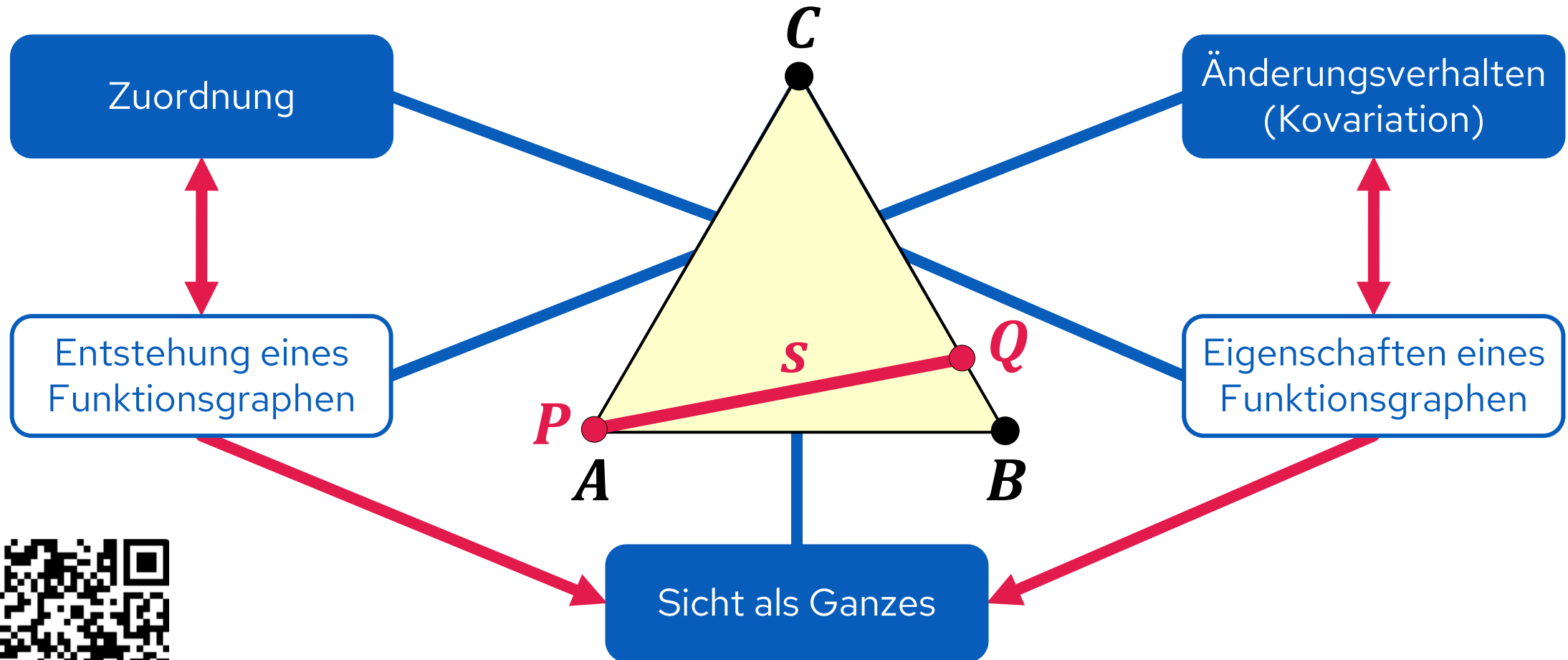
- Verständnisgrundlagen anbieten (vgl. „Gummibandmodell“)

Grundsätzlich

- Werkzeuge dosiert einsetzen
- Einsatz von Werkzeugen soll zum Denken anregen

Computerwerkzeuge

- Kontrollinstanz
 - „Im Kopf“ abgelaufene Denkvorgänge überprüfen und hinterfragen
- Kommunikationsmittel
 - Aufmerksamkeit fokussieren
 - Änderungsverhalten durch „Vorführen“ von Veränderungen veranschaulichen
- „Denkzeug“
 - Komplexität reduzieren
 - Gedächtnis entlasten
 - Konzentration auf Planung, Analyse und Argumentation



Was ist eigentlich eine Funktion?

Zuordnung 1:

Funktion: Ja oder Nein?



Was ist eigentlich eine Funktion?

Zuordnung 2:

Funktion: Ja oder Nein?



Was ist eigentlich eine Funktion?

Zuordnung 3:

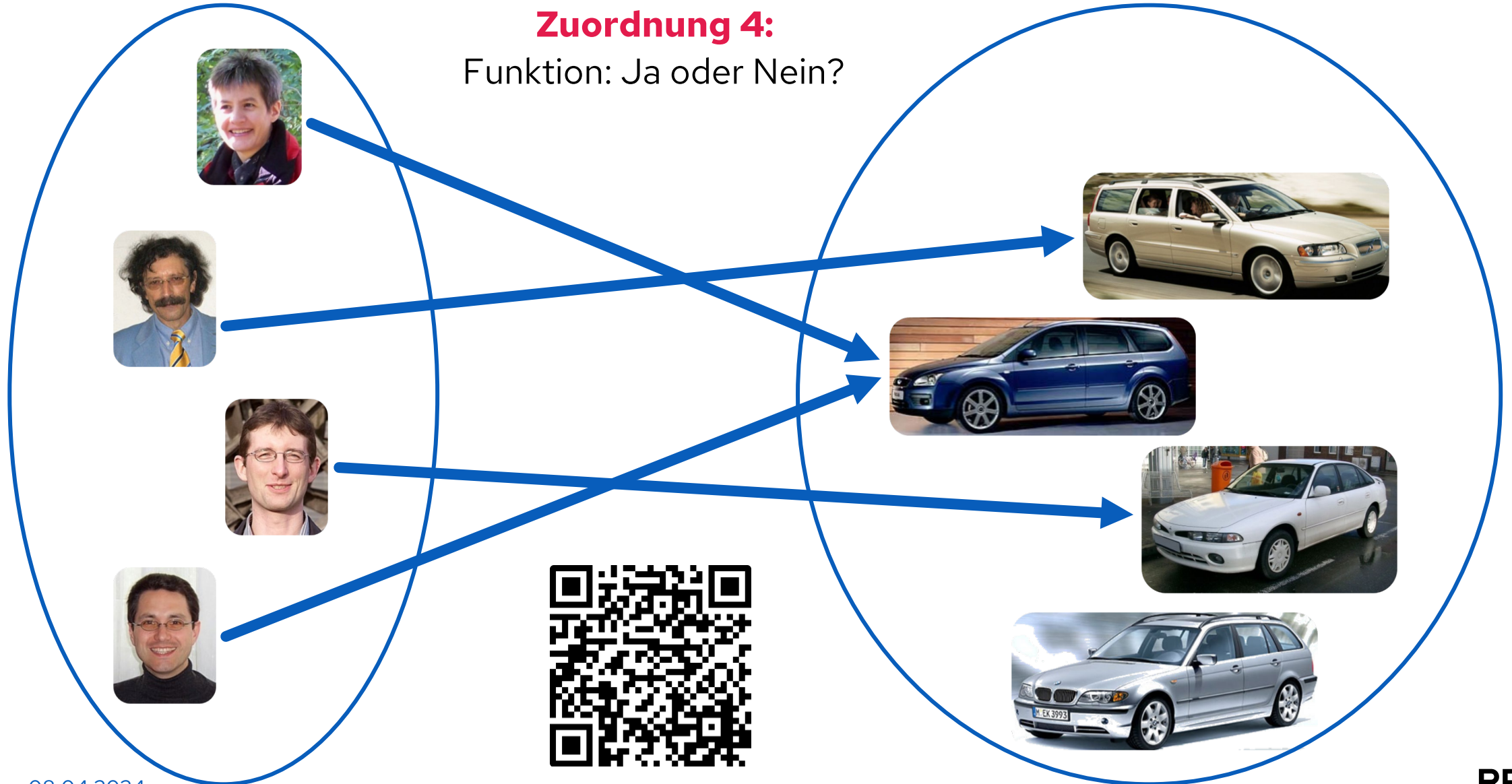
Funktion: Ja oder Nein?



Was ist eigentlich eine Funktion?

Zuordnung 4:

Funktion: Ja oder Nein?



Was ist eigentlich eine Funktion?

Definitions-
menge $\mathbb{D}$



Zielmenge $\mathbb{M}$

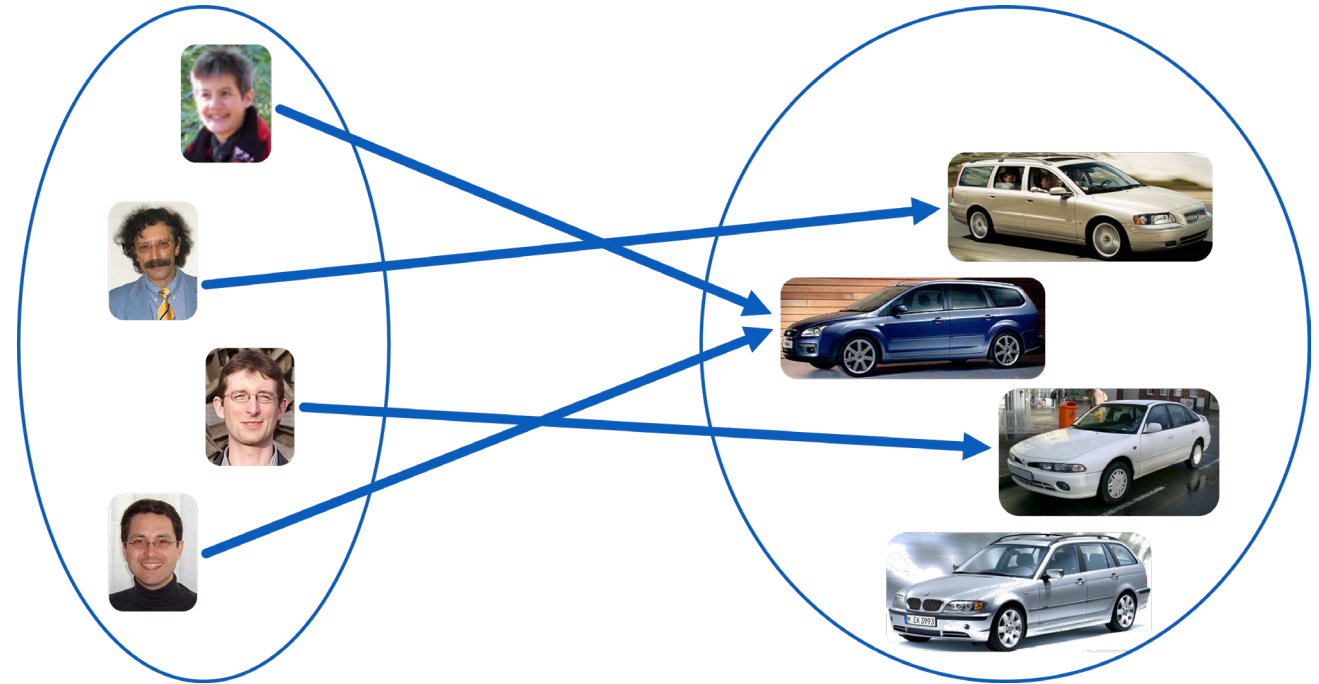
Wertemenge $\mathbb{W}$



Was ist eigentlich eine Funktion?

Definition Funktion (1)

Eine Funktion ist eine Zuordnung zwischen einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und einer (Ziel-) Menge $\mathbb{M}$, die **jedem** Element aus $\mathbb{D}$ **genau ein** Element aus $\mathbb{M}$ zuordnet.



Definition Funktion (2)

Eine Funktion ist eine **linkstotale** und **rechtseindeutige** Relation.

Definition Relation

Eine Relation ist eine Teilmenge der Produktmenge $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ zweier Mengen A und B .

2

Denken und Arbeiten mit Funktionen

**Grundlegende Aspekte und
typische Fehler beim Arbeiten
mit Funktionsgraphen**

2.1

Denken und Arbeiten mit Funktionen

Grundlegende Aspekte beim Arbeiten mit Funktionsgraphen

Konstruktion

- Achsen korrekt beschriften
 - Welche Zusammenhänge werden dargestellt?
- Skalierung geeignet wählen
 - Schüler/innen nehmen häufig fälschlich an, dass die Achsen identisch skaliert sein müssen.
- Negative Bereiche beachten
 - Daten mit negativen Koordinaten im II., III. oder IV. Quadranten darstellen.

Ziel: SuS können funktionale Zusammenhänge angemessen darstellen.

Interpretation

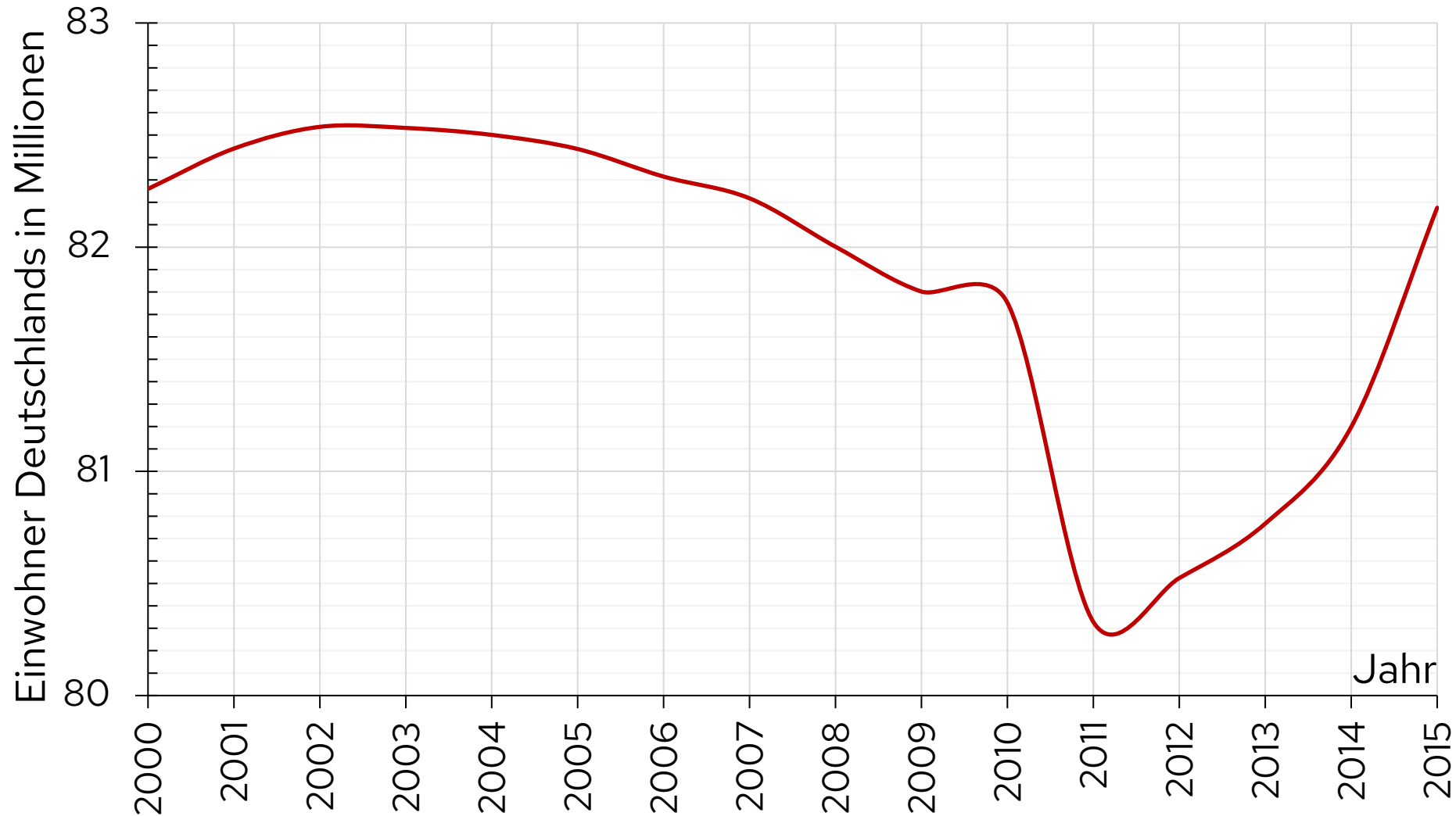
- Achsenbeschriftung beachten
 - Dargestellten Zusammenhang richtig erfassen
- Achsenskalierung beachten
 - Dargestellten Zusammenhang richtig erfassen
 - Verschiedene Zusammenhänge fehlerfrei vergleichen
 - Täuschungen und Übertreibungen erkennen

Ziel: SuS können Darstellungen funktionaler Zusammenhänge kritisch beurteilen.

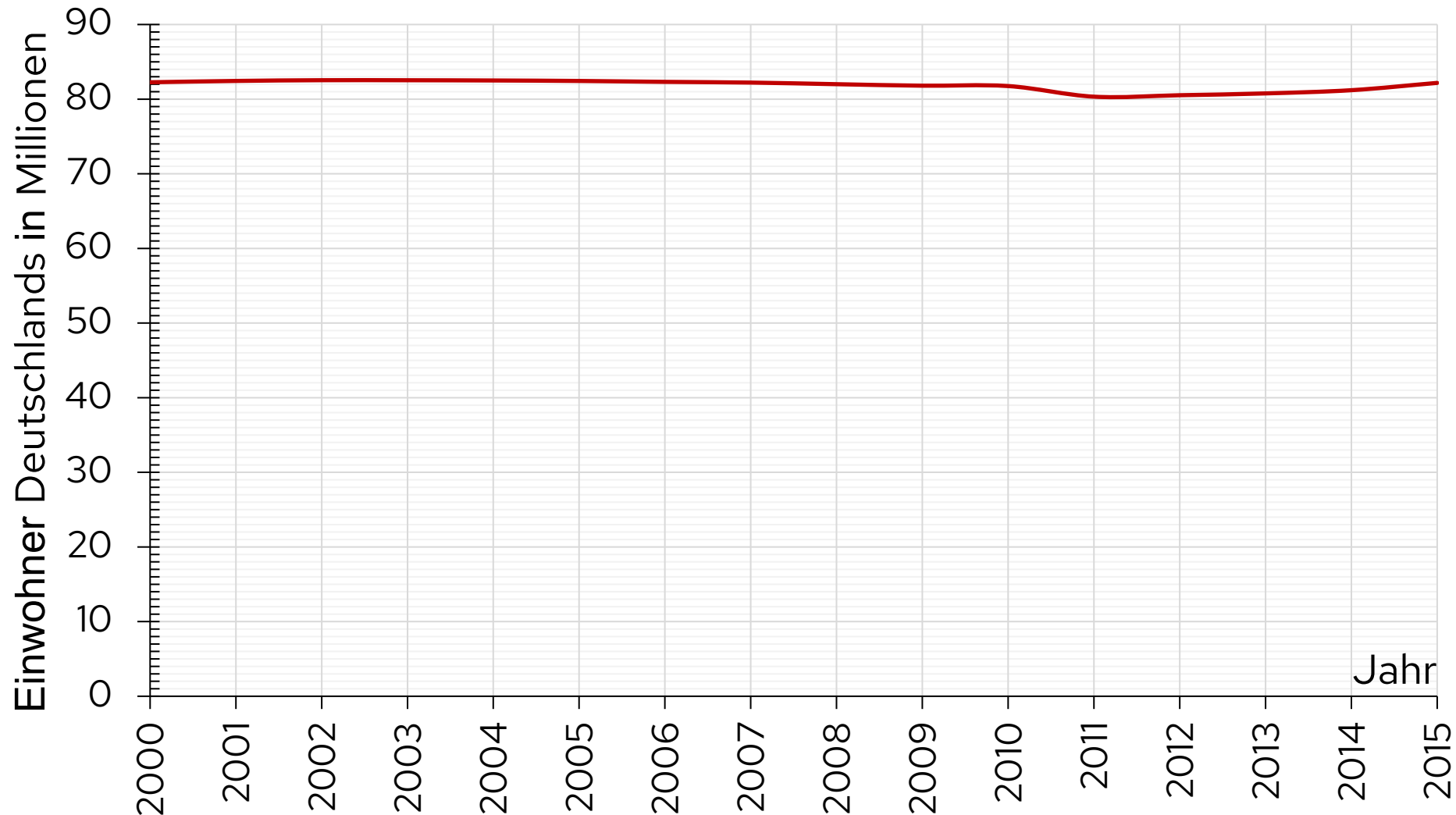
Fähigkeiten beim Arbeiten mit Funktionsgraphen

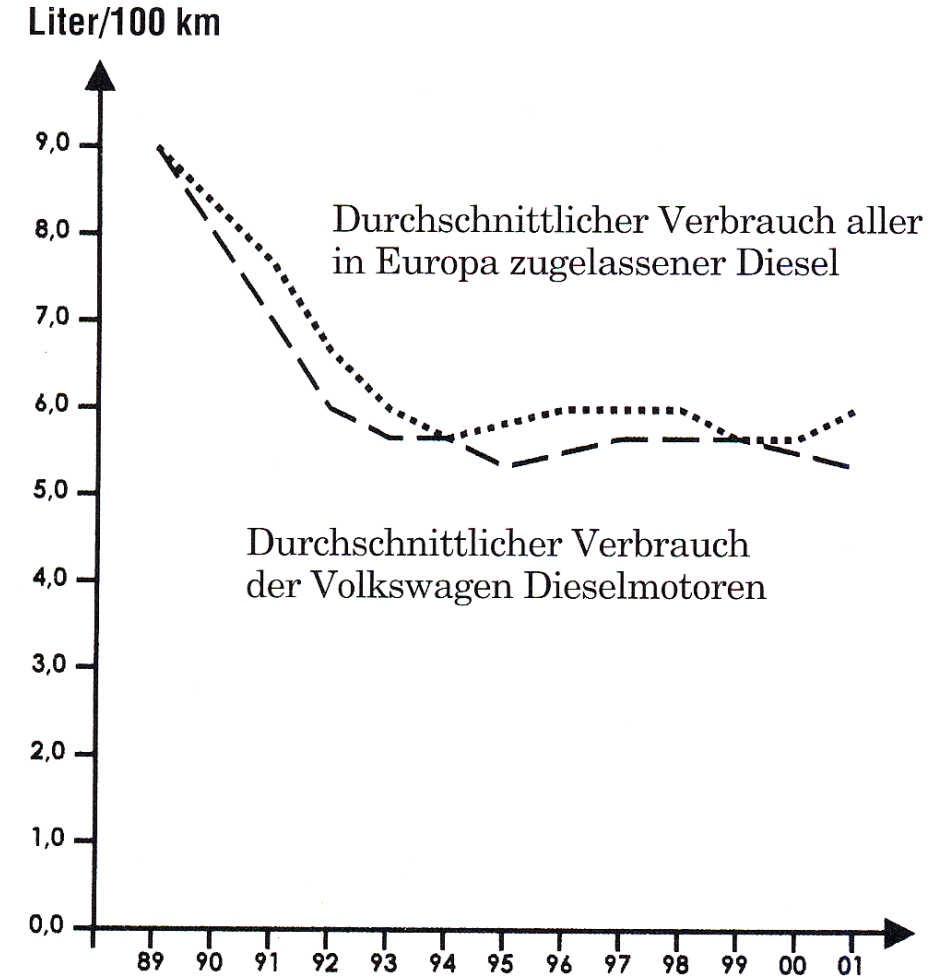
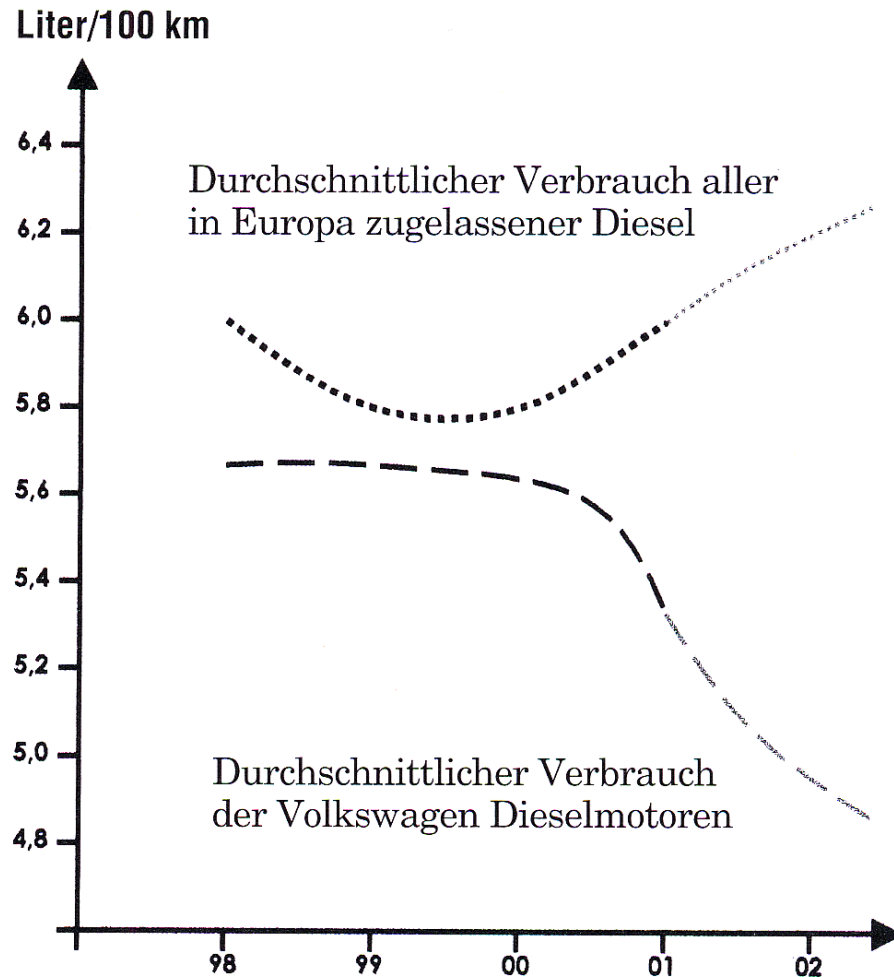
Informationsentnahme			Konstruktion	
Identifizieren	dargestellten Zusammenhang erkennen		passenden Diagrammtyp wählen	Aufbau d. Rahmens
	Zuordnung der Größen zu den Achsen (Achsenbeschriftung) erfassen		Größen den Achsen zuordnen	
			Achsen beschriften	
	Achsenskalierung beachten		Achsen skalieren	
Ablesen	1. Ordnung	einen Wert ablesen	Punktwerte eintragen	Eintragen der Daten
	2. Ordnung	zwei Werte vergleichen oder Trend erkennen (qualitativ / quantitativ)	Verbindungsline zwischen Punkten oder Trendlinie skizzieren	
	3. Ordnung	mehrerer Werte oder Trends vergleichen (qualitativ / quantitativ)	mehrere Trendlinien skizzieren	
		Extrapolieren / Vorhersagen		
Integration				

Bevölkerungsstand in Deutschland



Bevölkerungsstand in Deutschland







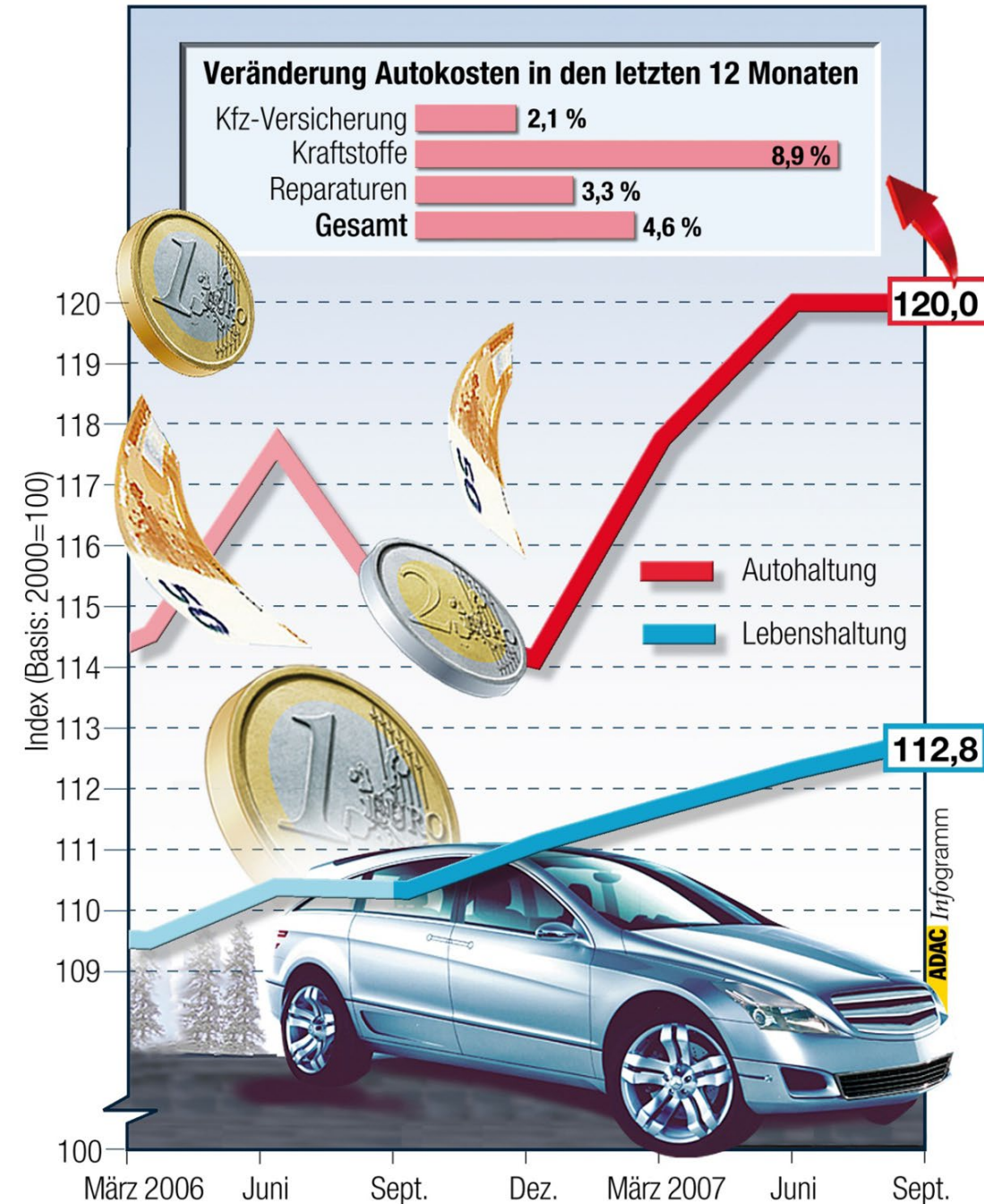
- Verstöße gegen Proportionalität?
- Verstöße gegen perspektivische Verzerrungen?
- Stauchungen oder Streckungen von Achsen?
- Klare Achseneinteilung?
- Achsen vollständig dargestellt?
- Informationsbeitrag von Farben?
- Passen die Daten zur Interpretation?
- Welche Daten hätte ich gerne zum Thema erfahren?
- Passen die Daten zu meiner Einschätzung?
- Wie und wann wurden die Daten gewonnen?
- Interesse des Autors?
- Inhaltlicher Beitrag der Zahlen und Graphiken zur Botschaft?

„Misstrauensregeln“ anwenden



http://presse.adac.de/meldungen/Geld_Kosten/Autokosten_Index_Herbst_2007.asp?ComponentID=189519&SourcePageID=14990#0 (Abgerufen am 30.10.2007)

Autokosten – Index

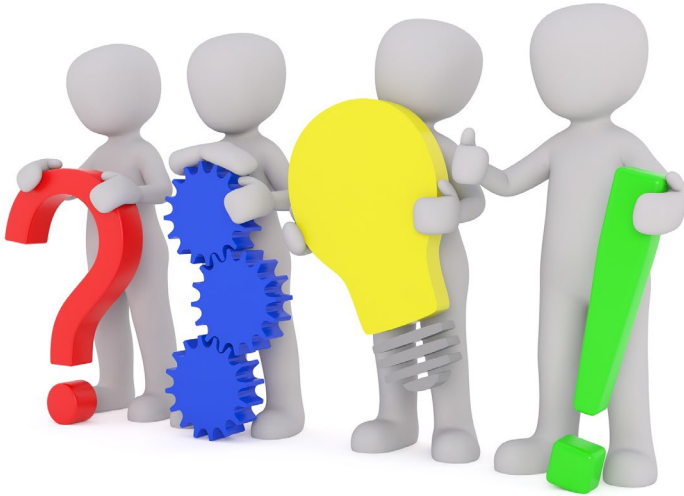


2.2

Denken und Arbeiten mit Funktionen

Typische Fehler beim Arbeiten mit Funktionsgraphen

Typische Schülerfehler beim Arbeiten mit Funktionsgraphen



Lesen Sie den Text
Hofmann & Roth (2021).

- Probleme beim Einzeichnen und Ablesen von Punkten ↪
- Probleme beim Herstellen eines Bezugs zur Situation ↪
- Verwechslung von Bestand und Änderung ↪
- „Graph als Bild“-Fehler ↪
- Concept Image ↔ Concept Definition ↪

Konstruktion

- Eindeutigkeit missachtet
 - Vgl. Grundvorstellung Zuordnung
- Trugschluss: Eindeutigkeit $\rightarrow$ Injektivität
 - Annahme: Da jedem x genau ein y zugeordnet wird, darf auch jedes y nur einmal vorkommen.

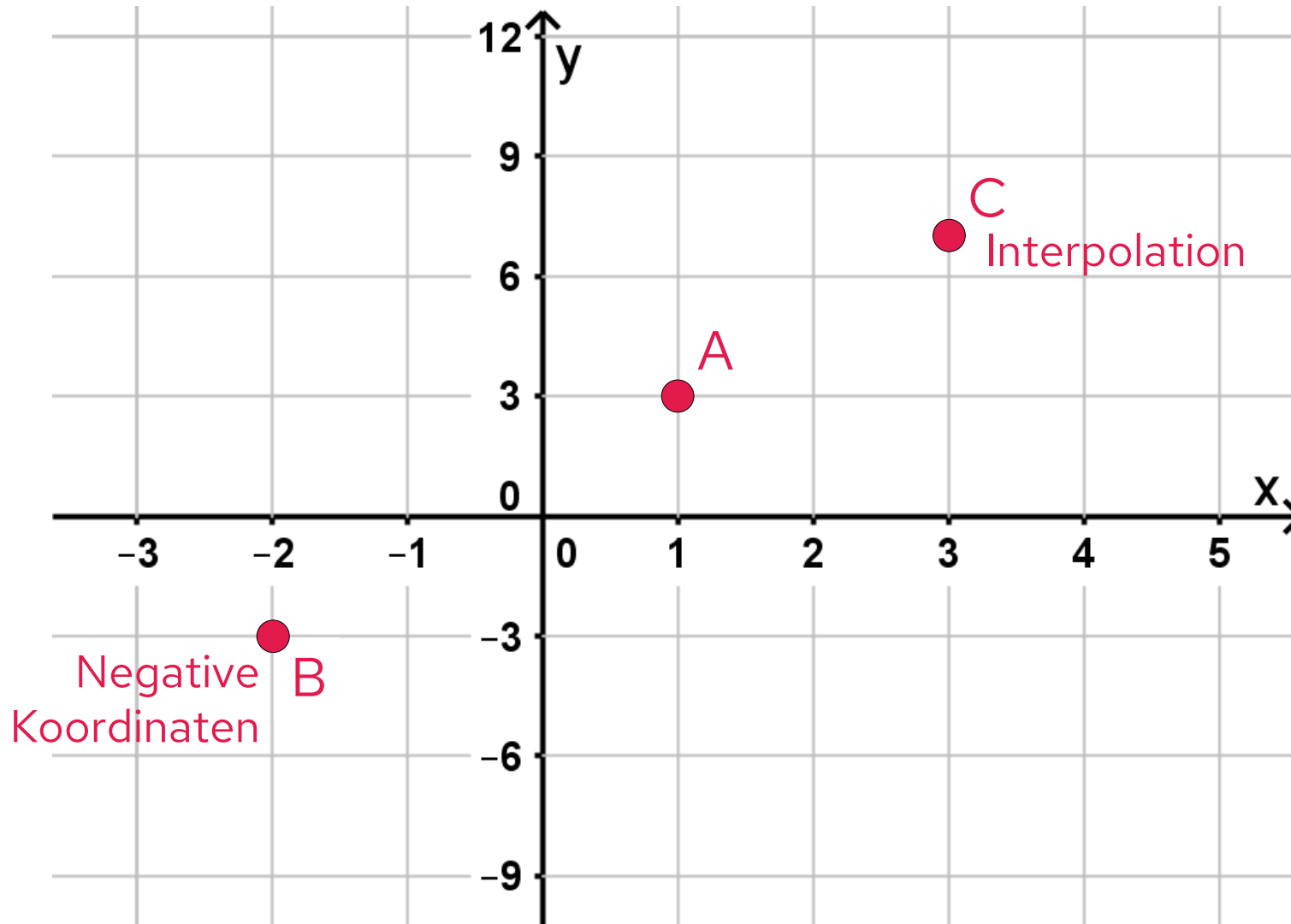
Konstruktion & Ablesen

- x - und y -Koordinate werden vertauscht
 - Vgl. Grundvorstellung Zuordnung
- Achsenskalierung missachtet

Konstruktion & Ablesen

- Probleme
 - mit negativen Koordinaten
 - bei der Interpolation
 - beim Ablesen des x -Werts zu einem y -Wert
 - beim Bestimmen von Steigungen
 - beim Vergleich von Steigungen in verschiedenen Abschnitten oder Graphen
- **Annahme:** Sichtbarer Graph zeigt die gesamte Funktion (Probleme beim Treffen von Vorhersagen)

Probleme beim Einzeichnen und Ablesen von Punkten

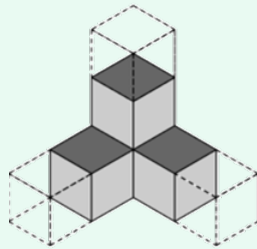


Schwierigkeitsgrad?

