MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvor-
stellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Modul 4: Stochastik

Teil 1

Jürgen Roth & Susanne Digel

15.03.2025

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Modul 4: Stochastik

Teil 1

1. Stochastik in den Bildungsstandards
2. Aspekte der Stochastik in der Sek. I
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Teil 2

4. Beurteilende Statistik

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

RPTU

Kernideen der Stochastik

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

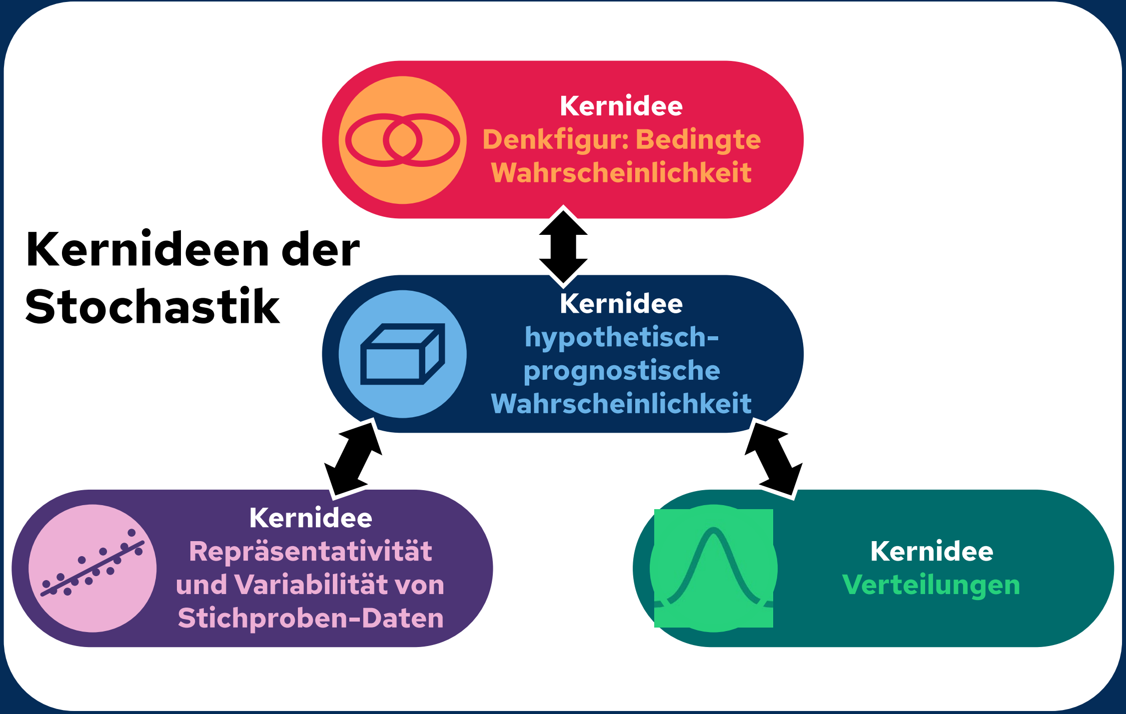
Kernidee
Verteilungen

- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

1 Stochastik in den Bildungsstandards

Warum Stochastik unterrichten?

Die Welt ist geprägt von Informationsaustausch und der Analyse empirischer Daten
→ bildungspolitische Relevanz



Entscheidungen/Vorhersagen beruhen oft auf der Analyse statistischer Daten
→ Gefahren

- Fehlinterpretationen
- Missbrauch von Daten

Folge
→ Lernende benötigen Grundwissen zu

- Informationsbeschaffung
- Informationsaufbereitung
- Informationsinterpretation

Stochastische Allgemeinbildung

Datenkompetenz entwickeln, d.h.

- Grundkenntnisse im Umgang mit Massendaten
- auf Daten basierende Entscheidungen treffen und begründen können

Grundlegende Elemente der

- beschreibenden Statistik und explorativen Datenanalyse
- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- beurteilenden Statistik

(Soweit sie zur Bewältigung der Anforderungen in der weiteren Ausbildung und dem beruflichen, gesellschaft-lichen und persönlichen Leben erforderlich sind.)

Stochastik vernetzt unterrichten

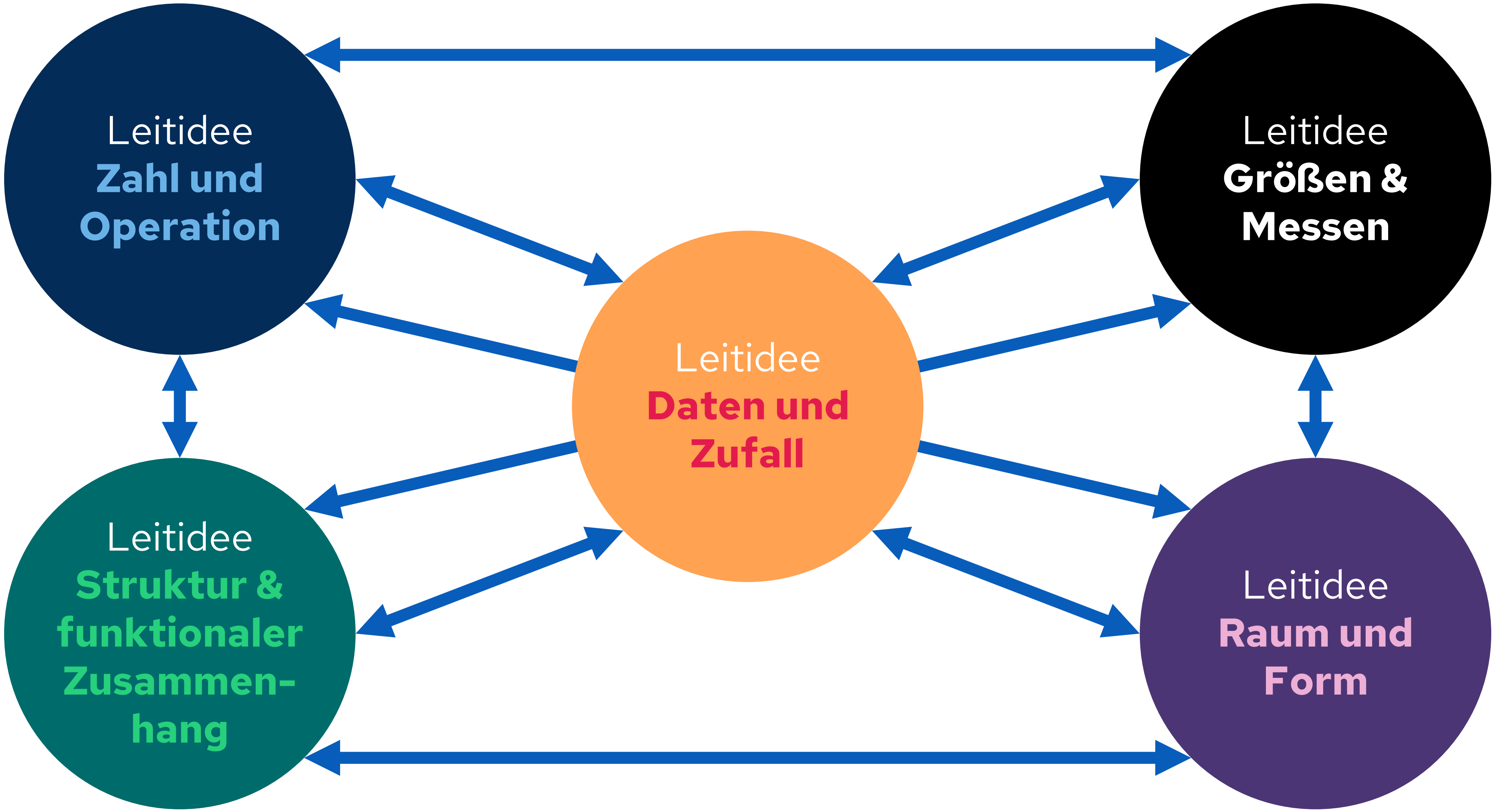
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Bezüge zu stochastischen Denk- und Vorgehensweisen herstellen **1**

Arbeit mit Daten & Modellbildung als Unterrichtsprinzip **2**

Datenanalyse als Bindeglied **3**
- zu anderen Themen des MU
- zum Alltagsbezug

Leitideen der KMK-Bildungsstandards



KMK (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). 7f
https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

KMK-Bildungsstandards Primarstufe
Leitidee Daten und Zufall

Mit Daten umgehen

- Einfache Befragungen planen, sowie Daten bei Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten erfassen und strukturieren.
- Daten, auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge, in Tabellen, Schaubildern & Diagrammen darstellen und Informationen aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnehmen.
- Darstellungen von Daten interpretieren und kritisch reflektieren.
- Einfache kombinatorische Fragestellungen durch systematisches Vorgehen (z. B. systematisches Probieren) oder mit Hilfe von heuristischen Hilfsmitteln (z. B. Skizze, Baumdiagramm, Tabelle) lösen.

Ereignisse bei Zufallsexperimenten untersuchen

- Grundbegriffe (sicher, möglich, unmöglich) zur Beschreibung von Zufallsereignissen kennen und nutzen,
- Chancen (z. B. „ist wahrscheinlicher als“, „hat größere Chancen als“) für das Eintreten von Ereignissen bei alltäglichen Phänomenen oder einfachen Zufallsexperimenten einschätzen und datenbasiert vergleichen.

KMK (2022). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich, 17f
https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

KMK-Bildungsstandards Sekundarstufe I
Leitidee Daten und Zufall

- Grafische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen, auch mit Hilfe von Tabellenkalkulation oder Stochastiktools (ToS), auswerten.
- Simulationen zur Entscheidung stochastischer Fragen nutzen.
- Statistische Erhebungen planen, auch unter den Aspekten Stichprobenauswahl & Erhebungsinstrument.
- Daten systematisch sammeln (z. B. Messwerte, Daten aus Befragungen oder Internet), in Tabellen organisieren & grafisch darstellen, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel wie ToS.
- Kenngrößen ermitteln und interpretieren (z.B. Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel, Median, Spannweite, Quartile).
- Diagramme erstellen und interpretieren (z. B. Säulen- oder Balkendiagramm, Histogramme, Kreisdiagramm, Liniendiagramm, Boxplot), auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge & die gewählte Darstellungsform begründen.
- Den Umgang mit & die Darstellung von Daten in Medien mit Hilfe mathematischer Kenntnisse reflektieren, etwa in Bezug auf die Absicht und mögliche Wirkungen der Darstellung.
- Zufallserscheinungen beschreiben und Wahrscheinlichkeitsaussagen sowie ihre Darstellungen in Medien interpretieren.
- Bei der Durchführung von Zufallsexperimenten die auftretenden relativen Häufigkeiten als Schätzwerte von Wahrscheinlichkeiten nutzen und deuten, die bei wachsendem Stichprobenumfang besser werden.
- Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel) bestimmen, ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
- Visualisierungen nutzen, um bei einfachen, alltagsnahen Modellierungen bedingte Wahrscheinlichkeiten zu erkennen, ohne und mit Hilfe digitaler Medien.

KMK (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). 21f
https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

KMK-Bildungsstandards Sekundarstufe II
Kompetenzbereiche

Allgemeine mathematische Kompetenzen

[K1] Mathematisch argumentieren

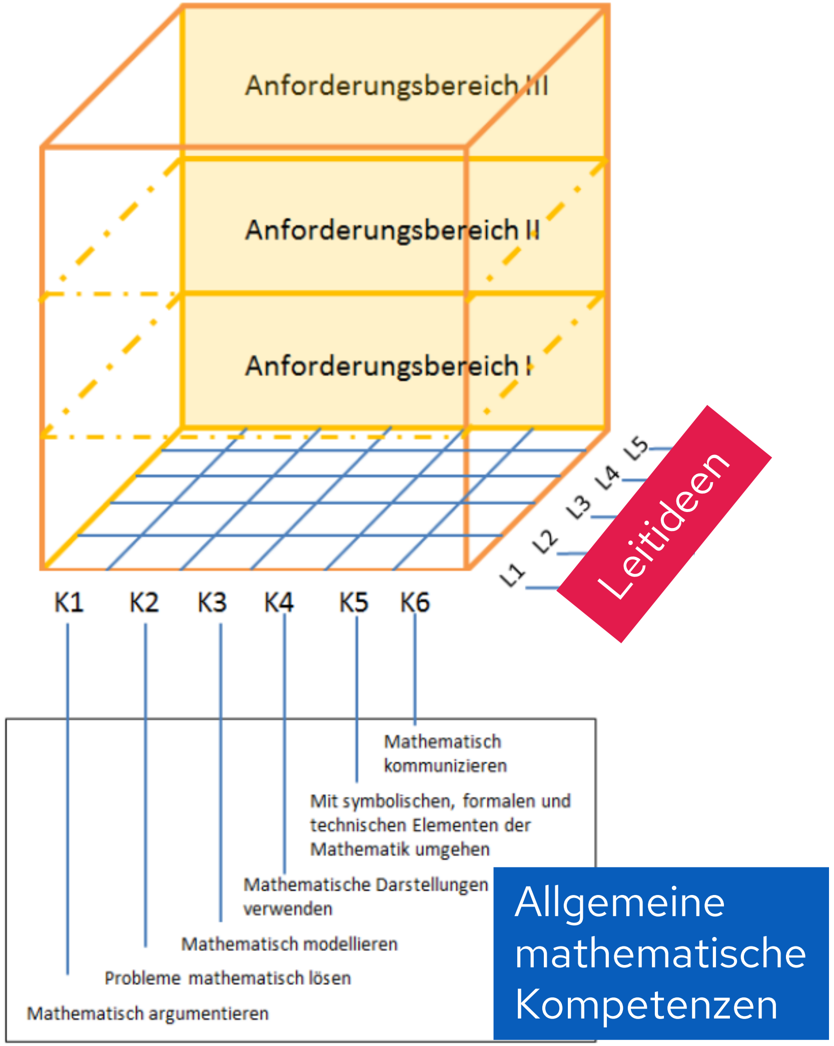
[K2] Probleme mathematisch lösen

[K3] Mathematisch modellieren

[K4] Mathematische Darstellungen verwenden

[K5] Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

[K6] Mathematisch kommunizieren



Leitideen

[L1] Algorithmus und Zahl

[L2] Messen

[L3] Raum und Form

[L4] Funktionaler Zusammenhang

[L5] Daten und Zufall

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. 11f
https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

KMK-Bildungsstandards
Anforderungsniveaus

	Grundlegendes Anforderungsniveau (Grundkurs)	**Erhöhtes Anforderungsniveau (Leistungskurs)**
Leitidee	Umfang mathematischer Inhalte ▪ Grundkenntnisse ▪ in Leitideen ausgewiesen	Umfang mathematischer Inhalte ▪ größer ▪ in Leitideen ausgewiesen ▪ erhöhter Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- & Formalisierungsgrad
Anforderungs-bereiche bzgl. allgemeiner mathematischer Kompetenzen	Prüfungsleistungen ▪ Schwerpunkt: Anforderungsbereich II ▪ Anforderungsbereiche I und III berücksichtigen ▪ Anforderungsbereiche I und II stärker akzentuieren	Prüfungsleistungen ▪ Schwerpunkt: Anforderungsbereich II ▪ Anforderungsbereiche I und III berücksichtigen ▪ Anforderungsbereiche II und III stärker akzentuieren

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. 13
https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

KMK-Bildungsstandards Sekundarstufe II
Leitidee Daten und Zufall

Grundl. und erhöhtes Anforderungsniveau

- Exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen.
- Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen.
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen.
- Die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen.
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden.
- In einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

- Für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen.
- Hypothesentests interpretieren & die Unsicherheit & Genauigkeit der Ergebnisse begründen.
- Exemplarisch diskrete & stetige Zufallsgrößen unterscheiden & die „Glockenform" als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen.
- Stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen.
- Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen und einschlägiger Software

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. 21
https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

Lehrplanalternativen RLP

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Grundkurs
(ca. 26 + 16 Stunden)

Stochastik 1

+ wahlweise

Stochastik 2 – B1: Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Stochastik 2 – B2: Testen von Hypothesen

Leistungskurs
(ca. 70 Stunden)

Stochastik

MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe)

2 Aspekte der Stochastik in der Sekundarstufe I

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Stochastik in der Sekundarstufe I

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Stochastik in der Sekundarstufe I

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

Kernideen im Fokus

bei Grundbegriffen der beschreibenden Statistik

Kernidee Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken (Wenn ..., dann ...)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit) ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe → reduziert Variabilität

Kernidee Verteilungen

- Struktur erfassen (Form, Streuung, Maximum, ...)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

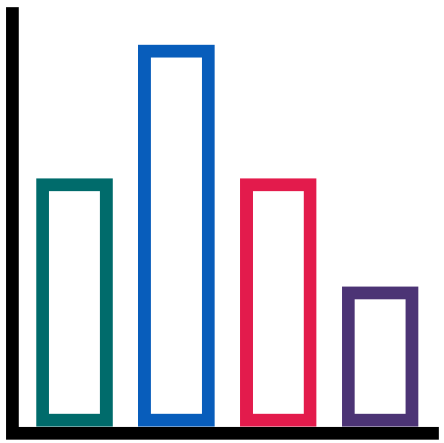
Beschreibende Statistik?!

Beschreibende Statistik

„In der beschreibenden Statistik geht es um

- eine Datenerfassung in Sachsituationen,
- die Datenaufbereitung und
- eine erste vorsichtige Dateninterpretation."