Konstruktion

Unsicherheit,

- welche für die Situation markanten Punkte sich für die Konstruktion des Graphen nutzen lassen
- ob das Verbinden von Punkten in der Situation erlaubt bzw. sinnvoll ist
- wie Punkte ggf. verbunden werden müssen (Typ des funktionalen Zusammenhangs) → Oft wird fälschlich linear oder stückweise linear verbunden.
- Keine Änderung $\leftrightarrow$ Funktionswert 0

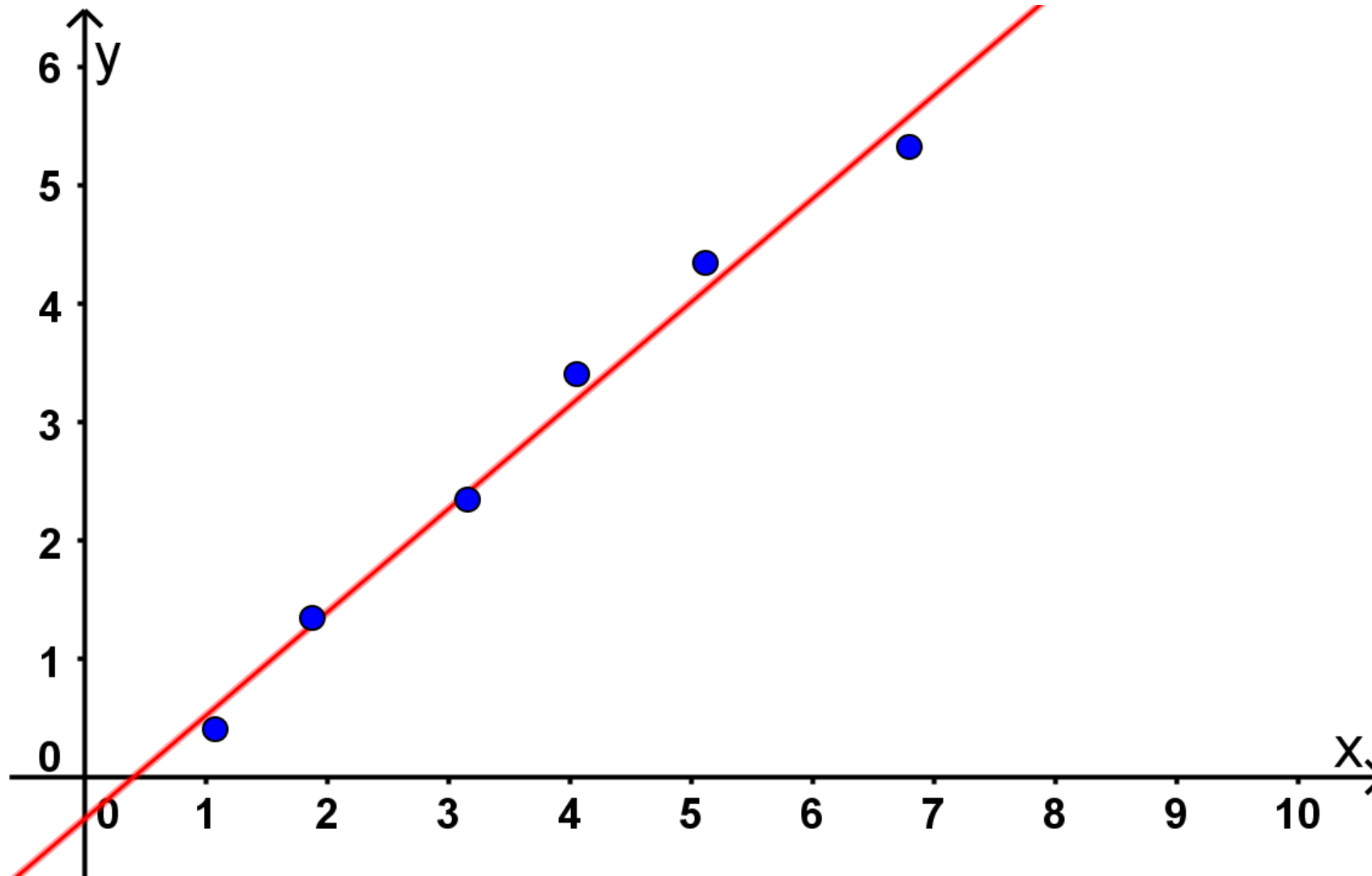


Interpretation

Unsicherheit, wie

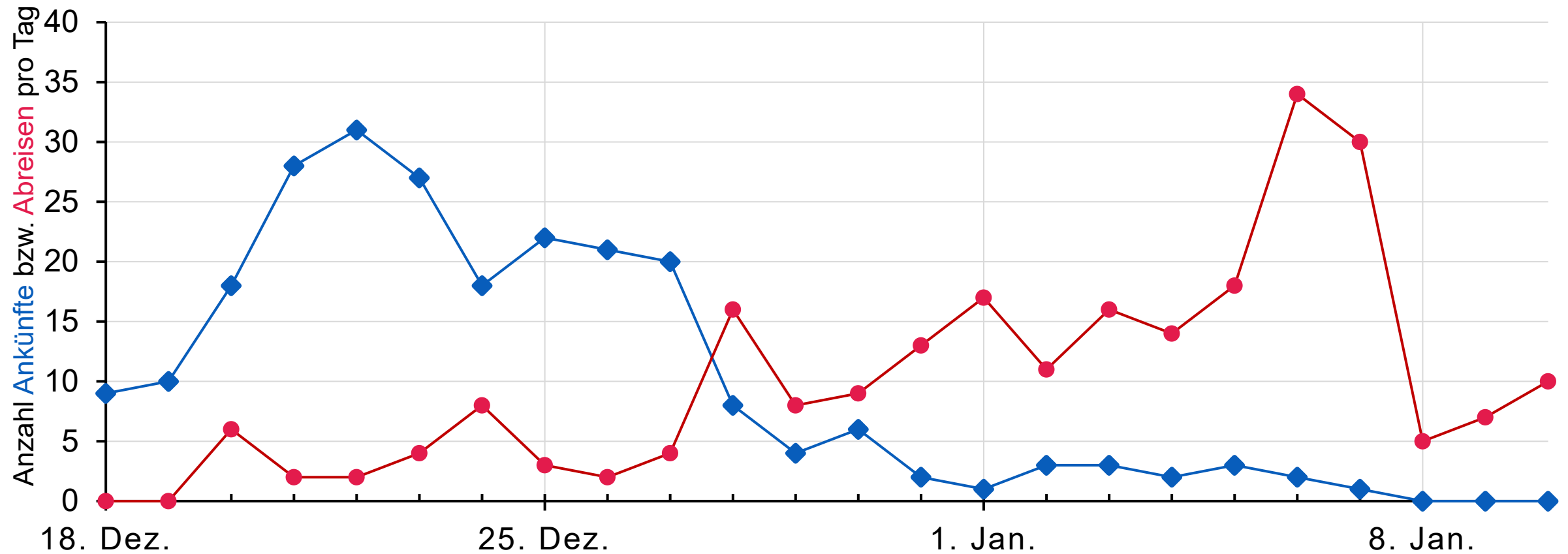
- Punkte
- Achsenabschnitte
- Schnittpunkte von Graphen
- konstante Graphen-Abschnitte (Graph parallel zur x -Achse)
- Linie durch Punkte (Funktionsgraph; Interpolations- bzw. Ausgleichsgerade; Visualisierung von Veränderungen)
- Steigung des Graphen insgesamt / in verschiedenen Abschnitten
- verschiedene Graphen zu einer Situation im Vergleich (bzgl. der Situation) zu interpretieren sind.

Probleme beim Herstellen eines Bezugs zur Situation



Ankünfte und Abreisen im Alpenhotel

◆ Ankünfte (Anzahl am Tag) ● Abreisen (Anzahl am Tag)



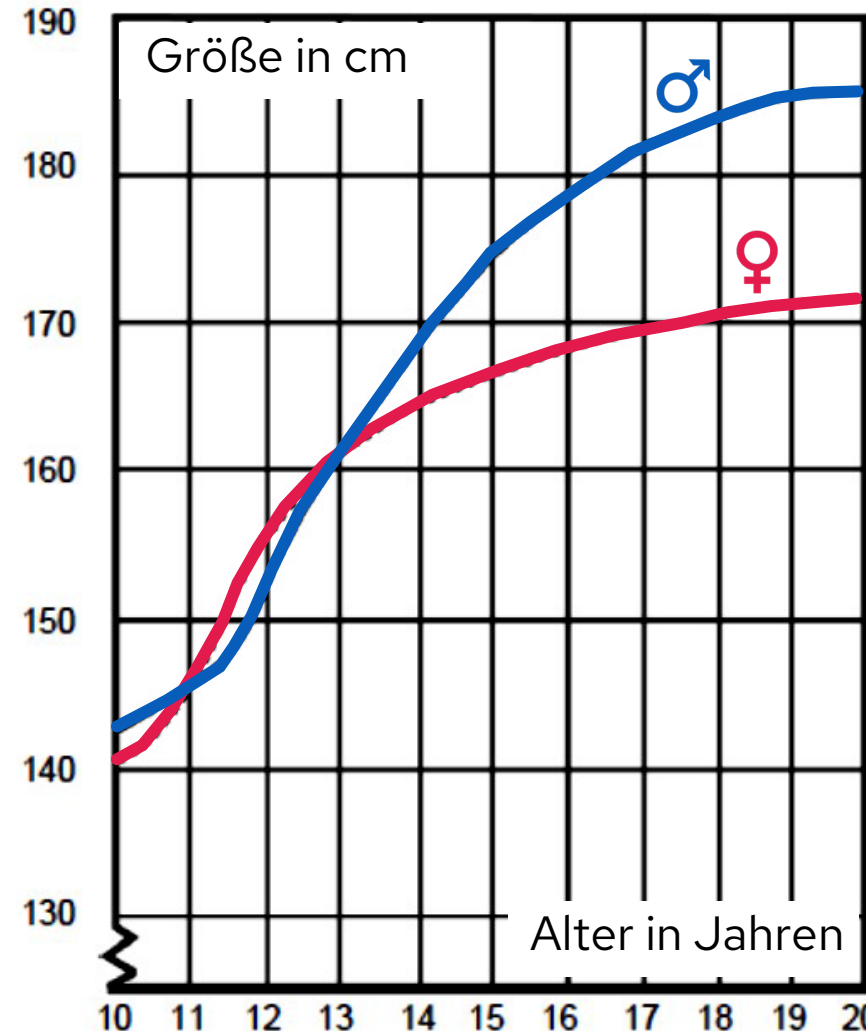
Verwechslung von Bestand und Änderung

Wenn nach der Änderung an einer bestimmten Stelle bzw. in einem bestimmten Bereich gefragt wird.

Statt der Änderung wird häufig der Bestand fokussiert.

Wenn mehrere Graphen oder verschiedene Teilbereiche eines Graphen miteinander verglichen werden und z. B. nach der größeren Änderung gefragt wird.

Beispiel: Durchschnittsgröße von Jugendlichen im Jahr 1998 in den Niederlanden



Vergleich innerhalb eines Graphen

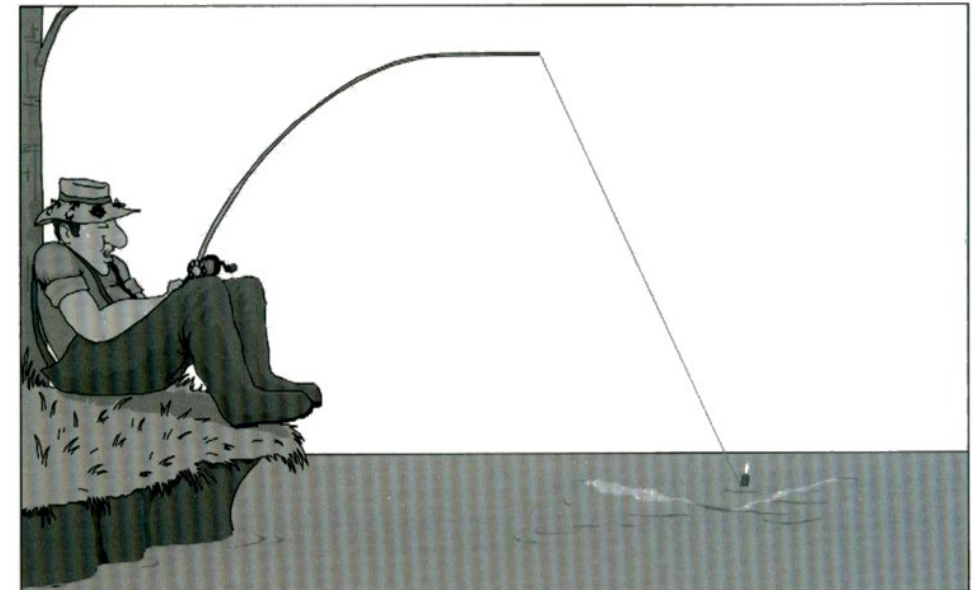
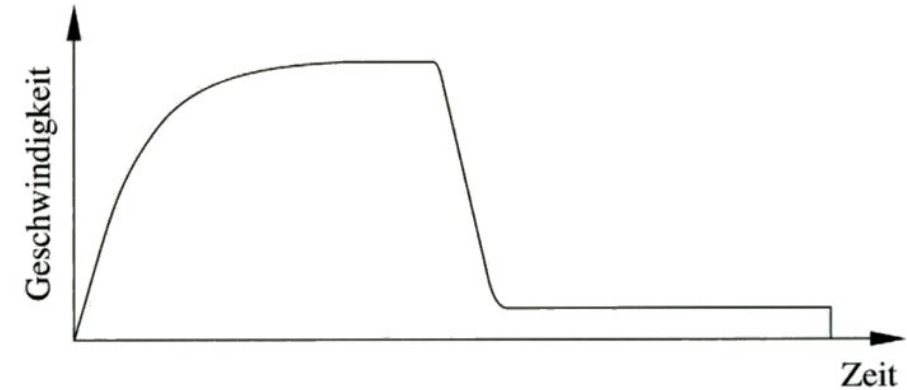
Innerhalb welchen Jahres wachsen die Jungen am stärksten?

Vergleich zwischen zwei Graphen

Welche Jugendliche wachsen zwischen dem 10. und 11. Geburtstag stärker, männliche oder weibliche?

Konstruktion & Interpretation

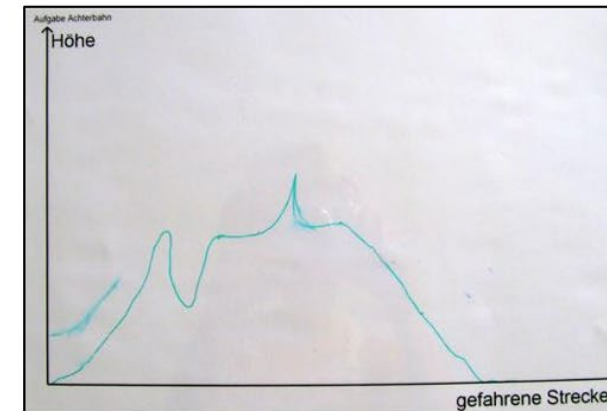
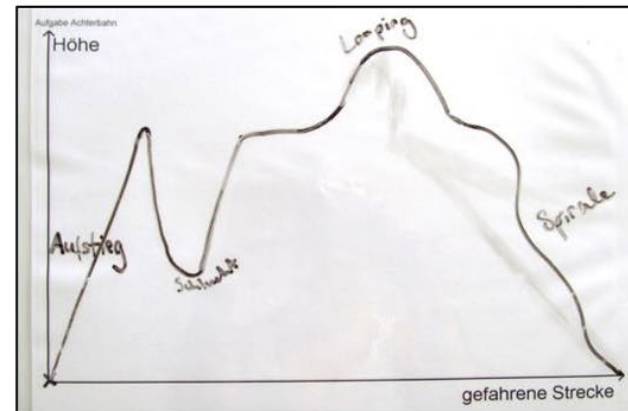
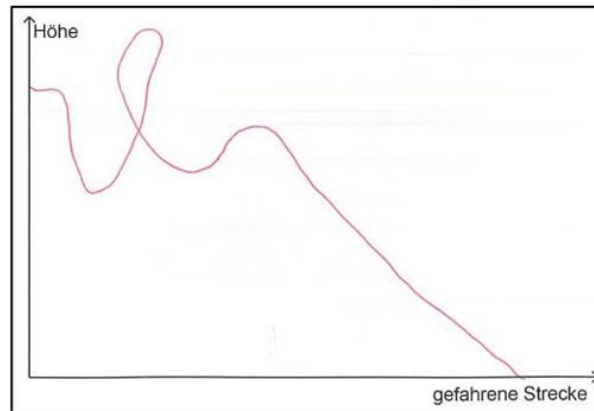
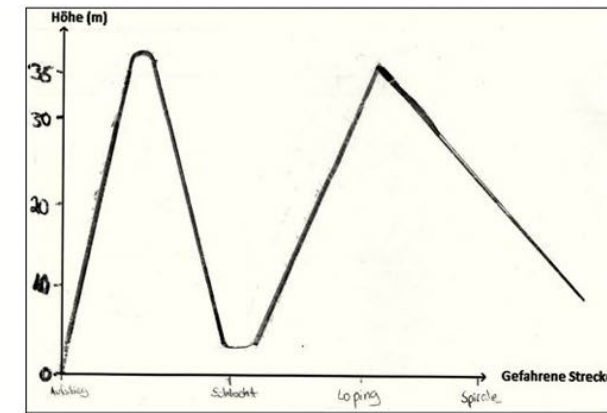
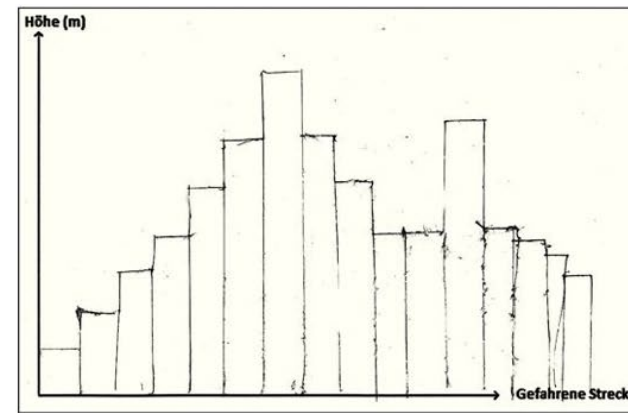
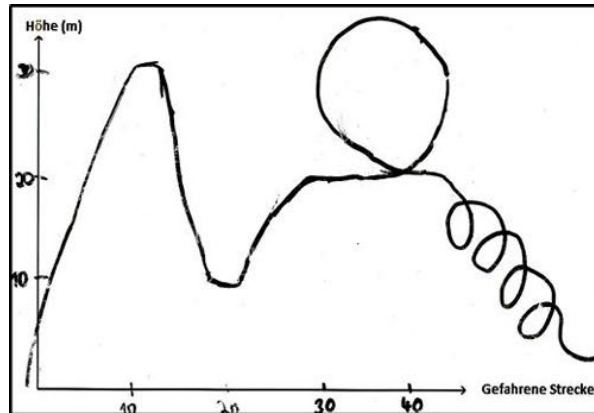
- Ein Graph wird nicht als Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs sondern als Abbild (Foto) der Realität interpretiert bzw. konstruiert.
- Tritt häufig auf, wenn die Funktion einen Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg oder Geschwindigkeit und Zeit darstellt.
- Der Funktionsgraph wird dann oft als zurückgelegte Strecke bzw. Streckenverlauf interpretiert.



„Graph als Bild“-Fehler

Achterbahnfahrt

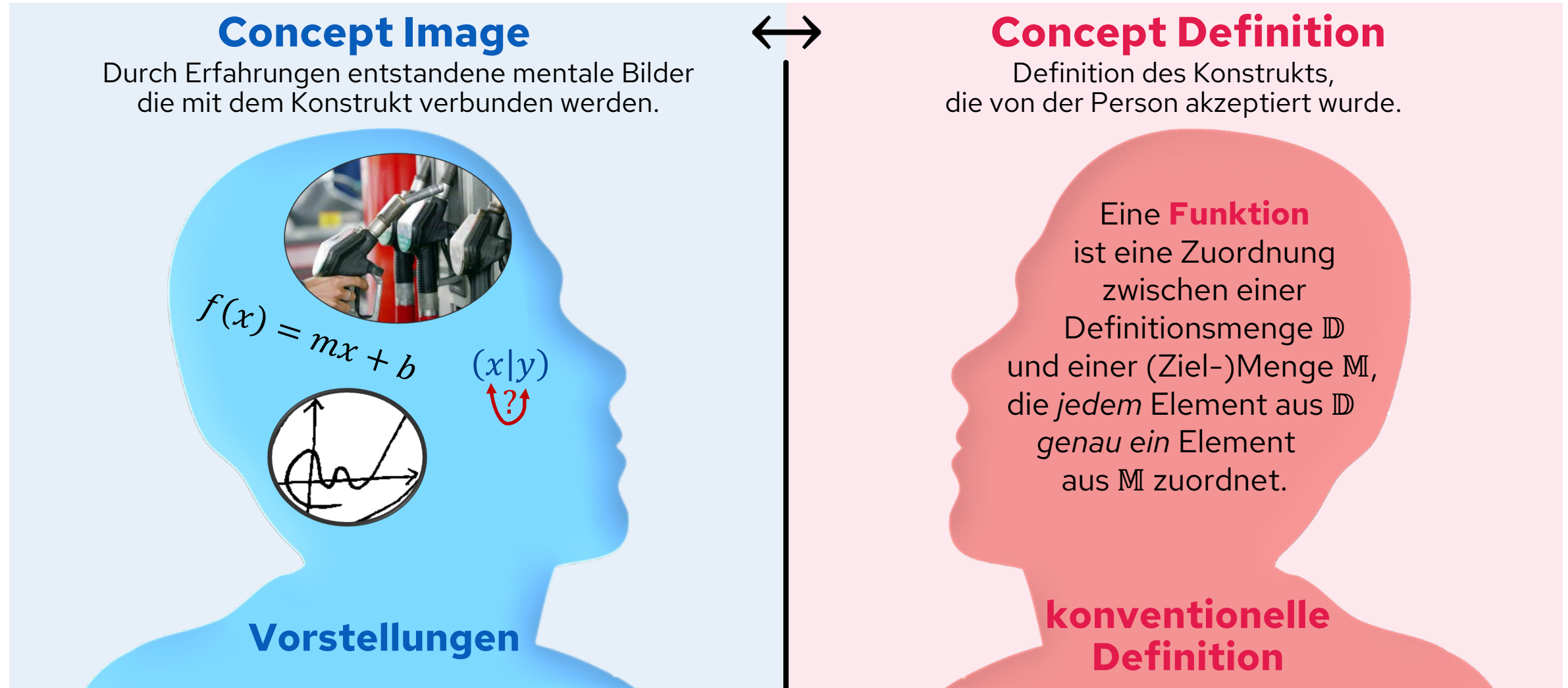
Es ist ein Graph zu skizzieren, bei dem der auf der Achterbahn gefahrenen Strecke die Höhe des Wagens über dem Boden zugeordnet wird.



Bei einer Achterbahn folgen nach dem **Aufstieg**, eine „**Schlucht**“ (d.h. hier geht es erst steil nach unten und dann gleich wieder nach oben), ein „**Looping**“ und eine „**Spirale abwärts**“. Skizziert einen Graphen, in dem der auf der Achterbahn gefahrenen Strecke die Höhe des Wagens über dem Boden zugeordnet wird.

Concept Image ↔ Concept Definition

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education I (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.



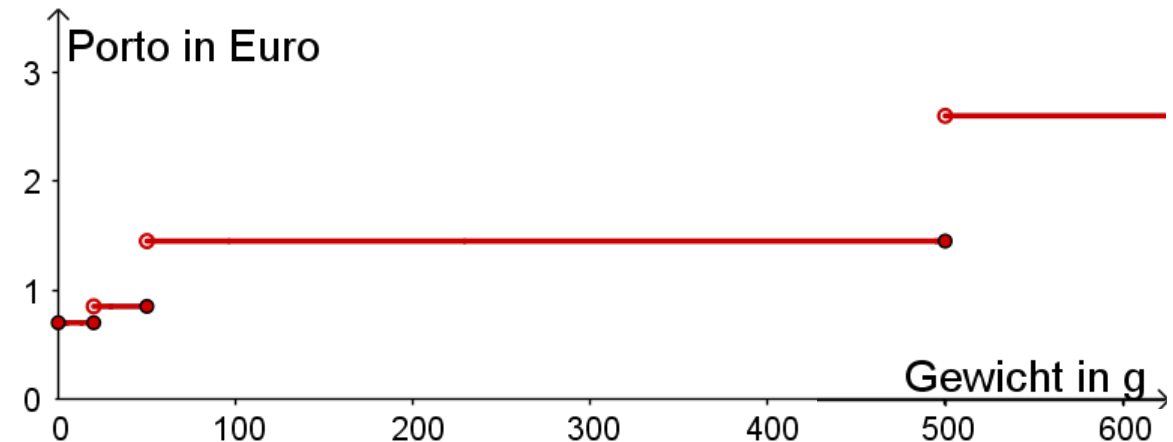
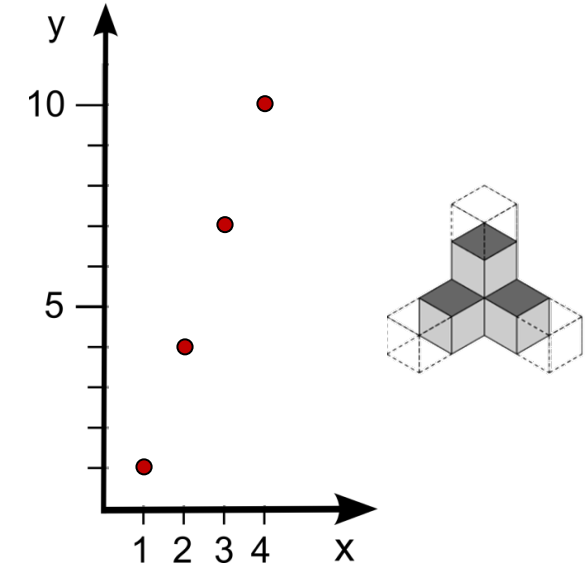
Concept Image ↔ Concept Definition

Concept Image & Concept Definition

- ... existieren nebeneinander und sind oft miteinander vereinbar.
- ... sind nicht immer gleichzusetzen und können sich gegenseitig stören.

Graphen, die neu oder ungewohnt erscheinen,

- passen nicht zu den mentalen Bildern und somit nicht ins **Concept Image**.
- werden oft nicht als Funktionsgraphen angesehen, obwohl sie definitionsgemäß Funktionen darstellen und die Definition einer Funktion (**Concept Definition**) durchaus verinnerlicht wurde.



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Material ↩

Lernumgebung —

Thema und Ziele

Schülerebene —

Arbeitsauftrag

Material

Schülerdokumente

Metaebene —

Schülerprofile

S2 S3

S1 S4

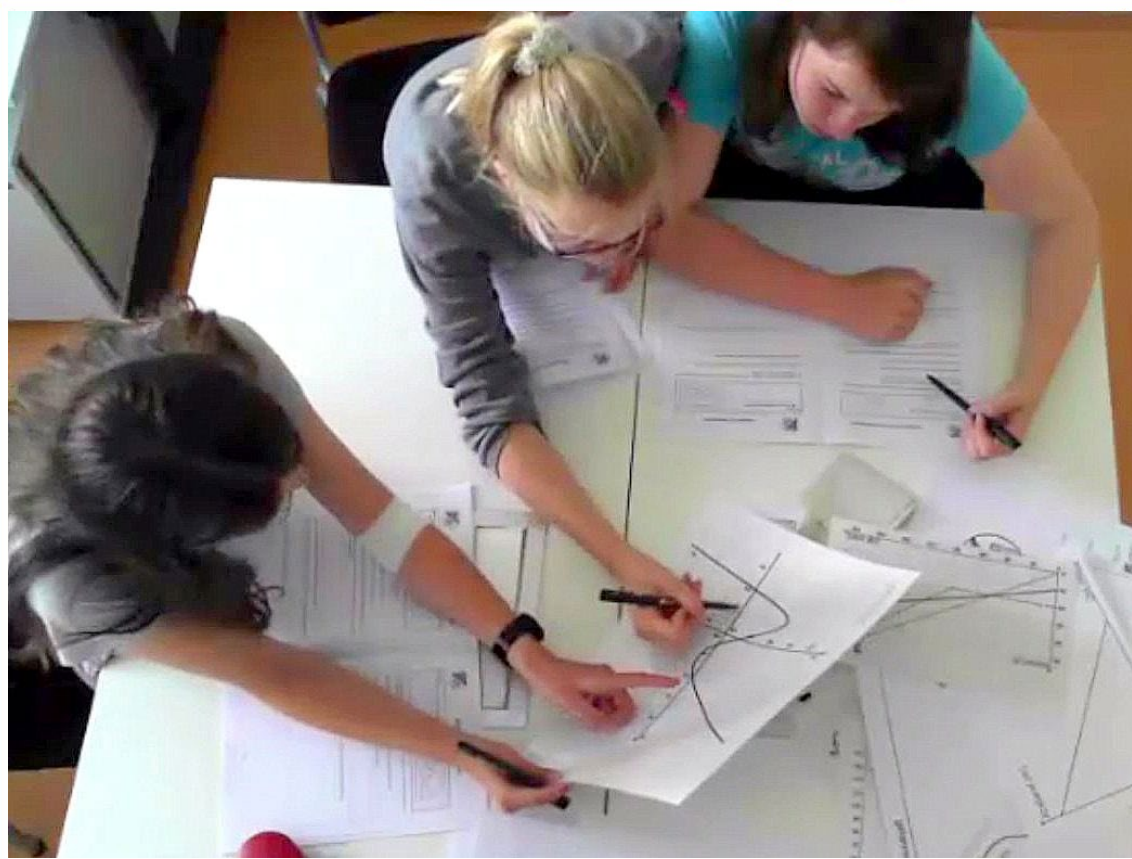
Zeitliche Einordnung

ViviAn

Vignette beenden

Video

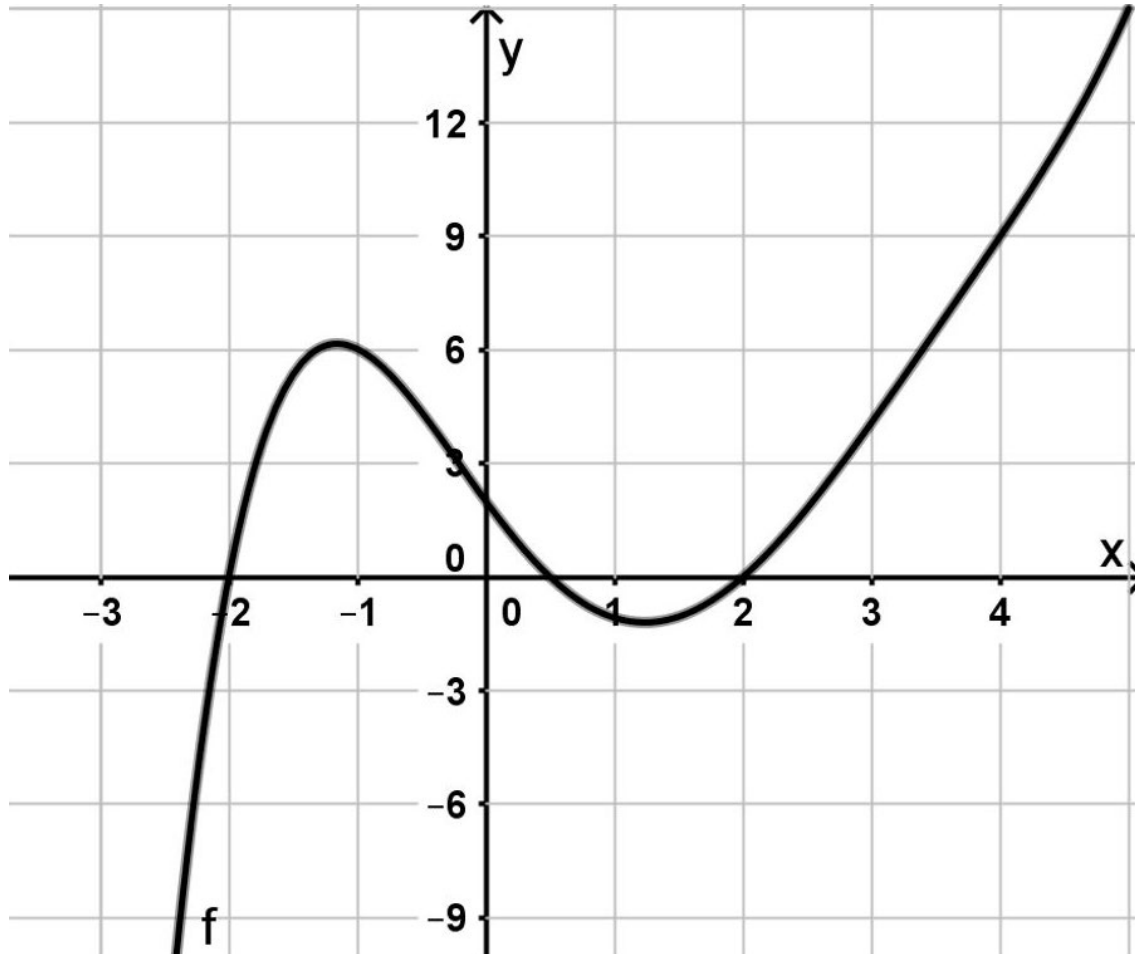
Diagnoseauftrag





<https://vivian.projects.rptu.de> 

Roth, J. (2020). [Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung](#). In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.



Links seht ihr den Graphen der Funktion f . Beantwortet dazu folgende Fragen.

- a) Welche der folgenden Punkte liegen auf dem Graphen?
 $A(0|-2)$, $C(9|4)$, $B(2|0)$, $D(2,5|1,5)$
- b) Welchen Funktionswert hat die Funktion an der Stelle 0?
- c) Welchen Funktionswert hat die Funktion an der Stelle -1 ?
- d) Was ist der maximale Funktionswert im dargestellten Koordinatensystem?
- e) Hat die Funktion über das dargestellte Koordinatensystem hinaus noch größere Funktionswerte? Begründet eure Antwort.

3

Denken und Arbeiten mit Funktionen

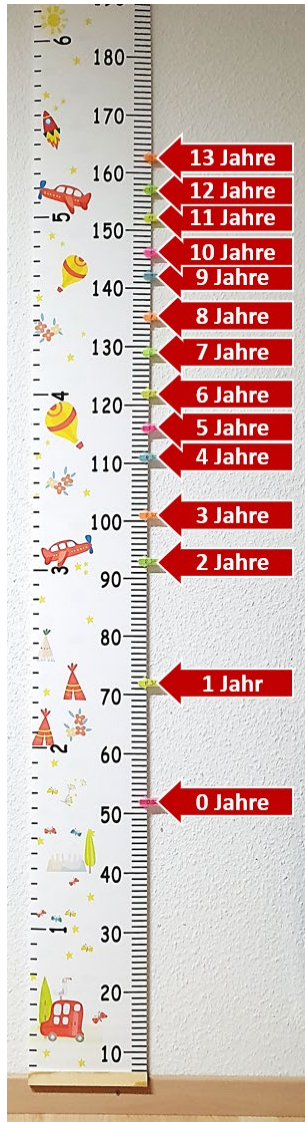
**Lernen des Funktionsbegriffs:
Grunderfahrungen vermitteln
und Aktivitäten gestalten**

3.1

Denken und Arbeiten mit Funktionen

Stufen beim Lernen des Funktionsbegriffs

Stufen beim Lernen des Funktionsbegriffs



Intuitives Begriffsverständnis

- Begriff als Phänomen
- Beispiele kennen



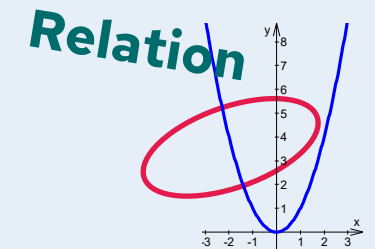
Inhaltliches Begriffsverständnis

- Begriff als Träger von Eigenschaften
- Eigenschaften kennen

Nullstellen
Extrema

Integriertes Begriffsverständnis

- Begriff als Teil eines Begriffsnetzes
- Beziehungen von Eigenschaften untereinander und Beziehungen zu anderen Begriffen kennen

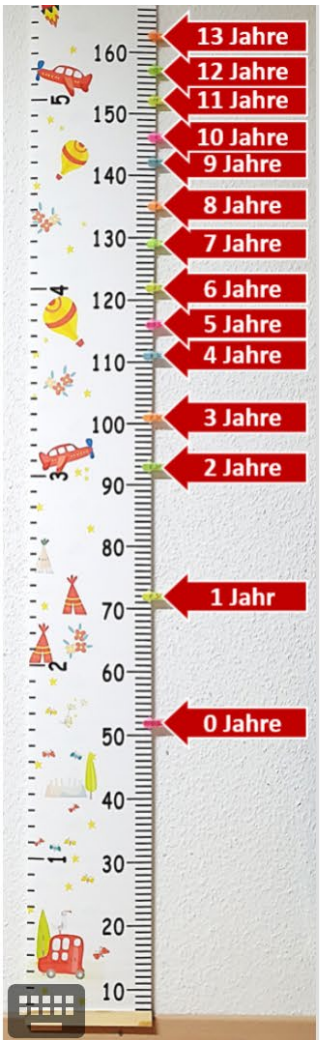


Strukturelles (formales) Begriffsverständnis

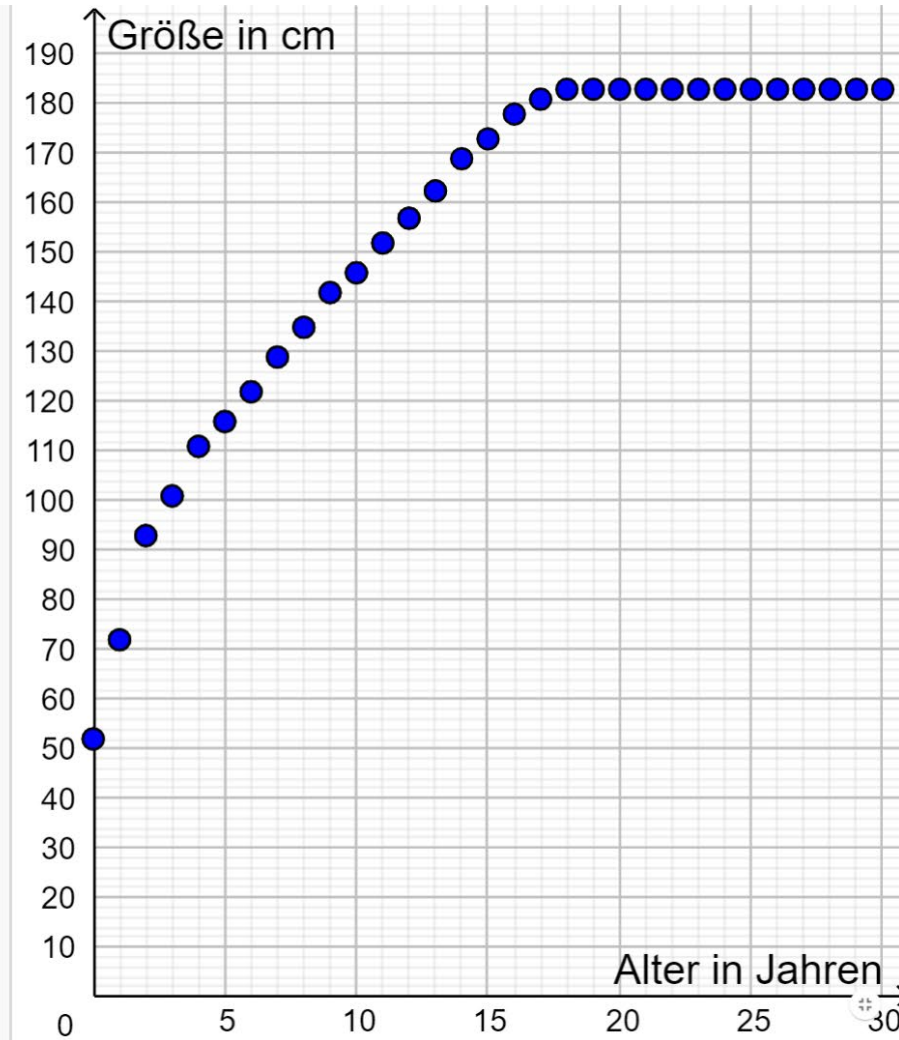
- Begriff als Objekt zum operieren
- Begriffe als Objekte die verknüpft werden können.

$$f \circ g, f \cdot g, f + g$$

Zusammenhang: Alter $\mapsto$ Körpergröße



	A	B
1	Alter in Jahren	Größe in cm
2	0	52
3	1	72
4	2	93
5	3	101
6	4	111
7	5	116
8	6	122
9	7	129
10	8	135
11	9	142
12	10	146
13	11	152
14	12	157
15	13	162.5



Grundvorstellung
Zuordnung

Grundvorstellung
Kovariation

Grundvorstellung
Funktion als Ganzes

1. Begriff als Phänomen

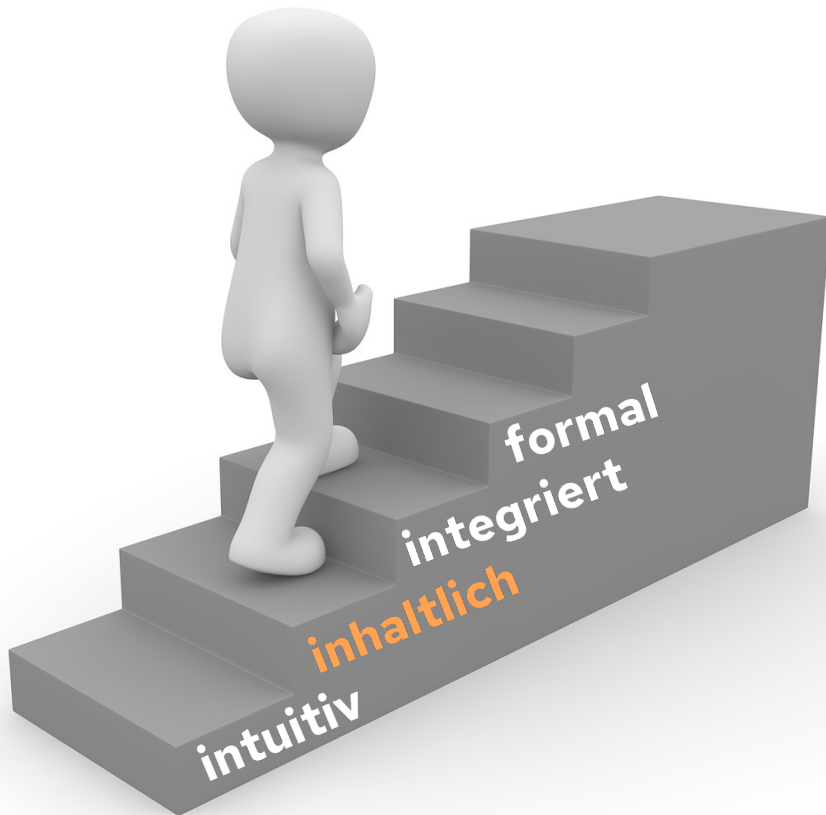


Das **intuitive Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen Zusammenhänge zwischen Größen und können sie beschreiben
- kennen wichtige Beispiele für Funktionen
- verbinden Vorstellungen wie Kurve, Schaubild, Pfeildiagramm, Tabelle usw. mit dem Funktionsbegriff
- können diese Ausdrucksmittel zum Lösen einfacher Probleme einsetzen.
- haben die Eindeutigkeit der Zuordnung als kennzeichnende Eigenschaft erkannt

2. Begriff als Träger von Eigenschaften

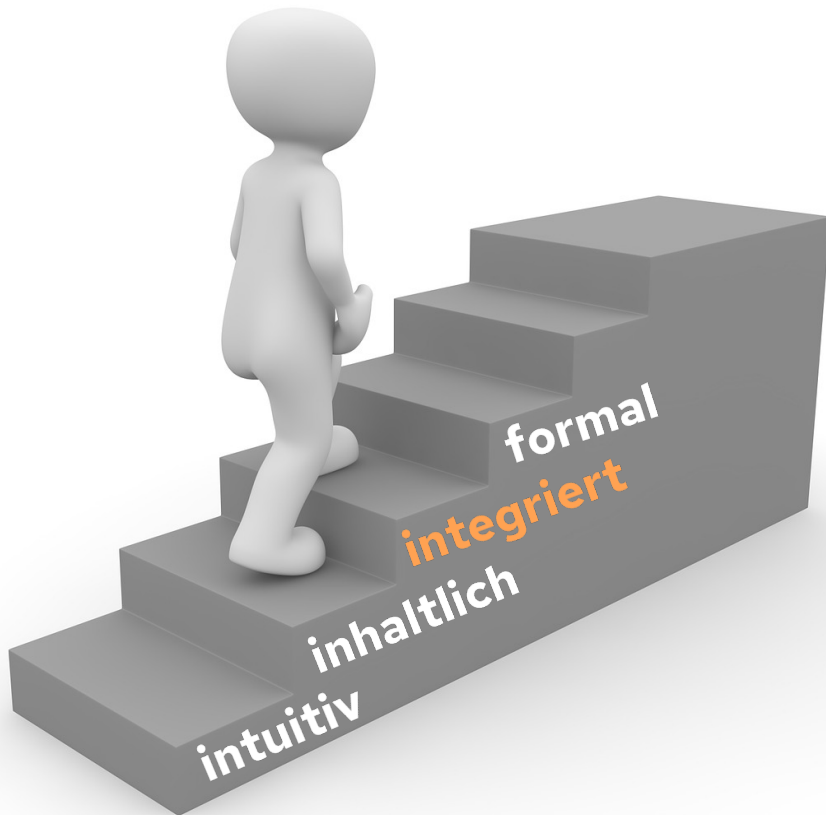


Das **inhaltliche Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen grundlegende Eigenschaften von Funktionen
- verbinden Vorstellungen über die Eigenschaften mit verschiedenen Darstellungsformen
- können Argumente für die erkannten Eigenschaften angeben & benutzen dazu geeignete Darstellungen
- können entdeckte Eigenschaften zur Lösung von Problemen nutzen

3. Begriff als Teil eines Begriffsnetzes



Das **integrierte Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen Zusammenhänge zwischen Eigenschaften
- erkennen mögliche charakterisierende Eigenschaften und können daraus Definitionen bilden
- können Funktionseigenschaften formal ausdrücken und in Beweisen verwenden
- kennen für wichtige Funktionstypen unterschiedliche Definitionen und sind sich deren Äquivalenz bewusst

4. Begriff als Objekt zum Operieren

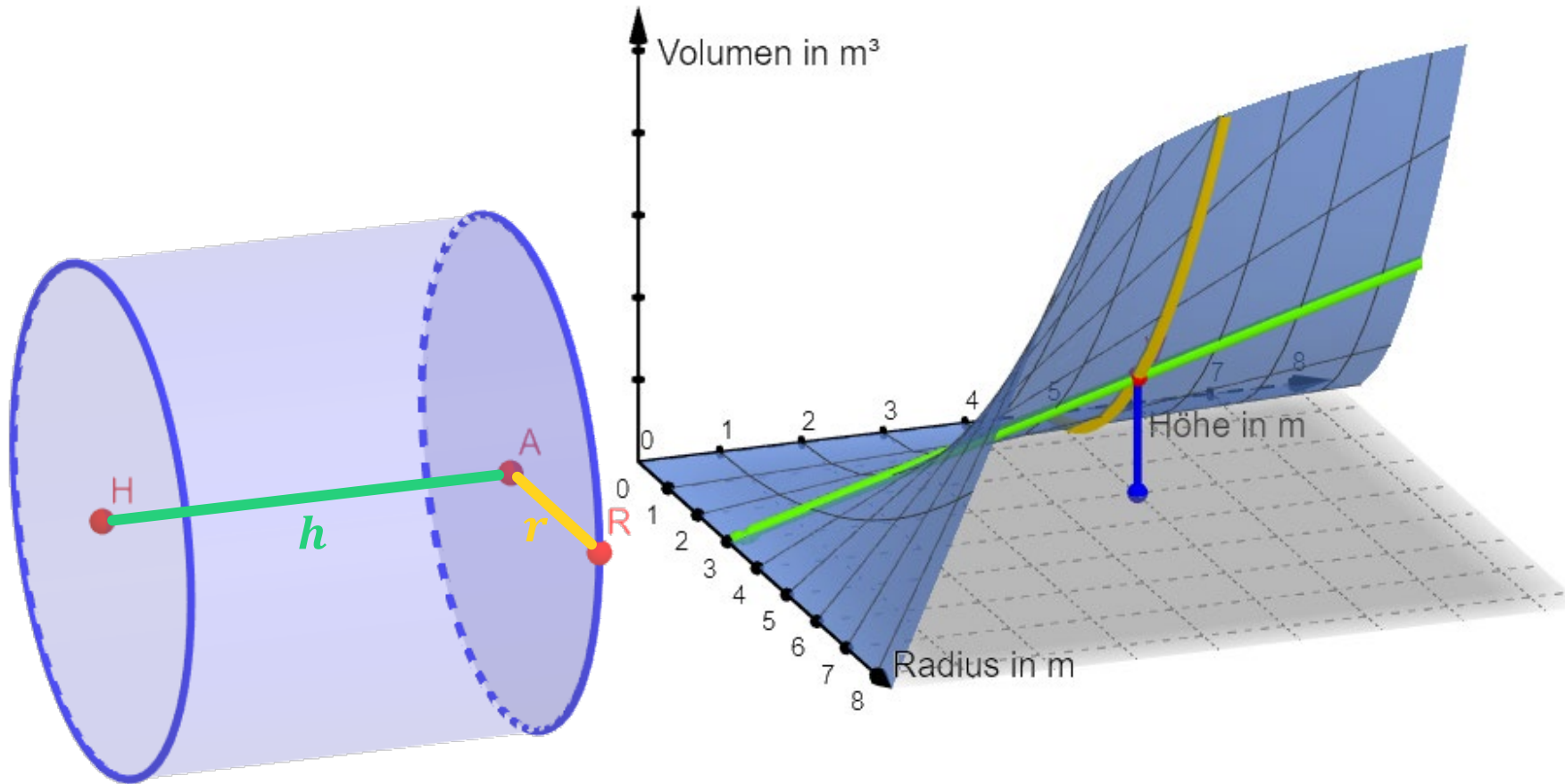


Das **formale Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen wichtige Verknüpfungen von Funktionen
- haben Vorstellungen von den Verknüpfungen, die an verschiedene Darstellungsformen gebunden sind
- kennen grundlegende Eigenschaften dieser Verknüpfungen und können sie begründen
- benutzen beim Operieren mit Funktionen die gefundenen Verknüpfungseigenschaften

Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

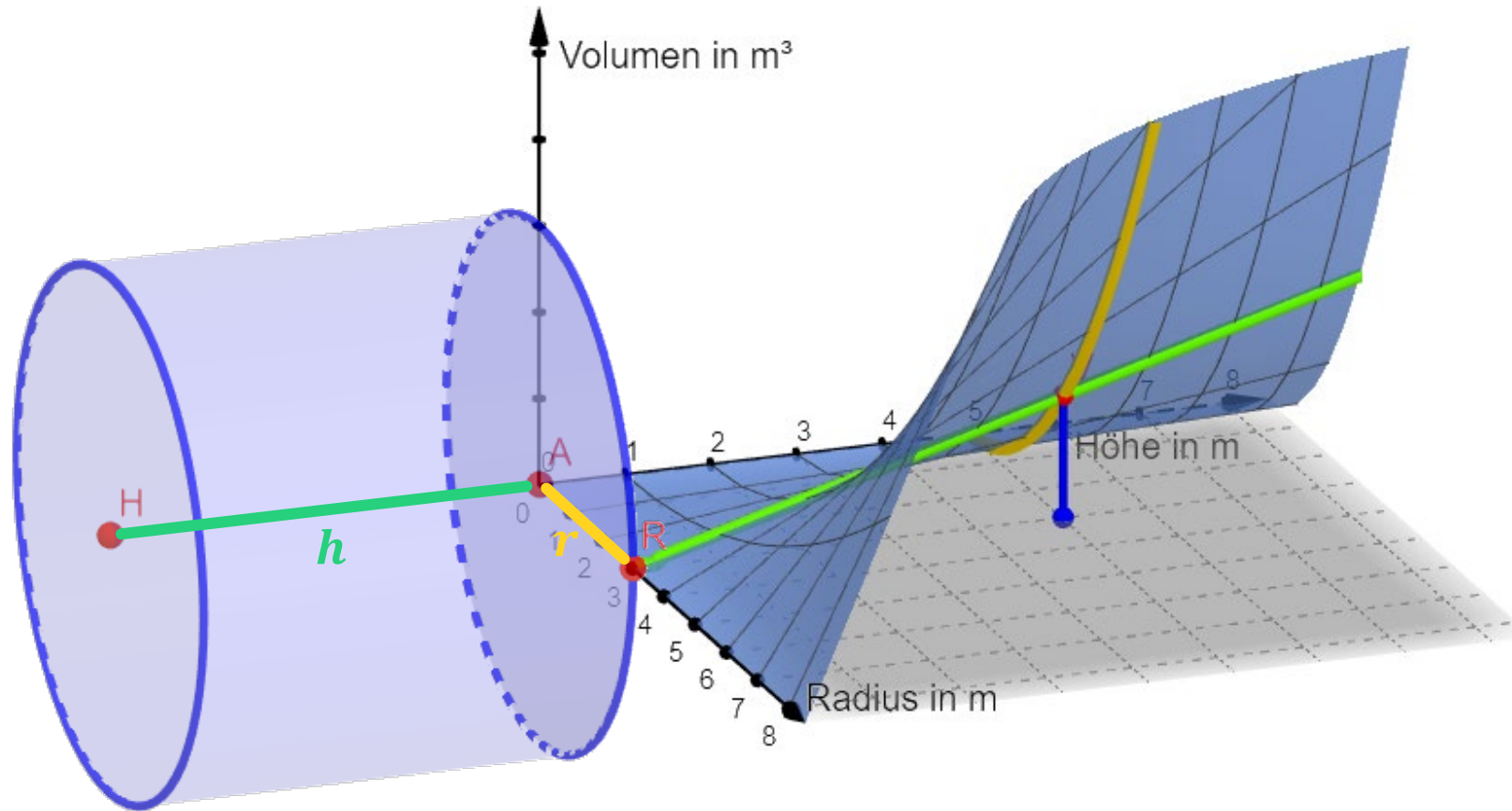
Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher

Zylindervolumen

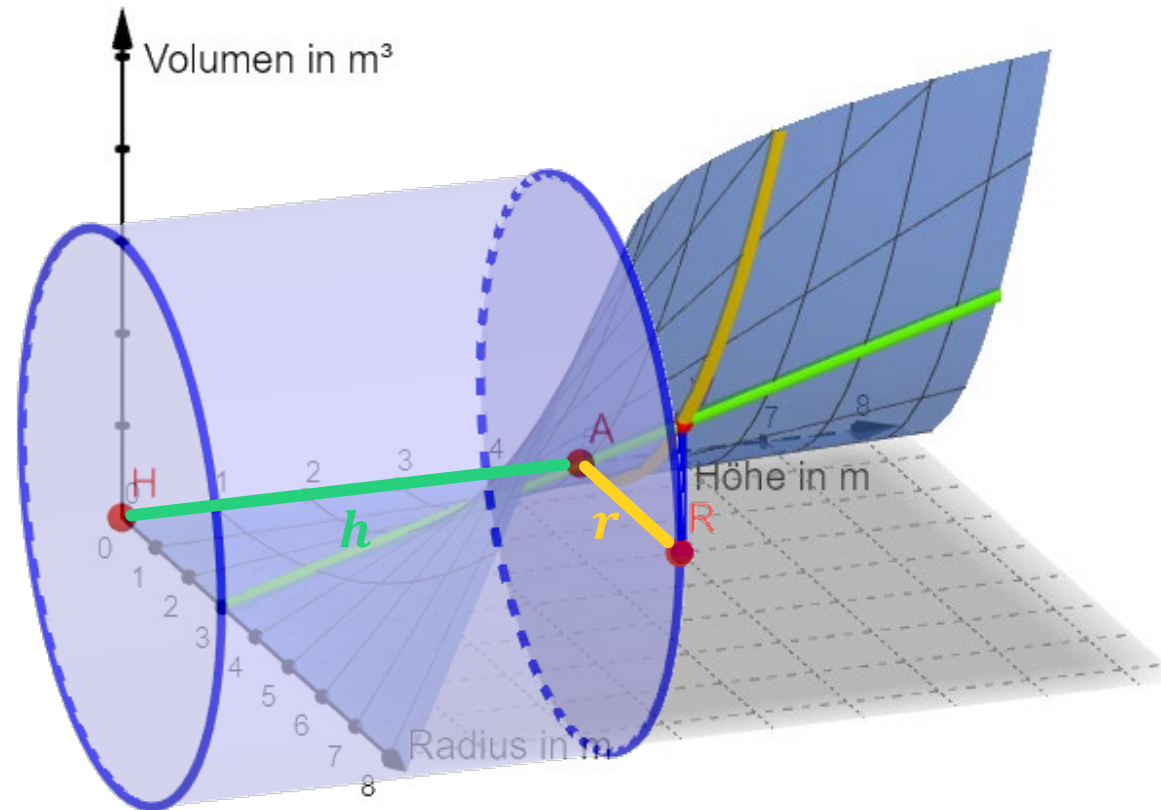
$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(\textcolor{brown}{r}, \textcolor{teal}{h}) = \textcolor{brown}{r}^2 \pi \cdot \textcolor{teal}{h}$$



Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



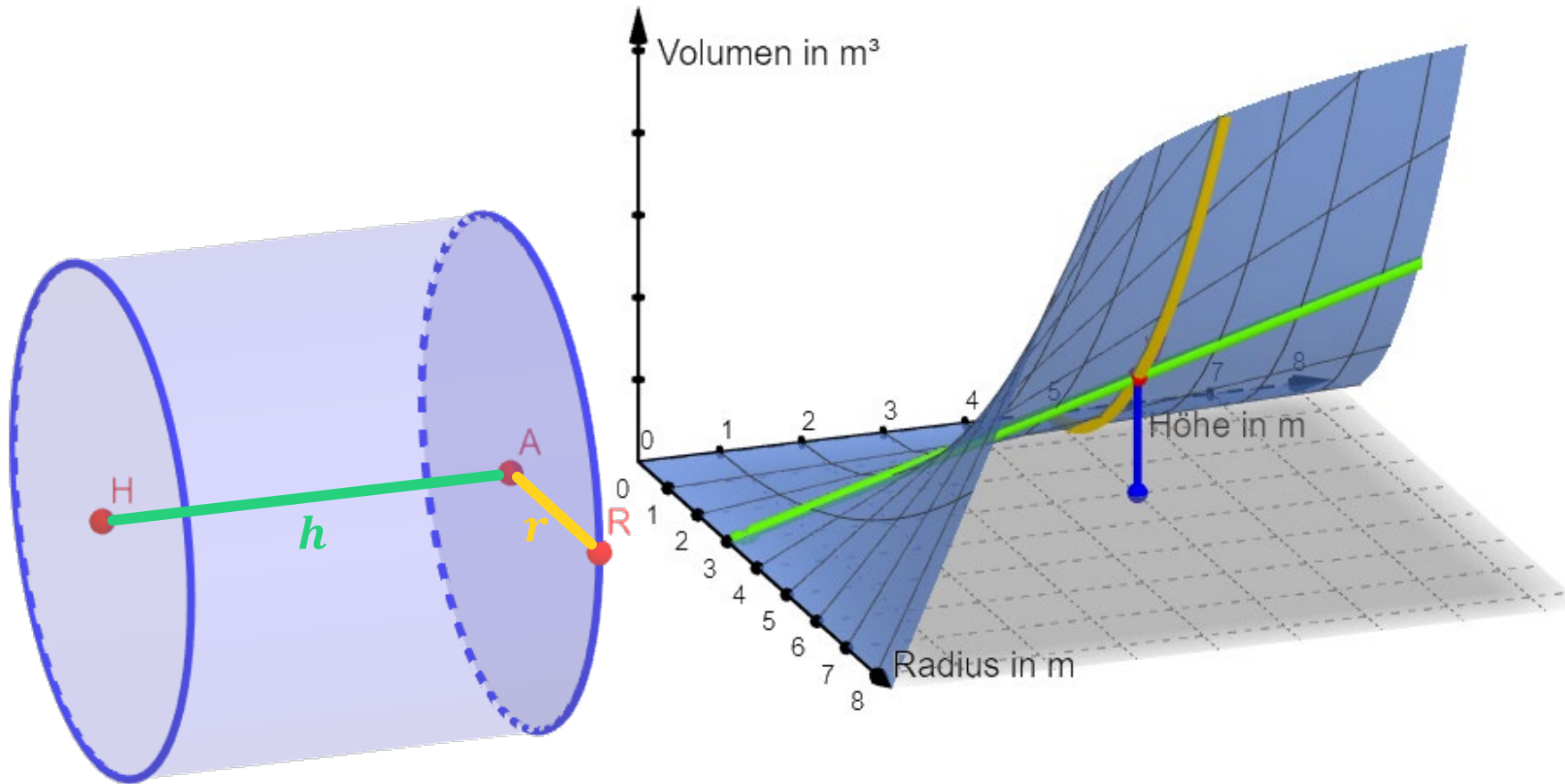
Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher



Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(h) = (r^2 \pi) \cdot h$$

$$V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$$

3.2

Denken und Arbeiten mit Funktionen

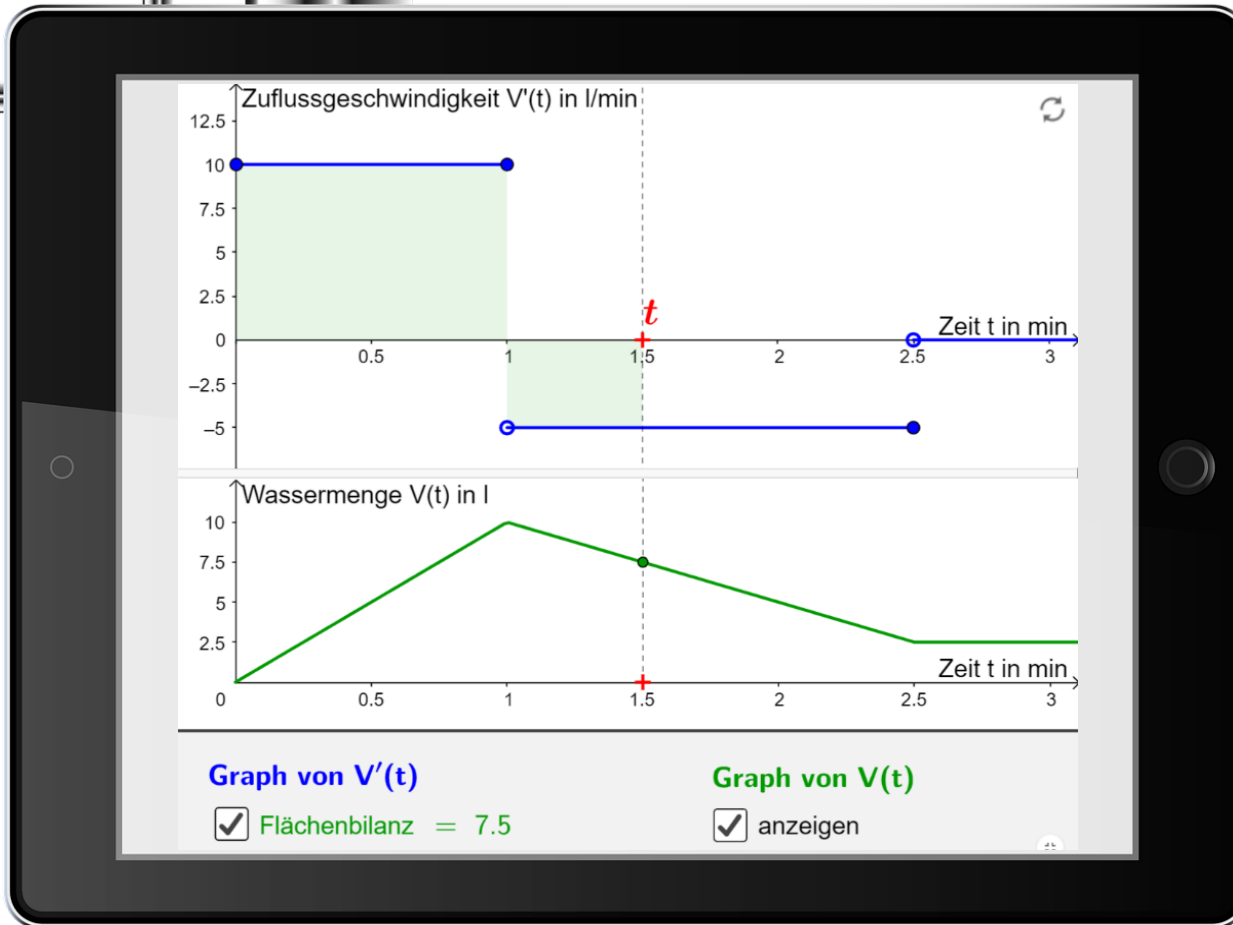
**Grunderfahrungen vermitteln
und Aktivitäten gestalten**

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.



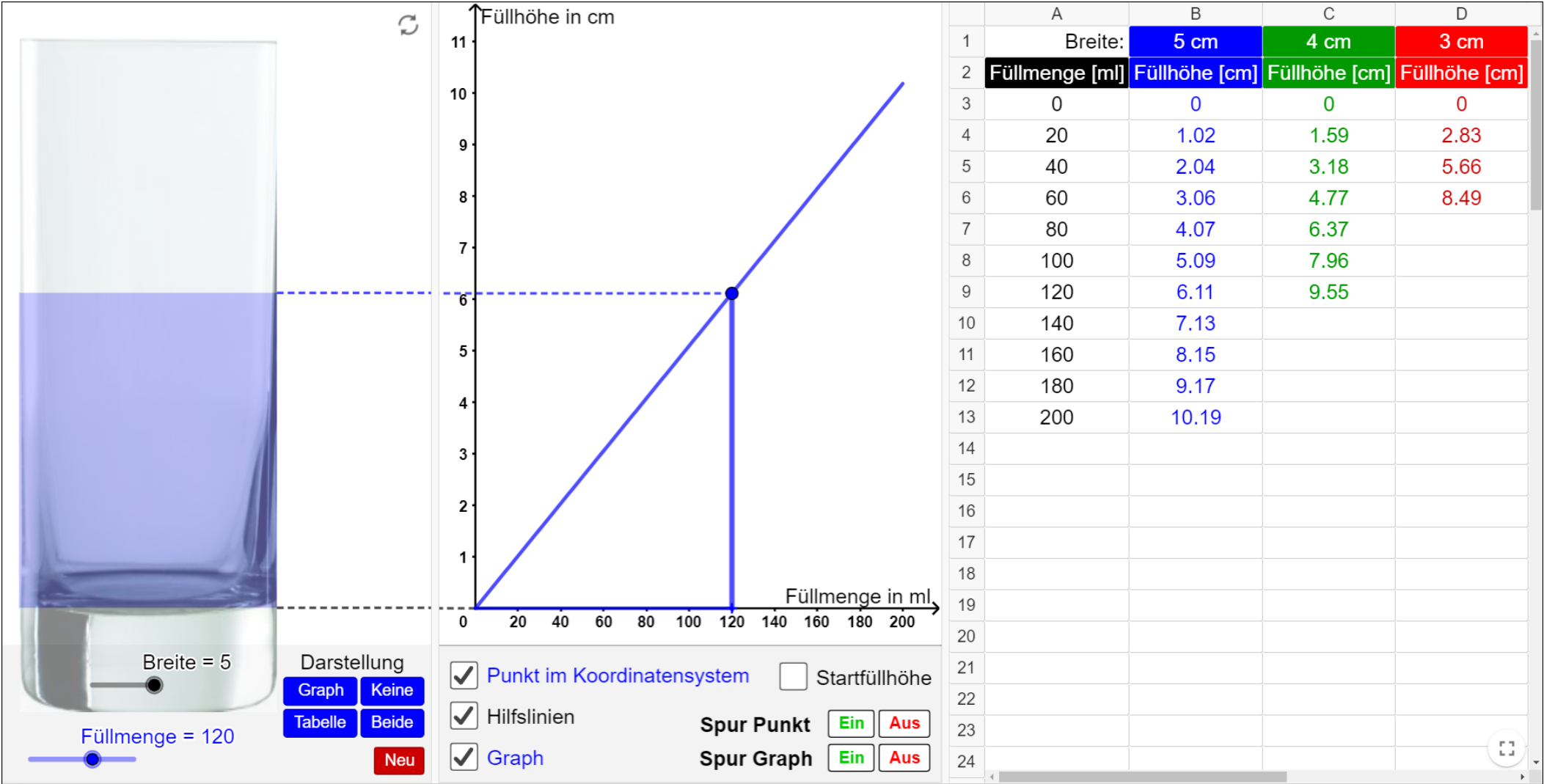
Definition: Digitale Lernumgebung



Digitale Lernumgebung

- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
 - ☐ von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
 - ☐ die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten, digital angereichert wurde.