Kütting (1994, S. 21)



Kütting, H. (1994). Beschreibende Statistik im Schulunterricht. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Statistische Untersuchung: Phasen

Ziel der Untersuchung festlegen

Zu untersuchende Gegenstände bzw. Personen auswählen

Daten erheben

Daten aufbereiten & darstellen

Daten auswerten & interpretieren

Beschreibende Statistik: Grundbegriffe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Statistische Einheit

Merkmalsträger, Informationsträger (Personen, …)

Identifikations-merkmale

- **Sachlich** (weiblich <18 J.)
- **Räumlich** (in RLP)
- **Zeitlich** (im Jahr 2024)

Statistische Erhebung

Totalerhebung der Grundgesamtheit
(alle weiblichen Personen unter 18 in RLP im Jahr 2024, Volkszählung)

Teilerhebung, Stichprobe
(Mikrozensus)

Merkmal

interessierende Eigenschaft der statistischen Einheit

Erschöpfend?!
(Ausprägung / Modalität „sonstige“)

Merkmals-ausprägung (Modalität)

qualitativ / nominalskaliert

komparativ / ordinalskaliert
(Rangmerkmal)

quantitativ / metrisch skaliert

Beschreibende Statistik: Grundbegriffe
Skalenniveaus

R TU P Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Merkmal	Farbe	Süße	Erntedatum	Masse
	grün	sauer	04.09.	200 g
	rot	mittel	14.09.	150 g
	gelb	süß	08.10.	190 g
	$=$ | $\neq$ **Nominalskala**	$>$ | $<$ **Ordinalskala**	$+$ | $-$ **Intervallskala**	$\cdot$ | $:$ **Verhältnisskala**

Beschreibende Statistik: Grundbegriffe
Skalenniveaus

Merkmal	qualitativ	komparativ	quantitativ / metrisch	
Skala	**Nominalskala**	**Ordinalskala**	**Intervallskala**	**Verhältnisskala**
Eigenschaften	$x = y$ oder $x \neq y$ feststellbar	Zusätzlich: $x > y$ oder $x < y$ feststellbar	Zusätzlich: $x - y$ und $x + y$ sinnvoll / erlaubt	Zusätzlich: absoluter Nullpunkt existiert $x \cdot y$ und $x : y$ sinnvoll / erlaubt
Skalenwerte dienen zur	Kennzeichnung	Zusätzlich: ■ Darstellung der Ordnung	Zusätzlich: ■ Berechnung v. Unterschieden	Zusätzlich: ■ Berechnung von Verhältnissen
Beispiele	■ Geschlecht ■ Staatsangehörigkeit ■ Beruf ■ Autofarbe	■ gar nicht, selten, oft, sehr oft ■ Windstärke nach Beaufort ■ Schulleistung	■ Uhrzeitpunkt ■ Temperatur nach Celsius ■ topografische Höhenlage	■ Alter, Größe ■ Temperatur nach Kelvin ■ Gewicht, Volumen ■ Schuhgröße
Sinnvolle Mittelwerte	■ Modalwert	Zusätzlich: ■ Median	Zusätzlich: ■ arithmetisches Mittel	Zusätzlich: ■ geometrisches Mittel ■ harmonisches Mittel

Absolutskala ⇔ Einheit der Skala zwangsläufig (Anzahl)

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Stochastik in der Sekundarstufe I

2.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

2.2 Erhebung – Daten sammeln

2.3 Boxplot und Histogramm

2.4 Experimente

2.5 Stochastik und MMS

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Kernideen im Fokus

bei Erhebung – Daten sammeln

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn ..., dann ...)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit) ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, ...)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Ziel der Erhebung

Klassische beschreibende Statistik

- **Zielgerichtet:** Ergebnis wird antizipiert; Verteilung der Daten vorhersehbar
- **Ziel:** Hypothesen prüfen
- **Beispiel:** Erhebung zur Beziehung von Körper- und Schuhgröße von Schüler/inne/n

Explorative Datenanalyse

- **Erforschend:** Keine Vorüberlegungen zu mögl. Ergebnissen
- **Ziel:** Hypothesen generieren, neue Einsichten in einen Sachkontext gewinnen
- **Beispiel:** Erhebung zum Freizeitverhalten von Schüler/inne/n

Eigene Erhebung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Vorteile

- Vielfältiger und vertiefter Umgang mit Sachzusammenhängen
- Unterricht öffnen / fächerübergreifender Unterricht
- Planung eigener Erhebung erleben
- „Entstehung“ von Daten und dabei auftretende Probleme erleben

Nachteile

- Zeitaufwand

Wichtig für die Güte der Erhebung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Identifikationsmerkmale festlegen

1

- sächlich (Was? / Wer?)
- räumlich (Wo?)
- zeitlich (Wann?)

Skala bestimmen

2

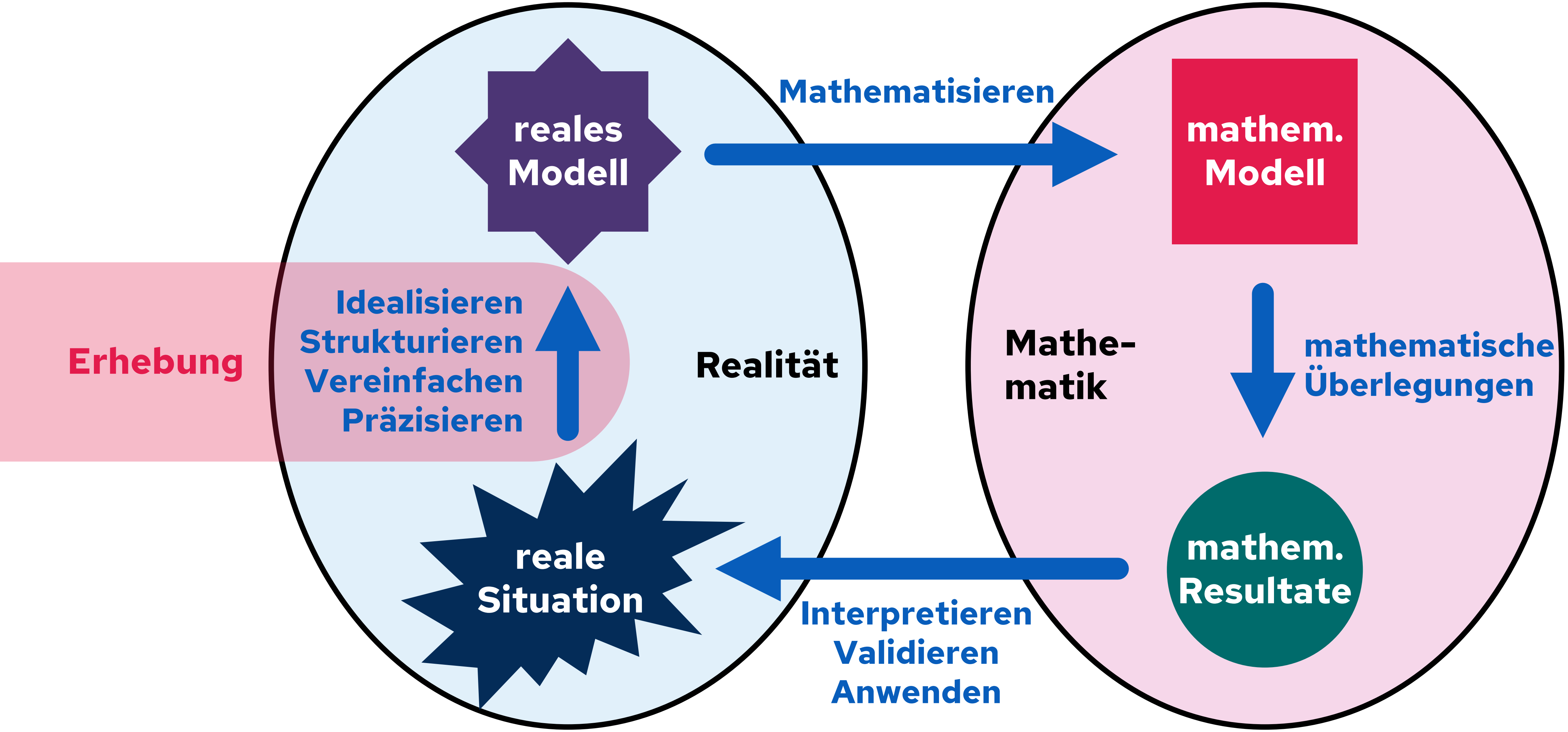
- Nominalskala
- Ordinalskala
- Metrische Skala

Probleme antizipieren

3

- Geeignete Fragestellung?
- Alle wesentlichen Merkmale & Ausprägungen erhoben?
- Stichprobe repräsentativ?
- Merkmalsausprägungen messbar?

Erhebung im Modellierungskreislauf



Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 275.

Erhebung

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Statistische Masse:
Schülerinnen und Schüler
eine Klasse

Statistische Einheit:
Schüler/in

Merkmal:
Note in einer Klassenarbeit

Merkmalsausprägungen:
1 bis 6

Note	Anzahl
1	1
2	9
3	7
4	6
5	3
6	1

Notendurchschnitt:
3,15

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Stochastik in der Sekundarstufe I

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

Kernideen im Fokus
bei Boxplot und Histogramm

Kernidee Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn ..., dann ...)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

Kernidee Verteilungen

- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, ...)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Histogramm und Boxplot vergleichen

Aufgaben

Im GeoGebra-Applet sind 20 Datenpunkte angegeben, die auf der x-Achse bewegt werden können.

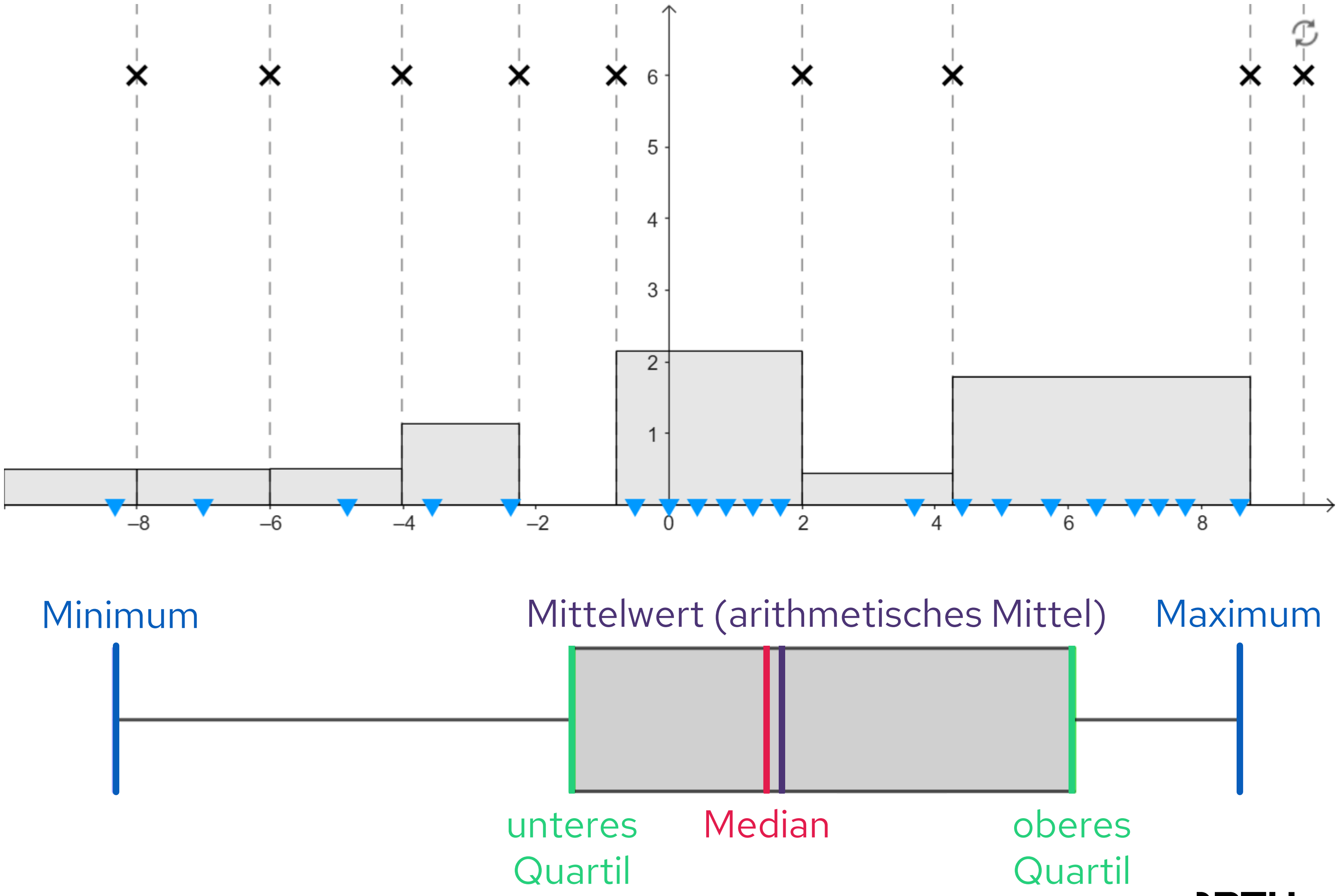
Beschreiben Sie, wie sich Veränderungen einzelner

(1) Datenpunkte

(2) Klassenbreiten

auf das Histogramm bzw. den Boxplot auswirken.

(3) Erläutern Sie die Bedeutung der Rechteckflächen in beiden Diagrammen.



Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Stochastik in der Sekundarstufe I

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Kernideen im Fokus
bei Experimenten

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

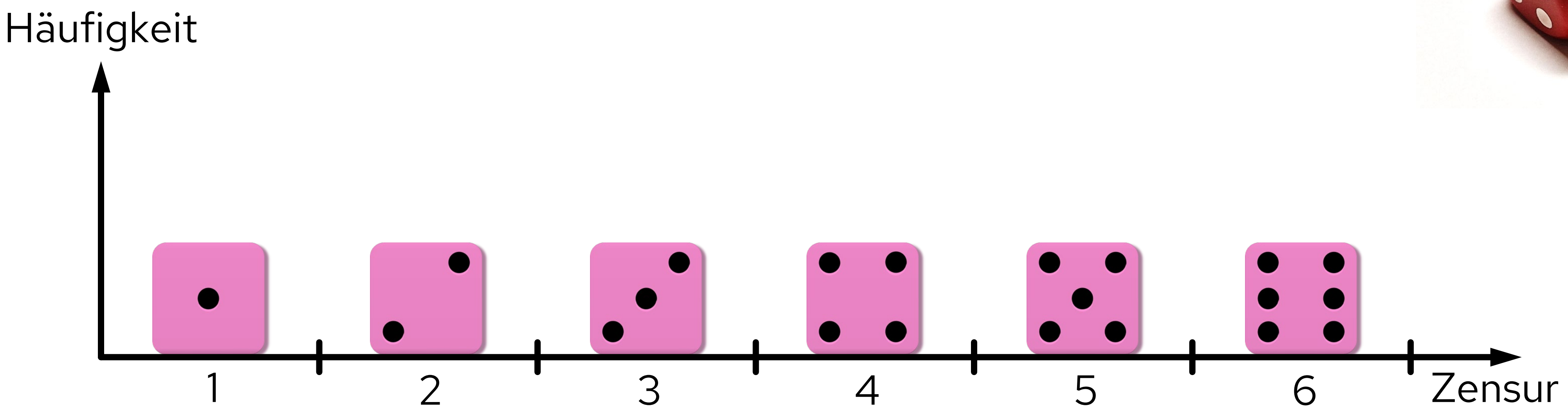
Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

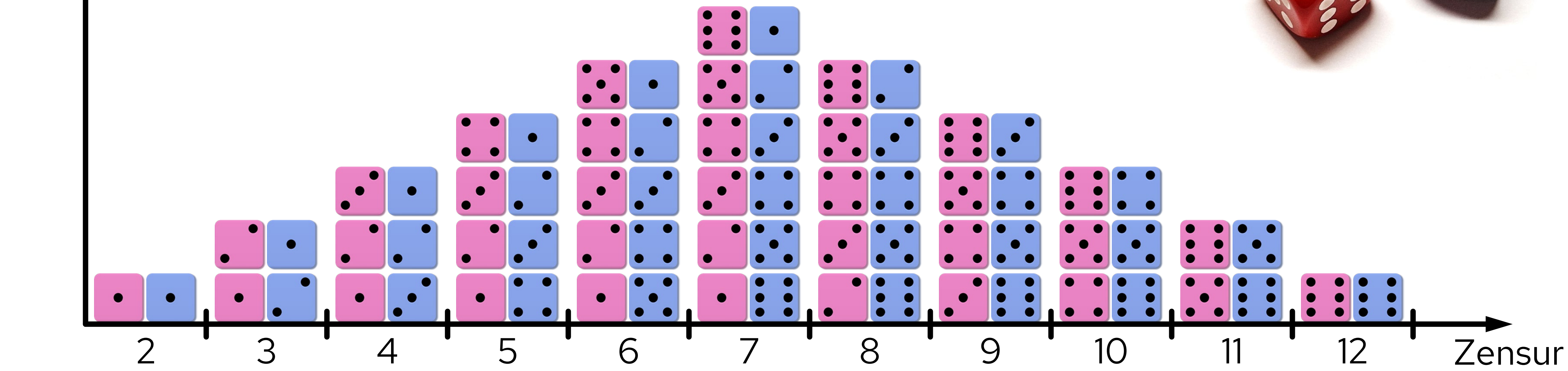
- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Noten würfeln?



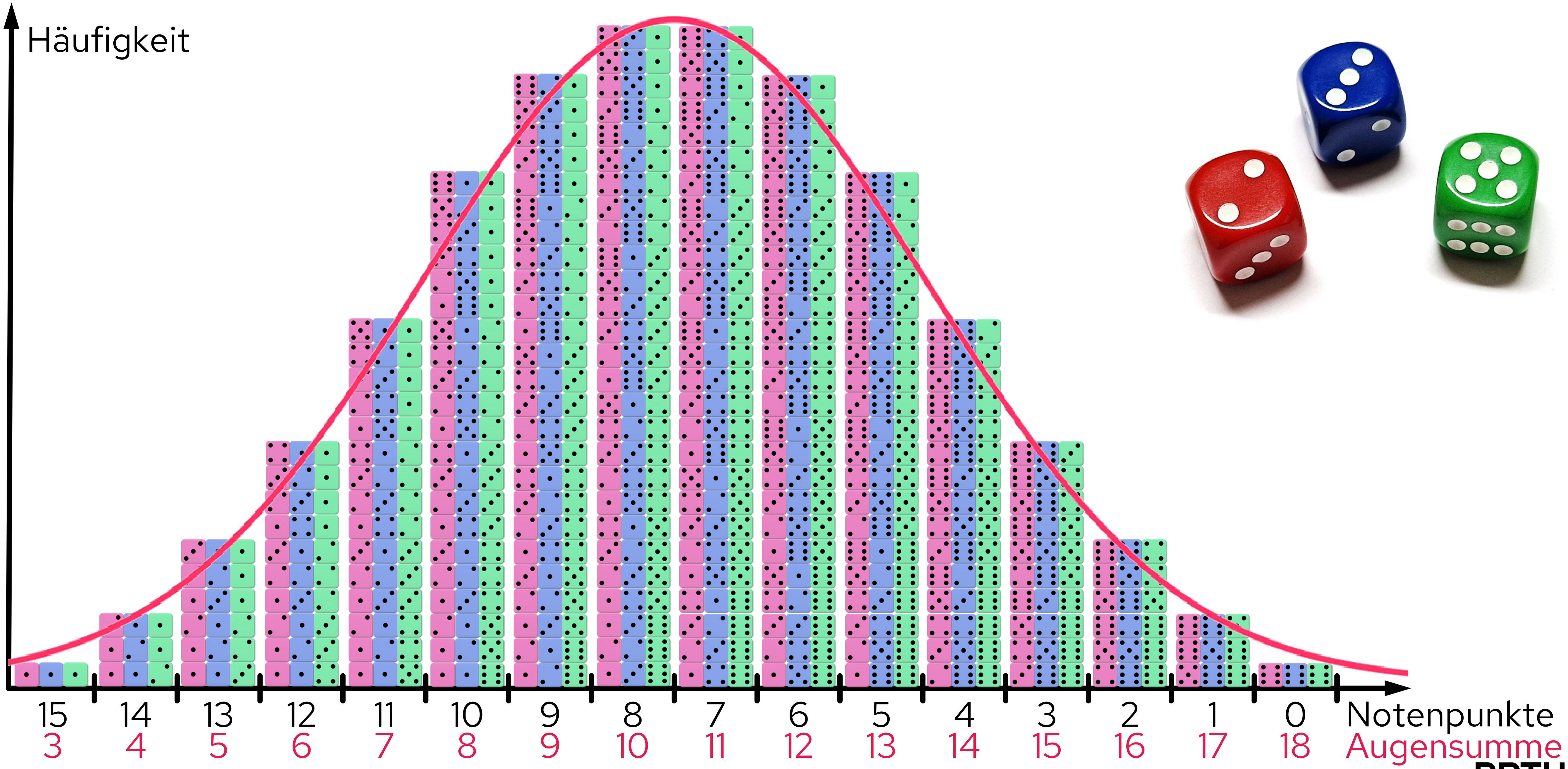
 Eikenbusch, G. & Leuders, T. (2004). Lehrer-Kursbuch Statistik. Cornelsen Scriptor, 49ff

Noten würfeln?