Darstellungsformen wechselseitig interpretieren



Digitale Lernumgebungen

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“



Aktivurlaub

Funktionale Zusammenhänge

Ansehen



Around the world

Funktionale Zusammenhänge der
Sek I

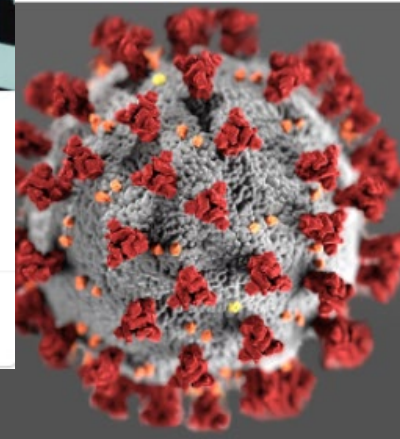
Ansehen



USA - ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Integralrechnung

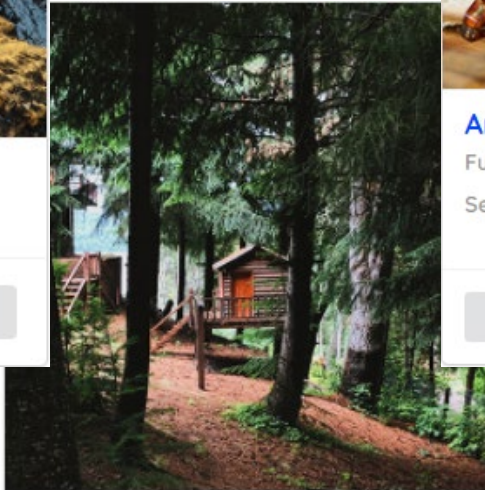
Ansehen



Wort des Jahres

Integralrechnung

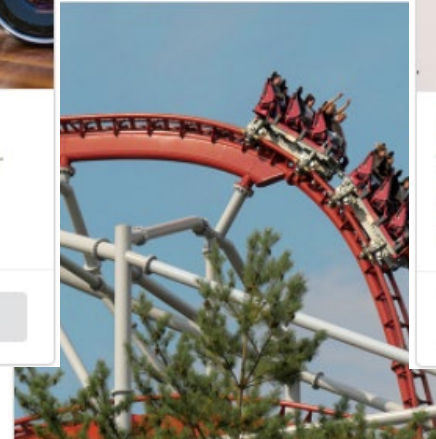
Ansehen



Das Baumhaus-Projekt

Funktionale Zusammenhänge

Ansehen



Freizeitpark

Differentialrechnung

Ansehen



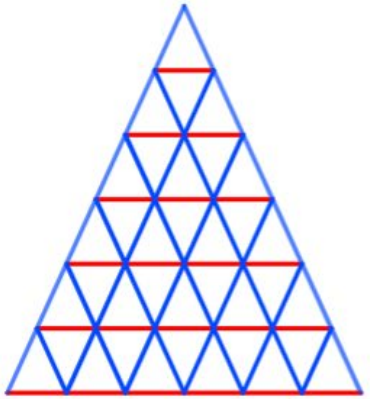
Mathematik-Labor
"Mathe ist mehr"

Kartenhaus: Anzahl Stockwerke → Anzahl Balken

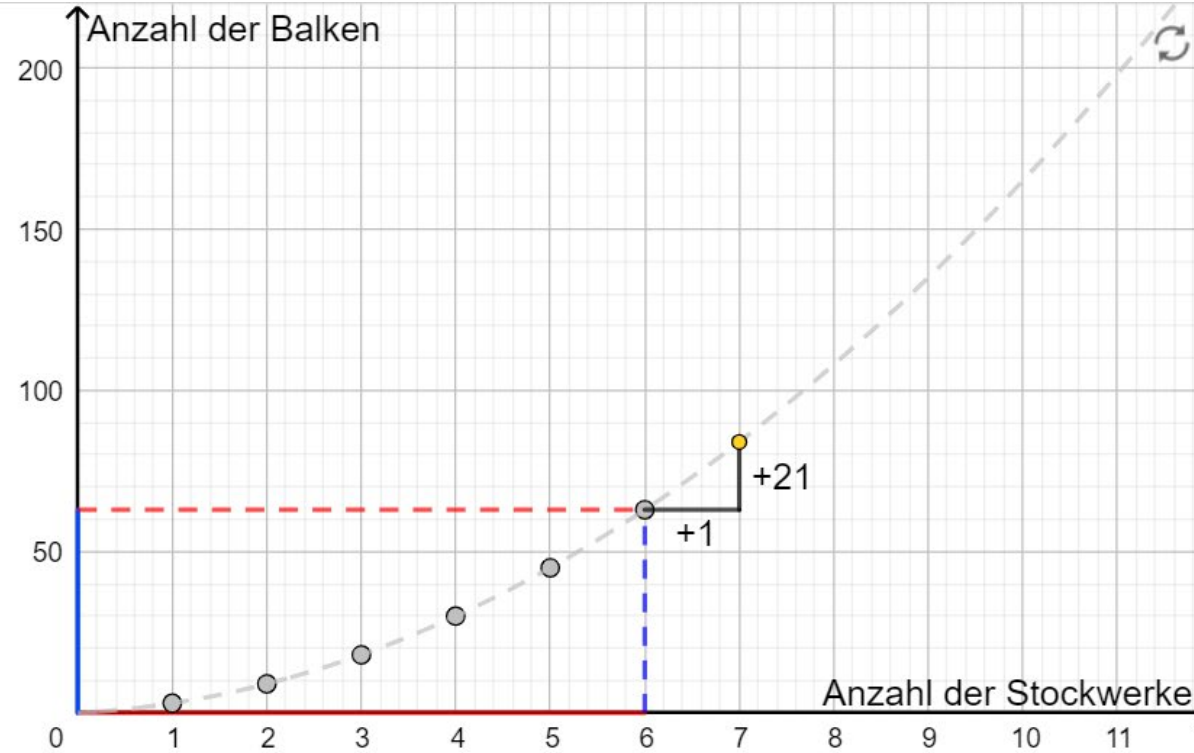
Digel, S. & Roth, J. (2021). [Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?!](#)

In K. Heil, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47–50). Münster: WTM Verlag.

Grundvorstellung
Kovariation



Stockwerke = 6

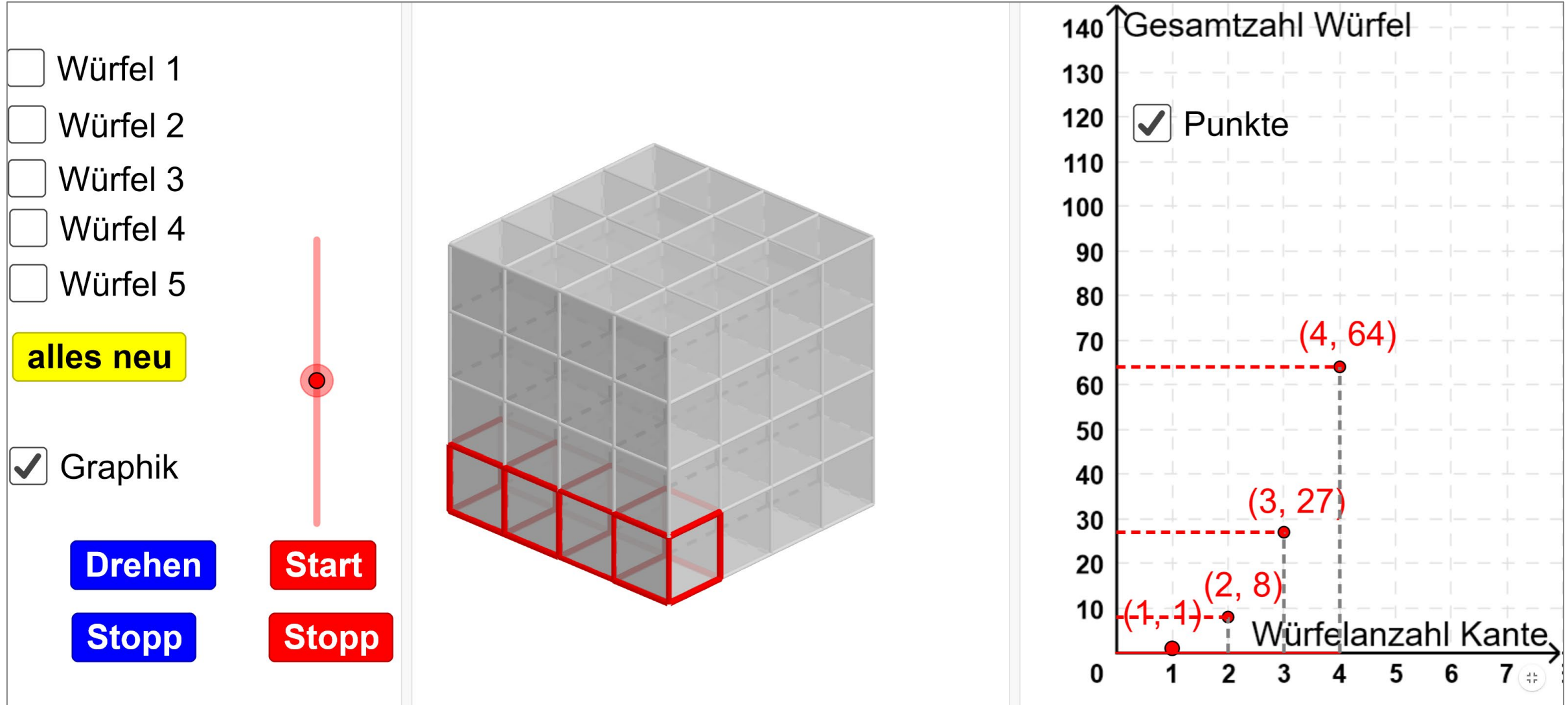


☒ Trendlinie

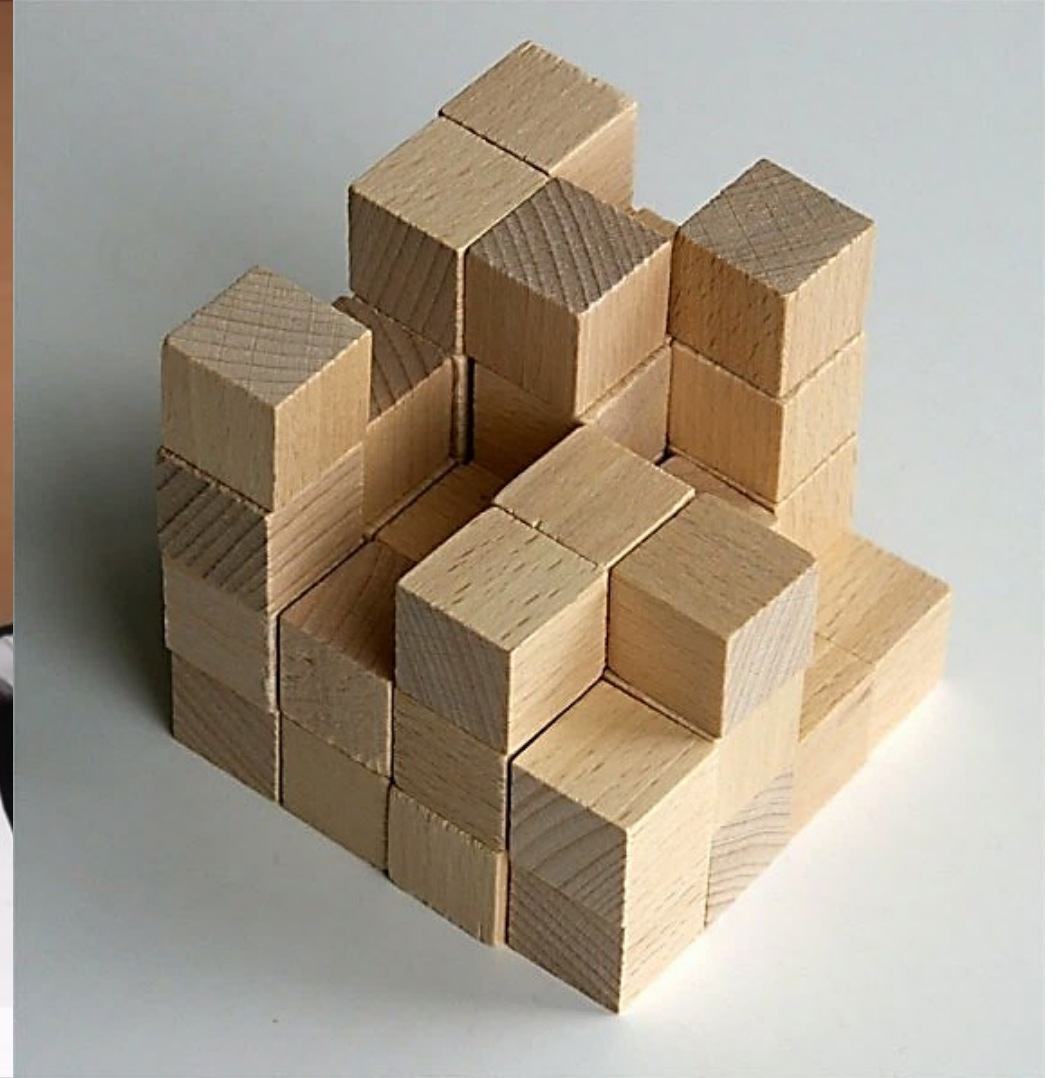
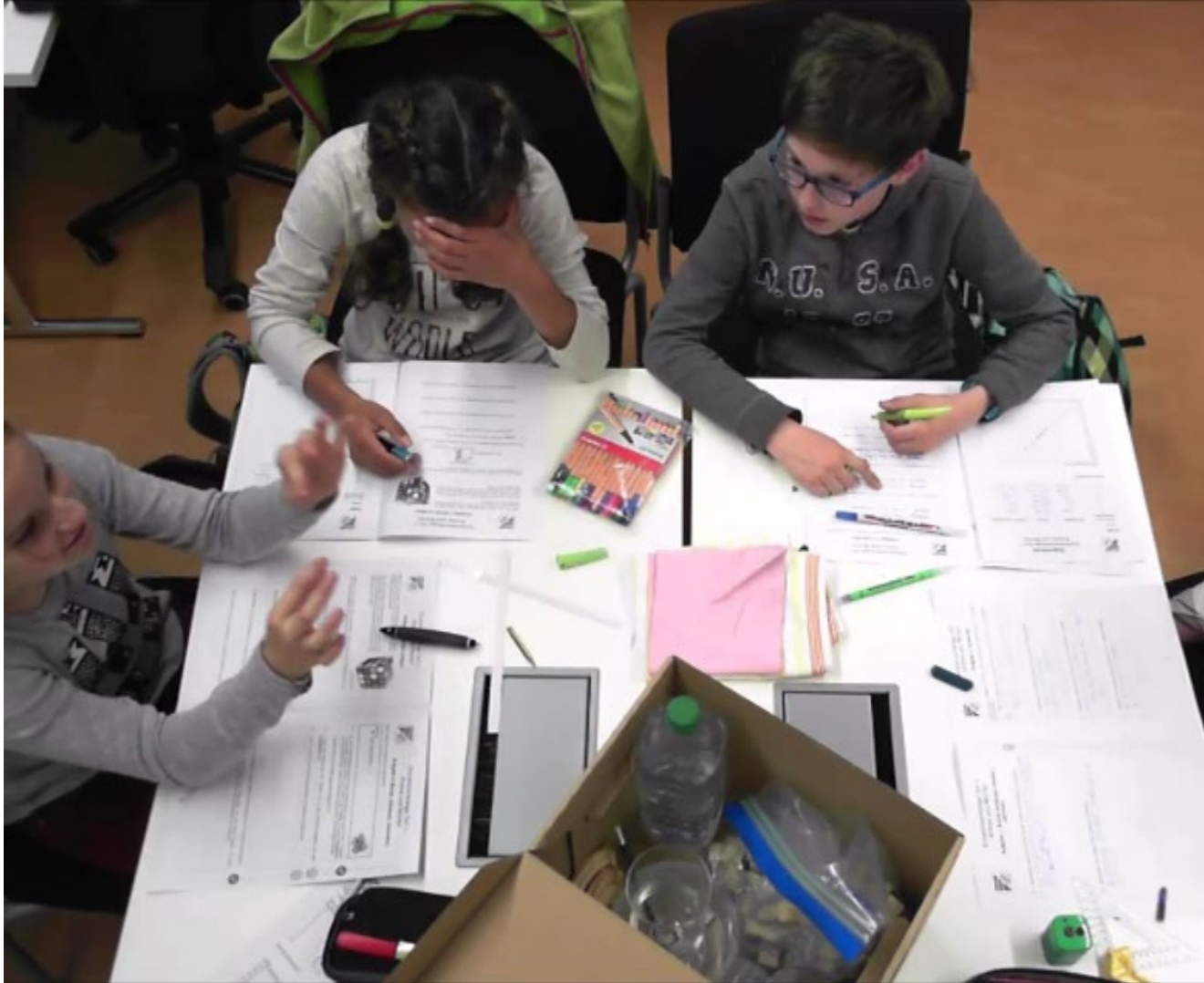
☒ Änderungsrate



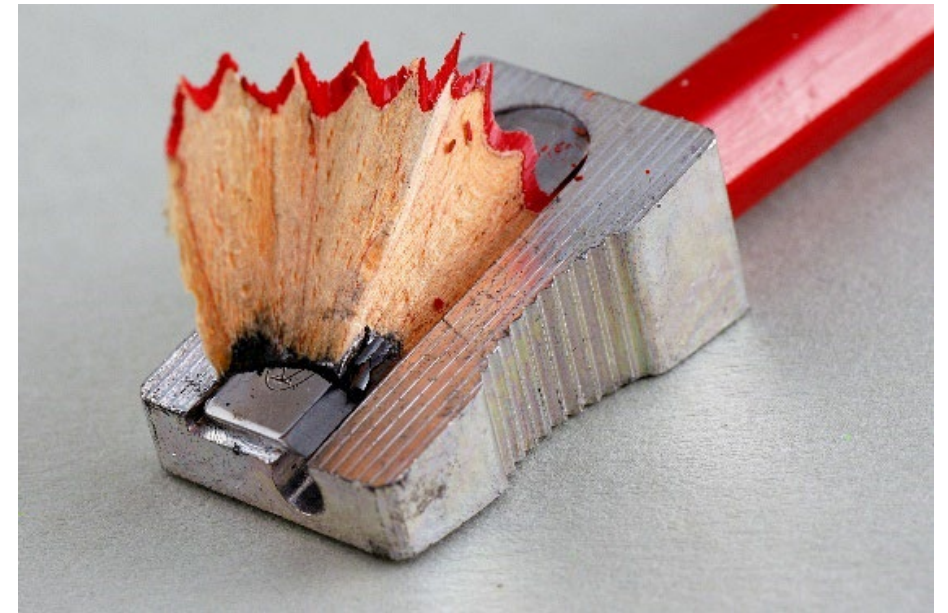
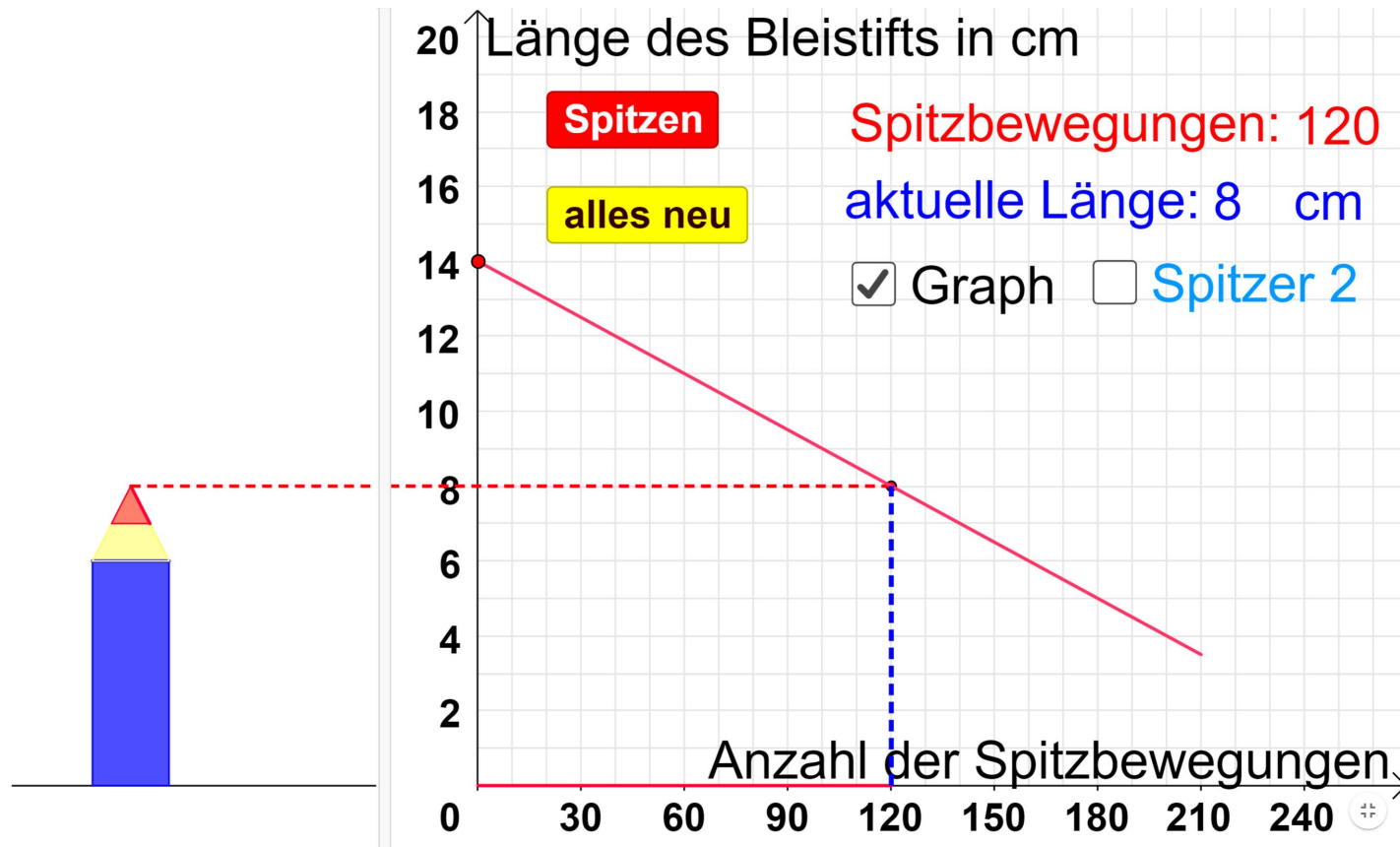
Würfelgebäude: Würfelzahl an einer Kante → Gesamtzahl benötigter Würfel



Würfelgebäude: Würfelzahl an einer Kante $\rightarrow$ Gesamtzahl benötigter Würfel



Spitzen: Spitzbewegungen → Bleistiftlänge



Kerze: Brenndauer → Länge

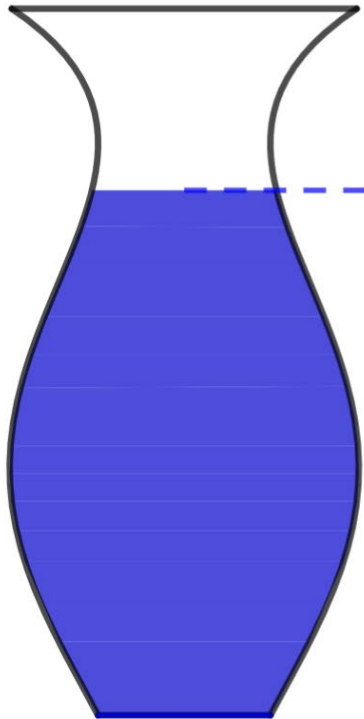
 <https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=40da6cdb-fa5e-42e1-9a07-ae0a00de8077> (Zeitraffer)
 <https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=9b04b701-a3dc-4ce0-a984-ae0a00dd6449> (Originallänge)



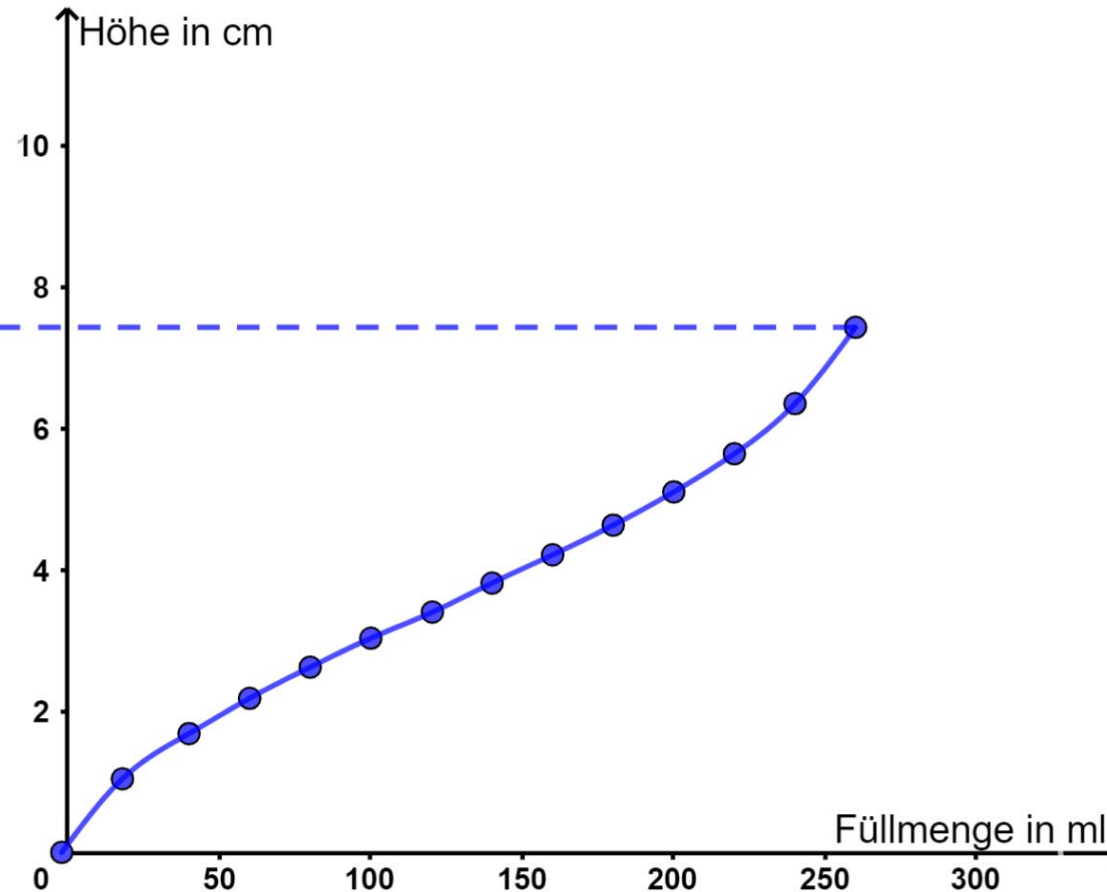
Gefäß: Füllmenge → Füllhöhe

Digel, S. & Roth, J. (2021). Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?! In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.

Füllmenge in ml: 260



+ 20 ml

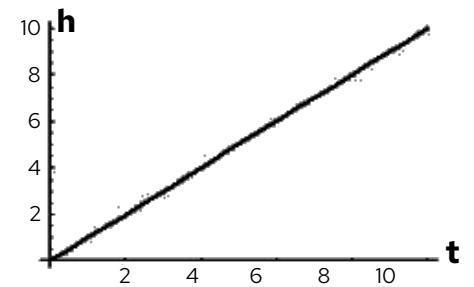
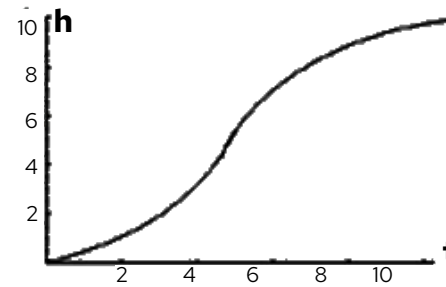
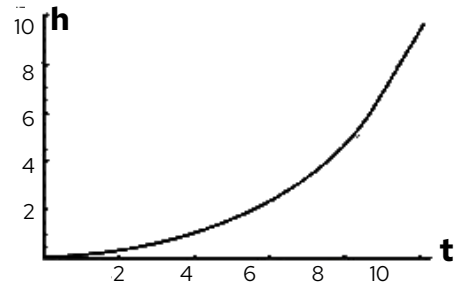
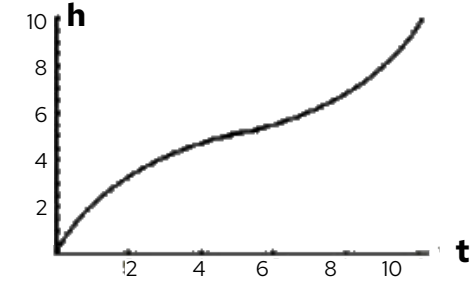
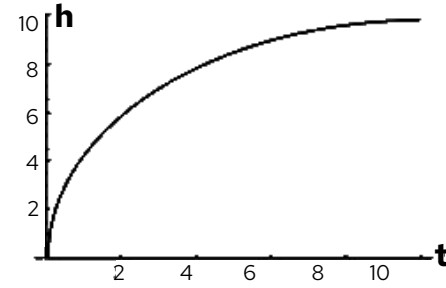
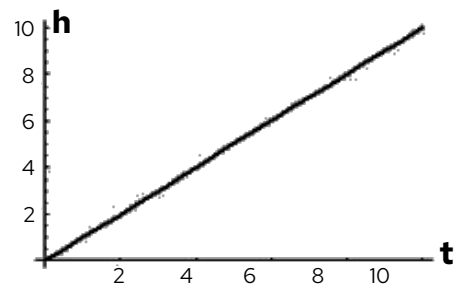


Gefäß leeren

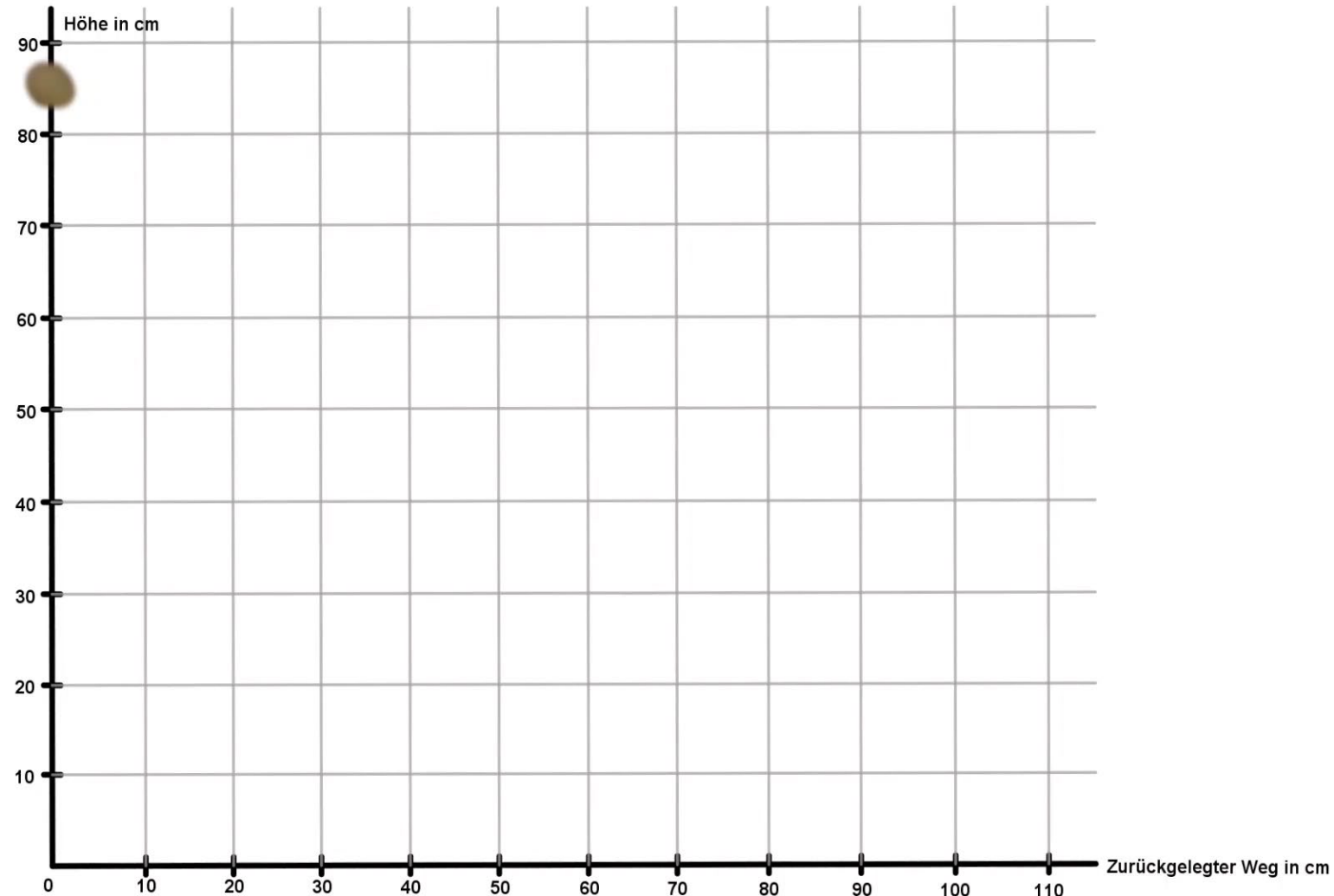


Grundvorstellung
Kovariation

Gefäß: Füllmenge $\rightarrow$ Füllhöhe



Springender Ball

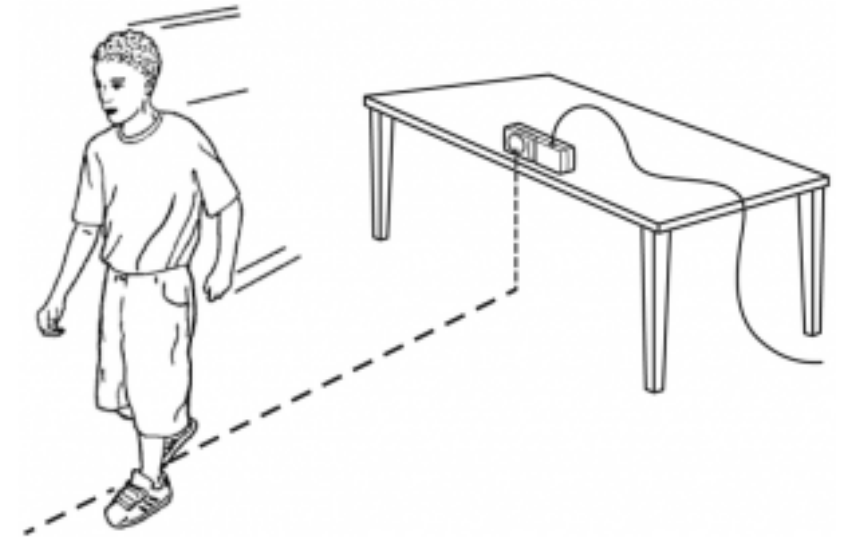
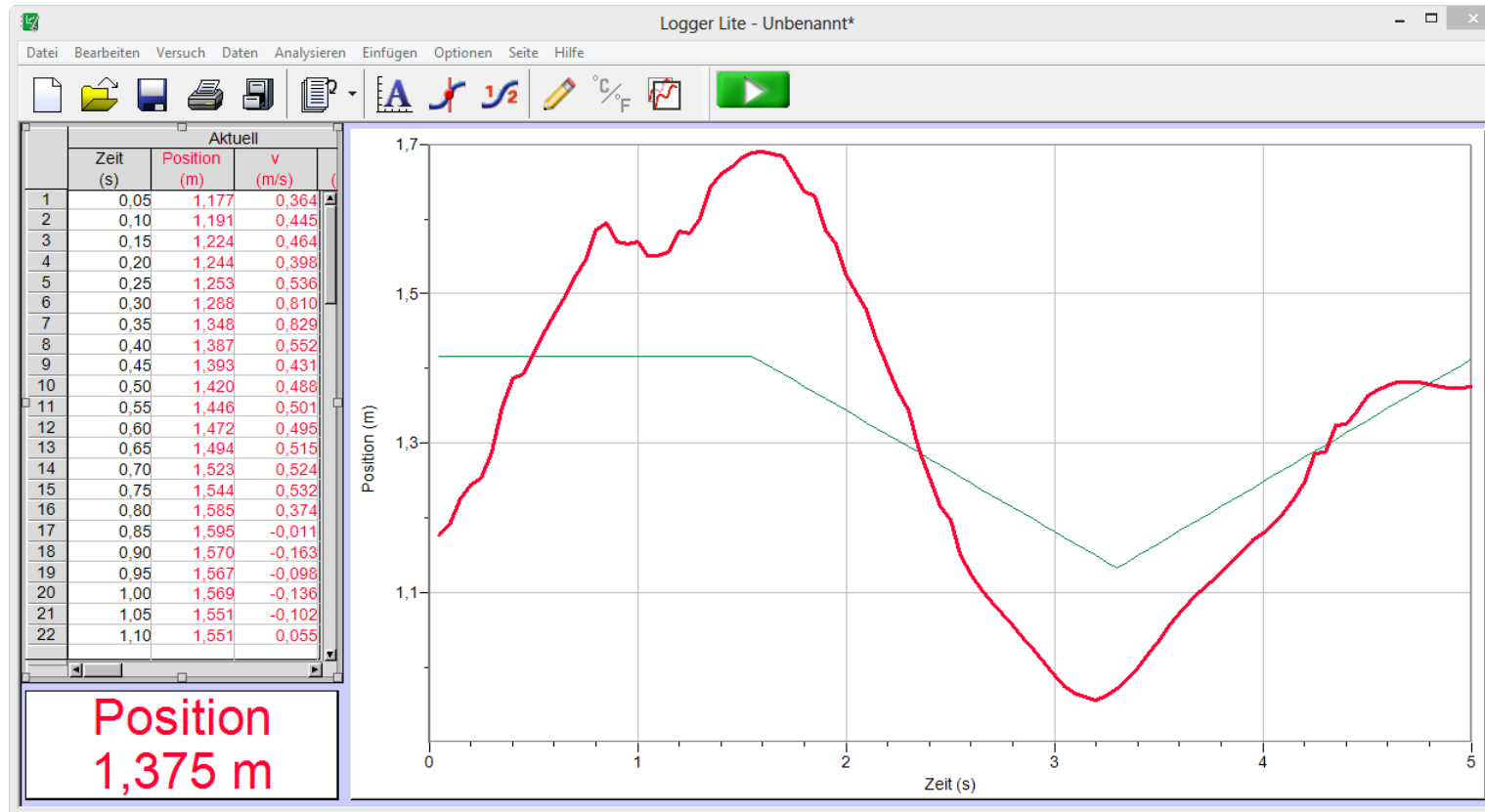


Engelhardt, A. & Ossadnik, H. (2021). Videoanalyse zur Modellierung von Bewegungen. *Mathematik lehren* 226, 36–39



Funktionsgraphen laufen

Barzel (2009): Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In: Leuders et al. (Hrsg.). *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, S. 6-17



Grundvorstellung
Kovariation



Umrechnungstabelle: Britische Pfund ↔ Euro

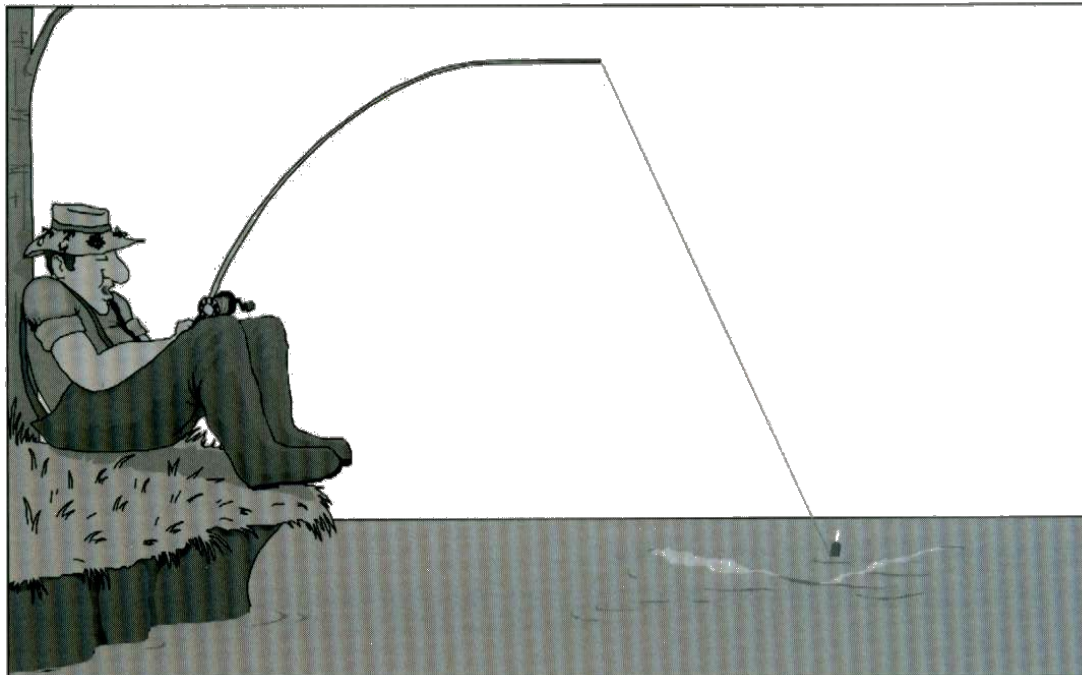
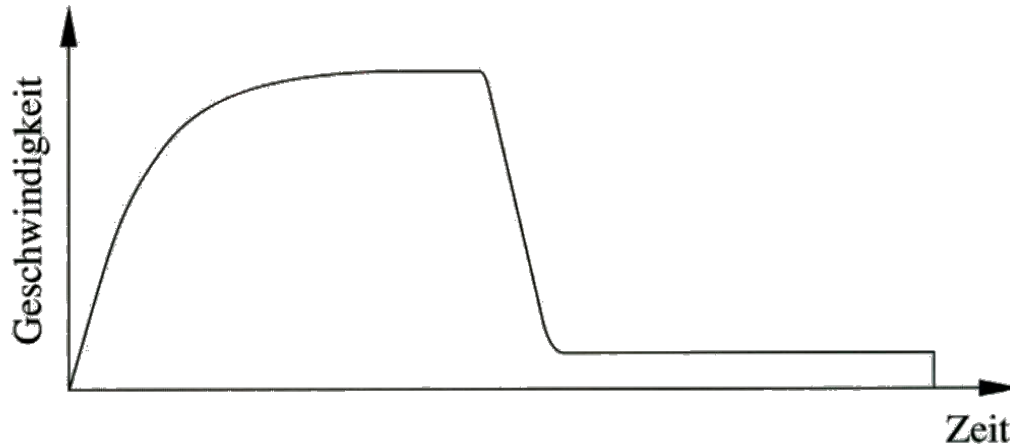
R
TU
P



Pfund	Euro	Pfund	Euro	Euro	Pfund	Euro	Pfund
1	1,17	21	24,61	1	0,85	21	17,92
2	2,34	22	25,78	2	1,71	22	18,77
3	3,52	24	28,12	3	2,56	24	20,48
4	4,69	26	30,47	4	3,41	26	22,19
5	5,86	28	32,81	5	4,27	28	23,89
6	7,03	30	35,15	6	5,12	30	35,15
7	8,20	35	41,01	7	5,97	35	29,87
8	9,37	40	46,87	8	6,83	40	34,14
9	10,55	45	52,73	9	7,68	45	38,40
10	11,72	50	58,59	10	8,53	50	42,67
11	12,89	55	64,45	11	9,39	55	46,94
12	14,06	60	70,31	12	10,24	60	51,20
13	15,23	70	82,03	13	11,09	70	59,74
14	16,41	80	93,74	14	11,95	80	68,27
15	17,58	90	105,46	15	12,80	90	76,80
16	18,75	100	117,18	16	13,65	100	85,34
17	19,92	150	175,77	17	14,51	150	128,01
18	21,09	200	234,36	18	15,36	200	170,68
19	22,26	250	292,95	19	16,21	250	213,35
20	23,44	300	351,54	20	17,07	300	256,10



Welche Sportart?



Aufgabe

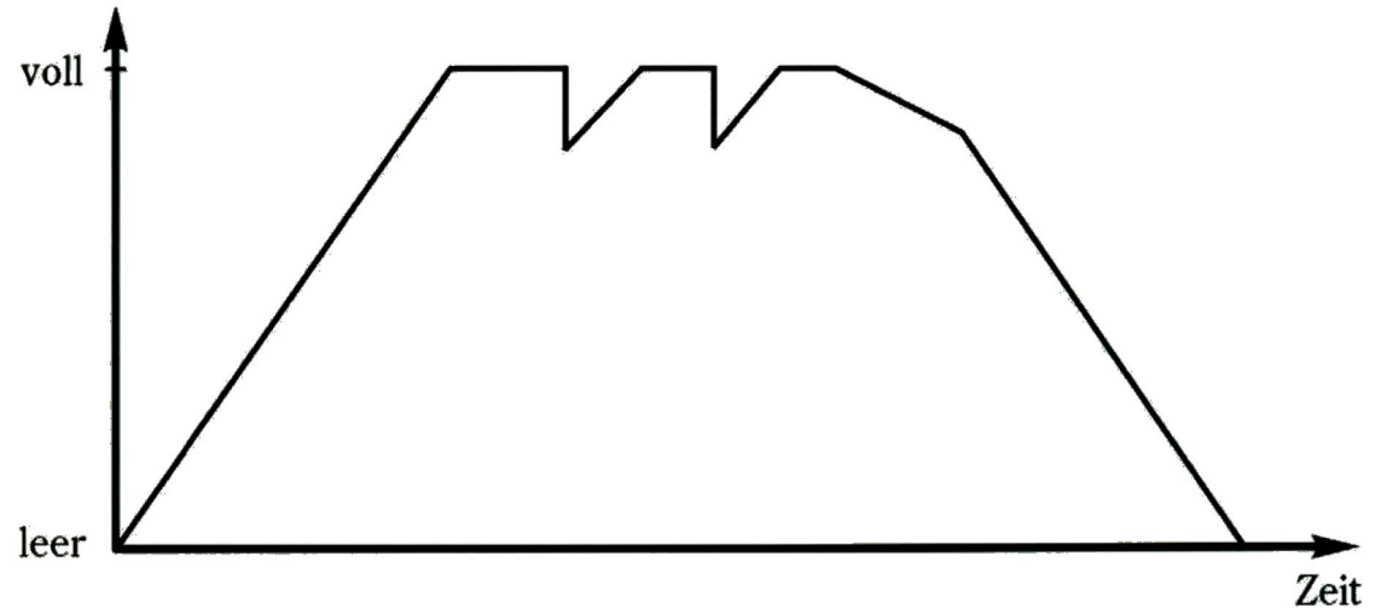
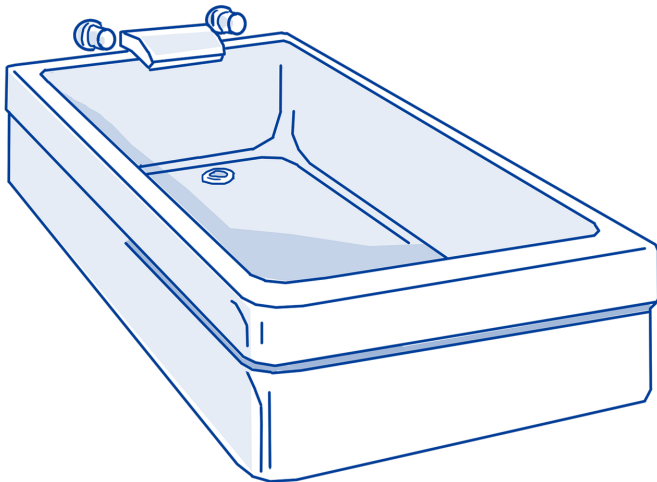
Welche Sportart passt am besten zu dem Graphen?

- Angeln
- Stabhochsprung
- 100-m-Lauf
- Fallschirmspringen
- Golf
- Speerwerfen
- Hochsprung
- Turmspringen
- Drag Racing 🌐
- Wasserski

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

Aufgabe

- Denkt euch eine Geschichte aus, die gut zum abgebildeten Funktionsgraph passt.
- Begründet, warum eure Geschichte zum Graph passt.



Zwei Herren in der Badewanne (Loriot 1978)



Graphing Stories

Fifteen seconds at a time

ABOUT US

Graphs: [Show all](#) Subject: [Show all](#) License: [CC-BY](#)

How this works:

- 1 Pass out **this handout** to your students
- 2 Play any of these videos
- 3 Have them graph the story



Time
Mariah Thompson
linear, increasing, clock



Height of Waist Off Ground
Adam Poetzel
linear, piecewise, increasing, decreasing, constant, playground, slide



Bum Height off Ground
Carey Lehner
decreasing, carnival, slide

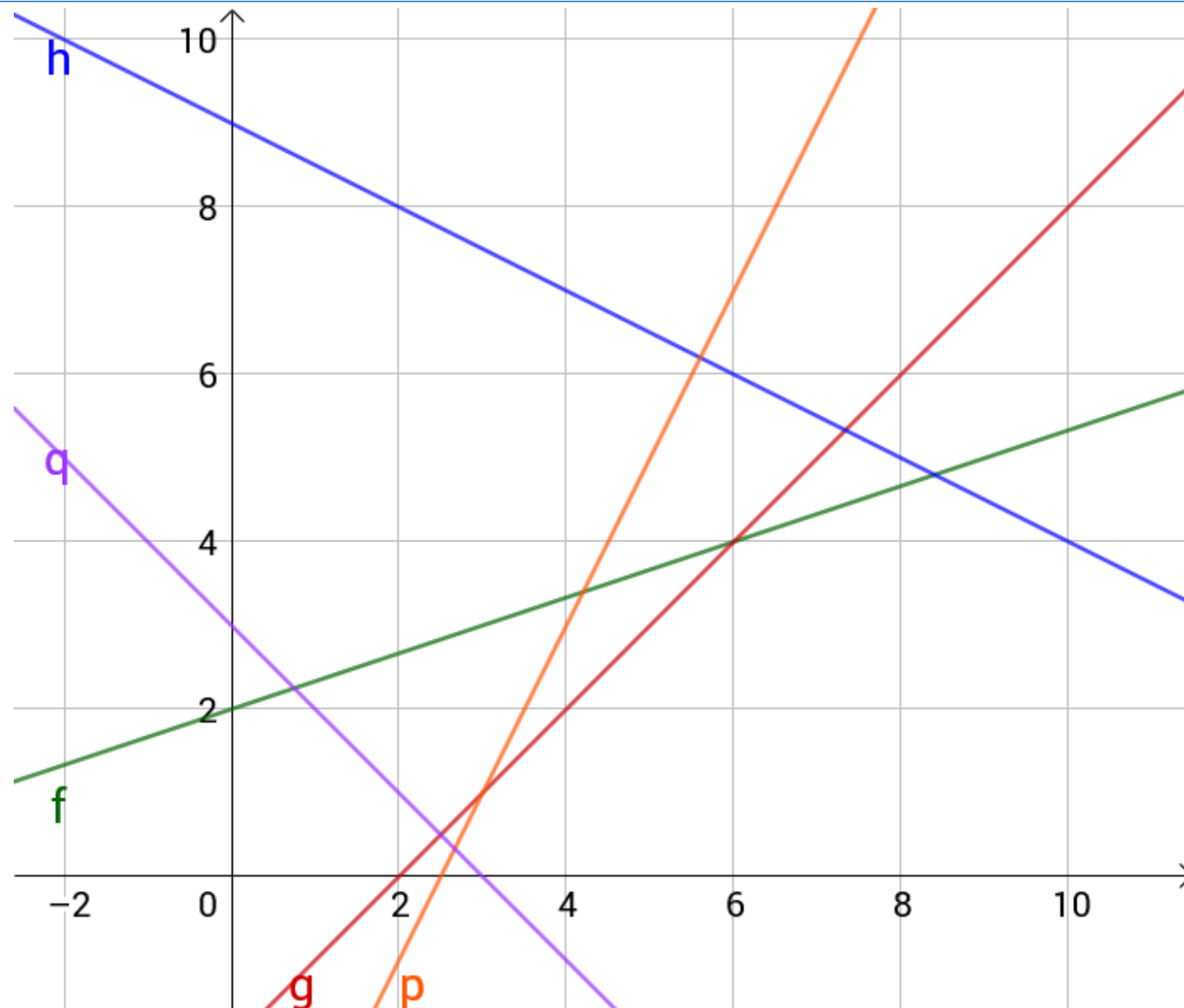


Distance from Bench
Kenneth Lawler
increasing, decreasing, periodic, sports, weights



Air Pressure
Paul Reimer
increasing, constant, linear, sports, ball



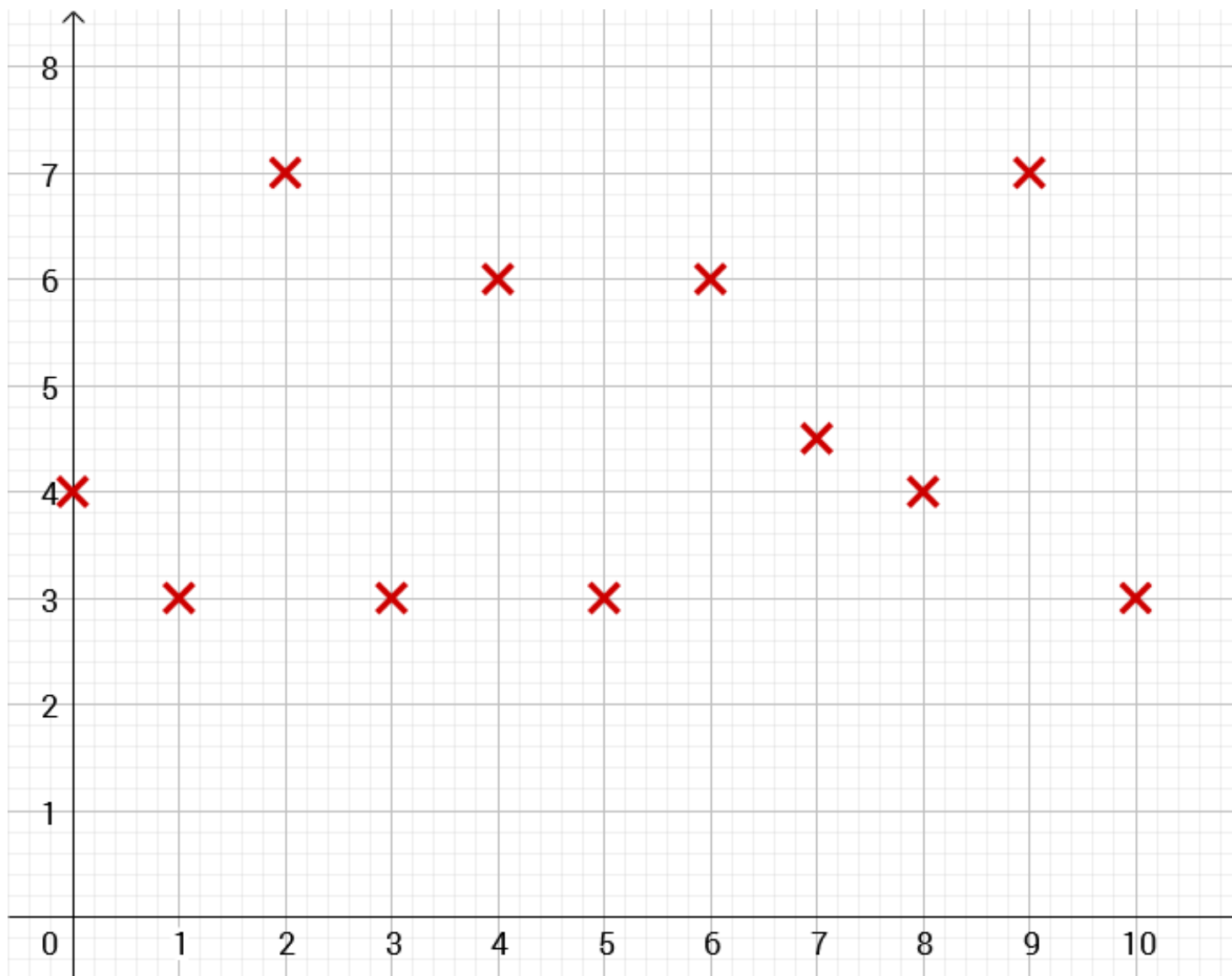


Wie lauten die zugehörigen Funktionsgleichungen?

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes



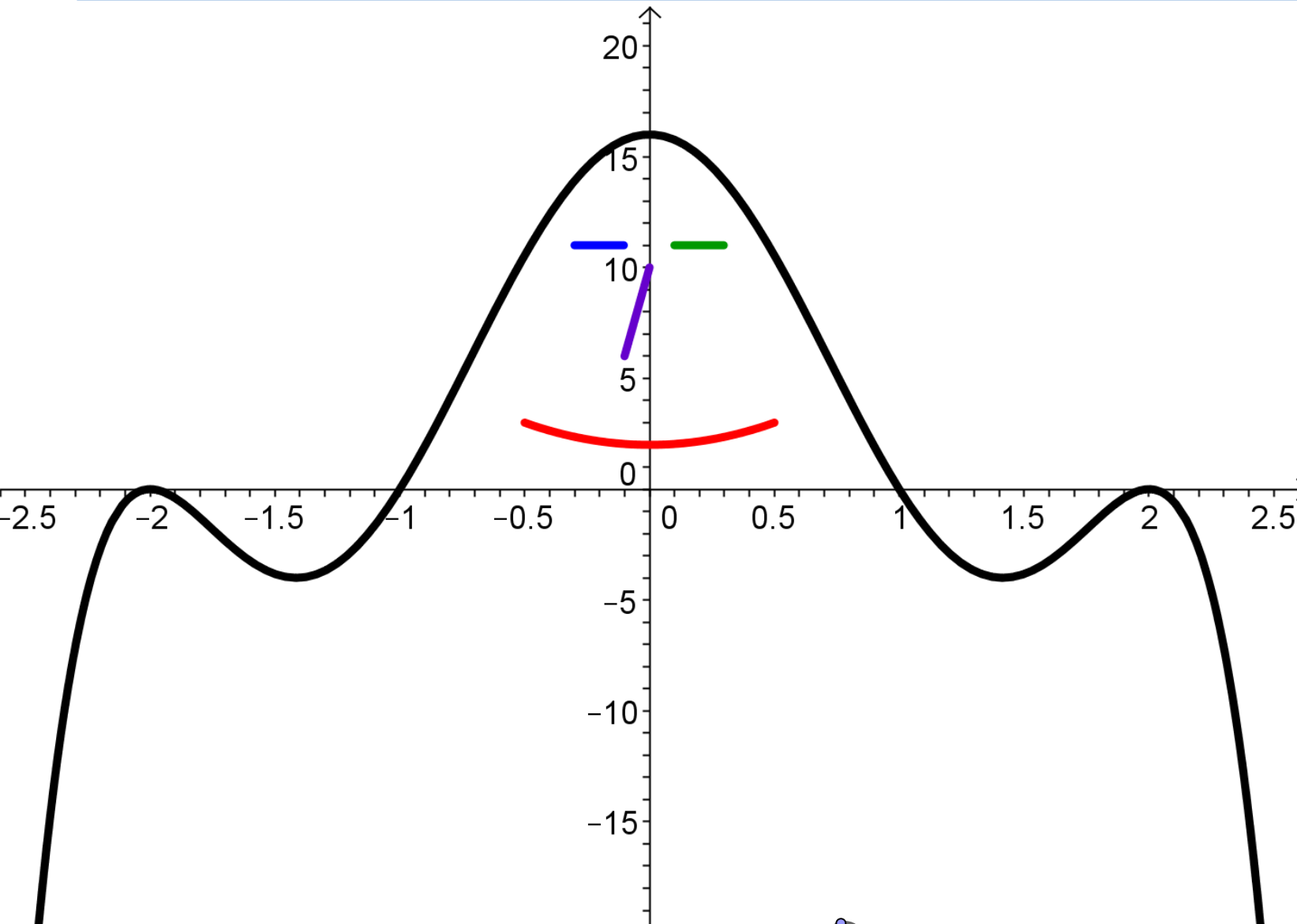
Punkteintopf



Versuche alle Punkte mit so wenig Geraden wie möglich treffen.



Mit Graphen Bilder malen

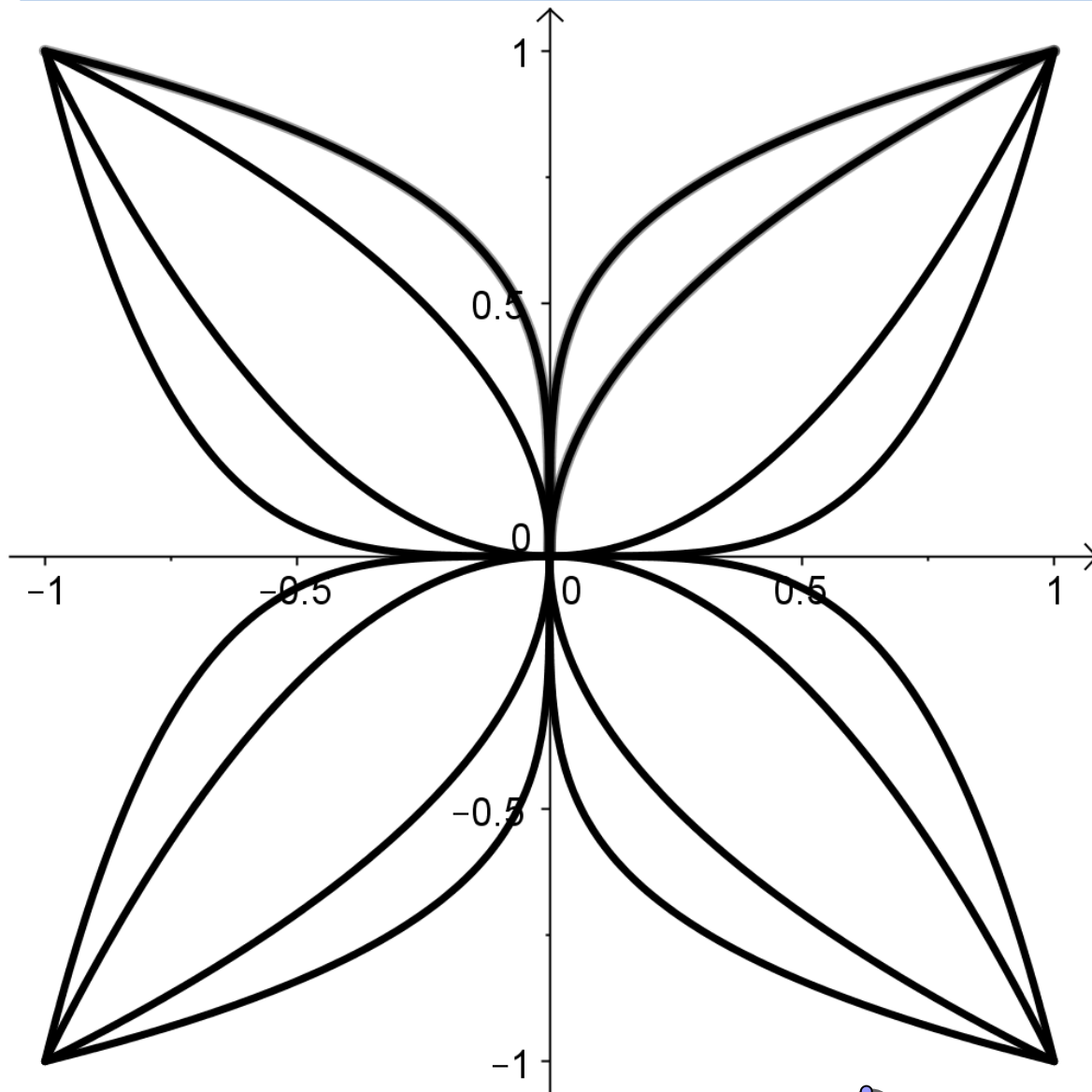


Versuche das Gespenst nachzuzeichnen, indem du Funktionsterme in die Eingabezeile schreibst.

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes



Mit Graphen Bilder malen

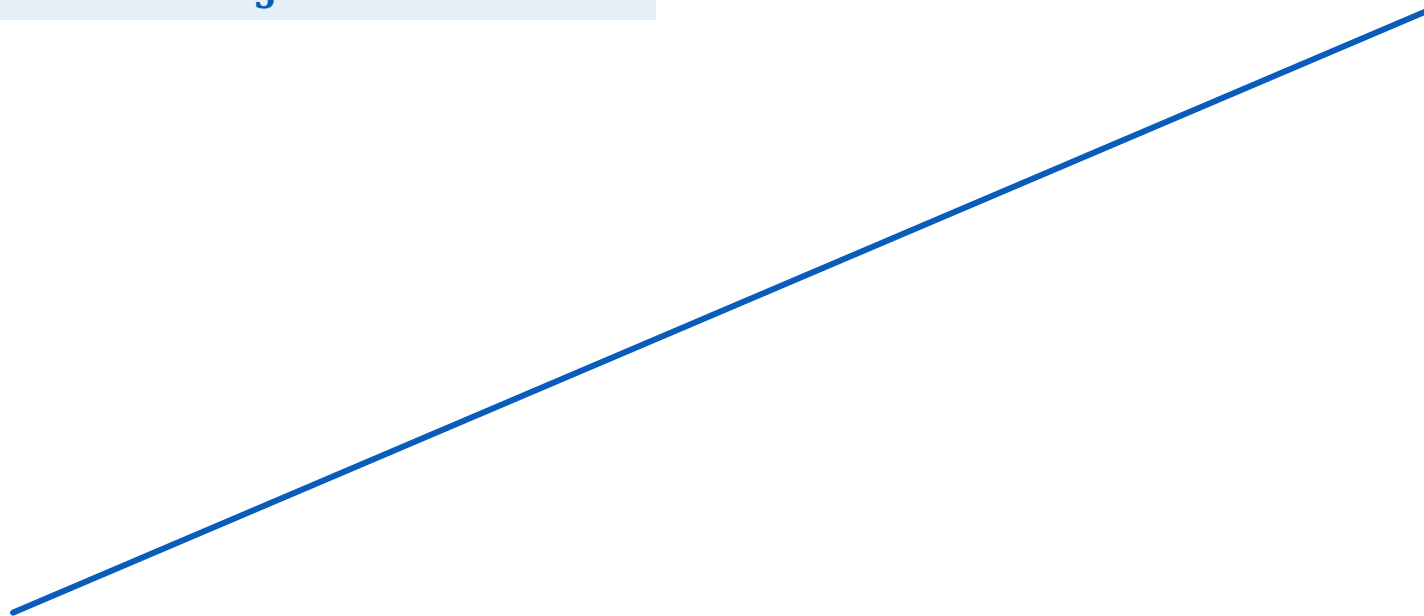


Versuche die Blüte
nachzuzeichnen, indem
du Funktionsterme in die
Eingabezeile schreibst.

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

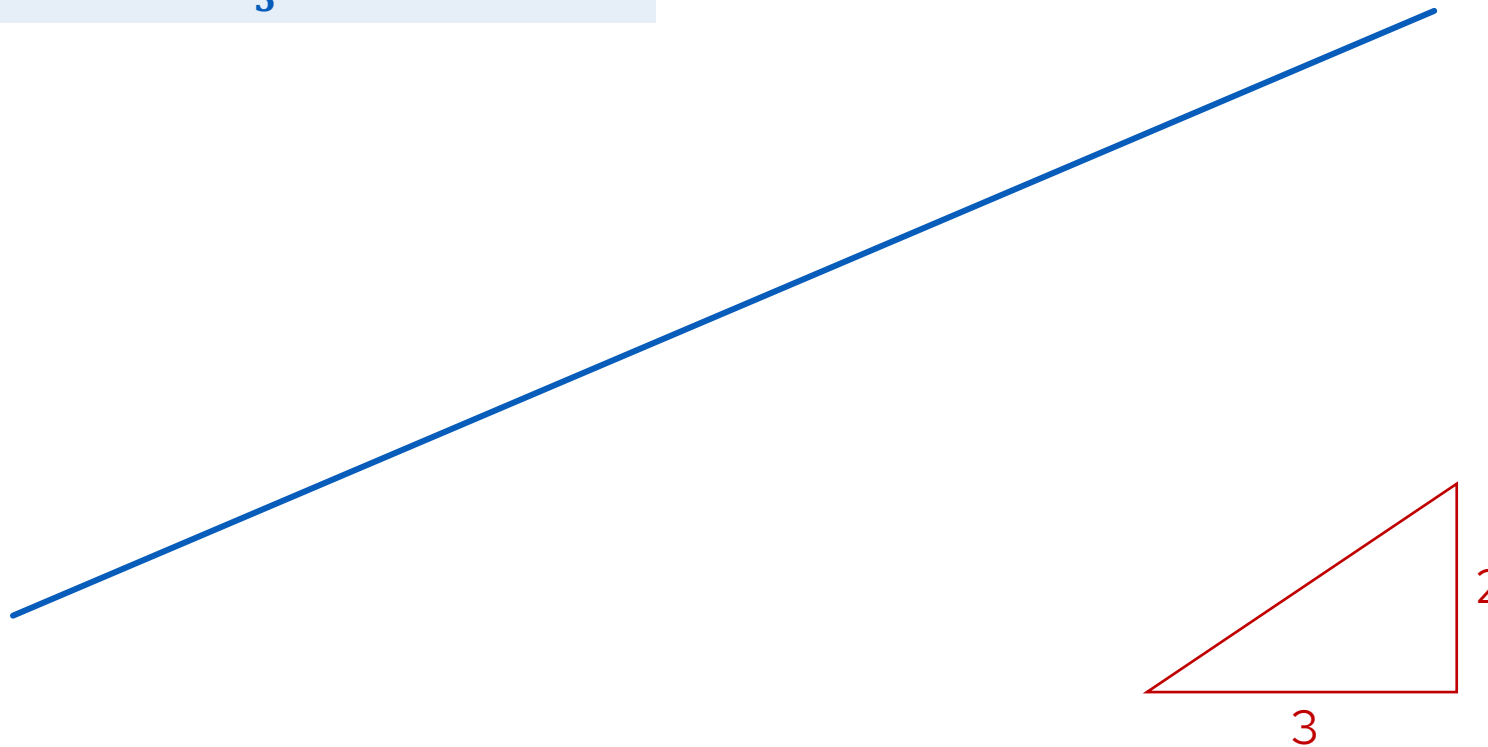
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



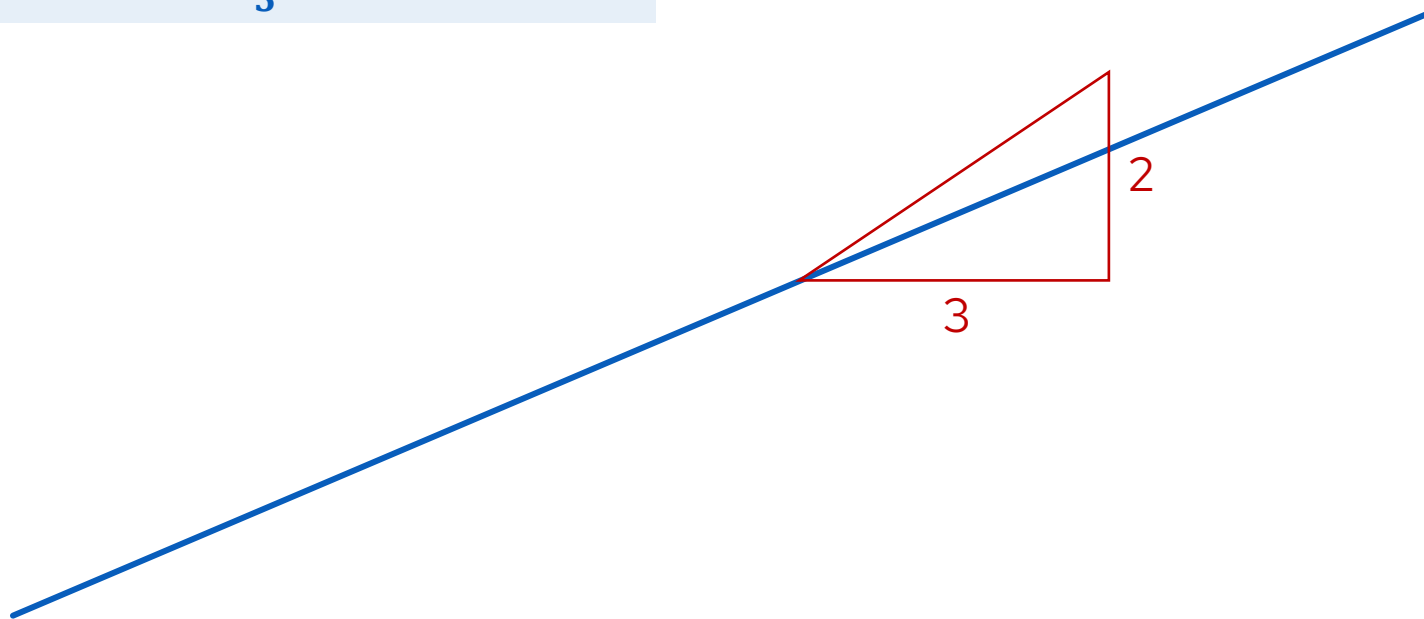
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