 Eikenbusch, G. & Leuders, T. (2004). Lehrer-Kursbuch Statistik. Cornelsen Scriptor, 49ff

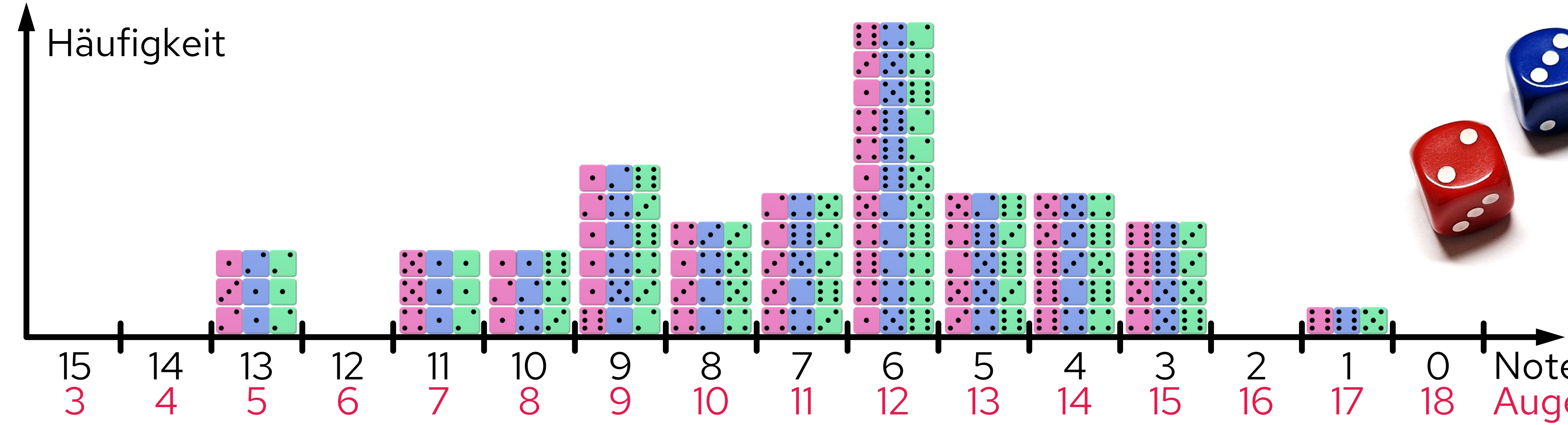
Noten würfeln?

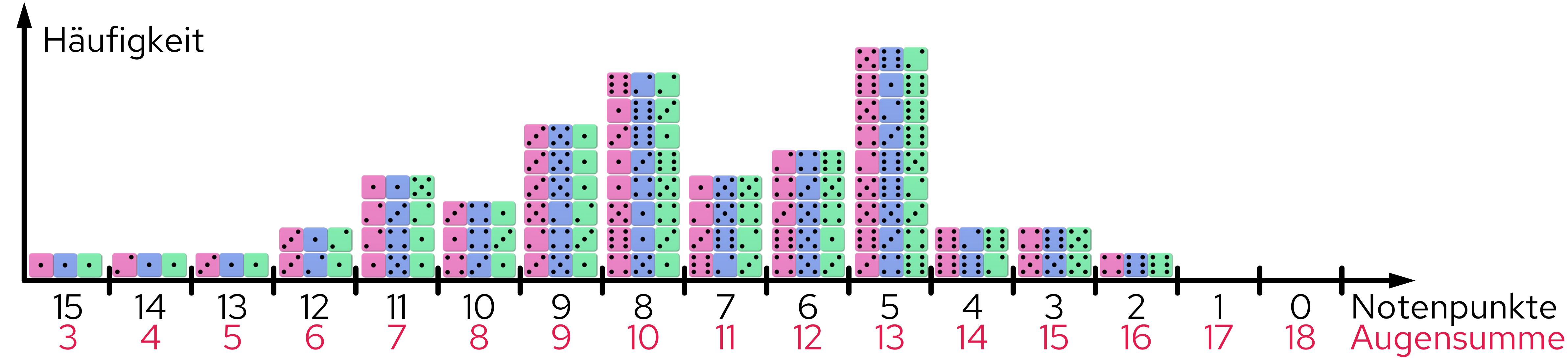


 Eikenbusch, G. & Leuders, T. (2004). Lehrer-Kursbuch Statistik. Cornelsen Scriptor, 49ff

Noten würfeln – Reale Würfelergebnisse

bei jeweils 50 Würfen mit drei Würfeln





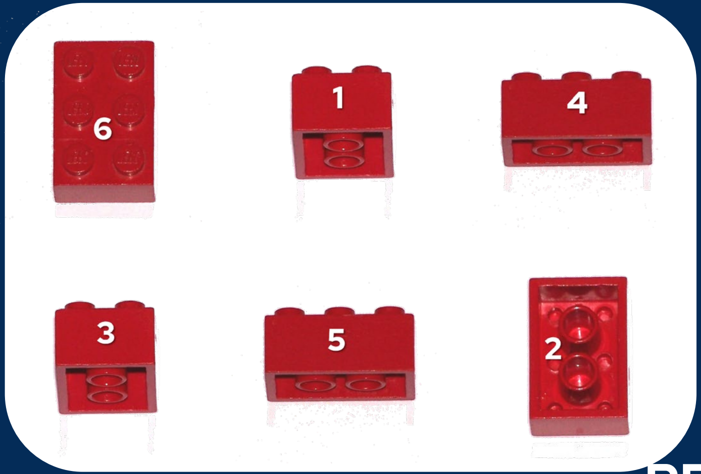
 Eikenbusch, G. & Leuders, T. (2004). Lehrer-Kursbuch Statistik. Cornelsen Scriptor, 49ff

Zufallsgeräte

Riemer-Glücksrad
http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?gluecksrad

Riemer-Bleistifte
http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?stifte

Riemer-Quader
http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?quader



Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Stochastik in der Sekundarstufe I

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Stochastik und Modulare Mathematik-Systeme (MMS)

RPTU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Darstellende Statistik

- Diagramme
- dynamische Variation

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- realisieren
- variieren (Abhängigkeit von Parametern)

Zufallsexperimente

- auswerten
- simulieren
- Vierfeldertafeln
  (vgl. 3.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit)
- Baumdiagramme

GeoGebra: Befehle zur Stochastik

Mittelwerte

- Modalwert
- Median
- arithmetisches Mittel
- geometrisches Mittel

GeoGebra-Befehle für Mittelwerte

- Modalwert(<Liste von Daten (LvD)>)
- Median(<LvD>)
- Mittel(<LvD>)
- GeometrischerMittelwert(<LvD>)

Streuungsmaße

- Spannweite
- Quartilsabstand
- mittlere lineare Abweichung
- Varianz
- Standardabweichung

TKP-Befehle für Streuungsmaße

- Max(<LvD>) – Min(<LvD>)
- Quartil3(<LvD>) – Quartil1(<LvD>)
- Mittelabw()
- Varianz(<LvD>) bzw. Stichprobenvarianz(<LvD>)
- Standardabweichung(<LvD>) bzw. StichprobenStandardabweichung(<LvD>)

GeoGebra: Befehle zur Stochastik (Sek. I/II)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zufallszahl

- Zufallszahl aus einem Bereich
- Binomialverteilte Zufallszahl
- Normalverteile Zufallszahl

GeoGebra-Befehle für Zufallszahlen

- Zufallszahl(<Min>,<Max>)
- ZufallszahlBinomialverteilt(n, p)
- ZufallszahlNormalverteilt(μ, σ)

Bedingung

- Wenn, dann, sonst

GeoGebra-Befehl für Bedingungen

- Wenn(<Bedingung>, <dann>, <sonst>)

Anzahl

- Anzahl eines bestimmten Werts

GeoGebra-Befehl für Anzahlen

- ZähleWenn(<Bedingung>, <LvD>)

Binomialkoeffizient

- Berechnung von $\binom{n}{k}$

GeoGebra-Befehl für $\binom{n}{k}$

- nCr(n, k)

GeoGebra: Befehle zur Stochastik (Sek. II)

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Balkendiagramm einer
- Binomialverteilung
- kumulierten Binomialverteilung

GeoGebra-Befehle für Binomialverteilung
- Binomial(n, p, false)
- Binomial(n, p, true)

X ist $B(n; p)$-Zufallsvariable
- $P(X = k)$
- $P(x \leq k)$

GeoGebra-Befehle Binomialverteilung
- Binomial(n, p, k, false)
- Binomial(n, p, k, true)

Normalverteilung
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
- kumulierte Verteilungsfunktion

GeoGebra-Befehl für Normalverteilung
- Normal(μ, σ, x, false)
- Normal(μ, σ, x, true)

Normalverteilung
- $\Phi^{-1}(p) \cdot \sigma + \mu$
  Wert der $N(\mu; \sigma)$-verteilten Zufallsgröße X, der zum gegebenen p-Wert gehört

GeoGebra-Befehl für Normalverteilung
- InversNormal(μ, σ, p)

Tabellenkalkulationsprogramm (TKP)
Befehle zur Stochastik

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Mittelwerte
- Modalwert
- Median
- arithmetisches Mittel
- geometrisches Mittel

TKP-Befehle für Mittelwerte
- Modalwert()
- Median()
- Mittelwert()
- Geomittel()

Streuungsmaße
- Spannweite
- Quartilsabstand
- mittlere lineare Abweichung
- Varianz
- Standardabweichung

TKP-Befehle für Streuungsmaße
- Max() – Min()
- Quartile(;3) – Quartile(;1)
- Mittelabw()
- Varianzen() GG bzw. Varianz() SP
- Stabwn() GG bzw. Stabw() SP

GG: Grundgesamtheit **SP**: Stichprobe

Tabellenkalkulationsprogramm (TKP)
Befehle zur Stochastik

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Zufallszahl

- Zufallszahl aus [0; 1[
- Zufallszahl aus einem Bereich

TKP-Befehle für Zufallszahlen

- Zufallszahl() neue Zufallszahlen: Taste F9
- Zufallsbereich(von; bis) (ganze Zahl)

Bedingung

- Wenn, dann, sonst

TKP-Befehle für Bedingungen

- Wenn(Bedingung; dann; sonst)

Anzahl

- Anzahl bestimmen
- Anzahl eines bestimmten Werts

TKP-Befehle für Anzahlen

- Anzahl(Bereich)
- Zählenwenn(Bereich; Wert)

GG: Grundgesamtheit **SP**: Stichprobe

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

Aufgabe

Wie groß ist die Wahrschein-lichkeit, dass in einer Klasse mit 24 Schüler/inne/n mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Geburtstagsparadoxon

Befinden sich in einem Raum mindestens 23 Personen, dann ist die Chance, dass zwei oder mehr dieser Personen am gleichen Tag (ohne Beachtung des Jahrganges) Geburtstag haben, größer als 50 %.

Klasse 5a			Klasse 5b			Klasse 5c		
Schüler	Geburtstag	doppelt	Schüler	Geburtstag	doppelt	Schüler	Geburtstag	doppelt
1	135	0	1	245	0	1	277	0
2	230	0	2	65	0	2	294	0
3	210	0	3	66	0	3	129	0
4	253	0	4	191	0	4	34	0
5	318	0	5	200	0	5	125	0
6	161	0	6	67	0	6	163	0
7	92	0	7	125	0	7	62	0
8	45	0	8	364	0	8	162	0
9	288	0	9	195	0	9	189	0
10	143	0	10	283	0	10	21	0
11	124	0	11	178	0	11	182	0
12	219	0	12	107	0	12	254	0
13	155	0	13	21	0	13	246	0
14	9	0	14	58	0	14	129	1
15	115	0	15	90	0	15	136	0
16	230	1	16	36	0	16	262	0
17	187	0	17	335	0	17	156	0
18	89	0	18	19	0	18	171	0
19	362	0	19	253	0	19	79	0
20	96	0	20	125	1	20	227	0
21	68	0	21	148	0	21	179	0
22	66	0	22	357	0	22	147	0
23	179	0	23	125	2	23	98	0
24	74	0	24	21	1	24	62	1

3 Wahrscheinlichkeits-rechnung

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

Kernideen im Fokus
bei Grundbegriffen für diskrete Zufallsexperimente

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit) ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

- Struktur erfassen (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Lehrplan RLP: Leistungskurs

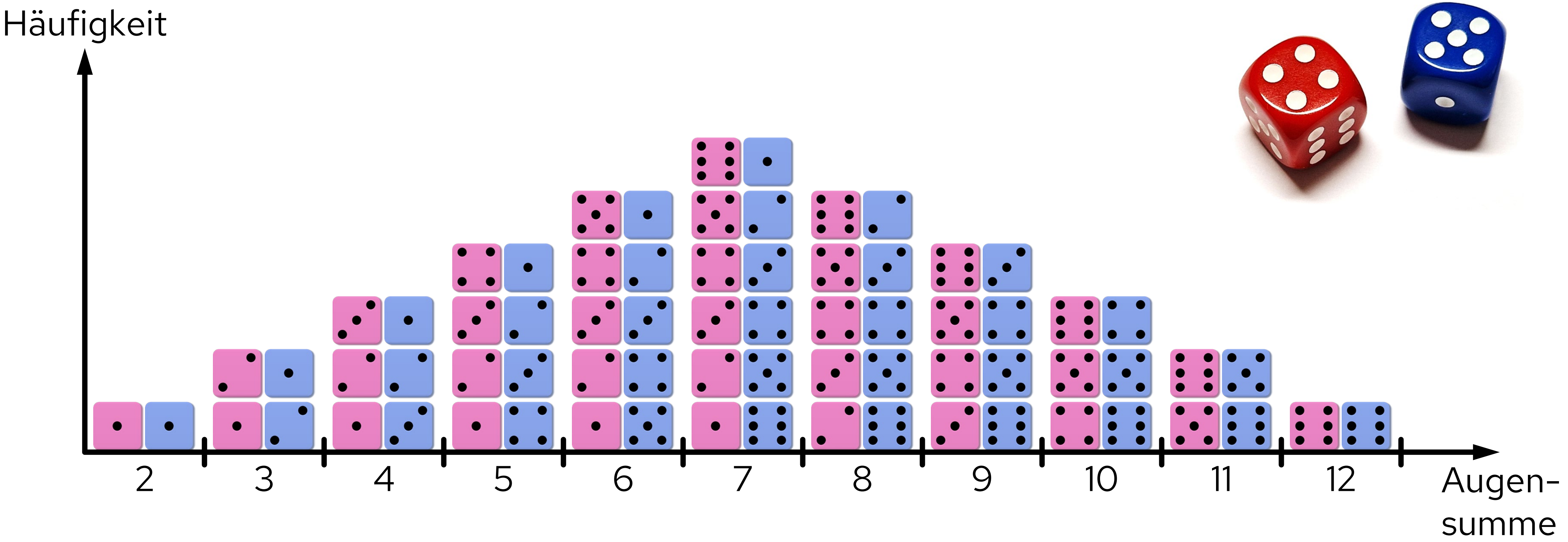
	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1.	Zufallsexperimente durch ihre Ergebnismengen beschreiben	

Lehrplan RLP: Grundkurs – Stochastik 1

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1.	Zufallsexperimente durch ihre Ergebnismengen beschreiben	

MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), S. 33 & 53

Beispiel: **Würfeln mit zwei Würfeln**



Grundbegriffe am Beispiel
Würfeln mit zwei Würfeln

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

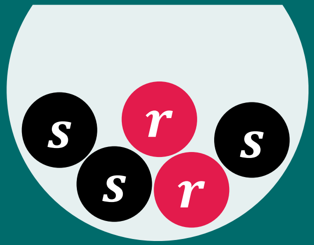
Begriff	Erläuterung	Beispiel
Ergebnis	Möglicher Ausgang des Zufallsexperiments	$(1{,}2)$
Ergebnismenge/-raum (Menge aller Ergebnisse des Zufallsexperiments)	$\Omega = \{(1{,}1); (1{,}2); (2{,}1); (1{,}3); (2{,}2); (3{,}1); (1{,}4); (2{,}3); (3{,}2); (4{,}1); (1{,}5); (2{,}4); (3{,}3); (4{,}2); (5{,}1); (1{,}6); (2{,}5); (3{,}4); (4{,}3); (5{,}2); (6{,}1); (2{,}6); (3{,}5); (4{,}4); (5{,}3); (6{,}2); (3{,}6); (4{,}5); (5{,}4); (6{,}3); (4{,}6); (5{,}5); (6{,}4); (5{,}6); (6{,}5); (6{,}6)\}$	
Ereignis	Teilmenge von Ω	$E(\text{Augensumme ist } 4) = \{(1{,}3); (2{,}2); (3{,}1)\} \subseteq \Omega$
Ereignismenge	Potenzmenge $\wp(\Omega) :=$ Menge aller Teilmengen von Ω	
Elementarereignis	Einelementige Teilmenge von Ω	$\{(6{,}4)\} \subseteq \Omega$
Sicheres Ereignis	$E = \Omega$	$E(\text{Augensumme (AS) größer als } 1) = \Omega$
Unmögliches Ereignis	$E = \emptyset = \{\}$	$E(\text{Augensumme ist } 1) = \emptyset = \{\}$
Unvereinbare Ereignisse	$E_1, E_2 \subseteq \Omega$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$	$\{(1{,}1)\}, \{(6{,}6)\} \subseteq \Omega$ mit $\{(1{,}1)\} \cap \{(6{,}6)\} = \emptyset$
Gegenereignis	$\bar{E} = \Omega \setminus \mathrm{E}$, Komplement von E	$\bar{E}(\text{AS kleiner } 12) := \Omega \setminus \mathrm{E}(\text{AS kleiner } 12) = \{(6{,}6)\}$
Und-Ereignis	$E_1 \cap E_2$	$E(\text{Mindestens eine } 3) \cap E(\text{AS gleich } 4) = \{(1{,}3); (3{,}1)\}$
Oder-Ereignis	$E_1 \cup E_2$	$E(\text{AS ist } 3) \cup E(\text{AS ist } 11) = \{(1{,}2); (2{,}1); (5{,}6); (6{,}5)\}$

Ergebnisraum vergröbern & verfeinern

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Urnenexperiment

Aus einer Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln wird zweimal nacheinander gezogen.