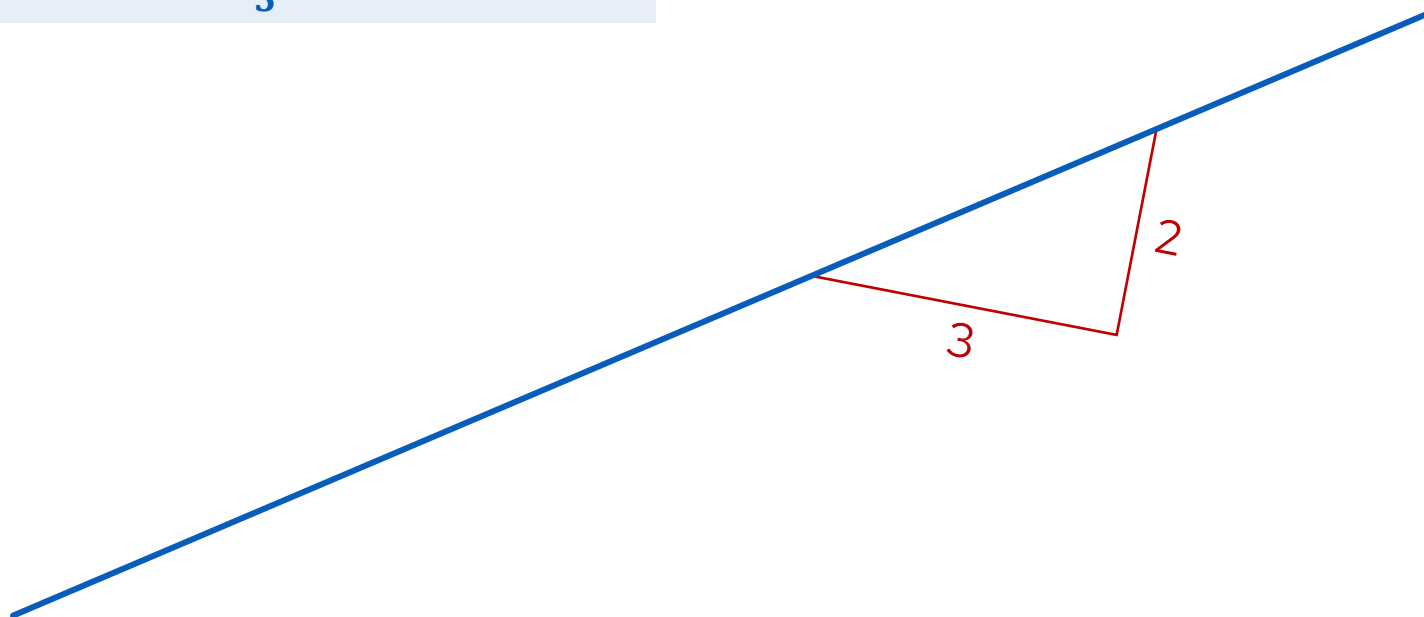
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



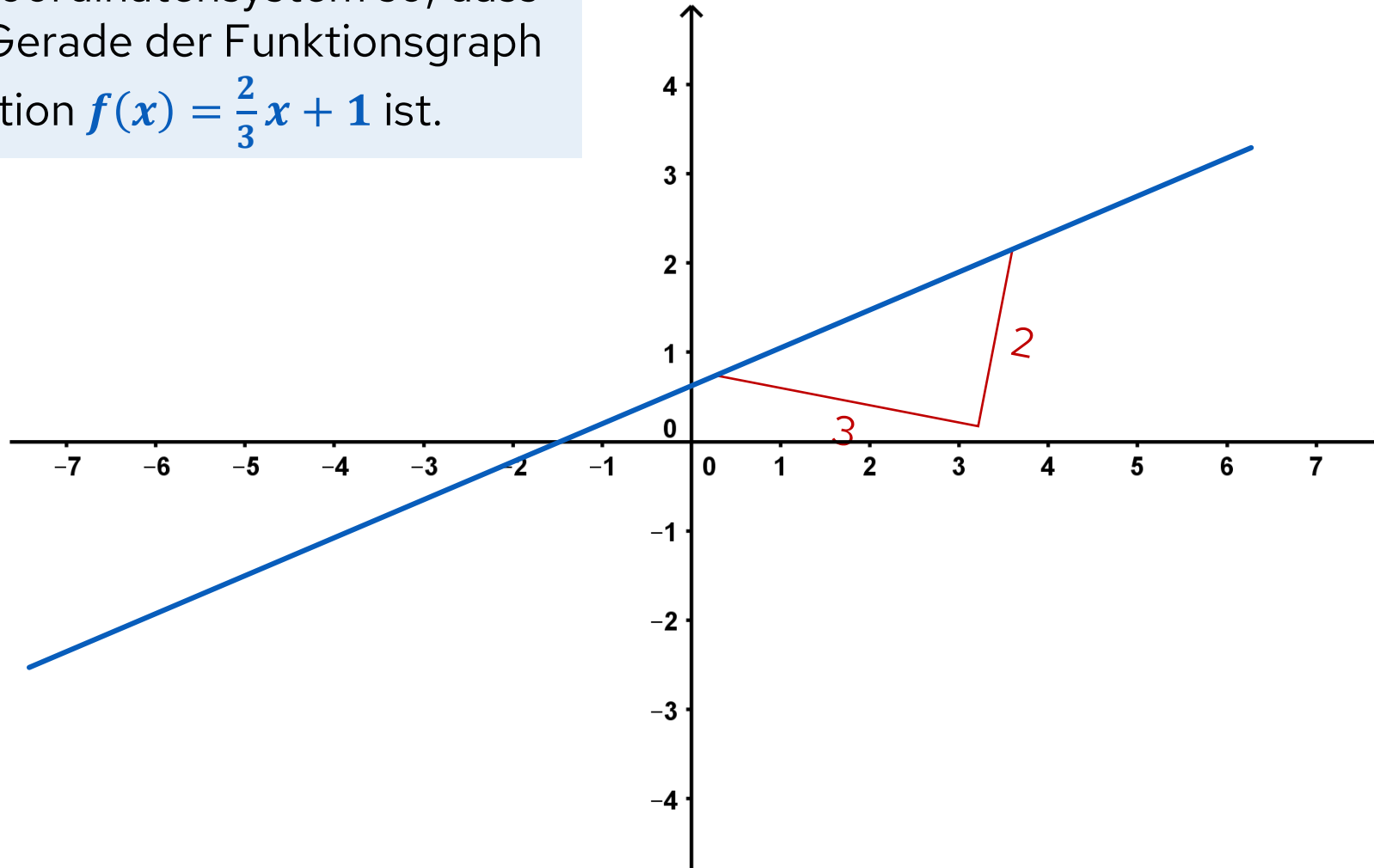
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



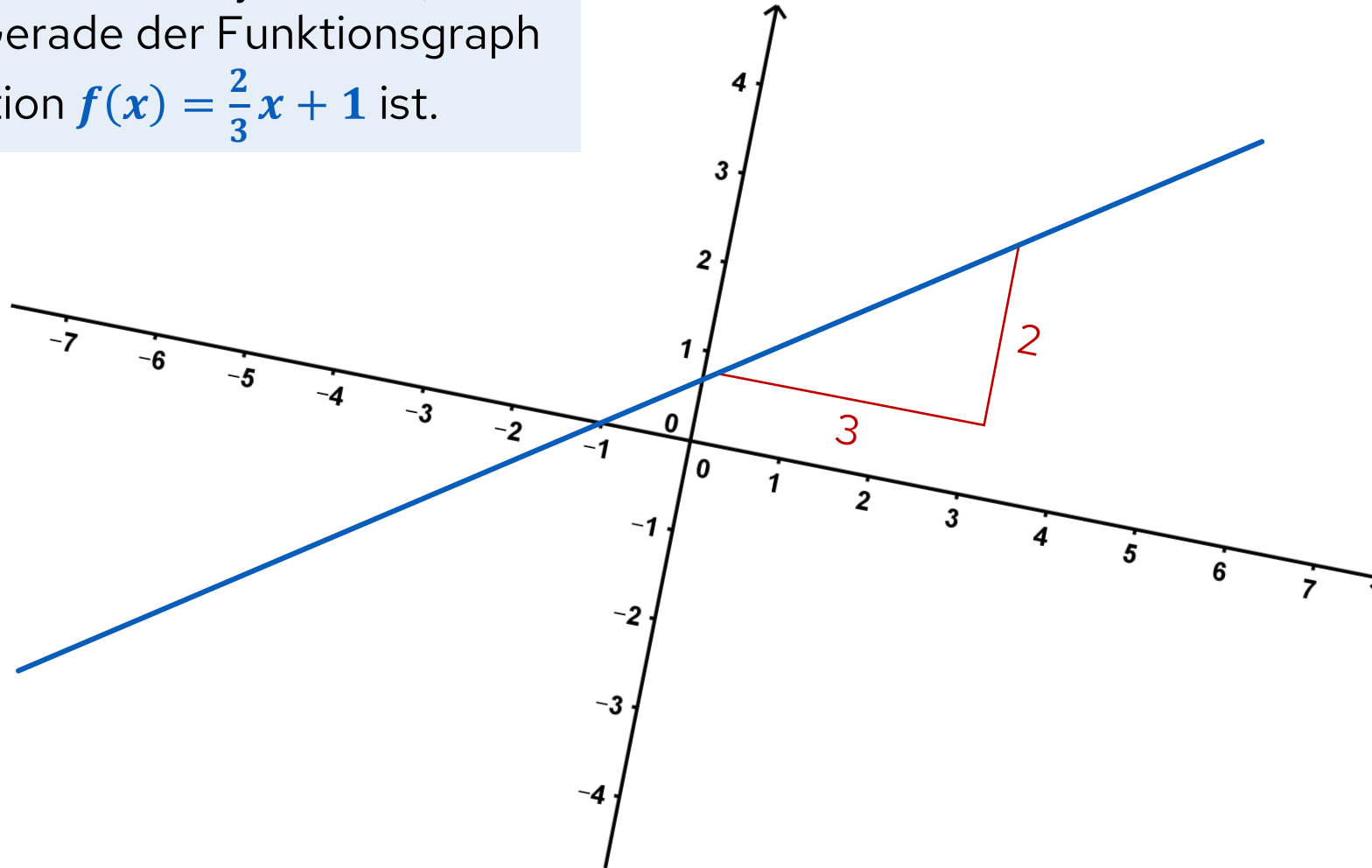
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



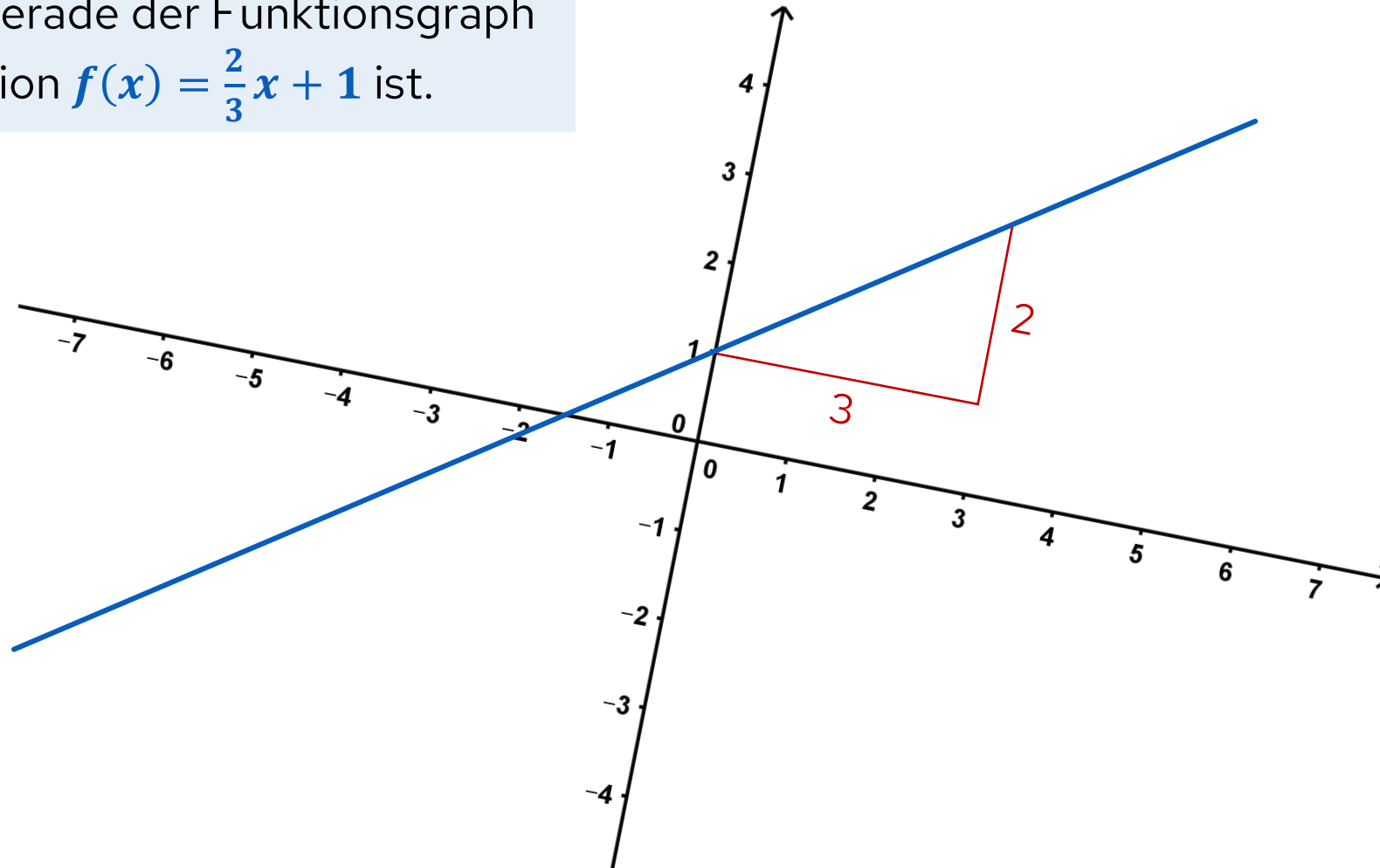
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



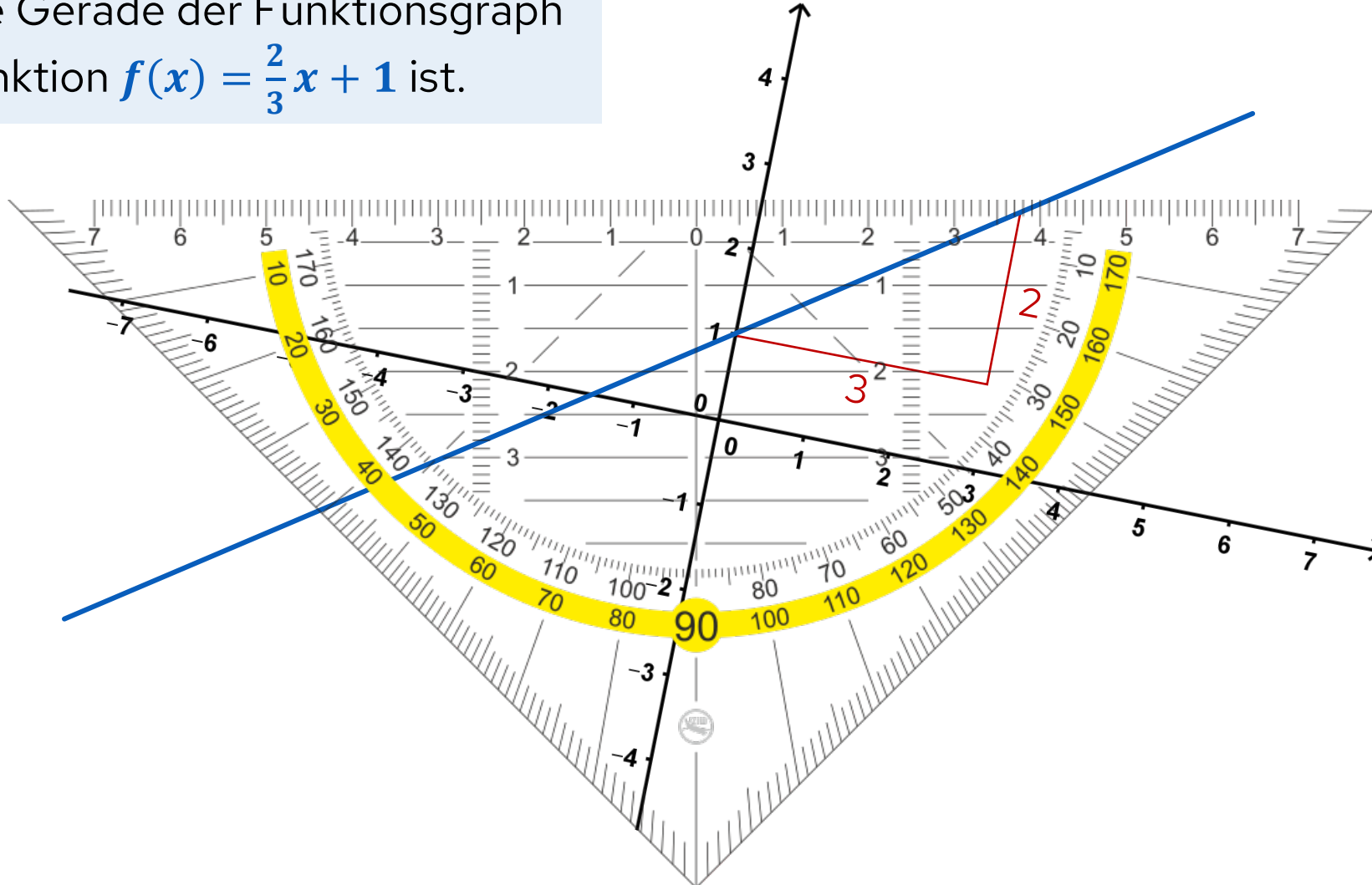
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



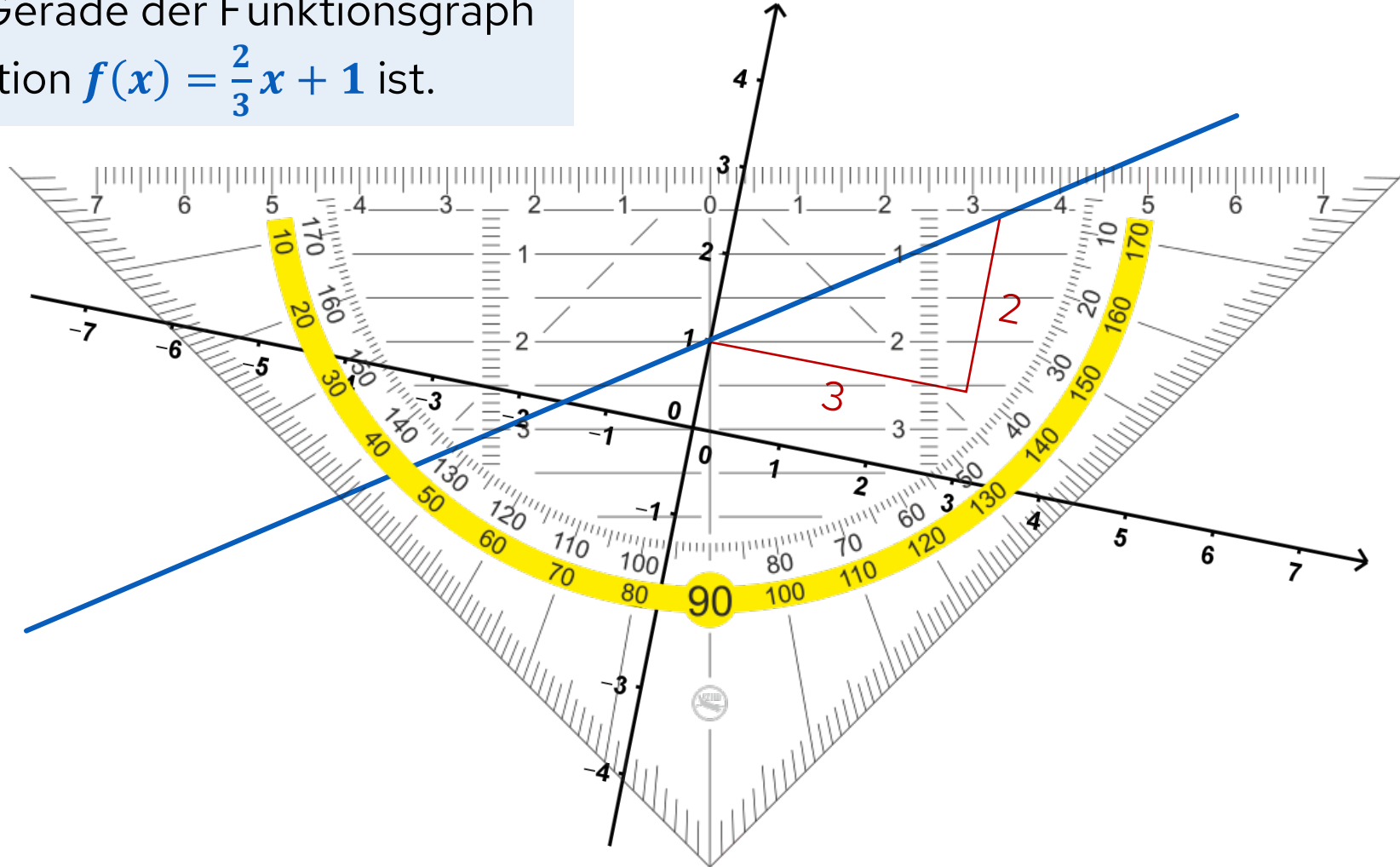
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

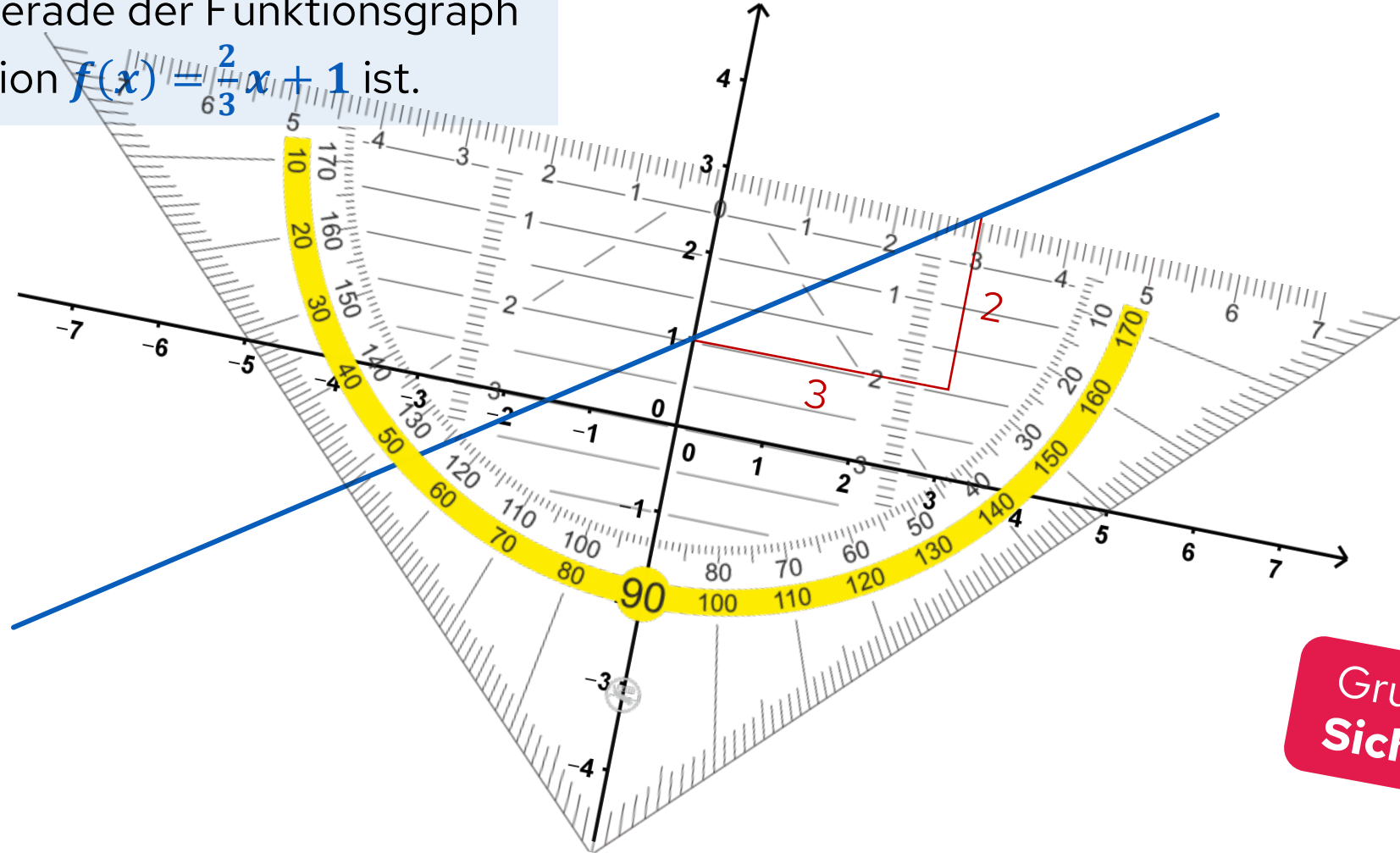
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

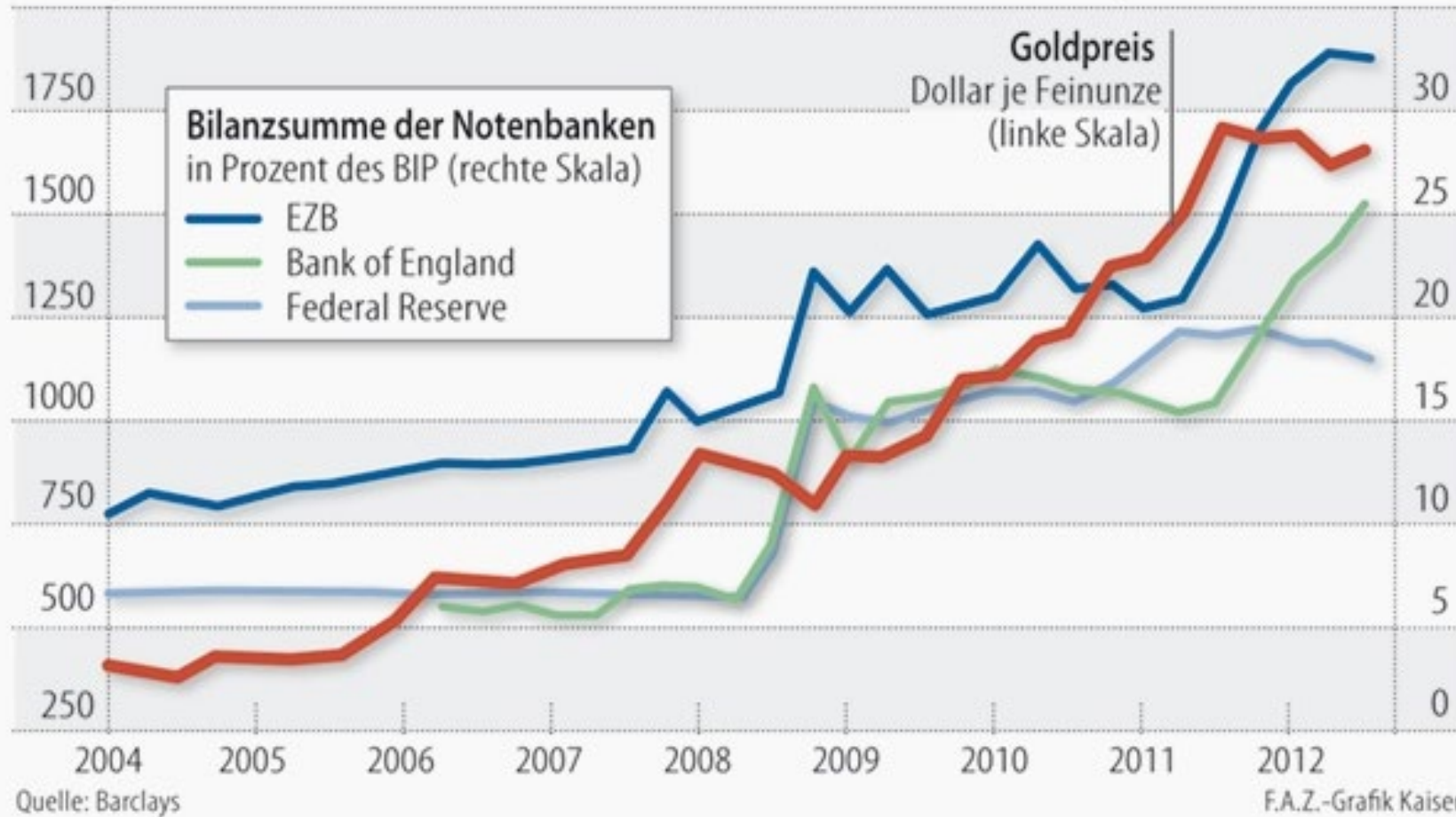
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 1 \text{ ist.}$$



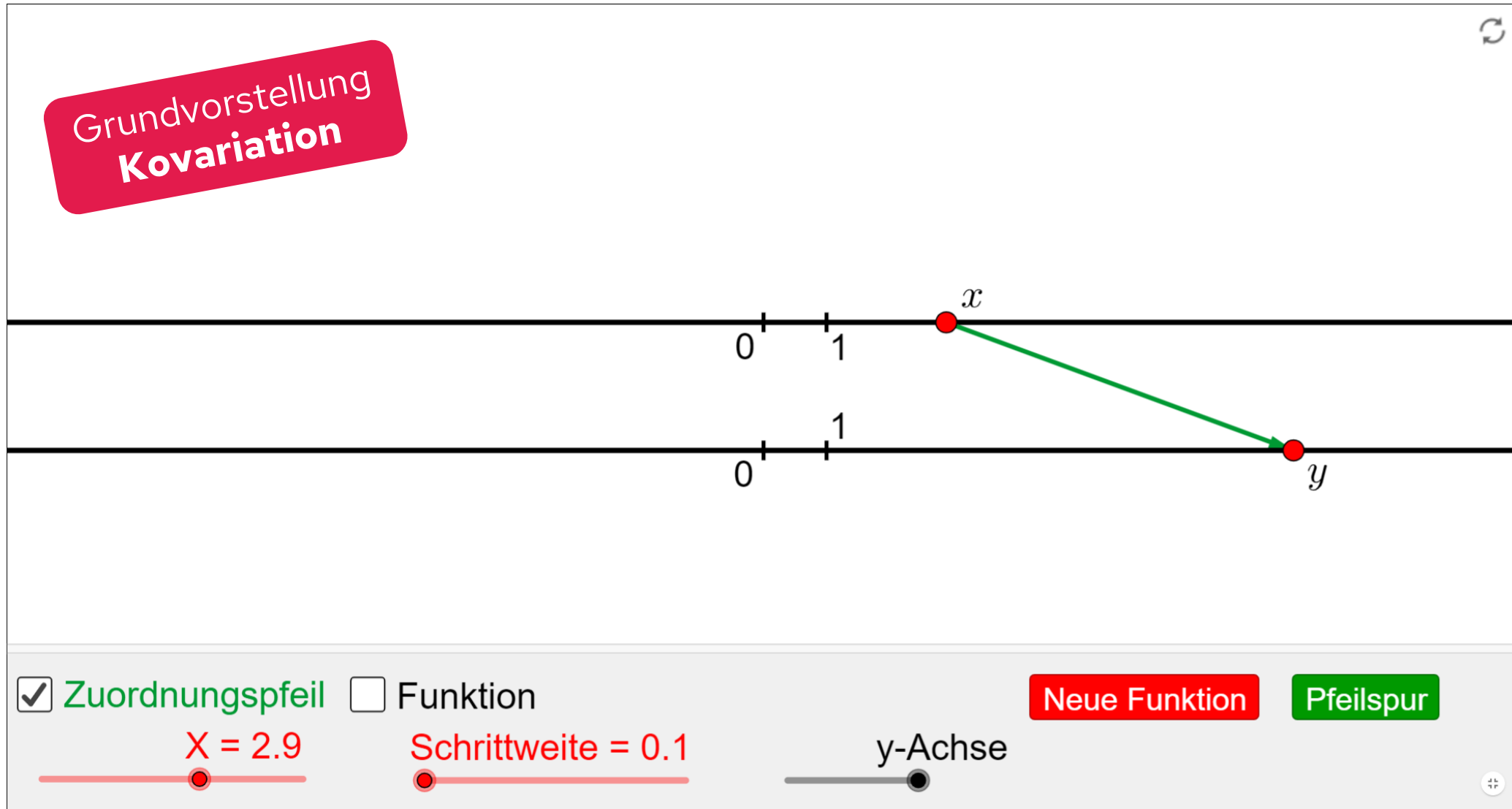
Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

Goldpreis und Bilanzsumme der Notenbanken laufen parallel



- a) In welchem Jahr betrug der Goldpreis 750 Dollar je Feinunze?
- b) Wie viele Jahre brauchte Gold ungefähr, um von 500 Dollar je Feinunze auf den dreifachen Wert zu steigen?

Dynagraph und Funktionsgraph

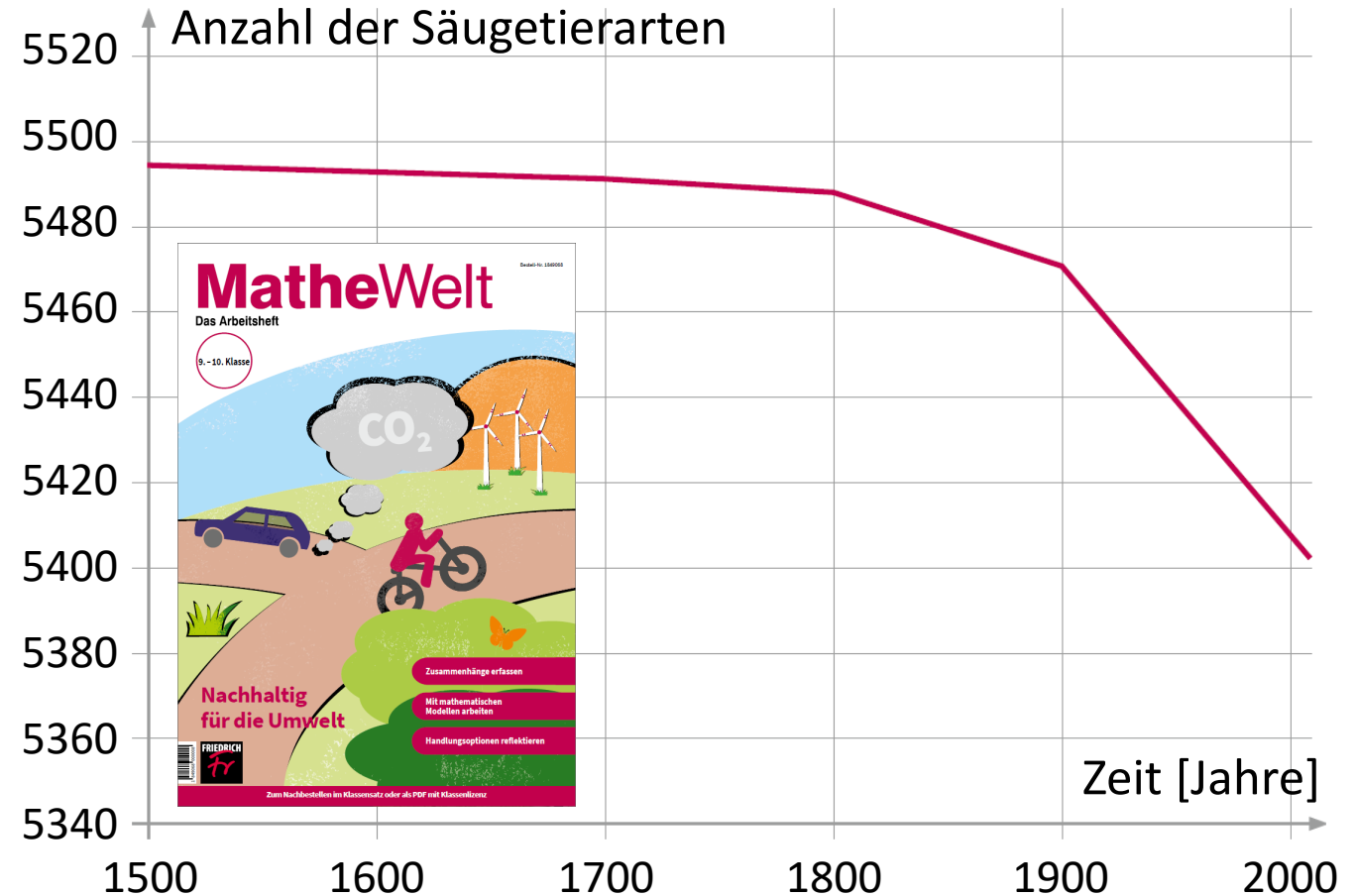


Artensterben: Mit dem Begriff „Artensterben“ bezeichnet man das Aussterben ganzer Arten von Lebewesen. Der Naturschutzverbund WWF sieht die aktuelle Entwicklung auf unserem Planeten als das größte Artensterben seit dem Ende der Dinosaurierzeit vor 65 Mio. Jahren. Geschätzt leben derzeit ca. 8,7 Mio. Arten auf der Erde, davon 6,5 Mio. an Land. Jedes Jahr werden Tausende neue Arten entdeckt – zeitgleich sterben zwischen 10 000 und 60 000 Arten für immer aus. Obwohl bisher nur knapp 10 % aller Arten bekannt sind, verlieren wir einen Großteil davon bereits wieder rapide. Allein durch die Abholzung des tropischen Regenwaldes sterben täglich etwa 100 Arten aus. Das Diagramm stellt die Anzahl der Säugetierarten für den Zeitraum von 1500 bis 2010 dar.