Mögliche Ergebnismengen (-räume)

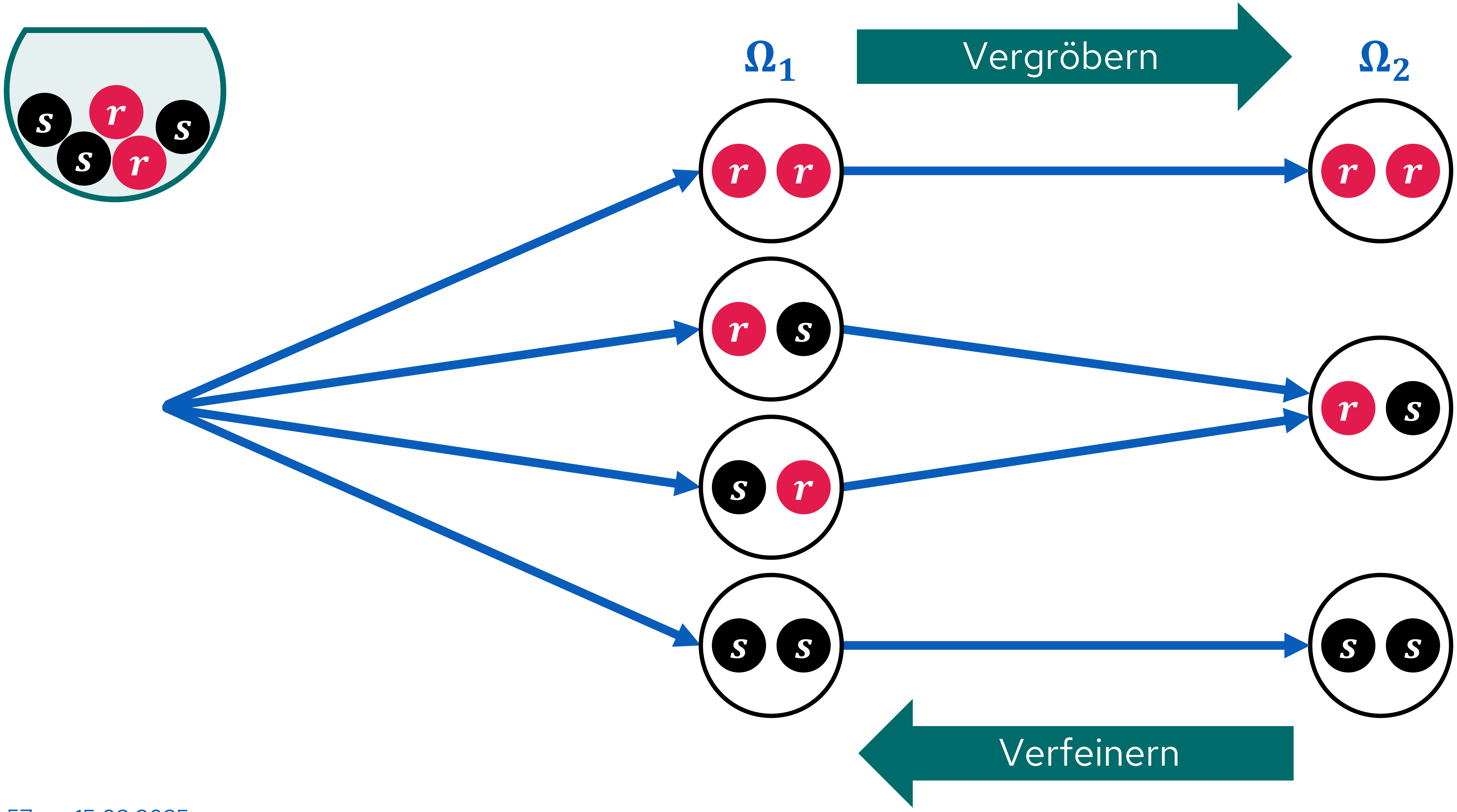
(1) Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln interessiert. $\Omega_1 = \{(r,r); (r,s); (s,r); (s,s)\}$

(2) Es interessiert nur die Farbe der gezogenen Kugeln, aber nicht deren Reihenfolge. $\Omega_2 = \{rr, rs, ss\}$

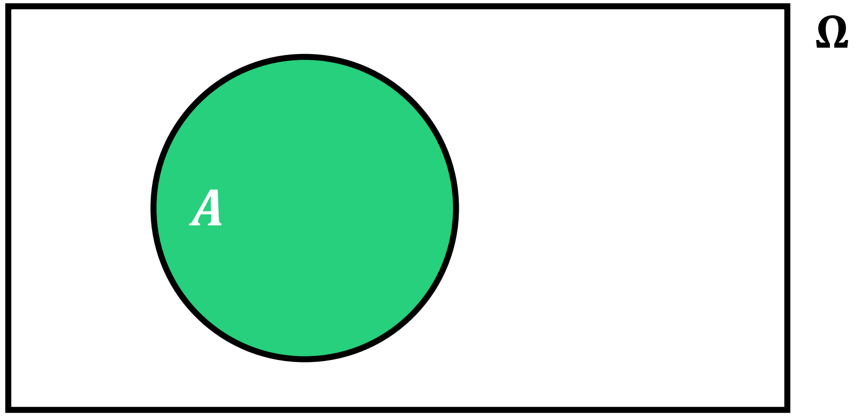
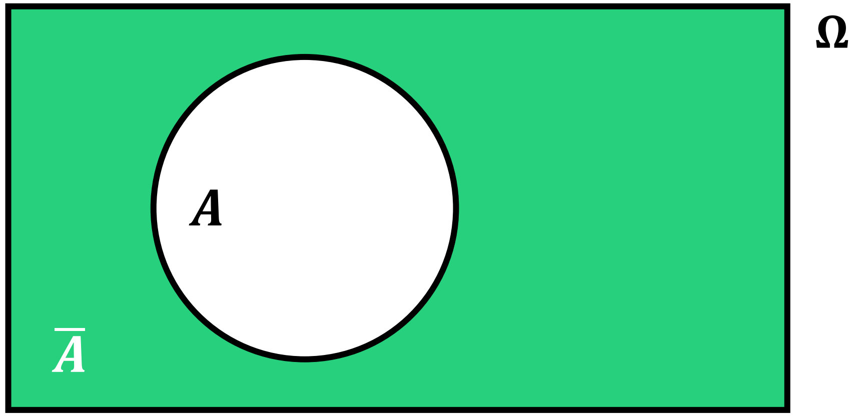
Anmerkung

Ein weiteres Kriterium für die Art der Darstellung eines Ergebnisraumes kann die Frage sein, ob die resultierenden Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sein sollen oder nicht.

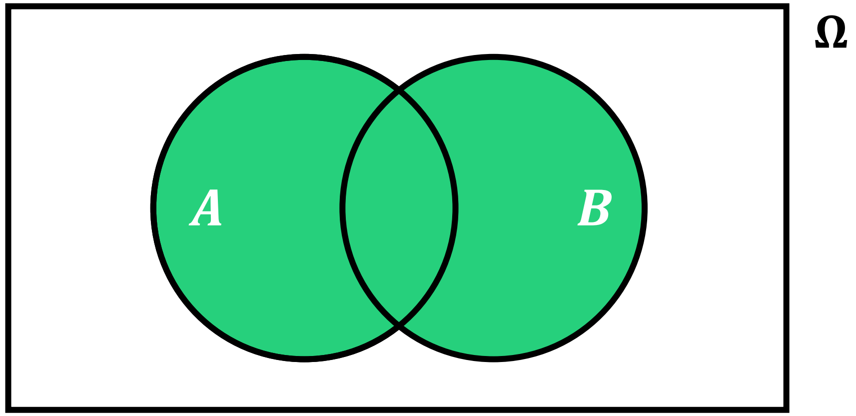
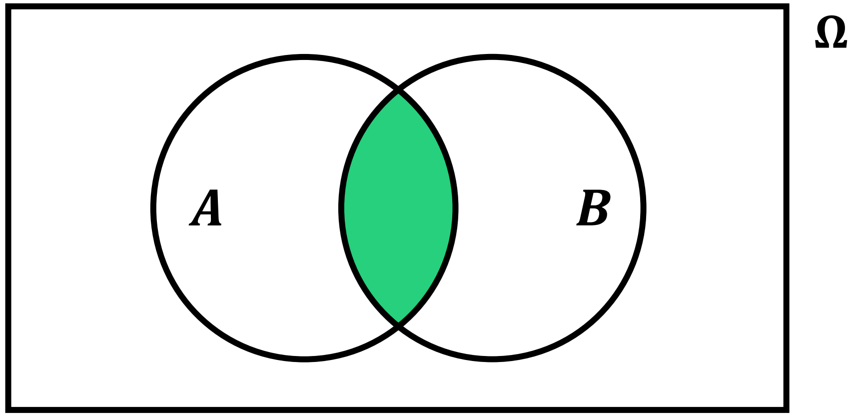
Ergebnisraum vergröbern & verfeinern



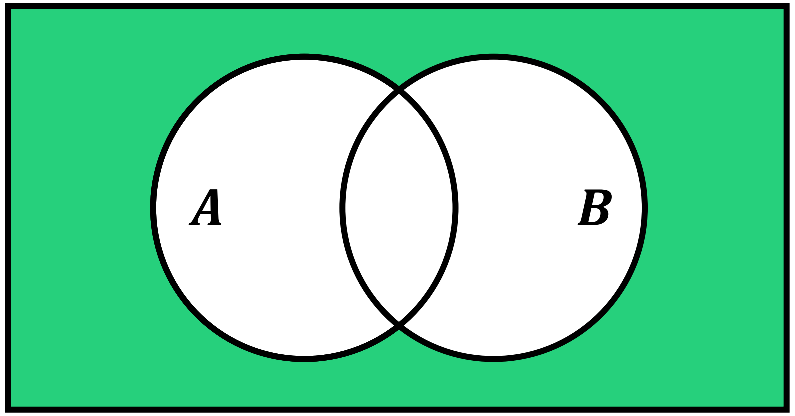
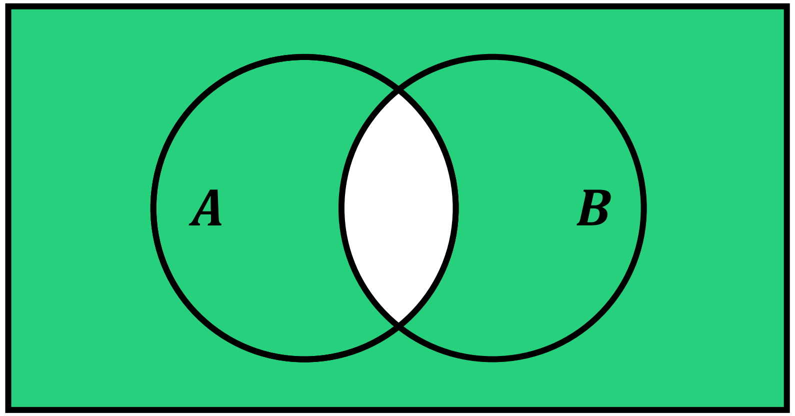
Verknüpfung von Ereignissen

Schreibweise	Ereignis	Bedeutung	Veranschaulichung im Venn-Diagramm
$\boldsymbol{A}$	„$\boldsymbol{A}$“	$\boldsymbol{A}$ tritt ein, wenn das Ergebnis eines der Elemente von $\boldsymbol{A}$ ist.	
$\overline{\boldsymbol{A}}$	„nicht $\boldsymbol{A}$“ „Gegenereignis zu $\boldsymbol{A}$“	$\overline{\boldsymbol{A}}$ tritt ein, wenn $\boldsymbol{A}$ nicht eintritt.	

Verknüpfung von Ereignissen

Schreibweise	Ereignis	Bedeutung	Veranschaulichung im Venn-Diagramm
$A \cup B$	„A oder B"	$A \cup B$ tritt ein, wenn A oder auch B eintritt.	
$A \cap B$	„A und B"	$A \cap B$ tritt ein, wenn A und zugleich B eintritt.	

Verknüpfung von Ereignissen

Schreibweise	Ereignis	Bedeutung	Veranschaulichung im Venn-Diagramm
$\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}}$	„nicht $\boldsymbol{A}$ und nicht $\boldsymbol{B}$"	$\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$ tritt ein, wenn weder $\boldsymbol{A}$ noch $\boldsymbol{B}$ eintritt.	 $\boldsymbol{\Omega}$
$\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}}$	„nicht $\boldsymbol{A}$ oder nicht $\boldsymbol{B}$"	$\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$ tritt ein, wenn höchstens eines der beiden Ereignisse $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ eintritt.	 $\boldsymbol{\Omega}$

MaTeGnu

Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kernideen im Fokus
bei Wahrscheinlichkeit

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Lehrplan RLP: Leistungskurs

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
2.	Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3.	Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen begründen und anwenden (5.02g, 5.03g)	z.B. Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge von Ereignissen
4.	Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallszahlen simulieren und die Ergebnisse der Simulation interpretieren (5.05g)	Für die Durchführung der Simulationen sollte der Computer benutzt werden. Die SuS sollen erfahren, dass Simulationen dort sinnvoll eingesetzt werden, wo eine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung nicht möglich oder zu komplex ist. Im Unterricht können durch Simulationen auch wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen und Formeln vorbereitet oder bestätigt werden.

 MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), S. 53f

Lehrplan RLP: Grundkurs
Stochastik 1

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
2.	Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren (5.02g, 5.03g, 4.12g)	Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3.	Einfache Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen anwenden (5.02g)	z.B. Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

 MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), S. 33

Zugänge zur Wahrscheinlichkeit

Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- **Subjektive Wahrscheinlichkeit**
- **Frequentistische Wahrscheinlichkeit**
- **Laplace-Wahrscheinlichkeit**
- **Axiomatische Wahrscheinlichkeit**

3.4.0 Zusammenfassender Einstieg: Hypothetisch-prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Hypothetisch-prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Paradigmen

(1) Hypothetisch-prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff als Basis

(2) Modell und Realität klar unterscheiden und konsequent trennen

(3) Zufallsschwankungen untersuchen und gerade nicht wegwünschen

(4) Authentische Probleme bearbeiten

(5) Die Schritte Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren konsequent durchlaufen

Realitätsebene	Modellebene
Relative Häufigkeiten	**Wahrscheinlichkeiten**
$h_1 + \cdots + h_n = 100\%$	$p_1 + \cdots + p_n = 100\%$
Leben im „Becher“	Leben im „Kopf“
zurück schauen	nach vorne schauen
schwanken zufällig	werden festgelegt, bezweifelt, verbessert, …
Im Fall von Teilsymmetrien: ungefähr gleich	Im Fall von Teilsymmetrien: genau gleich
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \cdots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \cdots + x_n \cdot p_n$
Standardabw. (empirisch) $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i}$	Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$

Riemer-Quader: http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?quader
Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 17-26 • Riemer, W. & Kuntze, S. (2024). Der Dubuffetsche Wahrscheinlichkeitsbegriff – Wahrscheinlichkeiten sind unsichere Festlegungen, die dadurch entstehen, dass aus Erfahrung Erwartung wird. MNU, 77(5), 367-374

Riemer-Quader oder Lego-Stein

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

R TU P Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Spekulieren

Aufgabe: Jede(r) erhält einen Riemer-Quader.
(Quader im Foto links. Gegenüberliegende Zahlen ergänzen sich zu 7.)
Sehen Sie sich die Quader genau an und schätzen Sie die Chancen der sechs Augenzahlen in Prozent.
Nicht würfeln, nur schätzen! Ungefähr! Nach Gefühl!

Lernende beraten intensiv, machen Prozentangaben und beachten intuitiv:

- Gegenseiten haben gleiche Chancen.
- Große Seiten haben große Chancen.
- Alle Chancen addieren sich zu 100%.

Schätzungen in einer Tabelle festhalten und Glaubwürdigkeit diskutieren!

Hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Schätzungen und „berechnete Proportionalitätshypothese“

einige Schätzungen	1	2	3	4	5	6	Σ	Glaubwürdigk.
Rene'	10%	5%	35%	35%	5%	10%	100%	30%
Stefan	15%	10%	25%	25%	10%	15%	100%	10%
Alexa	10%	12%	35%	20%	15%	8%	100%	0%
Joanna	15%	15%	20%	20%	15%	15%	100%	0%
Jasmin	15%	5%	30%	30%	5%	15%	100%	50%
Fläche cm²	2.99	2.6	4.6	4.6	2.6	2.99	20.38	
	14.7%	12.8%	22.6%	22.6%	12.8%	14.7%	100%	10%

Riemer-Quader: http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?quader
Riemer, W. (o. J.). Mit Quadern „würfeln“ – Wahrscheinlichkeit als Modell der Wirklichkeit erleben - Modellierungskreislauf
Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 17-26

Riemer-Quader oder Lego-Stein

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Experimentieren

Aufgabe

Würfeln Sie 100-mal mit dem Riemer-Würfel und halten Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle fest. Die Ergebnisse von jeweils fünf Lernenden werden in 5er-Gruppen zusammengefasst.

Würfelergebnisse von zwei 5er-Gruppen

Patrick	10	6	28	41	4	11	100
Daniel	6	7	35	45	4	3	100
Binoy	7	4	37	34	1	17	100
Tobias	3	6	48	33	6	4	100
Michael	12	0	28	42	7	11	100
abs. H.	38	23	176	195	22	46	500
%	7.6%	4.6%	35.2%	39.0%	4.4%	9.2%	100%

Paula	11	6	34	32	7	10	100
Elaine	14	10	28	24	9	15	100
Marie	4	6	41	32	11	6	100
Marga	10	6	34	29	7	14	100
Sandra	7	4	30	37	4	18	100
abs. H.	46	32	167	154	38	63	500
%	9.2%	6.4%	33.4%	30.8%	7.6%	12.6%	100%

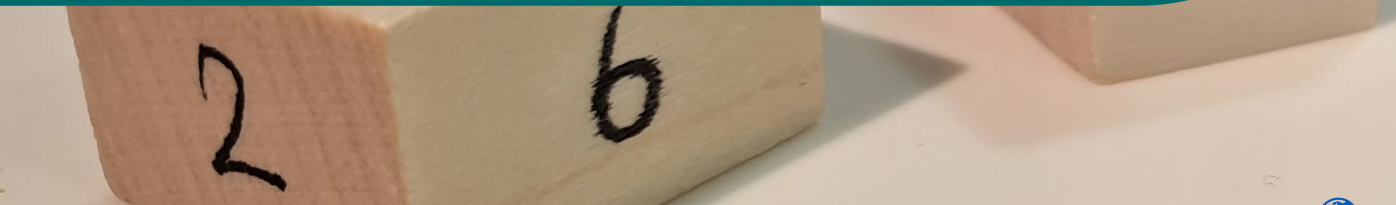
Summe (27 SuS)	279	207	834	883	204	293	2700
%	10.3%	7.7%	30.9%	32.7%	7.6%	10.9%	100%

Reflektieren

Wahrscheinlichkeiten sagen relative Häufigkeiten auf lange Sicht voraus. Sie sind gut gewählt, wenn die (durch Zufallseinflüsse schwankenden) relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeit pendeln, also etwa gleich oft über und unter der Wahrscheinlichkeit liegen.

Konsensfähige geschätzte Wahrscheinlichkeiten

brauchbare "Hypothese" A	11.0%	8.0%	31.0%	31.0%	8.0%	11.0%	100%
brauchbare "Hypothese" B	10.5%	8.0%	31.5%	31.5%	8.0%	10.5%	100%

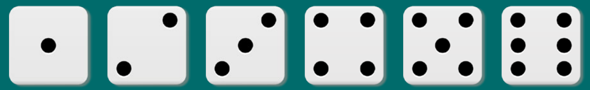


Riemer-Quader: http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?quader
Riemer, W. (o. J.). Mit Quadern „würfeln" – Wahrscheinlichkeit als Modell der Wirklichkeit erleben - Modellierungskreislauf
Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 17-26

Würfeln
Normaler Würfel ↔ LEGO-Stein

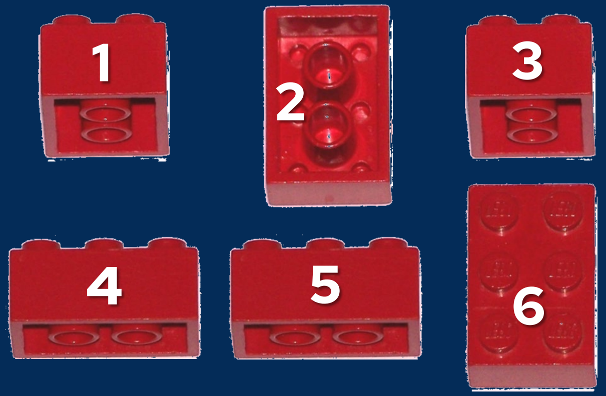
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Normaler Würfel



- Intuitive Annahme (wegen der Symmetrie des Würfels): Das Auftreten der sechs Augenzahlen ist gleich wahrscheinlich.
- Ziel des Sammelns empirischer Daten (durch Werfen des Würfels): Gewähltes Modell (der Gleichverteilung) untersuchen und ggf. modifizieren (gezinkter Würfel).
- Ergebnis des Werfens: Bei Kumulation der Ergebnisse stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten und pendeln sich zumindest annähernd bei dem im Modell zugrunde liegenden Wert von $\frac{1}{6}$ ein.
- Diese Erkenntnis zum empirischen Gesetz der großen Zahlen kann für das Aufstellen von Modellen für nicht- oder teilsymmetrische Zufallsgeneratoren wie den LEGO-Würfel wesentlich sein und das Vertrauen in die Schätzgüte langer Versuchsreihen unterstützen.

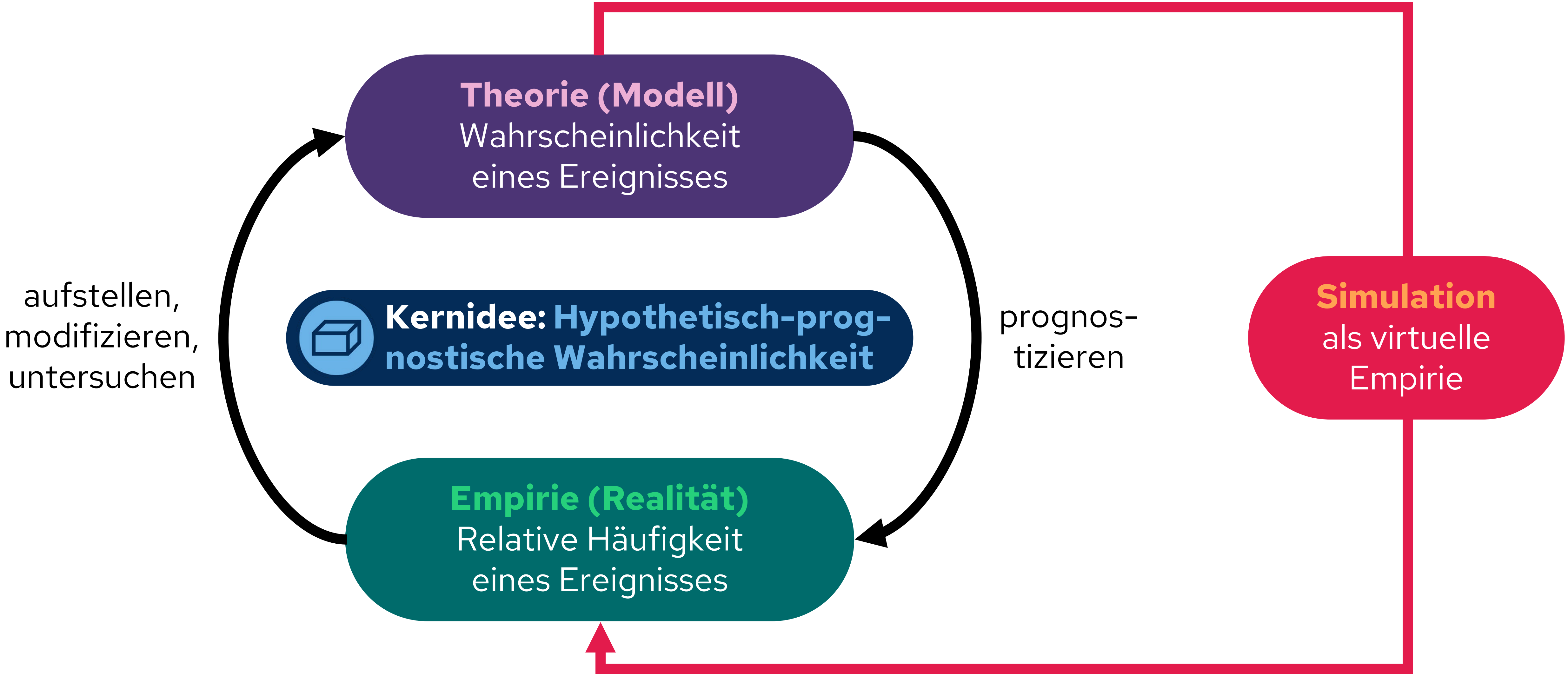
LEGO-Stein



- Spekulieren: Modell(e) zur erwarteten relativen Häufigkeit des Auftretens der jeweiligen Augenzahlen aufstellen.
- Experimentieren: Lange Versuchsreihen durchführen (alle würfeln jeweils 100-mal) und Ergebnisse visualisieren.
- Reflektieren: Modellkritik: Verwerfen oder Stützen und ggf. anpassen von Modellen
- Simulieren: Passung des angepassten Modells zur Realität untersuchen.

https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/wuerfel_versuchsauswertung.xlsx
https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/lego-wuerfel_versuchsauswertung.xlsx

Empirie (Realität) ↔ Theorie (Modell)



Eichler, A. (2014). Simulation als Bindeglied zwischen der empirischen Welt der Daten und der theoretischen Welt des Zufalls. In T. Wassong et al. (Hrsg.). Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen (S. 251-265), Wiesbaden: Springer.

Würfeln mit einem Spielwürfel 

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

	1			2			3			4			5			6		
n	H({1})	kH({1})	h({1})	H({2})	kH({2})	h({2})	H({3})	kH({3})	h({3})	H({4})	kH({4})	h({4})	H({5})	kH({5})	h({5})	H({6})	kH({6})	h({6})
100	21	21	21,0%	16	16	16,0%	20	20	20,0%	20	20	20,0%	10	10	10,0%	13	13	13,0%
200	14	35	17,5%	24	40	20,0%	19	39	19,5%	18	38	19,0%	15	25	12,5%	10	23	11,5%
300	17	52	17,3%	15	55	18,3%	14	53	17,7%	13	51	17,0%	19	44	14,7%	22	45	15,0%
400	19	71	17,8%	15	70	17,5%	15	68	17,0%	14	65	16,3%	17	61	15,3%	20	65	16,3%
500	17	88	17,6%	14	84	16,8%	15	83	16,6%	20	85	17,0%	18	79	15,8%	16	81	16,2%
600	17	105	17,5%	14	98	16,3%	26	109	18,2%	15	100	16,7%	16	95	15,8%	12	93	15,5%
700	15	120	17,1%	11	109	15,6%	24	133	19,0%	23	123	17,6%	21	116	16,6%	6	99	14,1%
800	17	137	17,1%	22	131	16,4%	22	155	19,4%	11	134	16,8%	12	128	16,0%	16	115	14,4%
900	15	152	16,9%	18	149	16,6%	15	170	18,9%	17	151	16,8%	15	143	15,9%	20	135	15,0%
1000	23	175	17,5%	25	174	17,4%	14	184	18,4%	11	162	16,2%	17	160	16,0%	10	145	14,5%
1100	13	188	17,1%	21	195	17,7%	11	195	17,7%	16	178	16,2%	15	175	15,9%	24	169	15,4%
1200	15	203	16,9%	22	217	18,1%	18	213	17,8%	15	193	16,1%	11	186	15,5%	19	188	15,7%
1300	16	219	16,8%	22	239	18,4%	20	233	17,9%	11	204	15,7%	15	201	15,5%	16	204	15,7%
1400	13	232	16,6%	17	256	18,3%	16	249	17,8%	22	226	16,1%	15	216	15,4%	17	221	15,8%
1500	14	246	16,4%	16	272	18,1%	14	263	17,5%	21	247	16,5%	16	232	15,5%	19	240	16,0%
1600	19	265	16,6%	9	281	17,6%	15	278	17,4%	19	266	16,6%	18	250	15,6%	20	260	16,3%
1700	20	285	16,8%	12	293	17,2%	15	293	17,2%	20	286	16,8%	12	262	15,4%	21	281	16,5%
1800	12	297	16,5%	14	307	17,1%	18	311	17,3%	13	299	16,6%	20	282	15,7%	23	304	16,9%
1900	10	307	16,2%	16	323	17,0%	29	340	17,9%	15	314	16,5%	15	297	15,6%	15	319	16,8%
2000	17	324	16,2%	20	343	17,2%	21	361	18,1%	14	328	16,4%	15	312	15,6%	13	332	16,6%

H: absolute Häufigkeit kH: kumulierte absolute Häufigkeit h: relative Häufigkeit

Simulation:
Würfeln mit einem Spielwürfel

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

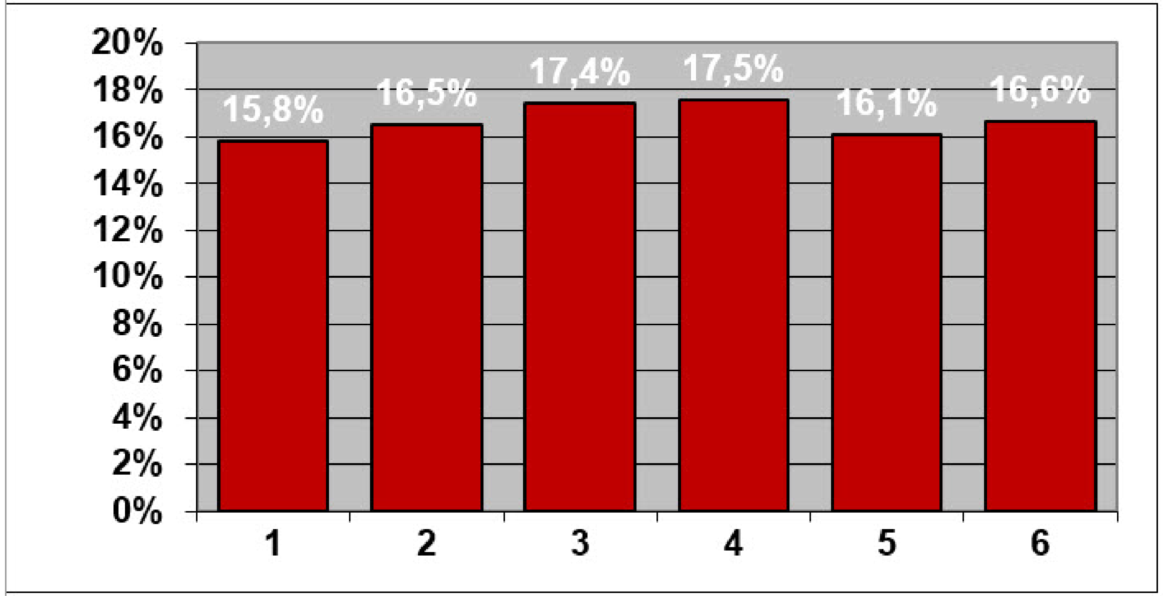
Hier bitte die empirisch gestützte Hypothese zur Wahrscheinlichkeitsverteilung eintragen

Hypothese zur Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667

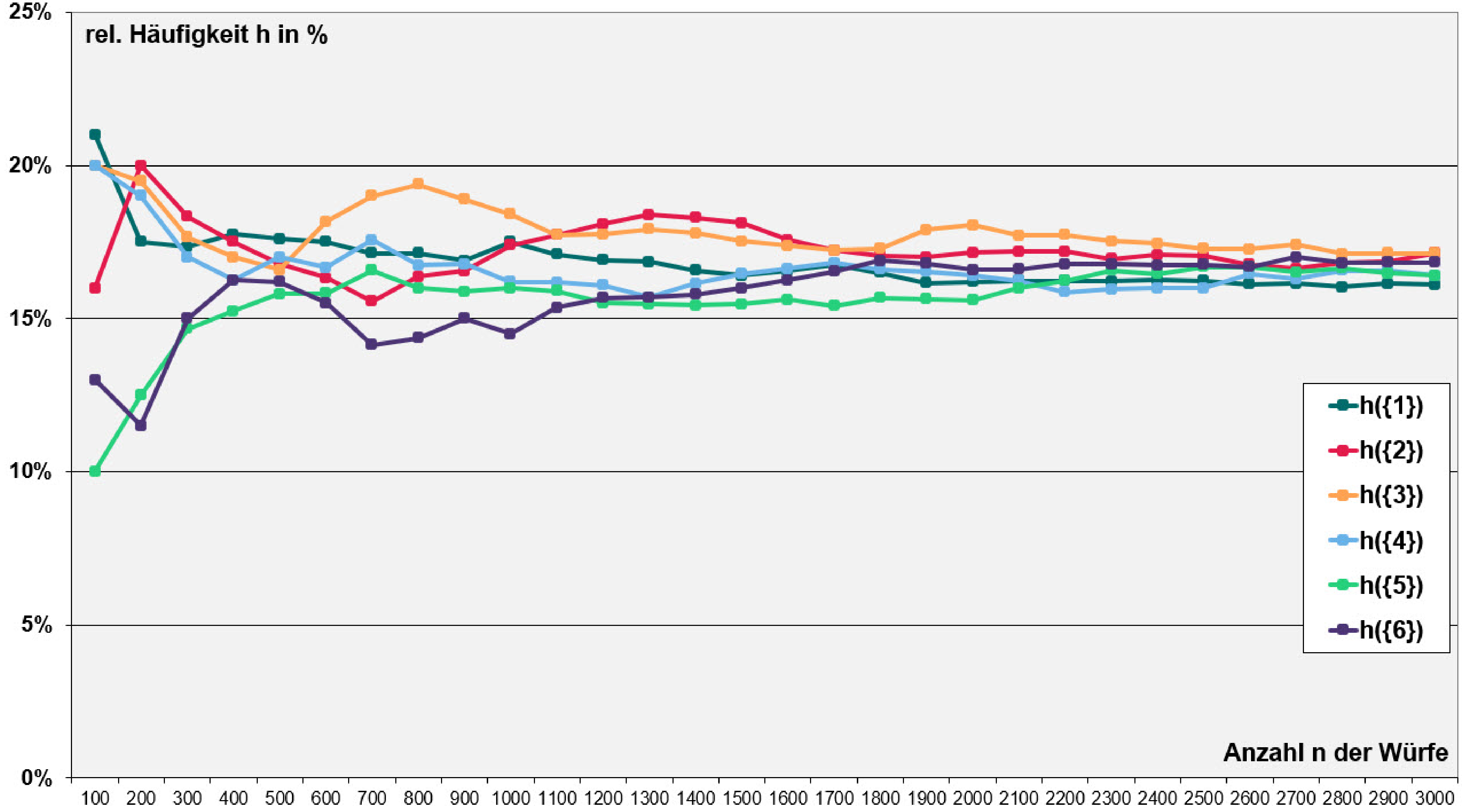
Simulation: Anzahl der simulierten Würfe 3000
Neue 3000-Serie: Taste F9 drücken!

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
abs. Häufigkeit	474	496	522	526	483	499
relative Häufigkeit	15,8%	16,5%	17,4%	17,5%	16,1%	16,6%



https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/wuerfel_versuchsauswertung.xlsx
https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/Simulation_wuerfeln_mit_einem_Wuerfel.xlsx

Simulation:
Würfeln mit einem Spielwürfel



 https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/Simulation_wuerfeln_mit_einem_Wuerfel.xlsx

Würfeln mit einem LEGO-Stein

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

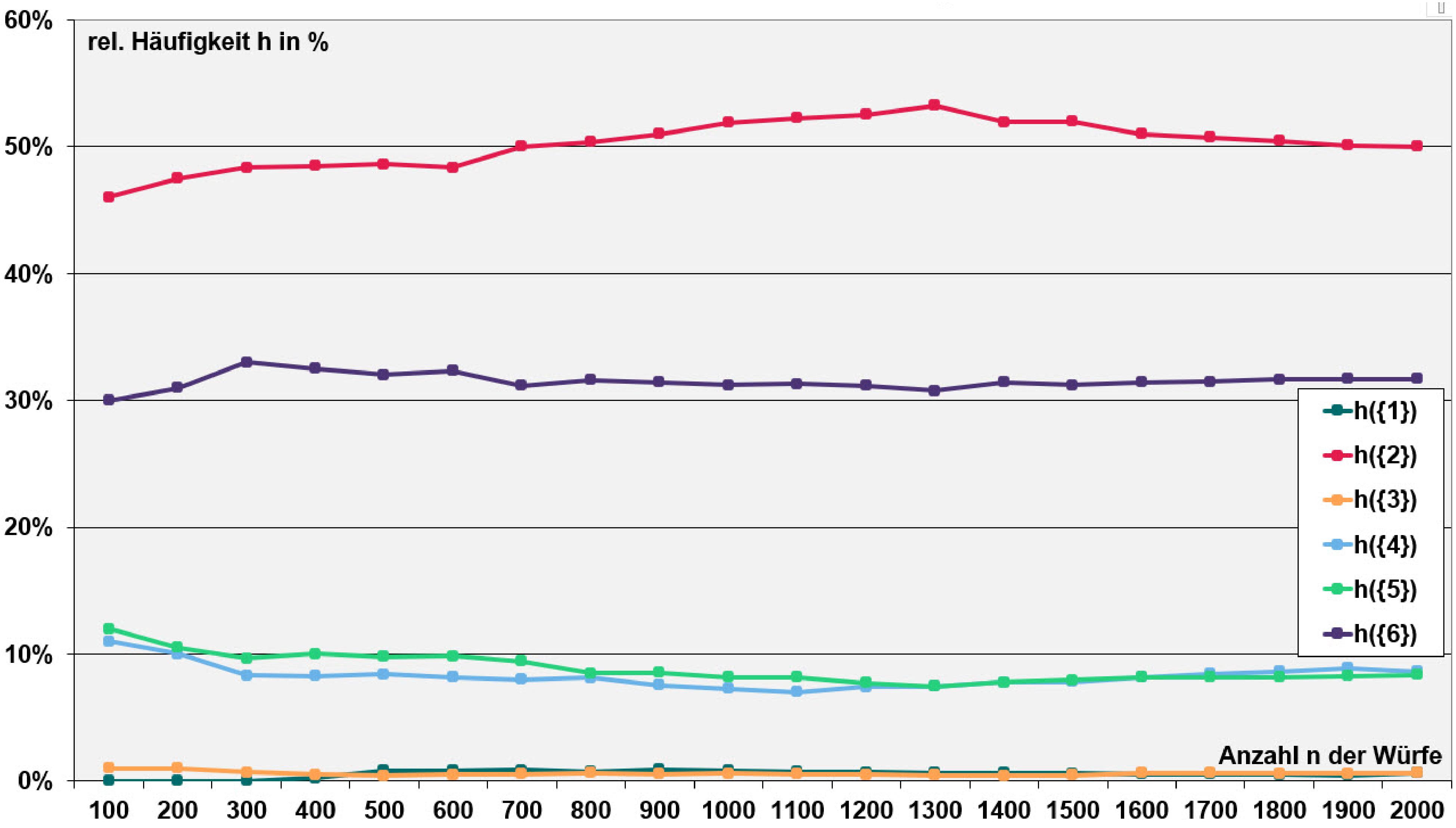
	1			2			3			4			5			6		
n	H({1})	kH({1})	h({1})	H({2})	kH({2})	h({2})	H({3})	kH({3})	h({3})	H({4})	kH({4})	h({4})	H({5})	kH({5})	h({5})	H({6})	kH({6})	h({6})
100	0	0	0,0%	46	46	46,0%	1	1	1,0%	11	11	11,0%	12	12	12,0%	30	30	30,0%
200	0	0	0,0%	49	95	47,5%	1	2	1,0%	9	20	10,0%	9	21	10,5%	32	62	31,0%
300	0	0	0,0%	50	145	48,3%	0	2	0,7%	5	25	8,3%	8	29	9,7%	37	99	33,0%
400	1	1	0,3%	49	194	48,5%	0	2	0,5%	8	33	8,3%	11	40	10,0%	31	130	32,5%
500	3	4	0,8%	49	243	48,6%	0	2	0,4%	9	42	8,4%	9	49	9,8%	30	160	32,0%
600	1	5	0,8%	47	290	48,3%	1	3	0,5%	7	49	8,2%	10	59	9,8%	34	194	32,3%
700	1	6	0,9%	60	350	50,0%	1	4	0,6%	7	56	8,0%	7	66	9,4%	24	218	31,1%
800	0	6	0,8%	53	403	50,4%	1	5	0,6%	9	65	8,1%	2	68	8,5%	35	253	31,6%
900	2	8	0,9%	56	459	51,0%	0	5	0,6%	3	68	7,6%	9	77	8,6%	30	283	31,4%
1000	0	8	0,8%	60	519	51,9%	1	6	0,6%	5	73	7,3%	5	82	8,2%	29	312	31,2%
1100	0	8	0,7%	56	575	52,3%	0	6	0,5%	4	77	7,0%	8	90	8,2%	32	344	31,3%
1200	0	8	0,7%	55	630	52,5%	0	6	0,5%	12	89	7,4%	3	93	7,8%	30	374	31,2%
1300	0	8	0,6%	62	692	53,2%	0	6	0,5%	8	97	7,5%	4	97	7,5%	26	400	30,8%
1400	1	9	0,6%	35	727	51,9%	0	6	0,4%	12	109	7,8%	12	109	7,8%	40	440	31,4%
1500	0	9	0,6%	53	780	52,0%	1	7	0,5%	8	117	7,8%	10	119	7,9%	28	468	31,2%
1600	0	9	0,6%	36	816	51,0%	3	10	0,6%	14	131	8,2%	12	131	8,2%	35	503	31,4%
1700	0	9	0,5%	46	862	50,7%	1	11	0,6%	13	144	8,5%	8	139	8,2%	32	535	31,5%
1800	0	9	0,5%	46	908	50,4%	0	11	0,6%	11	155	8,6%	8	147	8,2%	35	570	31,7%
1900	0	9	0,5%	44	952	50,1%	0	11	0,6%	14	169	8,9%	10	157	8,3%	32	602	31,7%
2000	4	13	0,7%	48	1000	50,0%	2	13	0,7%	4	173	8,7%	10	167	8,4%	32	634	31,7%