<https://fr-vlg.de/wwfartensterben> • <https://fr-vlg.de/artenaufdererde> • <https://fr-vlg.de/abenteuerregenwald>

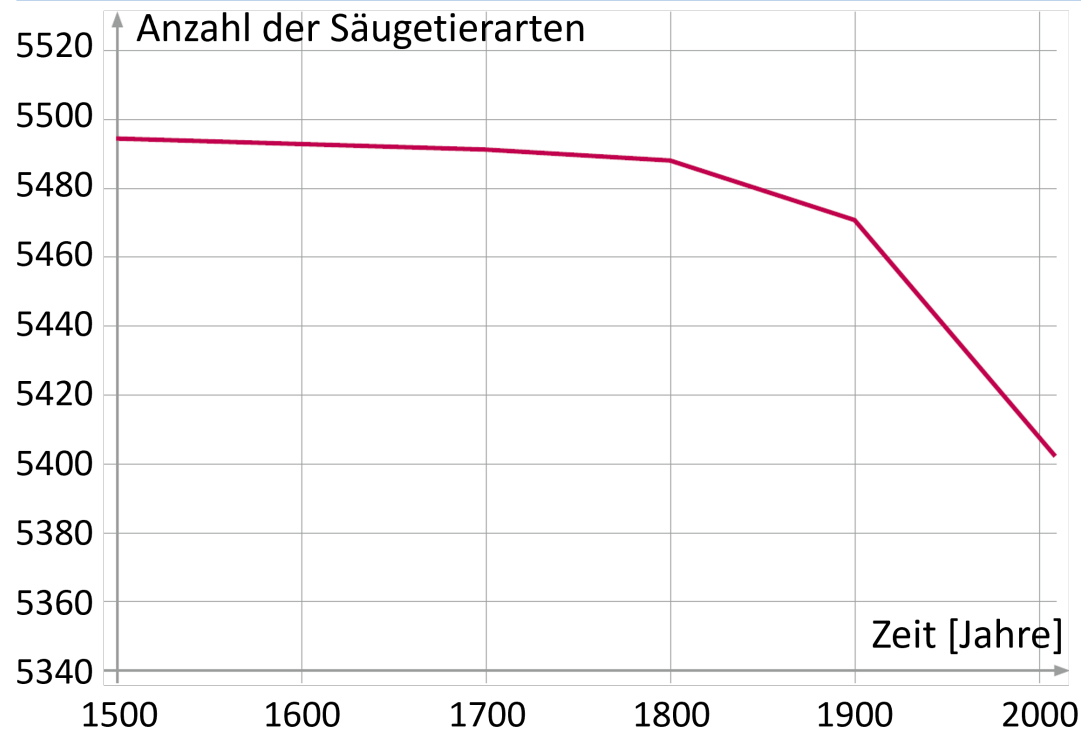
Staudte, J. (2017): Artensterben in Variablen gepresst. In: Hoffmann, R. u. a. (Hrsg.): Movum – Briefe zur Transformation. Biodiversität 4, S. 7.

Ceballos, G. u. a. (2015): Accelerated modern human-induced species losses: Entering the sixth mass extinction. Science Advances 1 (5).



Aufgabe 1: Formuliere Fragen, die du mithilfe des Diagramms beantworten könntest.

BNE: Das große Sterben



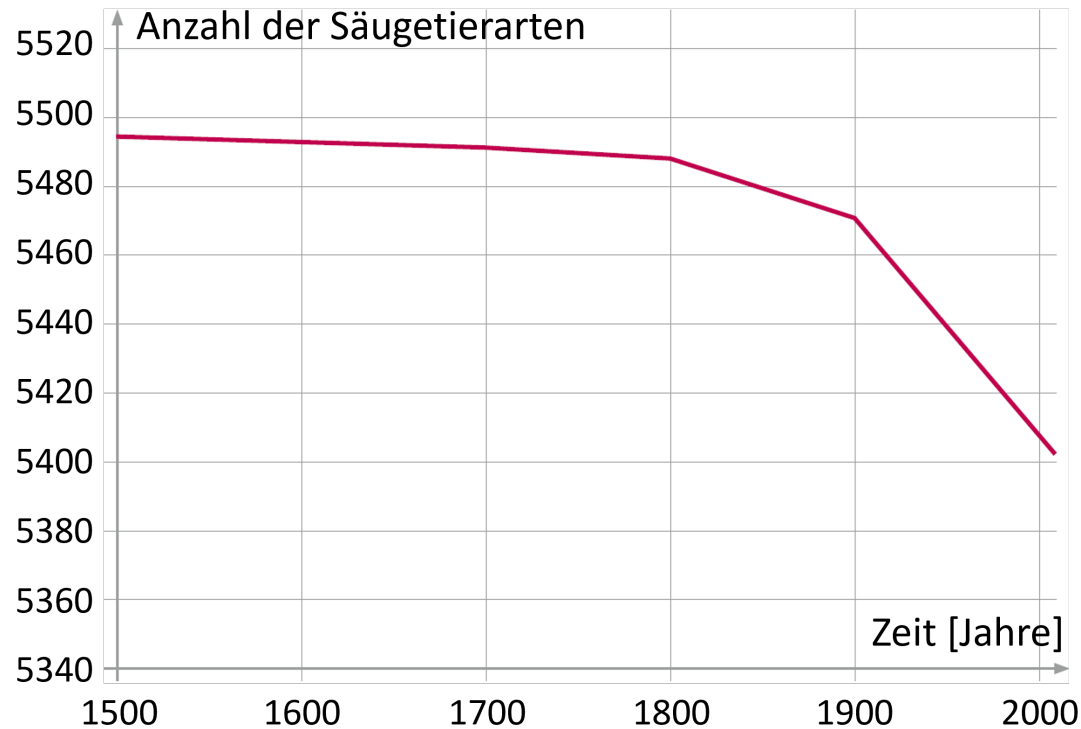
Aufgabe 2: Stelle Funktionsterme auf, die die Entwicklung der Anzahl der Säugetierarten in Abhängigkeit von der Zeit in folgenden den Intervallen jeweils passend beschreiben:

■ 1500-1800 ■ 1800-1900 ■ 1900-2010

Das Aussterben von Arten ist evolutionsbiologisch ein normaler Bestandteil des Lebens auf der Erde. Manche Arten verschwinden oder entwickeln sich durch Anpassung an die Umwelt zu neuen Arten weiter (s. Reichholf 2000). Diesen natürlichen Prozess nennt man auch „Hintergrundausterben“. Schätzungen zufolge sterben 2 von 10.000 Säugetierarten in einem Zeitraum von 100 Jahren natürlich aus (s. Ceballos u. a. 2015).

Aufgabe 3: Stelle einen Funktionsterm auf, der dieses Hintergrundausterben ab dem Jahr 1500 beschreibt. Zeichne den zugehörigen Graphen in das Diagramm ein. Vergleiche das Hintergrundausterben mit dem tatsächlichen Rückgang der Säugetierarten.

BNE: Das große Sterben



Von einem Massenaussterben spricht man in der Paläontologie, wenn in einem geologisch kurzen Zeitraum (das bedeutet hier: weniger als 2 Millionen Jahre) 75 % der Arten aussterben.

Aufgabe 4:

Berechne den hypothetischen Zeitpunkt, zu dem 75 % der Säugetierarten aus dem Jahr 1500 ausgestorben sein werden, wenn das Artensterben weiter voranschreitet.

Aufgabe 5:

Recherchiere und diskutiere Gründe für das Artensterben.

Aufgabe 6:

Was können wir tun, um dem Artensterben entgegenzuwirken? Erläutere Maßnahmen.

Zum Weiterdenken

Recherchiere weitere Daten zum Thema „Artensterben“ (Verlust an Pflanzenarten oder an anderen Lebewesen).



In welchem Umfang sind diese Gruppen vom Artensterben betroffen?

Tipp: Auf der Internetseite der Welt-naturschutzunion (IUCN) findest du eine aktuelle Version der Roten Liste der bedrohten Tier- und Pflanzenarten. (<https://www.iucnredlist.org/search>)

Aufgabe 7: Wie ist die Situation bei uns? Recherchiere Daten zum Artensterben in Deutschland.

Aufgabe 8: Das Artensterben der Säugetiere nahm in den letzten drei Jahrhunderten zu (in einem Jahrhundert starben mehr Arten aus als im vorherigen Jahrhundert). Beziehe diese Erkenntnis in deine Berechnungen ein, indem du annimmst, dass künftig in jedem Jahrhundert ca. fünfmal so viele Arten aussterben wie im Jahrhundert davor. Zu welchem Zeitpunkt wären dann 75 % der Säugetierarten ausgestorben, die 1500 noch existierten?

Aufgabe 9: „Mir doch egal, wenn so ein paar Mäuse und Insekten sterben! Die nerven eh nur...“, wirft Kim ein. Erläutere Konsequenzen des Artensterbens für den Menschen.

Lösungshinweise

1. Beispiele: Wann werden alle Säugetiere auf dem Planeten ausgestorben sein, wenn man annimmt, dass das Artensterben in der aktuellen Geschwindigkeit weitergeht? Wie veränderte sich das Artensterben in den letzten Jahrhunderten?
2. Es bezeichne y die Anzahl der Säugetierarten und x die Anzahl der Jahre, die seit Christi Geburt vergangen sind. Es werden für die drei Zeiträume Geradengleichungen der Form $y = mx + t$ aufgestellt.

Auf dem Graphen liegen die Punkte (1500; 5494), (1800; 5488), (1900; 5471), (2010; 5402).

■ Zwischen 1500 und 1800:

$$m = \frac{5488 - 5494}{300} = -0,02; 5488 = -0,02 \cdot 1800 + t \Rightarrow t = 5524; y = -0,02x + 5524$$

■ Zwischen 1800 und 1900:

$$m = \frac{5471 - 5488}{100} = -0,17; 5471 = -0,17 \cdot 1900 + t \Rightarrow t = 5794; y = -0,17x + 5794$$

■ Zwischen 1900 und 2100:

$$m = \frac{5402 - 5471}{110} = -0,63; 5402 = -0,63 \cdot 2010 + t \Rightarrow t = 6668; y = -0,63x + 6668$$

Lösungshinweise

3. 2 von 10 000 Säugetierarten in einem Zeitraum von 100 Jahren bedeutet ca. 1 Art von 5494 in einem Zeitraum von 100 Jahren und damit ca. 5 Arten von allen Arten im Zeitraum von 1500 bis 2010.

$$m = \frac{5489 - 5494}{510} = -0,01; 5494 = -0,01 \cdot 1500 + t \Rightarrow t = 5509; y = -0,01x + 5509$$

Die reale Entwicklung der letzten 500 Jahre verläuft viel schneller als das Hintergrundausterben (<https://fr-vlg.de/pflwis>).

4. Wir nehmen an, das Artensterben gehe im Tempo wie zwischen 1900 und 2010 weiter, und nutzen die Gleichung aus **Aufgabe 2**. $0,25 \cdot 5494 = -0,63x + 6668; x = \frac{0,25 \cdot 5494 - 6668}{-0,63} = 8404$

Etwa 75 % der Säugetierarten wären im Jahr 8400 ausgestorben.

5. Artensterben ist auch ein natürlicher Prozess, der ohne Zutun des Menschen abläuft. Jedoch beeinflusst der Mensch die Aussterberate erheblich, etwa durch:

- Landnutzungsveränderung: Umwandlung in Bauland oder industrielle Agrarräume (Monokulturen, Zerschneiden von Lebensräumen, Lichtverschmutzung ...)
- globale Erwärmung: Die Erde erwärmt sich schneller, als sich Arten anpassen (evolutionäre Anpassung, Ausweichen).
- Herbizide und Insektizide: schaden vielen Pflanzen und Tieren

4

Denken und Arbeiten mit Funktionen

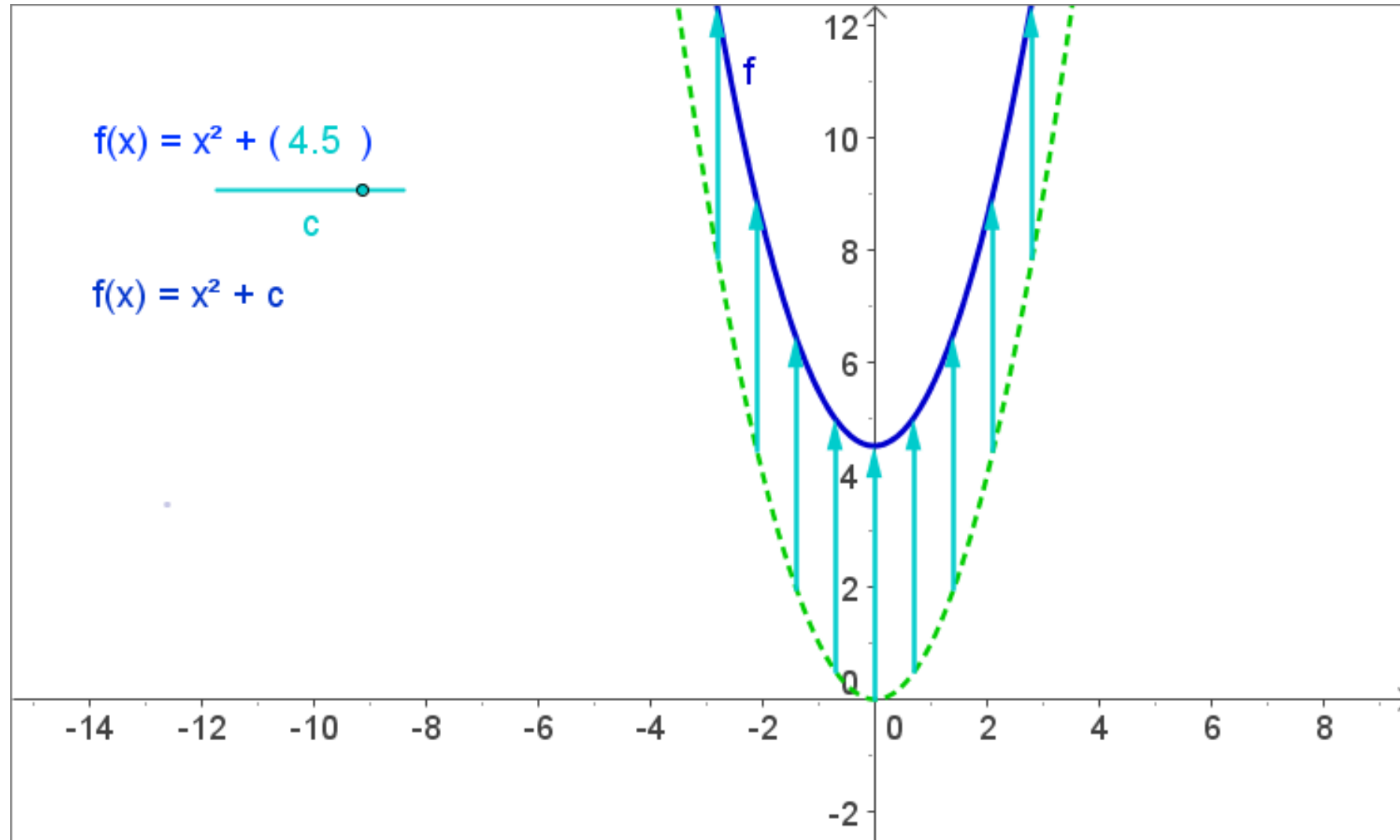
Parameter & Funktionsgraphen Umkehrfunktion

4.1

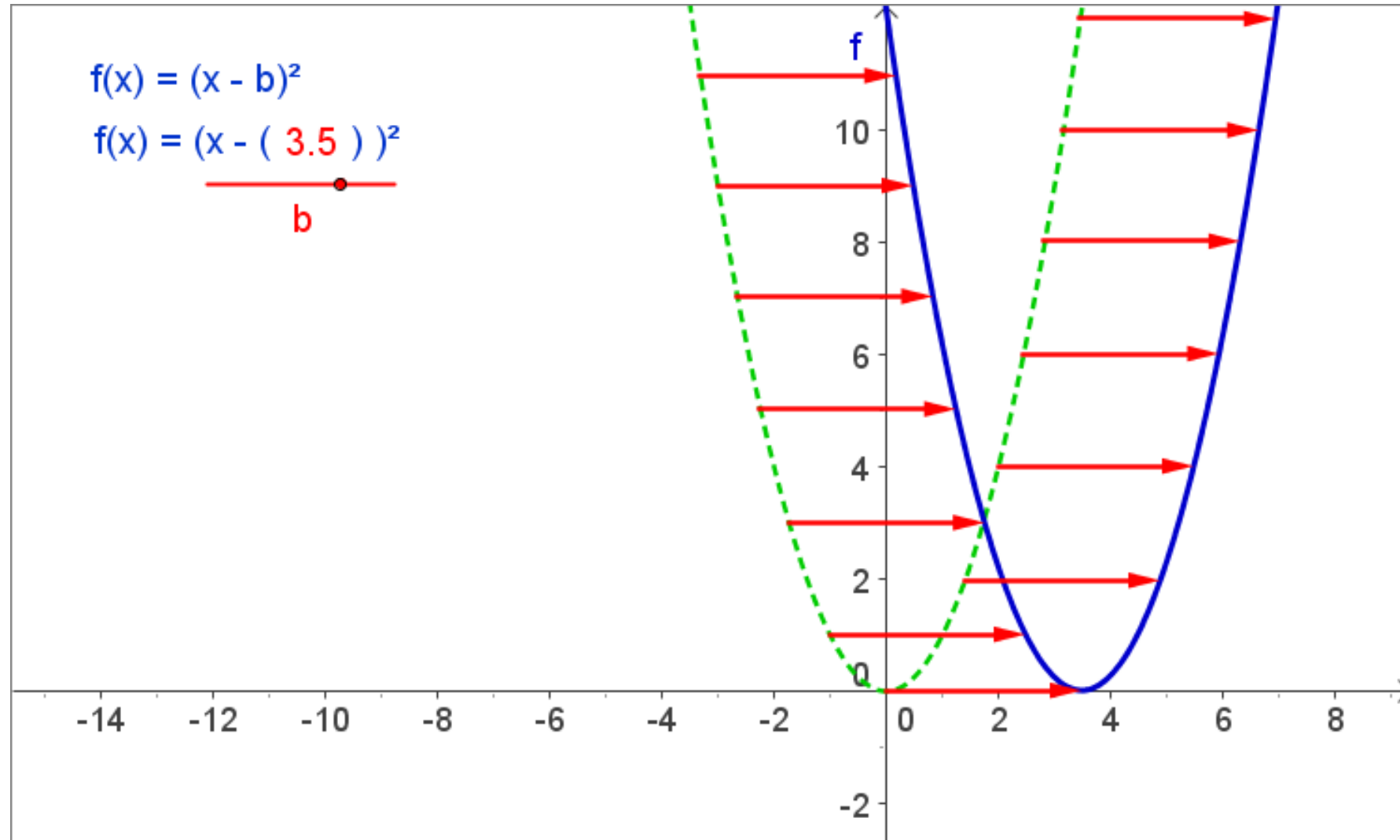
Denken und Arbeiten mit Funktionen

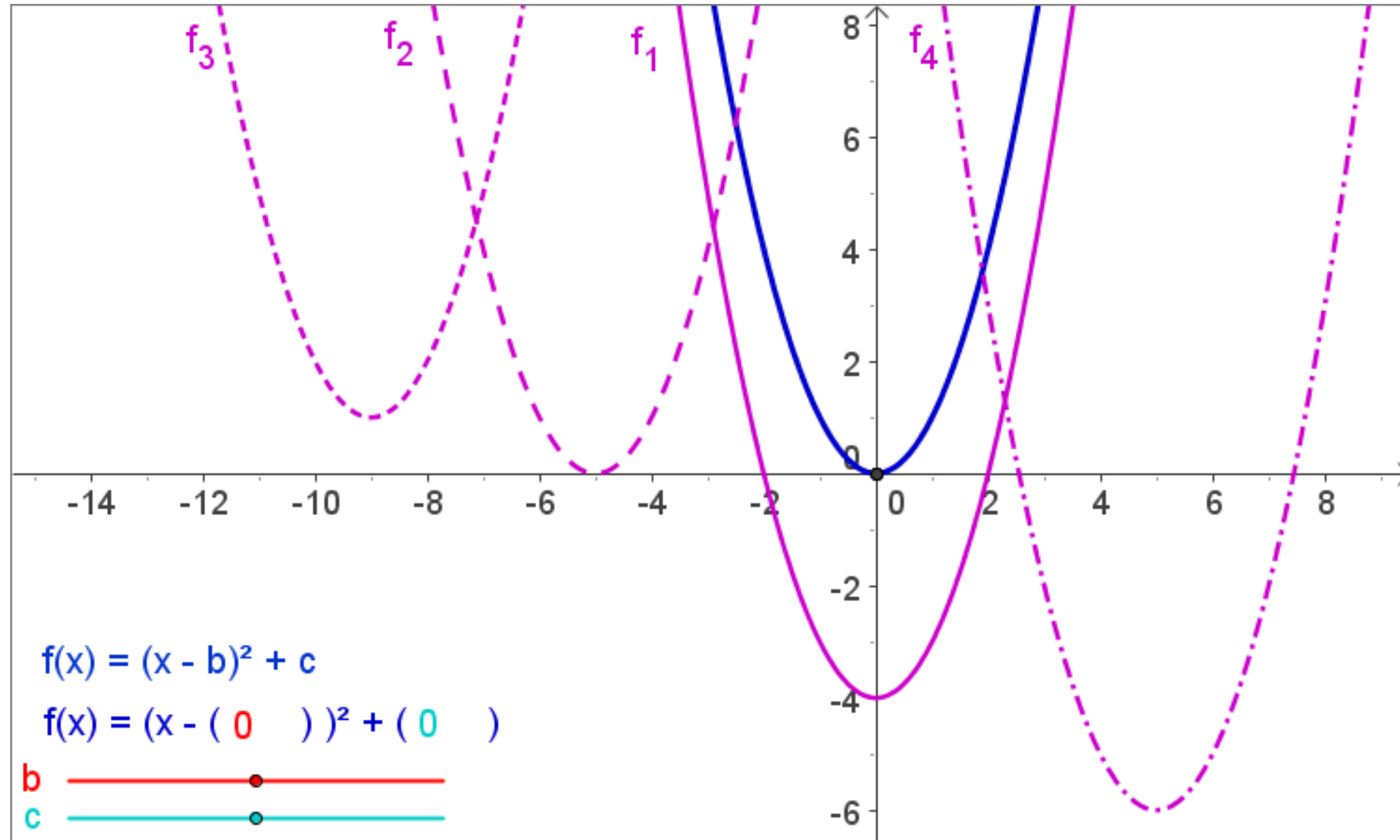
Parameter & Funktionsgraphen

Parameter und Funktionsgraph: $x^2 + c$

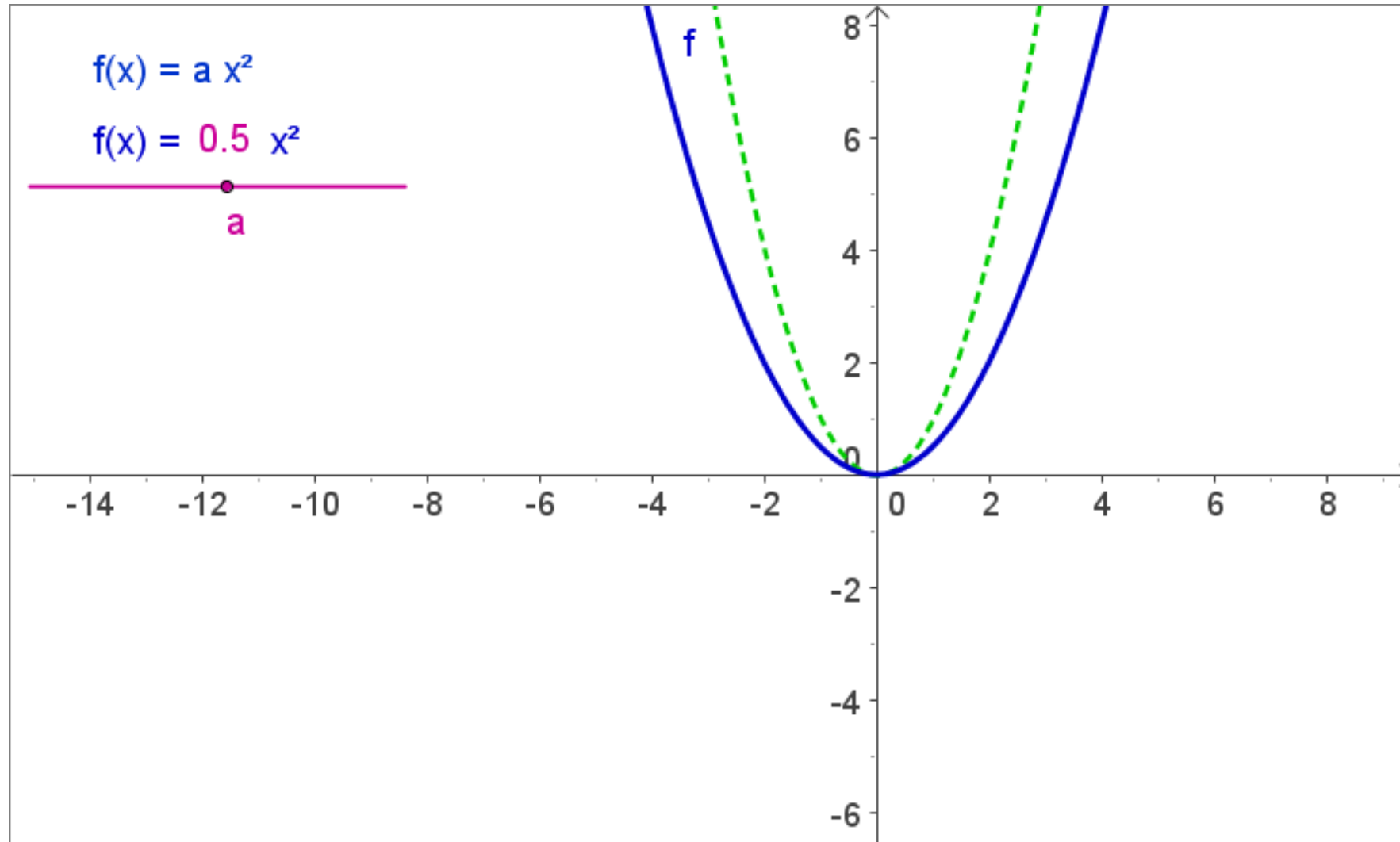


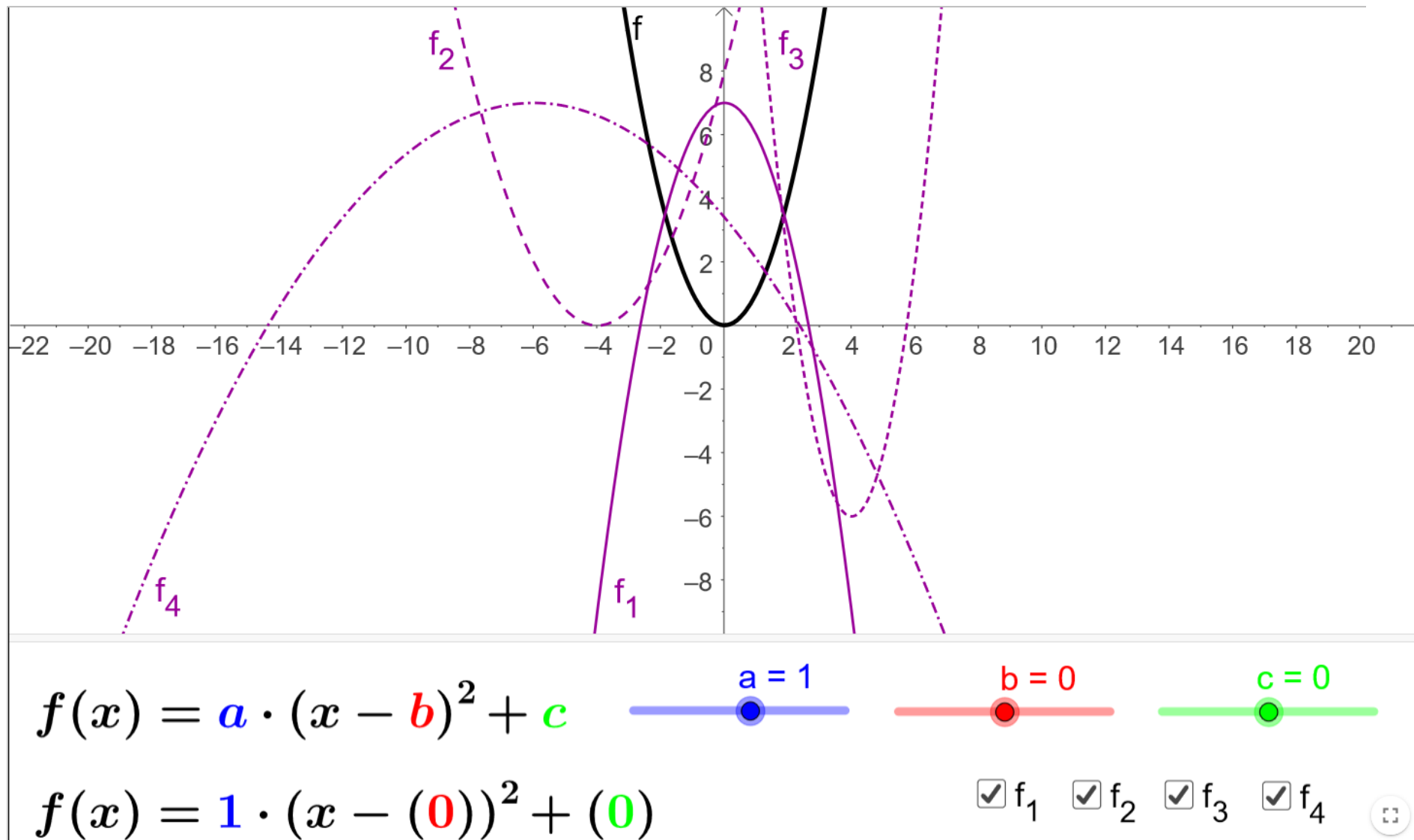
Parameter und Funktionsgraph: $(x - b)^2$



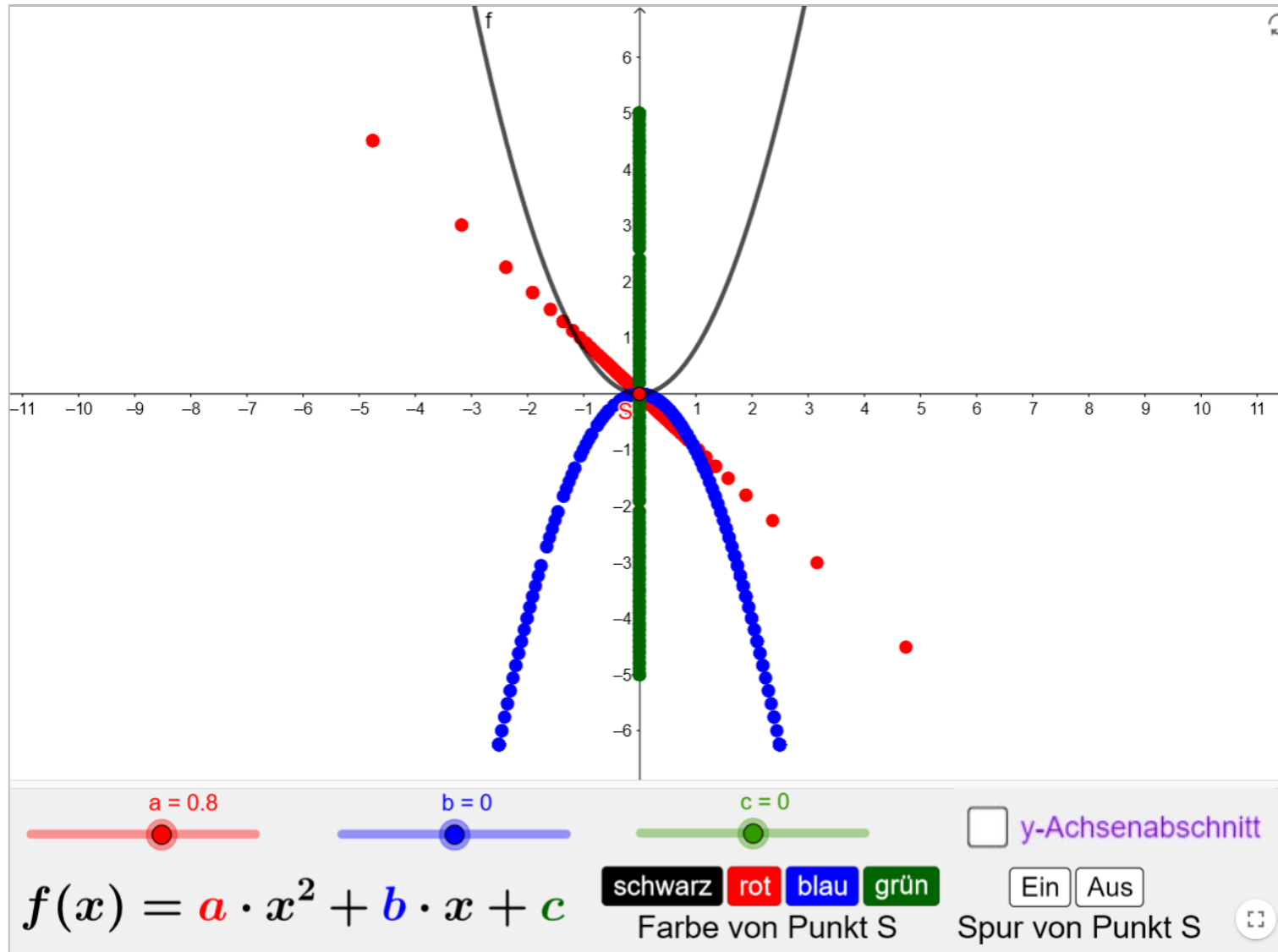


Parameter und Funktionsgraph: $a \cdot x^2$





Parameter und Funktionsgraph: Scheitel



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\begin{aligned} x &\mapsto ax^2 + bx + c \\ x &\mapsto a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \end{aligned}$$

1. Binomische Formel (Plusformel)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \cdot \left(x^2 + x \frac{b}{a} \right) + c$$

$$= a \cdot \left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} \right) + c = a \cdot \left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} \right) + c$$

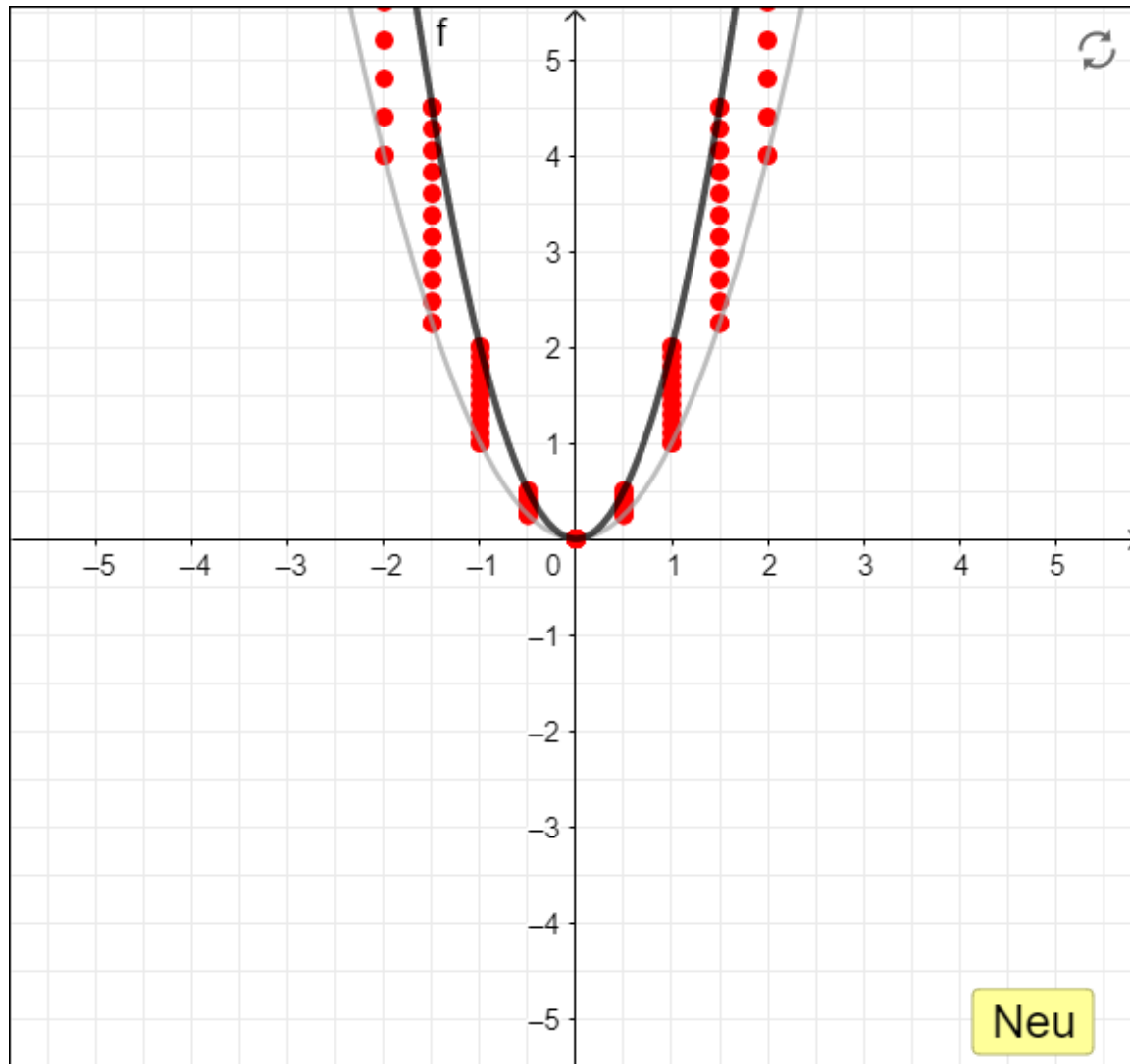
$$= a \cdot \left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c$$

$$= a \cdot \left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c - \frac{a \cdot b^2}{2^2 a^2}$$

$$= a \cdot \left(\underbrace{x + \frac{b}{2a}}_{= -x_s} \right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{= y_s} \Rightarrow S \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

S ist der Scheitel der Parabel.