H: absolute Häufigkeit   kH: kumulierte absolute Häufigkeit   h: relative Häufigkeit

https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/lego-wuerfel_versuchsauswertung.xlsx
https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/lego-wuerfel_versuchsauswertung_daten.xlsx

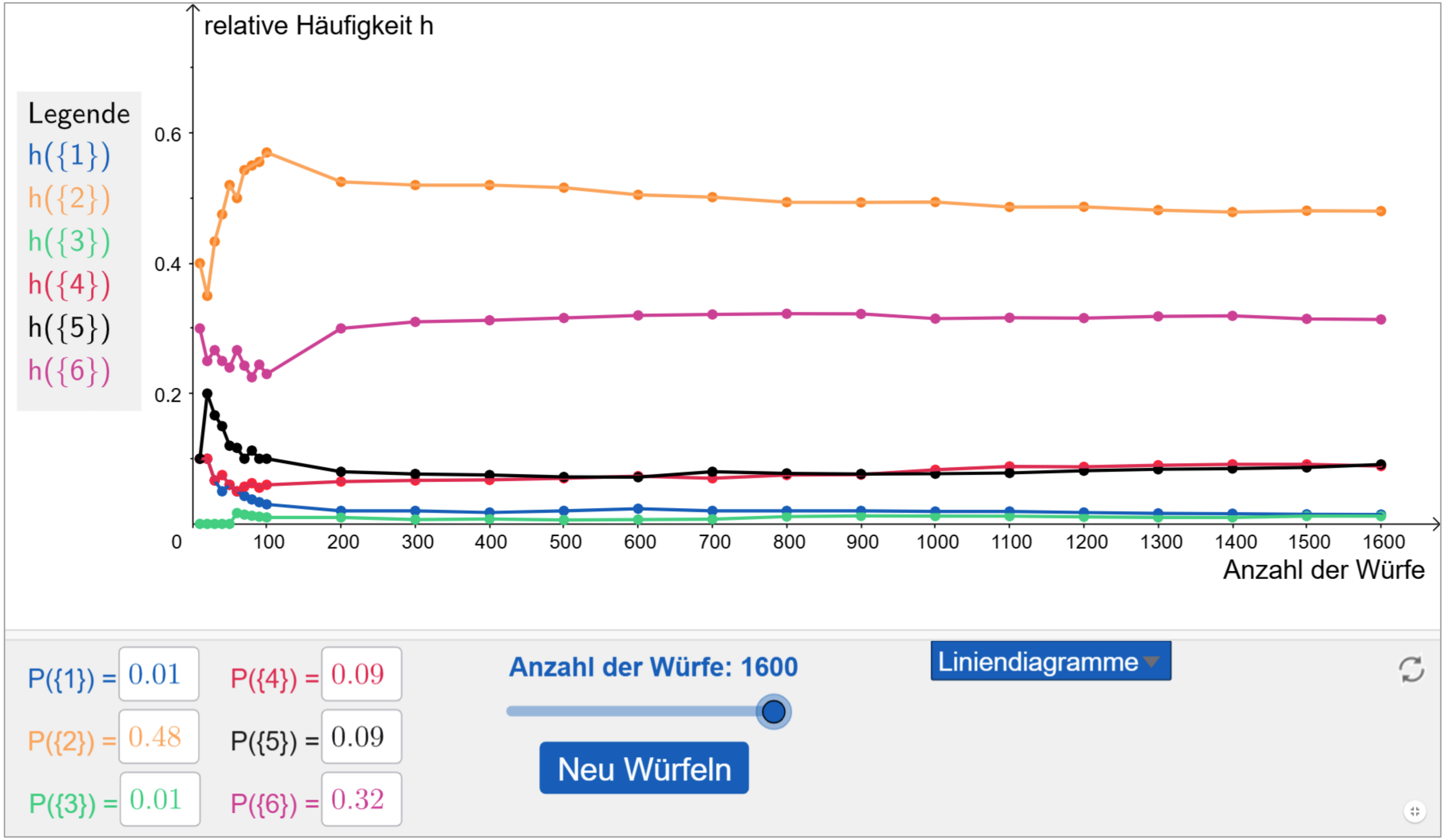
Würfeln mit einem LEGO-Stein

Relative Häufigkeiten der Augenzahlen bei einer LEGO-Würfel-Versuchsreihe



https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/lego-wuerfel_versuchsauswertung.xlsx
https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/lego-wuerfel_versuchsauswertung_daten.xlsx

Simulation:
Würfeln mit einem LEGO-Stein



Hier wird die empirisch gestützte Hypothese zur Wahrscheinlichkeitsverteilung eintragen.

 https://www.geogebra.org/m/p4ajct6p

3.2.1 Subjektive Wahrscheinlichkeit

Subjektive Wahrscheinlichkeit

Subjektive Wahrscheinlichkeit

- intuitives Empfinden
- subjektives Vertrauen

Theoretischer Ansatz

Bezieht häufig eigene Erfahrungen und Wünsche ein.

Beispiele

- Größter anzunehmender (Reaktor-) Unfall (GAU)
  Wie wahrscheinlich ist ein GAU?

- Bayern München – 1. FCK
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 1. FCK gewinnt?

Bemerkung

In der Praxis wird häufig eine Wahrscheinlichkeit angegeben (Medien, Versicherungen), ohne die Möglichkeit, sich auf Erfahrungswerte oder Berechnungen stützen zu können. Einschätzungen von Experten sind subjektiv und können sehr daneben liegen, sind aber dennoch wertvoll, da Experten alle verfügbaren Informationen einbeziehen und ihre Einschätzung auch revidieren können, wenn neue Informationen vorliegen.

Subjektive Wahrscheinlichkeit

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Die Kiewer Führung hält ein Eingreifen von Belarus an der Seite Russlands in den Krieg gegen die Ukraine aktuell für wenig wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass der belarussische Präsident Alexander Lukaschenko sich für eine Teilnahme am Krieg entscheide, liege „bei 15 bis 20 Prozent", sagte der ukrainische Präsidentenberater Olexij Arestowitsch nach Angaben der Agentur Unian.
https://www.boerse-online.de/nachrichten/aktien/kein-sofortigeseingreifen-von-belarus-die-nacht-im-ueberblick-1031300215

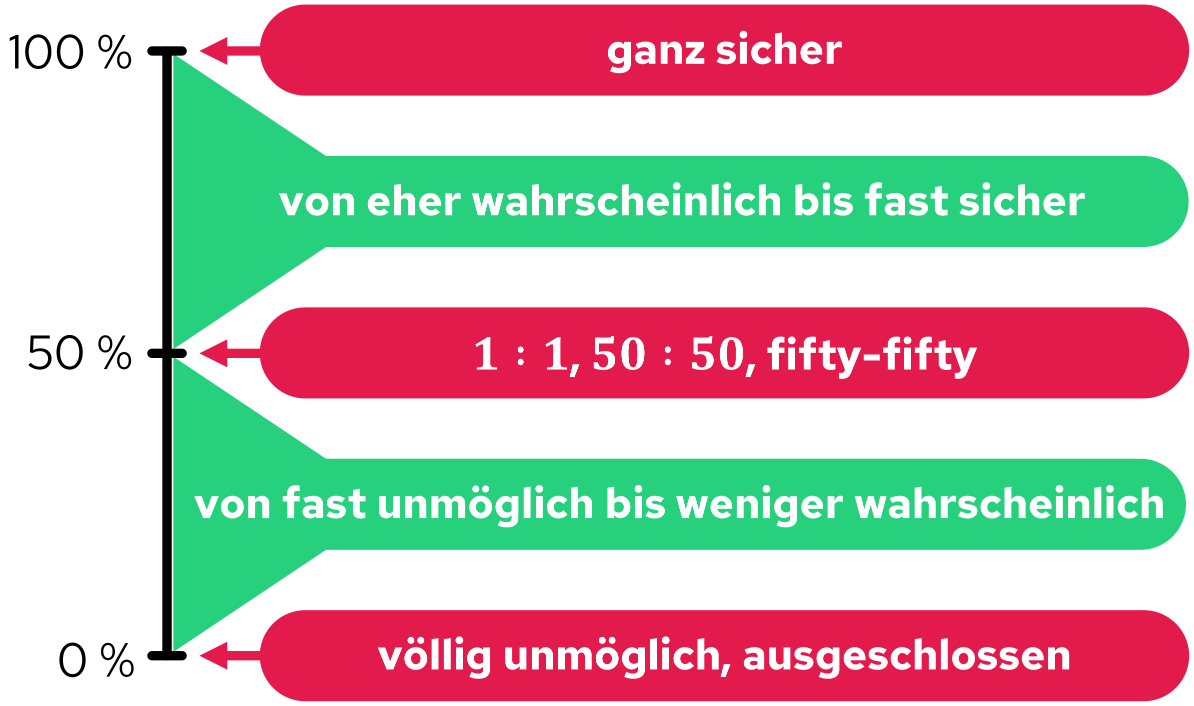
Wie wahrscheinlich würden Sie MediaMarkt aufgrund Ihrer letzten Erfahrung mit unserem Reparaturservice im MediaMarkt Landau einem Freund, Bekannten oder Kollegen empfehlen?

sehr unwahrscheinlich **sehr wahrscheinlich**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

 Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 19-21

Subjektive Wahrscheinlichkeit



Bemerkung

- Das untere Skalenende „völlig unmöglich" wird von der Lehrkraft mit 0 % und das obere „ganz sicher" mit 100 % beschriftet.
- Durch die Beschriftung der Ränder erhält jede Stelle der Skala die Bedeutung eines Prozentsatzes.
- Bei festem Grundwert n gehört zu jedem Prozentsatz p der Prozentwert $n \cdot p$.
- Bei reproduzierbaren Situationen ist n die Versuchszahl und $n \cdot p$ wird zur erwarteten Häufigkeit, kurz zum Erwartungswert, um den herum die Ergebnisse zufällig pendeln.

Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 19-21

3.2.2 Frequentistische Wahrscheinlichkeit

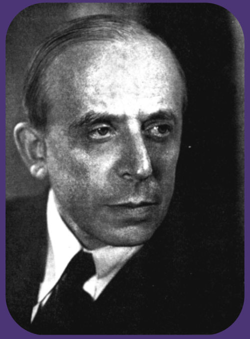
Frequentistische Wahrscheinlichkeit

Frequentistische Wahrscheinlichkeit
Relative Häufigkeit als Schätzwert für die unbekannte Wahrscheinlichkeit.

Empirischer Ansatz
a posteriori

Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Mit wachsender Anzahl der Versuche stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines beobachteten Ereignisses.

Bemerkung



Im Jahr 1919 hatte Richard Edler von Mises die Idee die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses über den Grenzwert der relativen Häufigkeit $h_n(E)$ des Ereignisses für $n \to \infty$ (n: Anzahl der Versuche) zu definieren.
Dies musste allerdings scheitern.
(Es gibt kein n_ε ab dem $h_n(E)$ immer in einer ε-Umgebung von $P(E)$ liegt!)

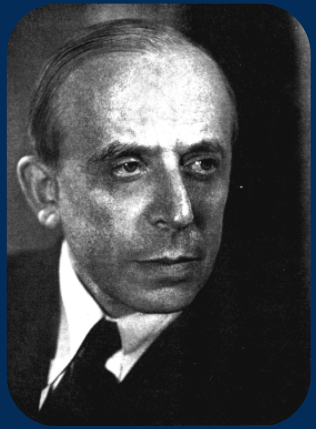
Beispiel

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt bei diesem „Lego-Würfel" die sechs?

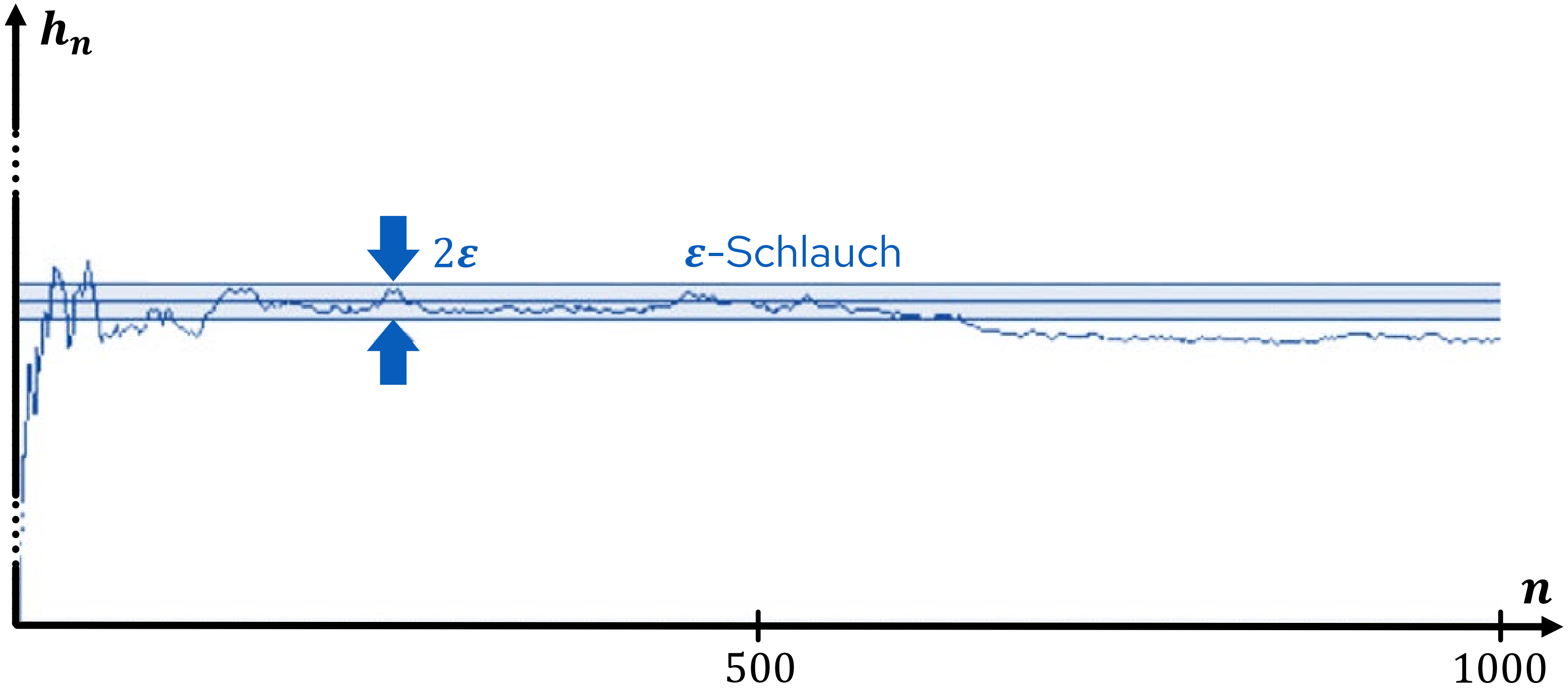
Frequentistische Wahrscheinlichkeit

Problem

Es gibt kein n_ε ab dem $h_n(E)$ immer in einer ε-Umgebung von $P(E)$ liegt!



Richard
Edler von Mises



 Büchter, A. & Henn, H.-W. (2005). Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Berlin: Springer. S. 175

Relative Häufigkeit: Eigenschaften

Bei m-maliger Durchführung eines Zufalls-experiments mit Ergebnismenge Ω gilt für die relativen Häufigkeiten:

Nichtnegativität
Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt: $0 \leq h_m(E) \leq 1$

Normierung $h_m(\emptyset) = 0$ und $h_m(\Omega) = 1$

Relative Häufigkeit des Gegenereignisses
Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt: $h_m(\bar{E}) = 1 - h_m(E)$

Additivität: Für alle $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ gilt:
$$h_m(E_1 \cup E_2) = h_m(E_1) + h_m(E_2)$$

Für alle $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ gilt:
$$h_m(E_1 \cup E_2) = h_m(E_1) + h_m(E_2) - h_m(E_1 \cap E_2)$$
Speziell gilt: $h_m(E) = \sum_{\omega \in E} h_m(\{\omega\})$ und $h_m(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} h_m(\{\omega\}) = 1$

3.2.3 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace-Annahme:
Alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich.

$$P(E) := \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega} = \frac{\text{"günstige"}}{\text{"mögliche"}}$$

Anmerkungen

- Die Laplace-Annahme ist nur selten gerechtfertigt.
- Die Ergebnismenge muss endlich sein!

Beispiel

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt beim Spielwürfel die sechs?

?

Theoretischer Ansatz

a priori

Bemerkung

Beim Werfen einer normalen Münze räumt man dem Auftreten von Kopf und Zahl aus Symmetriegründen gleiche Chancen ein. Diese Idee geht auf den französischen Mathematiker und Physiker Pierre Simon Laplace (1749-1827) zurück, der darauf aufbauend Regeln für das Gewinnen von Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Zufallsexperimente (Laplace-Experimente) aufstellte. Seine 1812 veröffentlichte Theorie „Analytique des Probabilités“ fasste das stochastische Wissen seiner Zeit zusammen und baute die Wahrscheinlichkeitstheorie maßgeblich aus.

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Eigenschaften

Für Ereignisse eines Laplace-Experiments mit endlicher Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ gilt:

Nichtnegativität
Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$

Normierung $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Additivität: Für alle $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ gilt:
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Für alle $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ gilt:
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
Speziell gilt: $P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\{\omega\})$ und $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$

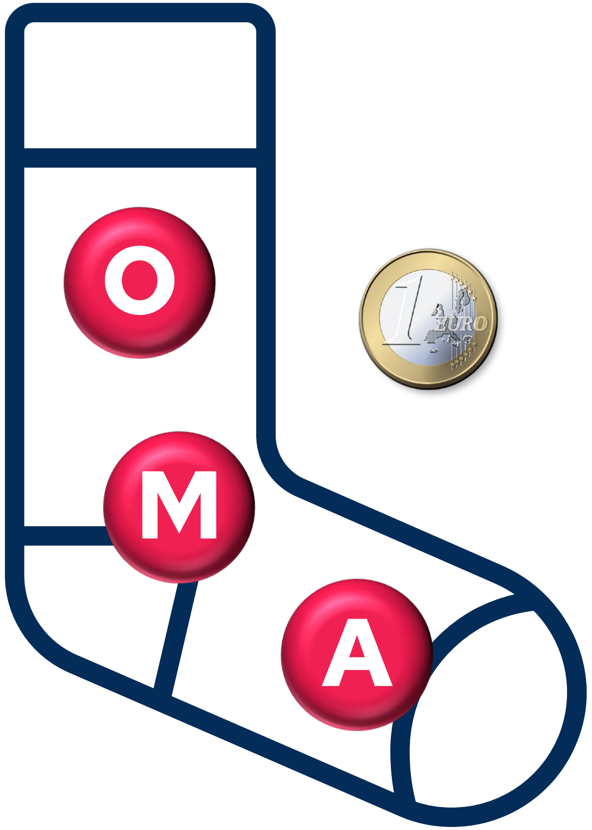
Laplace-Experiment:
Hol die OMA aus der Socke

Schönes Unterrichtsbeispiel

Herausforderung: Wer beim blinden Hineingreifen in diese Socke nacheinander die Buchstaben **O-M-A** zieht, gewinnt einen Euro!

Bemerkungen

- In vielen Klassen muss die Frage nach der **Chance** für **OMA** $\left(=\frac{1}{6}\right)$ nicht gestellt werden. Die Lernenden beantworten sie von sich aus:
Sie notieren die sechs Kombinationen … oder übersetzen das Bauchgefühl in Zahlen und entdecken dabei die Pfadregel(n): In einem Drittel aller Fälle erwischt man das **O**. Dann sind nur noch zwei Buchstaben da, es steht für das **M** dann „fifty-fifty" und die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist die Lösung: $\frac{1}{6}$
- Den **Erwartungswert** entdeckt man gleich mit:
Wenn 30 Kinder in der Klasse sitzen, wird man im Schnitt 5 Münzen bereithalten müssen, wenn jeder einmal sein Glück probieren darf.
- Was ändert sich, wenn man die OMA zweimal in die Socke legt oder ein P hinzufügt und festlegt, dass man bei **OMA** und **OPA** gewinnt? Verdoppelt sich die Gewinnchance? Gute Frage!



 Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 14

Laplace-Experiment: Hol die OMA aus der Socke

Schönes Unterrichtsbeispiel

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Experimentieren und intuitiv arbeiten

Mögliche Versuchsausgänge:
OMA, OAM, MOA, MAO, AOM, AMO

Chance für OMA:

1. Idee: Die Chance für jeden Versuchsausgang ist gleich. Es gibt unter den sechs möglichen Ergebnissen nur eine OMA. → Chance für OMA: $\frac{1}{6}$

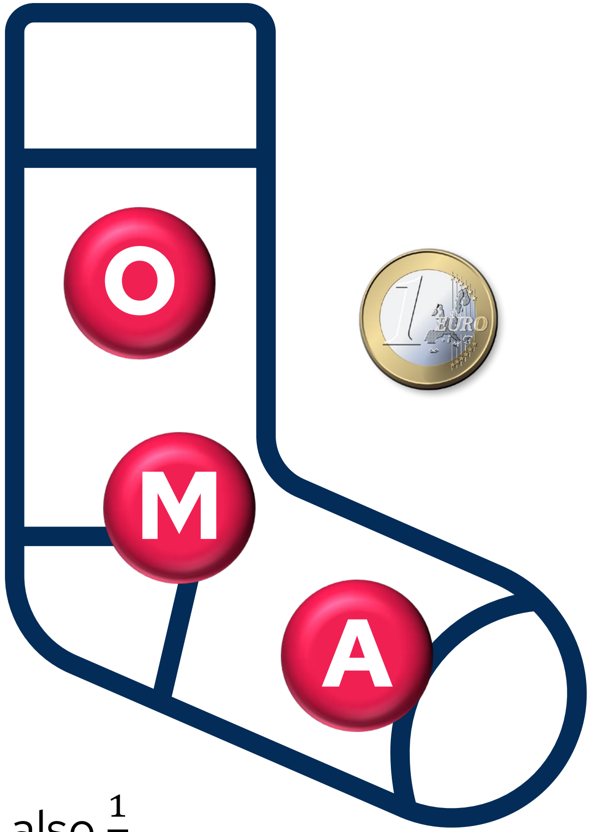
2. Idee: Chance für jeden Zug einzeln bestimmen und zusammensetzen:

Chance für O im ersten Zug: $\frac{1}{3}$

Chance für M im zweiten Zug: „fifty-fifty" also $\frac{1}{2}$

Chance für A im dritten Zug: „sicher" also 1

→ Chance für OMA: Die Hälfte von $\frac{1}{3}$ also $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



Reflektieren und Systematisieren

Ergebenisraum Ω:

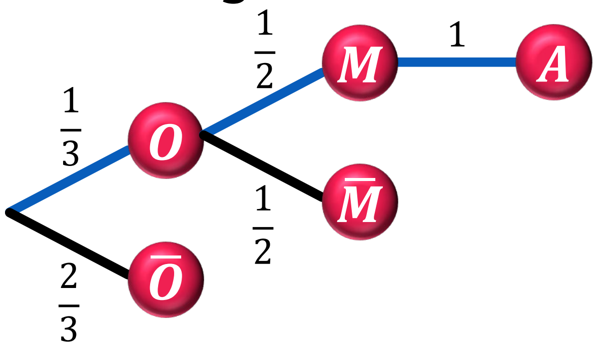
$\Omega = \{OMA, OAM, MOA, MAO, AOM, AMO\}$

Wahrscheinlichkeit für OMA:

Laplace-Annahme: Alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.

$P(\{OMA\}) = \frac{|\{OMA\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$

Baumdiagramm:



$P(O \cap M \cap A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

 Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 14

Laplace-Experiment:
Hol die OMA aus der Socke

Schönes Unterrichtsbeispiel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Experimentieren und intuitiv arbeiten

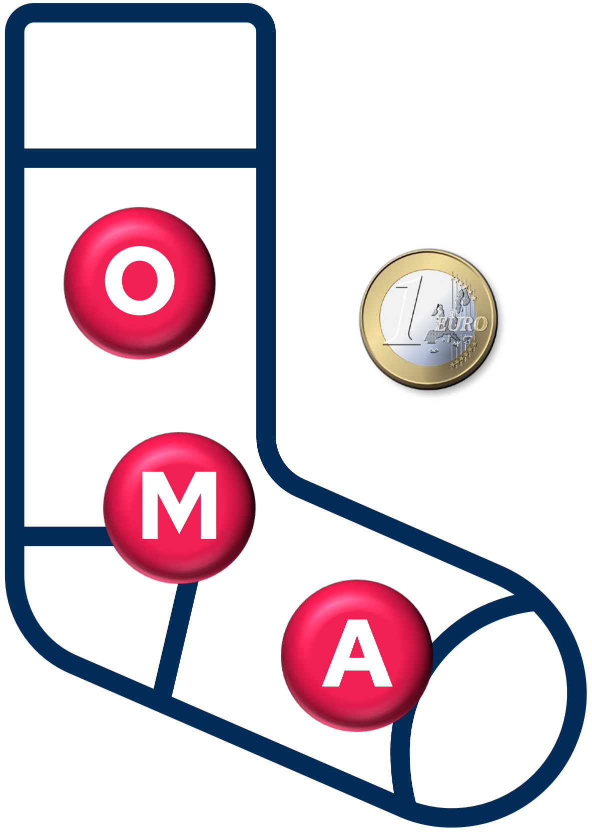
Mittlerer Gewinn:
Da die Chance die OMA aus der Socke zu holen $\frac{1}{6}$ ist und man nur bei OMA 1€ erhält, ist der mittlere Gewinn pro Versuch:

$$1€ \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}€ \approx 0{,}17€$$

Wie viel Euros muss die Lehrkraft in einer Klasse mit 30 Schülerinnen & Schüler im Schnitt bereitlegen?
Wenn alle einmal ihr Glück versuchen, muss die Lehrkraft im Schnitt

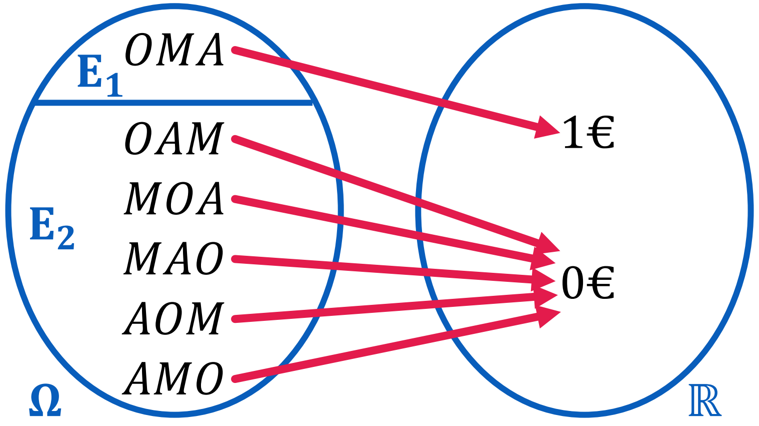
$$1€ \cdot \frac{1}{6} \cdot 30 = 1€ \cdot 5 = 5€$$

bereithalten.



Reflektieren und Systematisieren

Zufallsvariable X:



$$X: \Omega \to \mathbb{R};\ \omega \mapsto \begin{cases} 1€, \text{ falls } \omega = OMA \\ 0€, \text{ falls } \omega \in \Omega \backslash \{OMA\} \end{cases}$$

Erwartungswert $E(X)$ für Gewinn:

$$E(X) = 1€ \cdot P(X = 1€) + 0€ \cdot P(X = 0€)$$
$$= 1€ \cdot \frac{1}{6} + 0€ \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}€ \approx 0{,}17€$$

Riemer, W. (2023). Statistik unterrichten – Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik. Kallmeyer, 14

3.2.4 Axiomatische Wahrscheinlichkeit

Axiomatische Wahrscheinlichkeit
für endliche Mengen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Axiomensystem von Kolmogorov im endlichen Fall

Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) ist ein Paar bestehend aus einer nichtleeren endlichen Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ und einer Funktion $P\colon \wp(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

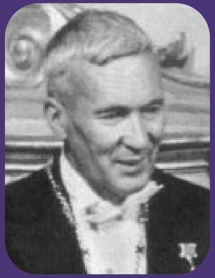
(1) Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt:
$P(E) \geq 0$ **Nichtnegativität**

(2) $P(\Omega) = 1$ **Normierung**

(3) Für alle $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ gilt:
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ **Additivität**

Anmerkung: In der oben angegebenen Fassung für endliche Mengen ist das Axiomensystem von Kolmogorov für Lernende gut fassbar, auch weil die Axiome aufgrund der bereits „entdeckten“ Eigenschaften der relativen Häufigkeit (Folie 88) und der Laplace-Wahrscheinlichkeit (Folie 91) gut nachvollziehbar sind.

Theoretischer Ansatz
a priori



Bemerkung
Andrei Kolmogorov (1903–1987) hat in seinem Buch „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1933) die Wahrscheinlichkeit als normiertes Maß definiert. (vgl. Maße wie Länge, Volumen, …).

Alles, was diesen Axiomen genügt, kann als „Wahrscheinlichkeit“ gedeutet werden.

Wahrscheinlichkeitsverteilung
Eigenschaften

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Für einen endlichen Wahrschein-lichkeitsraum (Ω, P) gilt:

Nichtnegativität
Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$

Normierung $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$

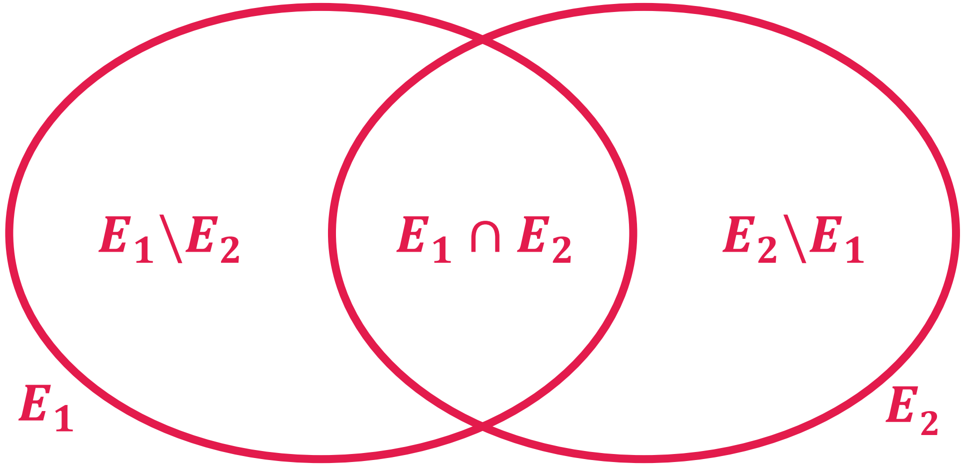
Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von Ereignissen
Für alle $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ gilt: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Speziell gilt:
- $P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{|E|} P(\{\omega_i\})$
- $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{|\Omega|} P(\{\omega_i\}) = 1$

Beweis-Beispiel für eine Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zu zeigen:
Für alle $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ gilt:
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$



Beweis:

$$P(E_1 \cup E_2)$$
$$= P(E_1 \backslash E_2 \cup (E_1 \cap E_2) \cup E_2 \backslash E_1)$$
$$\overset{(3)}{=} P(E_1 \backslash E_2) + P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 \backslash E_1)$$
$$= P(E_1 \backslash E_2) + P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 \backslash E_1) + P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
$$\overset{(3)}{=} P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \qquad \blacksquare$$

Leitideen für den Stochastik-Unterricht

Alltagsvorstellungen ernst nehmen und zum Ausgangspunkt des Lernens machen.
→ Erfordert Situationen, die dies ermöglichen.

Erfahrungen durch Experimente ermöglichen.

Erfahrungen aus Experimenten systematisch reflektieren.
→ Mitgebrachte Vorstellungen überdenken.

Individuelle und fachliche Vorstellungen gegenüberstellen.
→ Ursachen für Diskrepanzen finden.

Notwendige Perspektivwechsel explizit machen.

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Büchter, Hußmann, Leuders & Prediger (2005). Den Zufall im Griff – Stochastische Vorstellungen fördern. *PM, 47*(4), 1-7

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kernideen im Fokus
bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

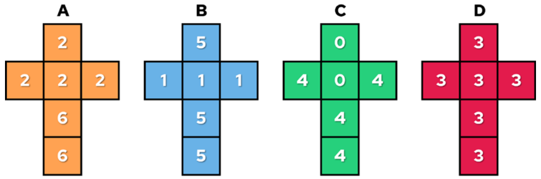
Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

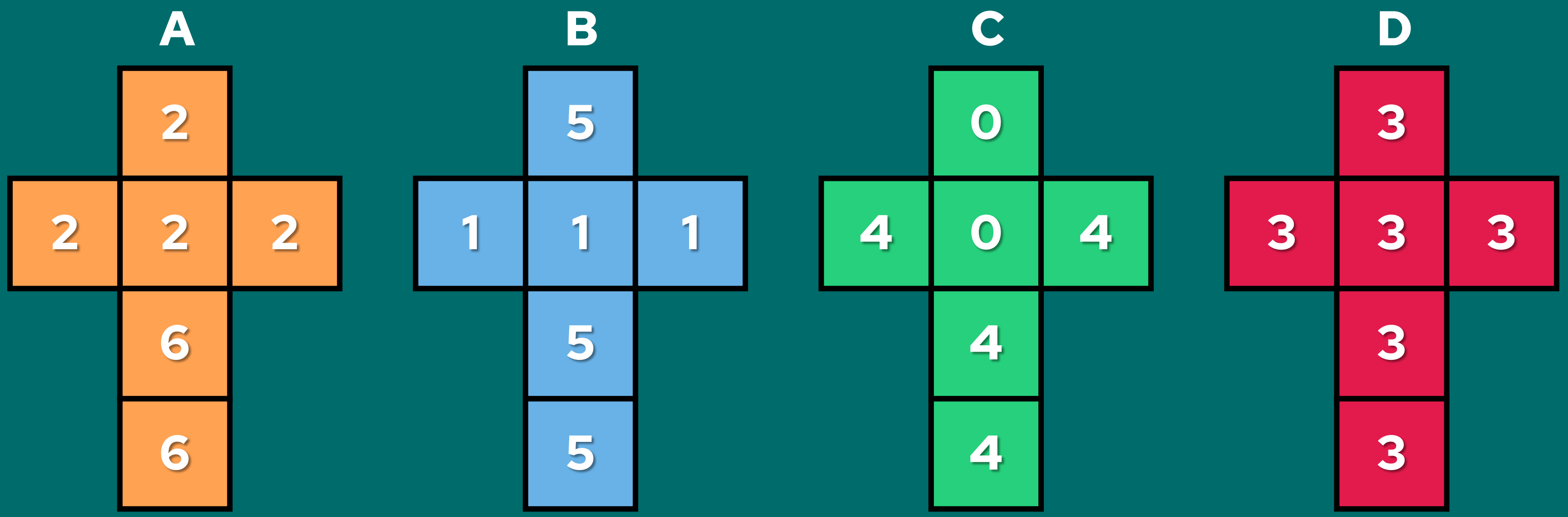
- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Chinesische Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Gegeben sind diese vier durch ihre Netze beschriebenen Würfel, die sogenannten chinesischen Würfel nach Bradley Efron.



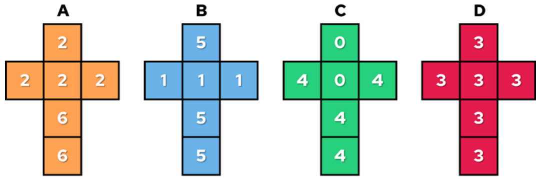
Aufgabe

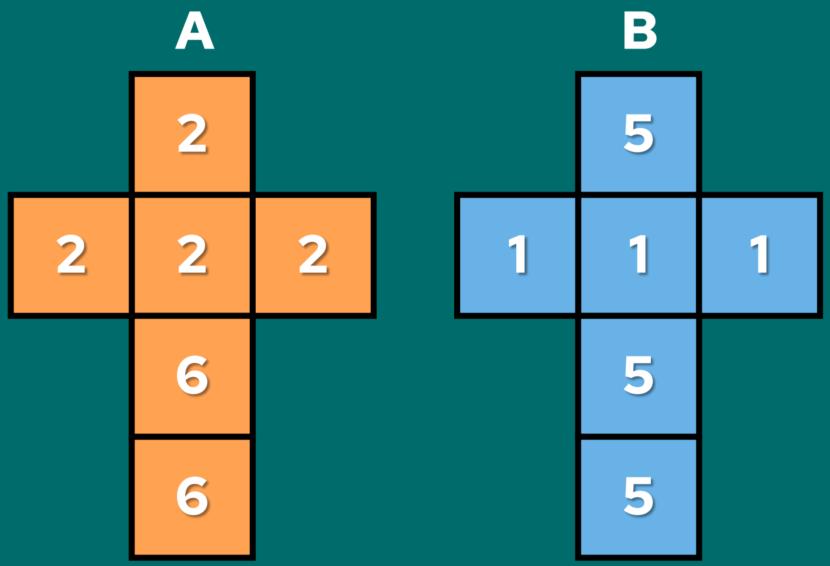
Zwei Spieler wählen nacheinander einen Würfel. Danach würfelt jeder einmal. Wer die höhere Punktzahl hat, gewinnt.