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion



$$f(x) = a \cdot (b \cdot (x + c))^2 + d$$
$$= 2 \cdot (1 \cdot (x + (0)))^2 + (0)$$

Punkte ☒

Punktspur

an

aus

Punktfarbe

rot

blau

grün

magenta

Parameter

a = 2

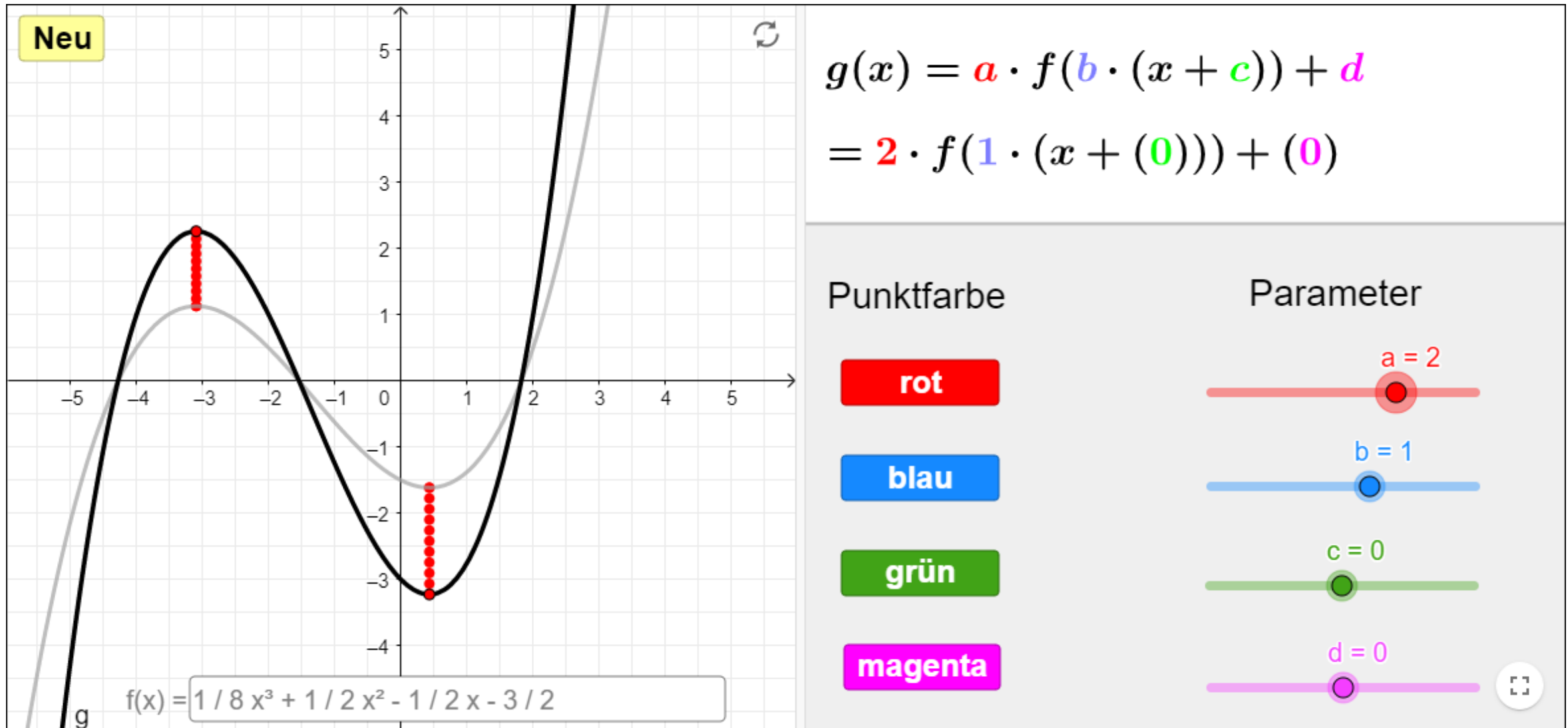
b = 1

c = 0

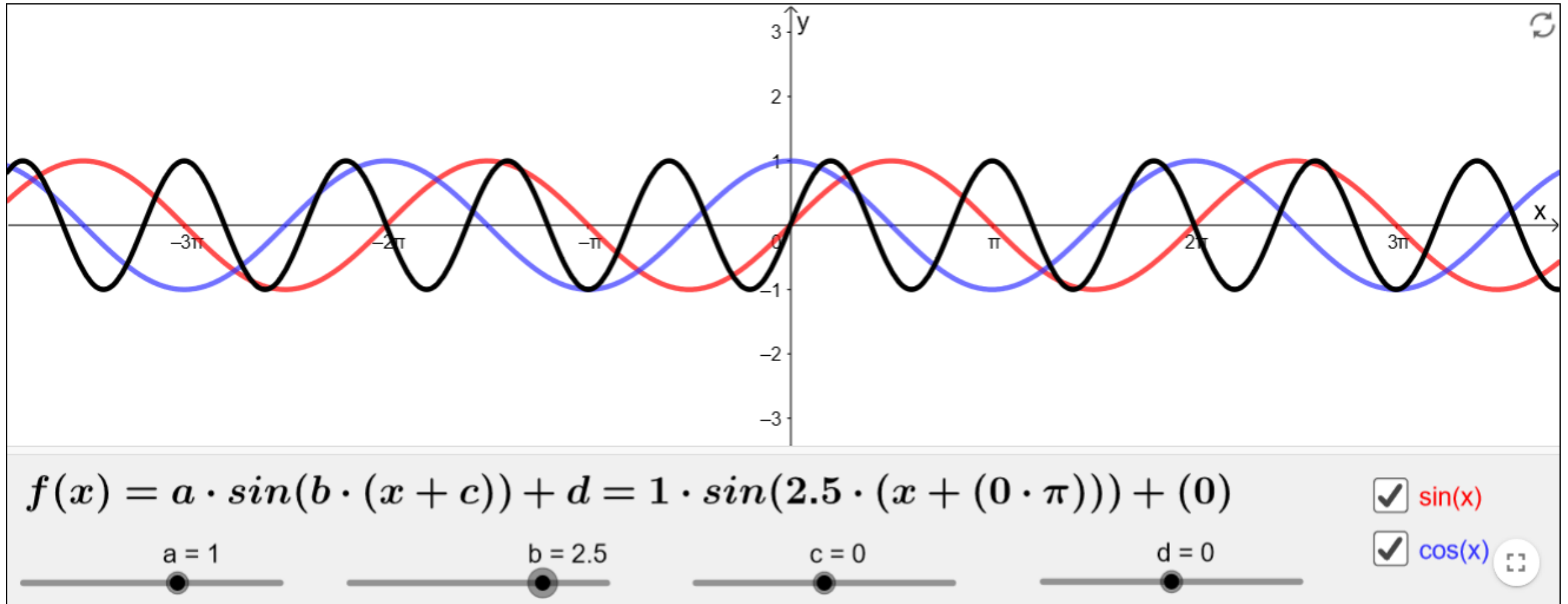
d = 0



Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen **allgemein**

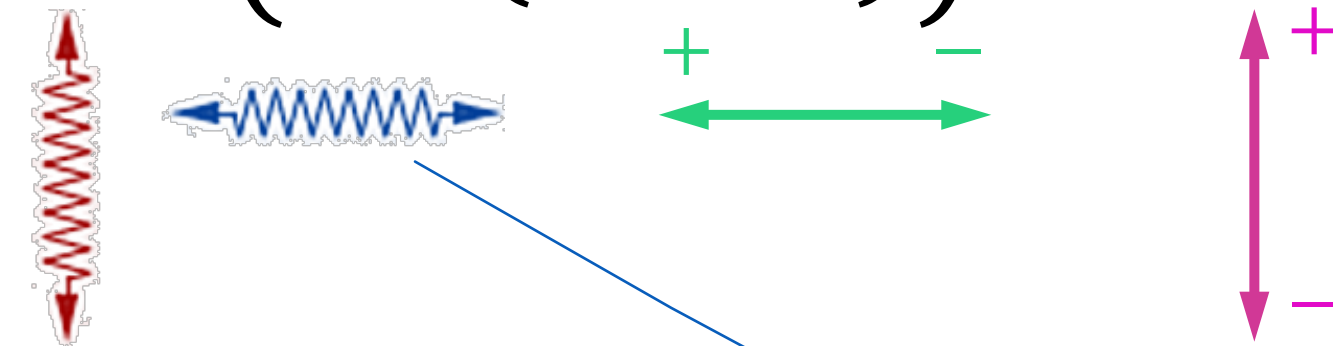


Sinusfunktion mit Parametern



Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der **quadratischen Funktion**

$$f(x) = x^2$$

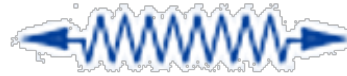
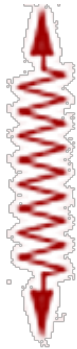
$$g(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c) \right)^2 + d$$


Strecken in y -Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y -Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x -Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x -Richtung für $|b| > 1$

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen **allgemein**

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$$



Strecken in y -Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y -Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x -Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x -Richtung für $|b| > 1$



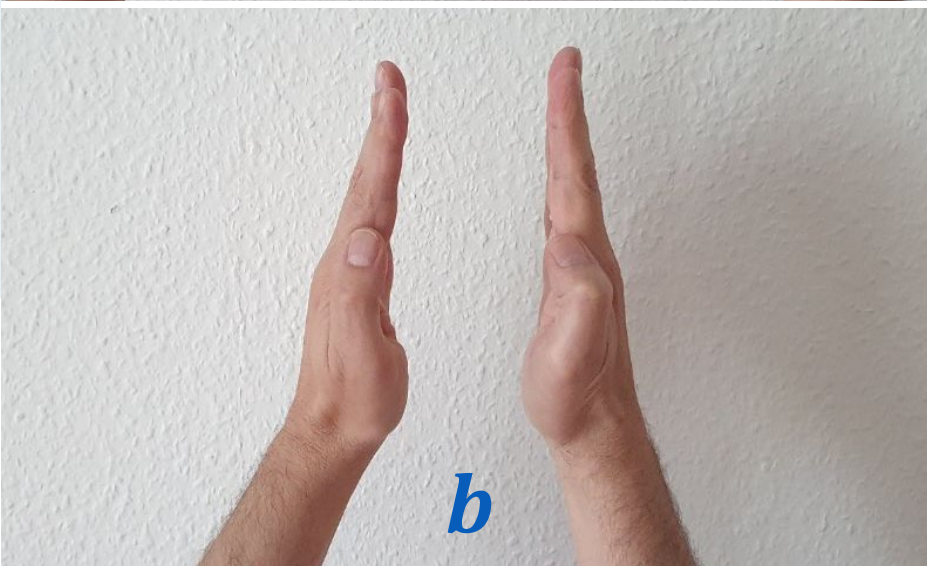
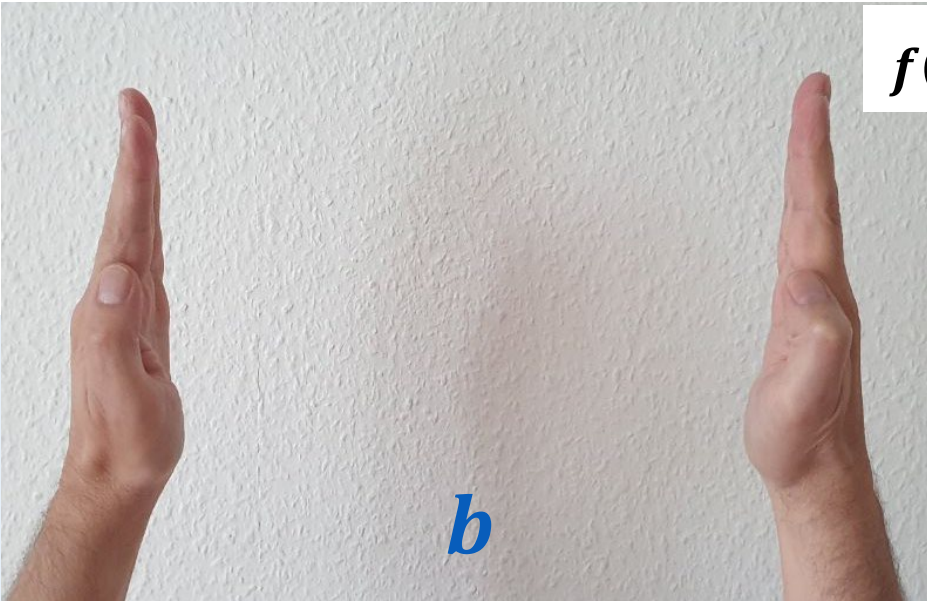
Passende Sprechweisen und Handbewegungen

$$f(x) = a \cdot (b \cdot (x + c))^2 + d$$

Parameter

b

Streckung
($0 < |b| < 1$)
bzw.
Stauchung
($|b| > 1$)
in
 x -Richtung



a



a

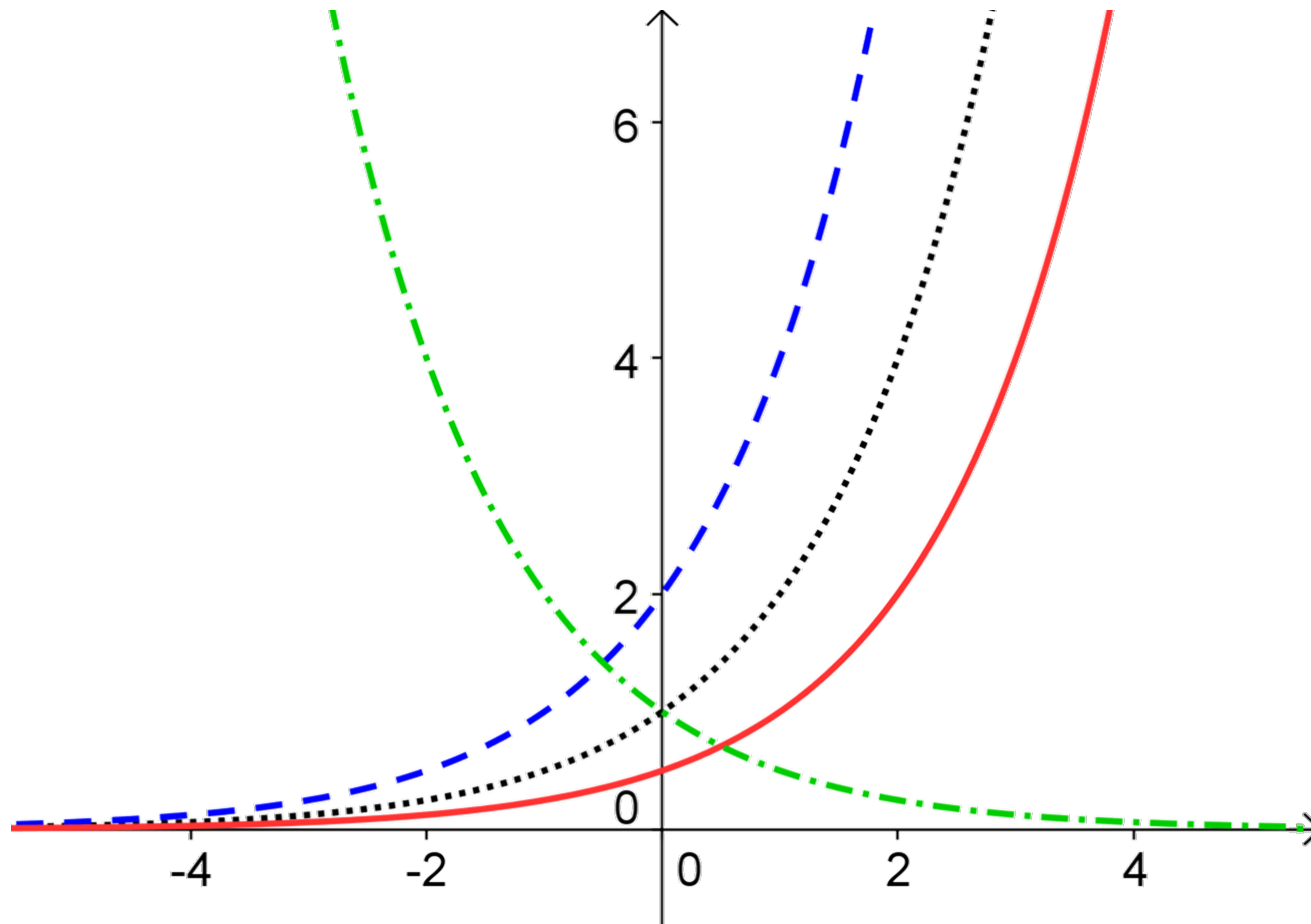


Parameter

a

Streckung
($|a| > 1$)
bzw.
Stauchung
($0 < |a| < 1$)
in
 y -Richtung

Präsenzaufgabe: Parameter und Funktionsgraphen



Es gilt: $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$$

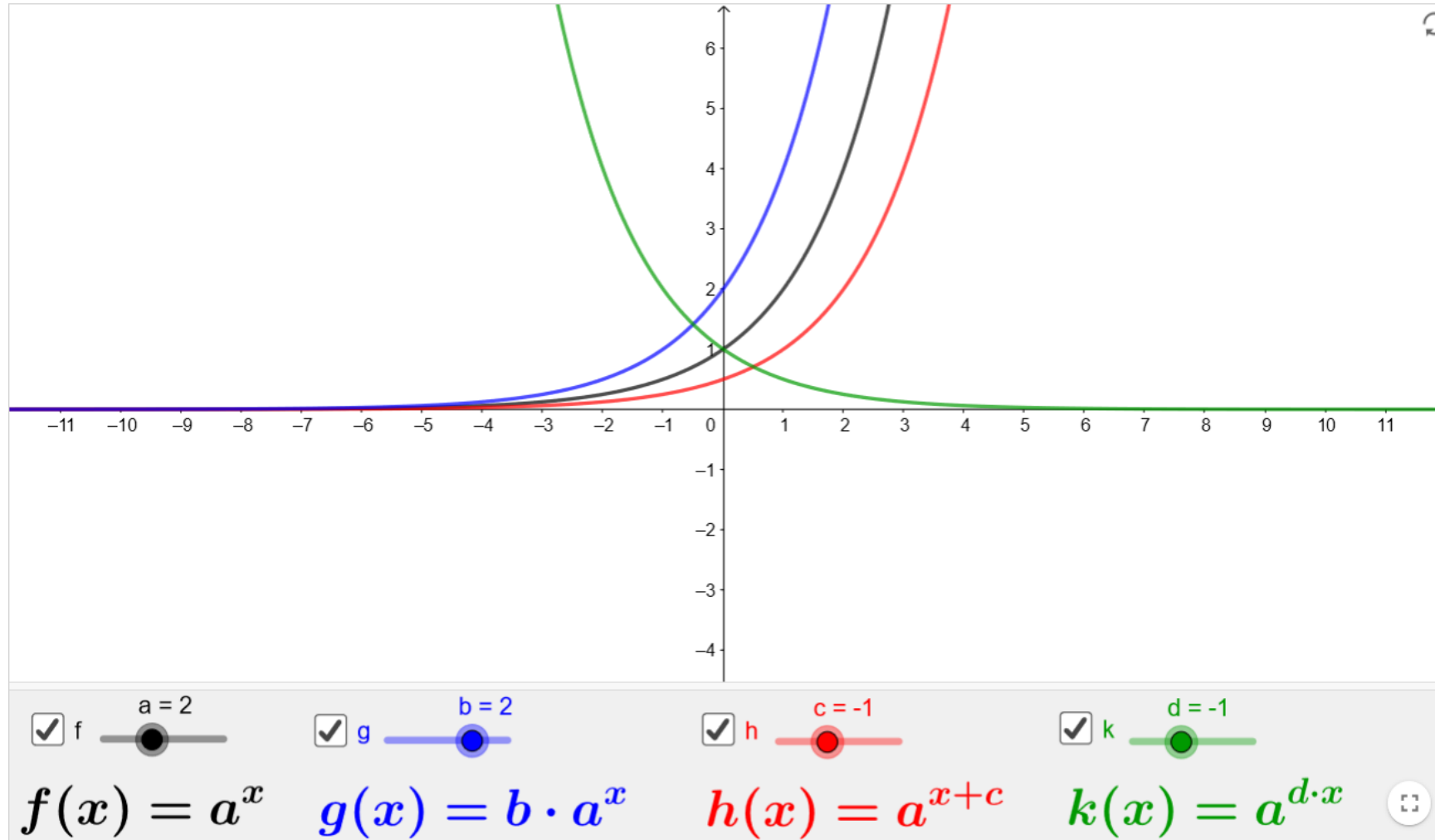
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$$

- Wie wirkt sich eine Veränderung der Parameter a, b, c und d auf die Graphen der jeweiligen Funktionen aus?
- Vergleichen Sie die Graphen der vier Funktionen für verschiedene Werte von b, c und d . Gibt es Werte, so dass jeweils zwei Funktionsgraphen übereinstimmen?



Präsenzaufgabe: Parameter und Funktionsgraphen



Es gilt:

$a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$

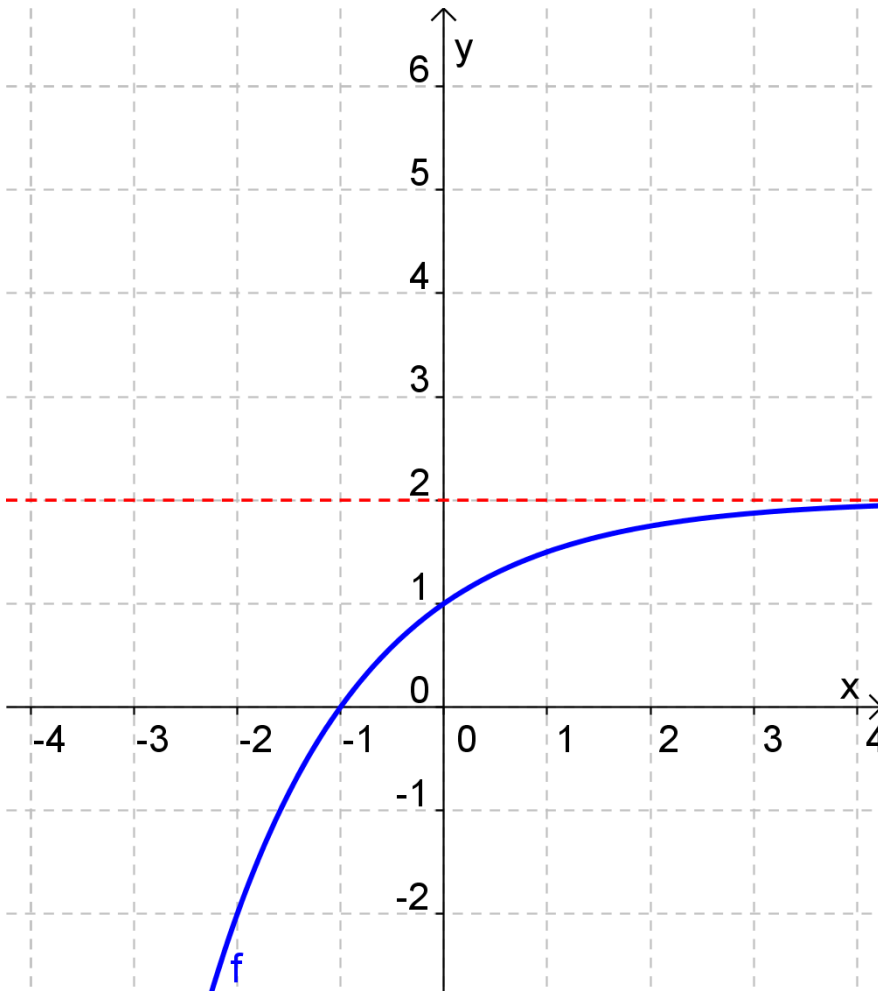
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$

$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$



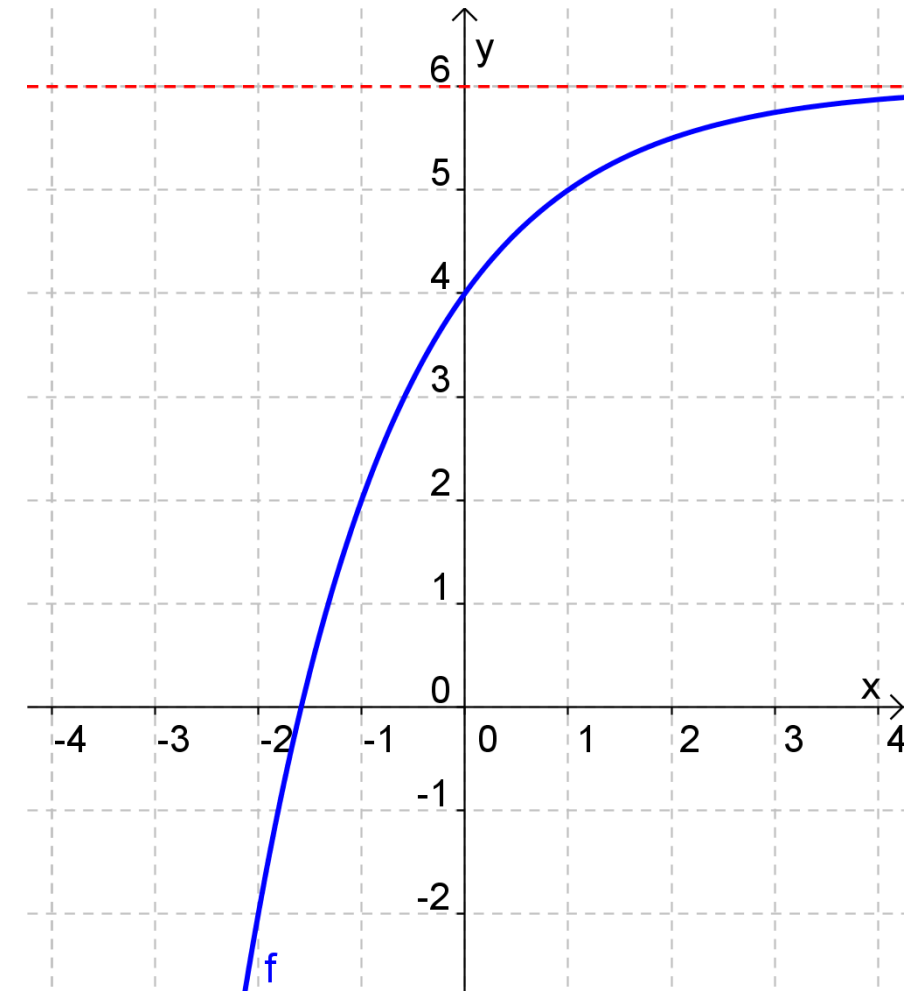
Präsenzaufgabe: Parameter und Funktionsgraphen



Die abgebildeten Graphen
gehören zu Funktionen
folgenden Typs:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{b \cdot x + c} + d$$

Bestimmen Sie jeweils die
Parameter a , b , c und d .

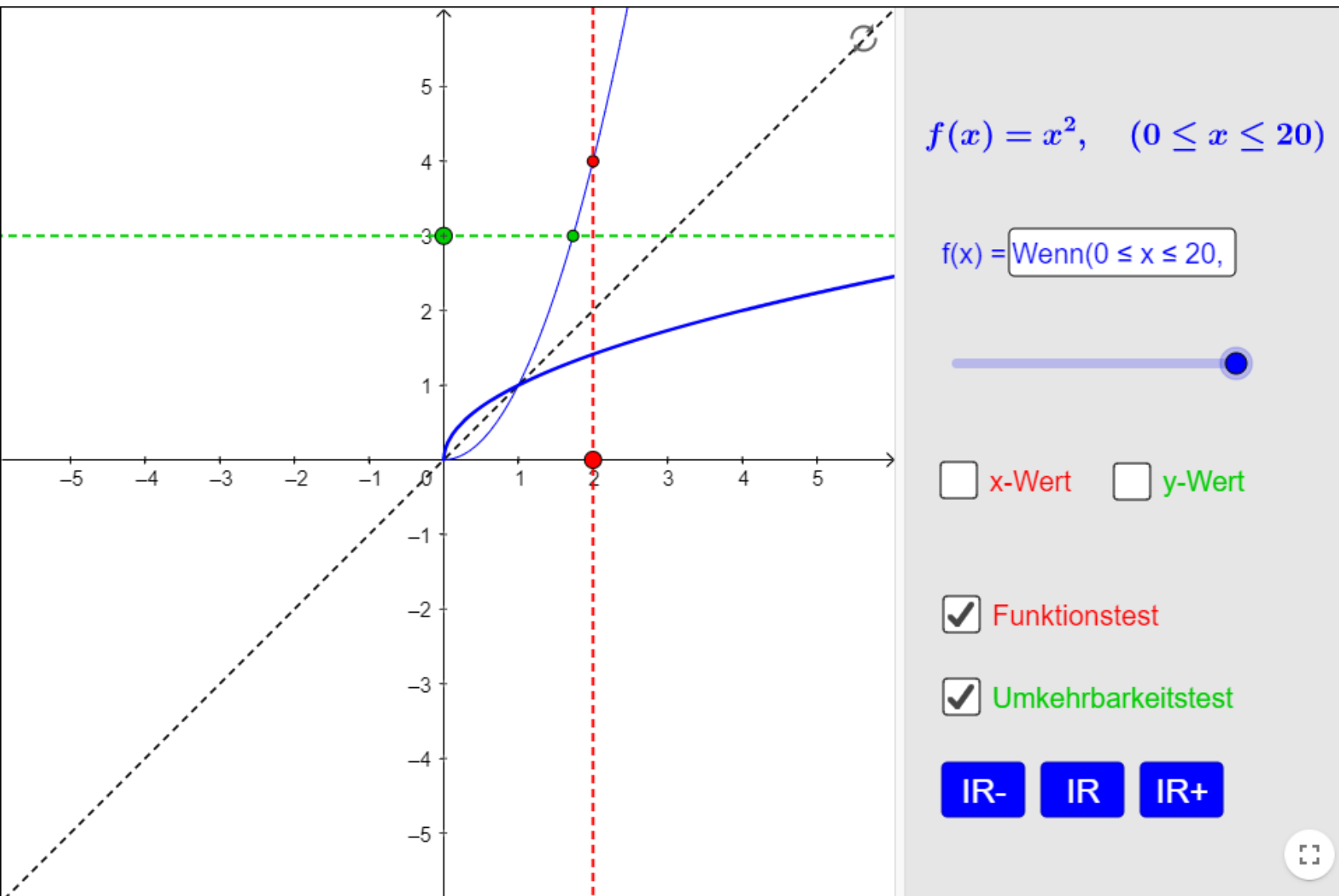


4.2

Denken und Arbeiten mit Funktionen

Umkehrfunktion

Umkehrfunktion?!



Schritte zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1} , wenn die Funktion f umkehrbar ist.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$.

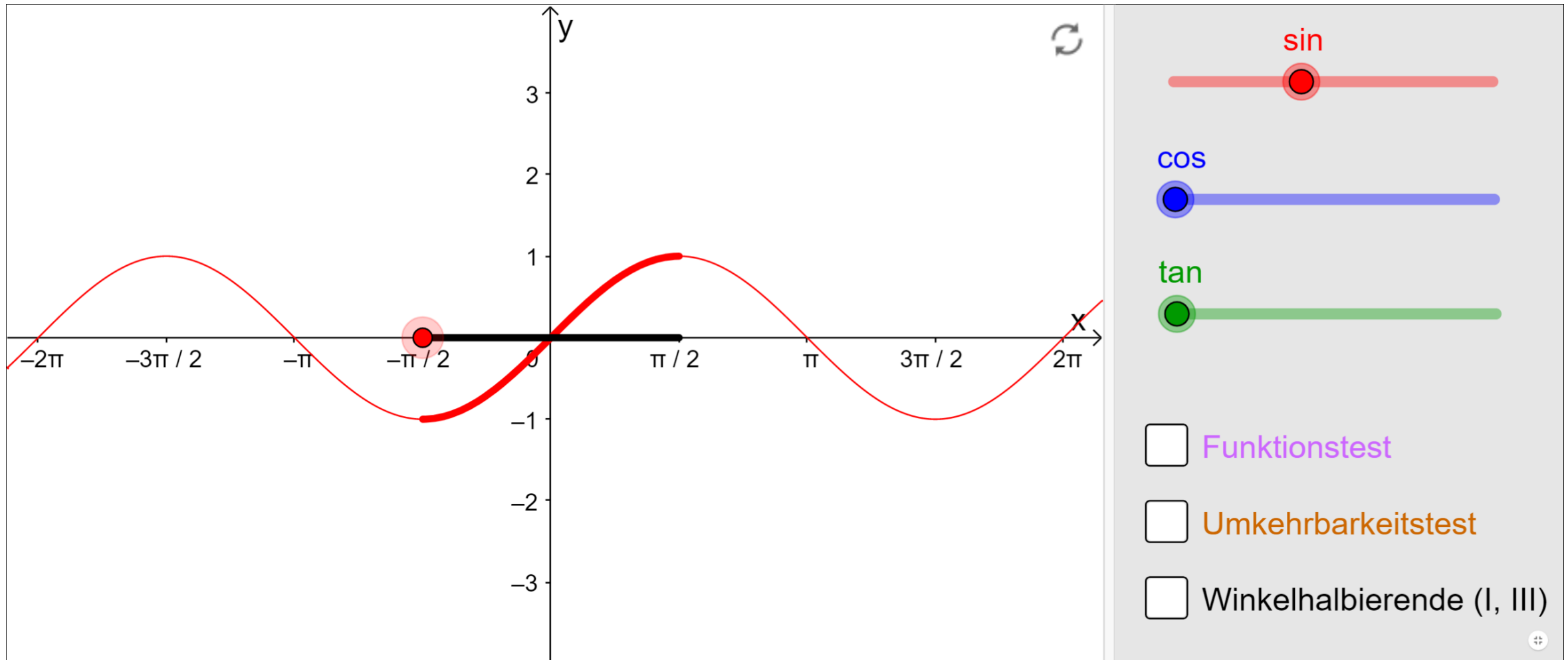
1. Schritt: Funktionsgleichung nach x auflösen

$$y = x^2 \quad | \sqrt{} \\ \sqrt{y} = |x| \stackrel{x \geq 0}{=} x$$
$$x = \sqrt{y}$$

2. Schritt: x und y vertauschen

$$y = \sqrt{x}$$

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de

dms.nuw.rptu.de



RPTU