Wie sind die Gewinnchancen?

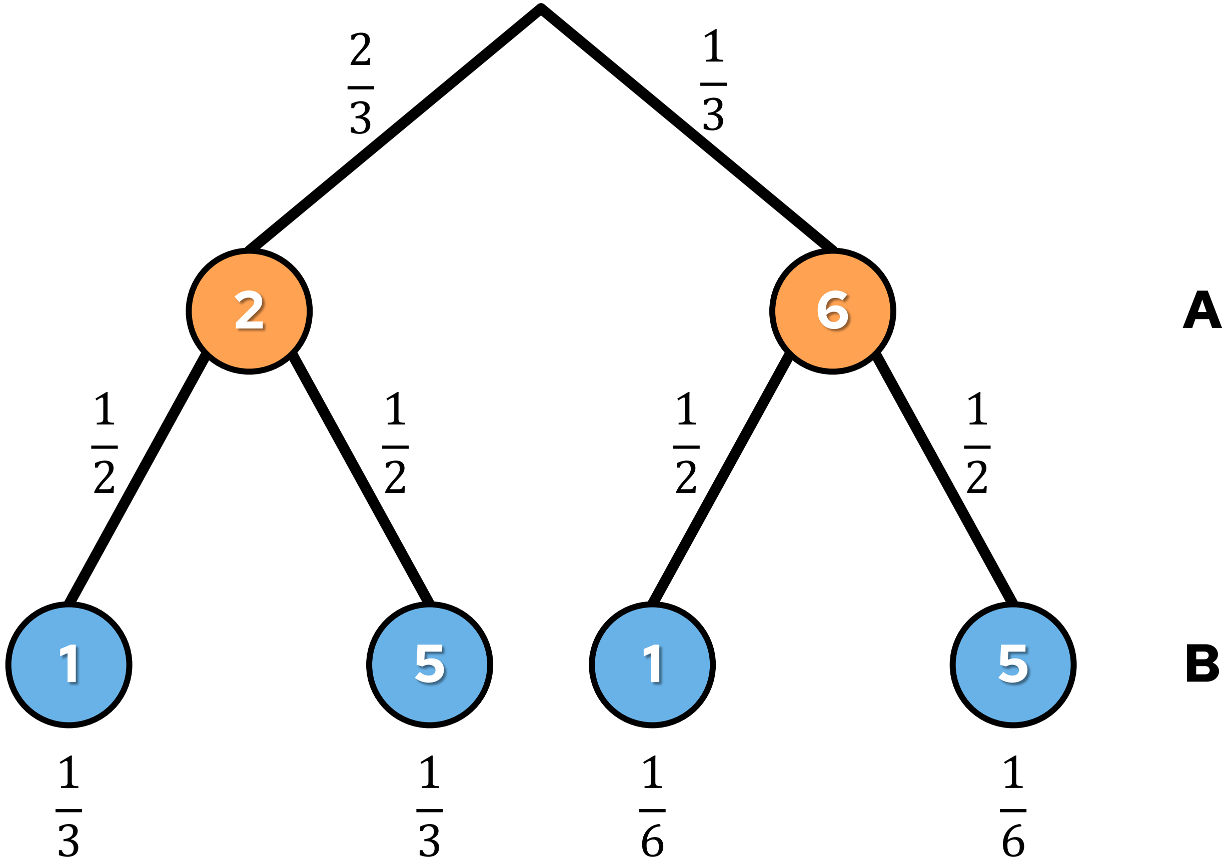
 Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Chinesische Würfel





Der Würfel **A** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **B**.



Gewinner: A B A A

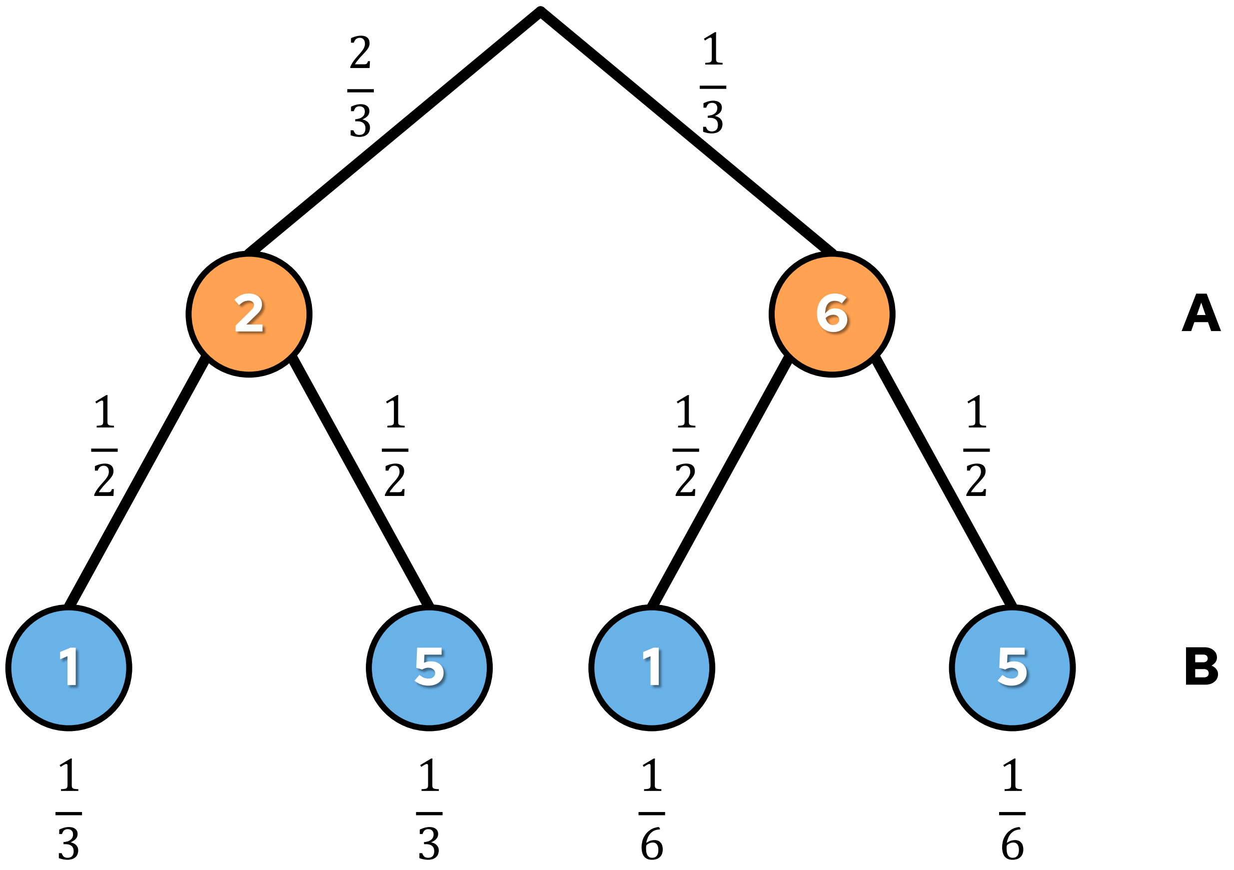
Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Baumdiagramm: Pfadregeln

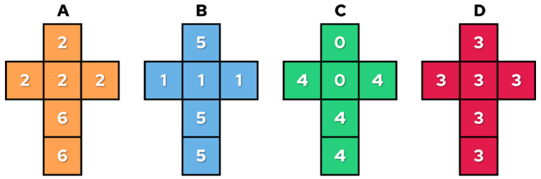
Produktregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm. $\left(\frac{1}{2} \text{ von } \frac{2}{3}\right)$

Summenregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die für dieses Ereignis günstig sind. (Axiom: Additivität)

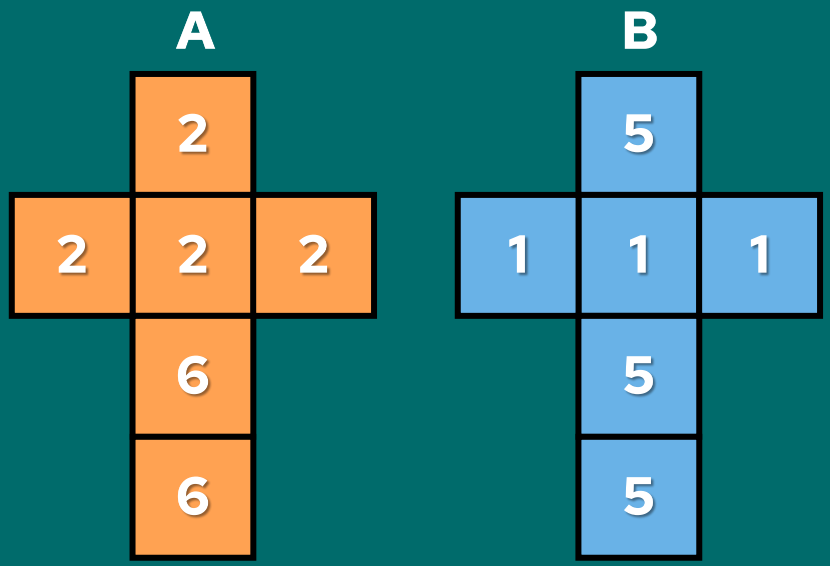
Verzweigungsregel
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen ist immer 1.
(Axiom: Normierung)



Chinesische Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



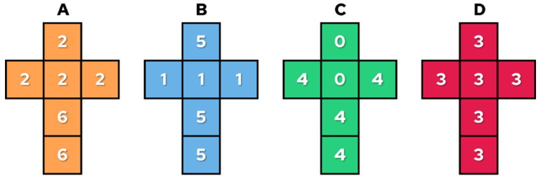
	1	1	1	5	5	5
2	A	A	A	B	B	B
2	A	A	A	B	B	B
2	A	A	A	B	B	B
2	A	A	A	B	B	B
6	A	A	A	A	A	A
6	A	A	A	A	A	A

Der Würfel **A** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **B**.

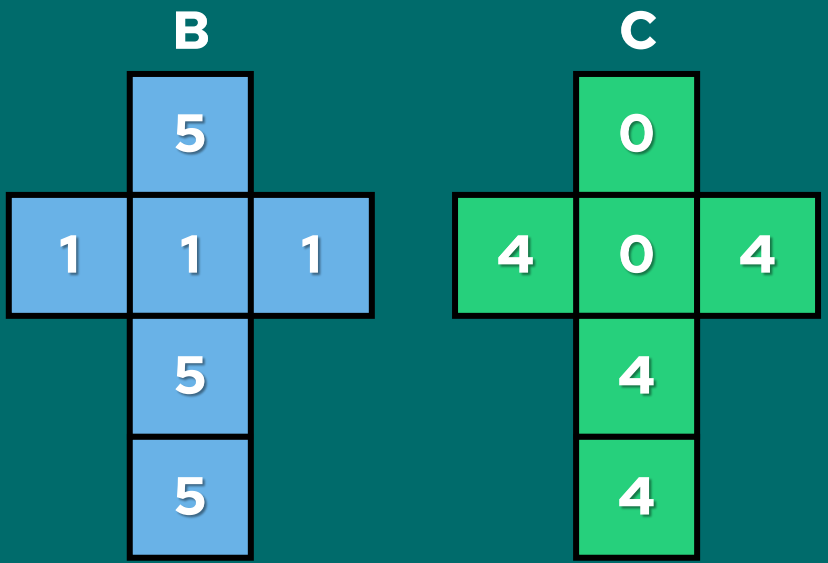
$$P(\text{Würfel A gewinnt}) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

 Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

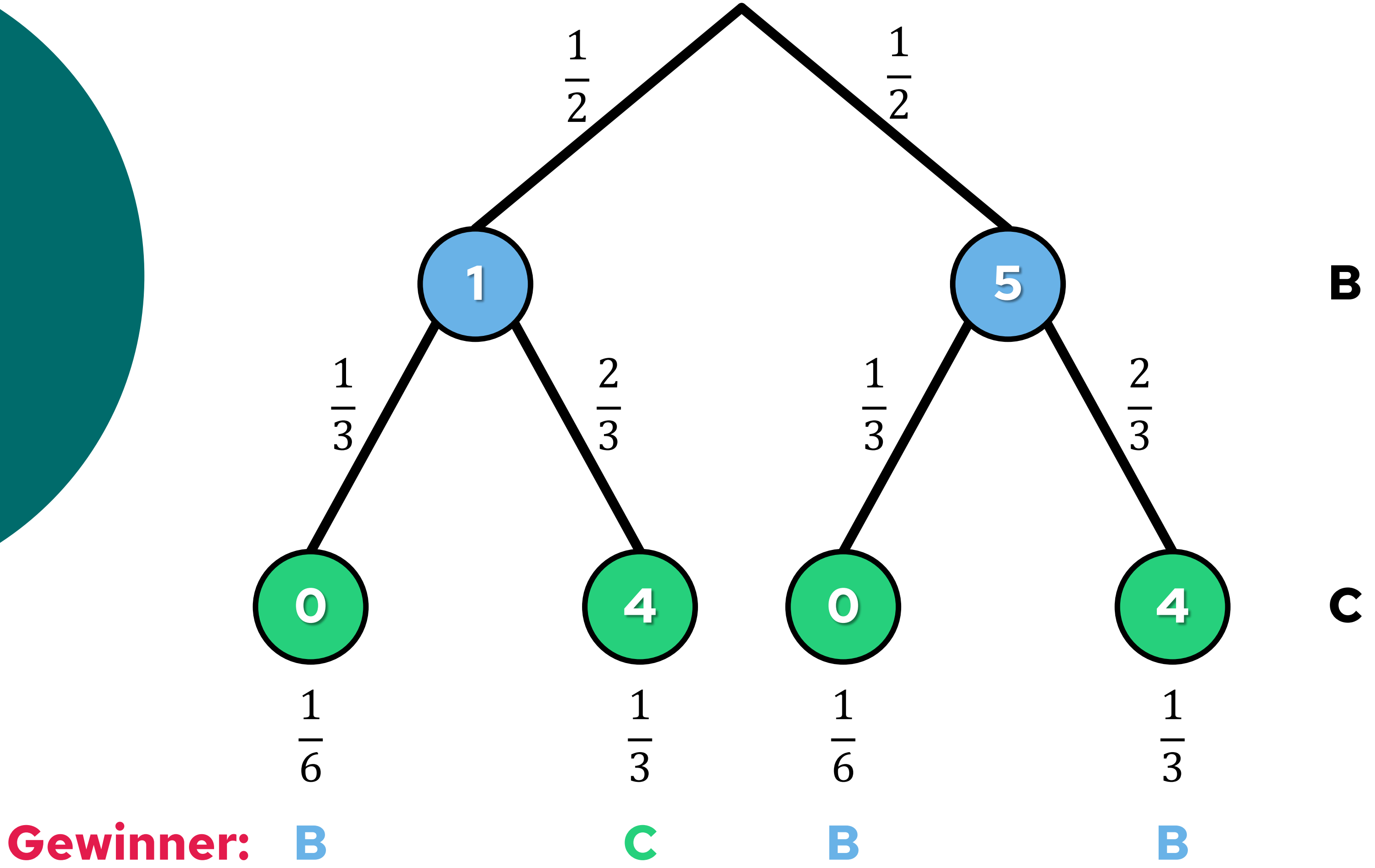
Chinesische Würfel



Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

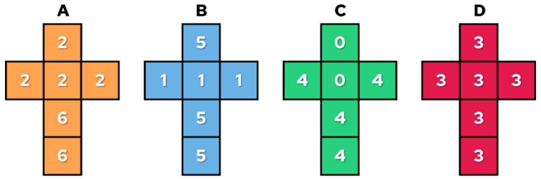


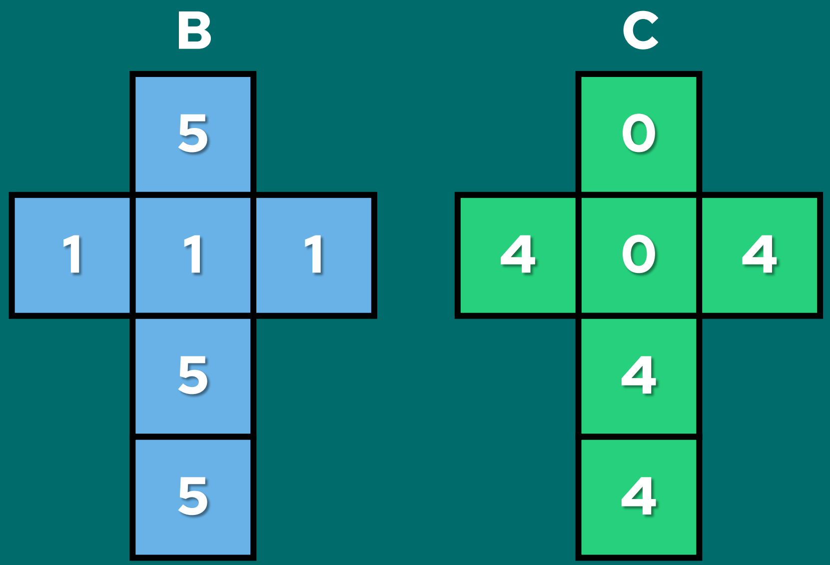
Der Würfel **B** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **C**



 Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Chinesische Würfel





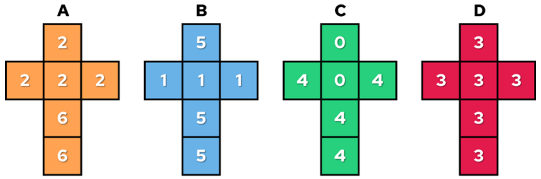
	0	0	4	4	4	4
1	B	B	C	C	C	C
1	B	B	C	C	C	C
1	B	B	C	C	C	C
5	B	B	B	B	B	B
5	B	B	B	B	B	B
5	B	B	B	B	B	B

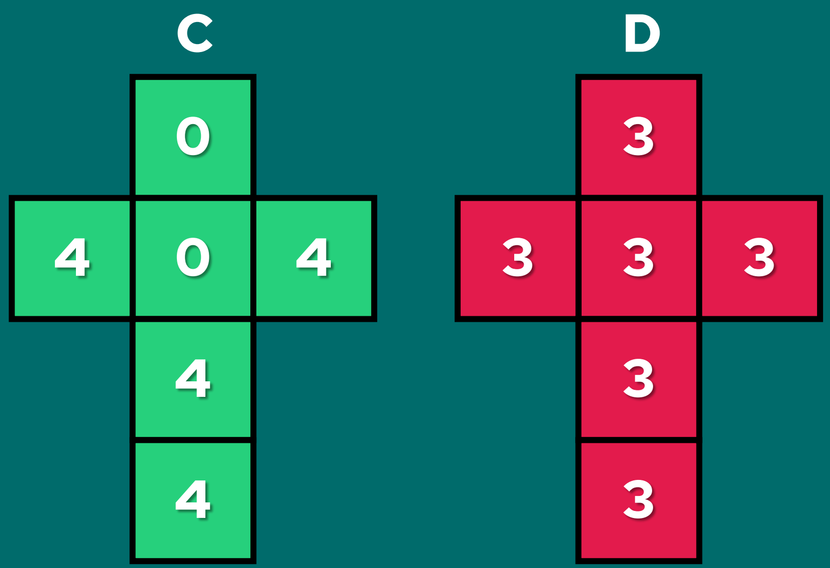
$$P(\text{Würfel } \mathbf{B} \text{ gewinnt}) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

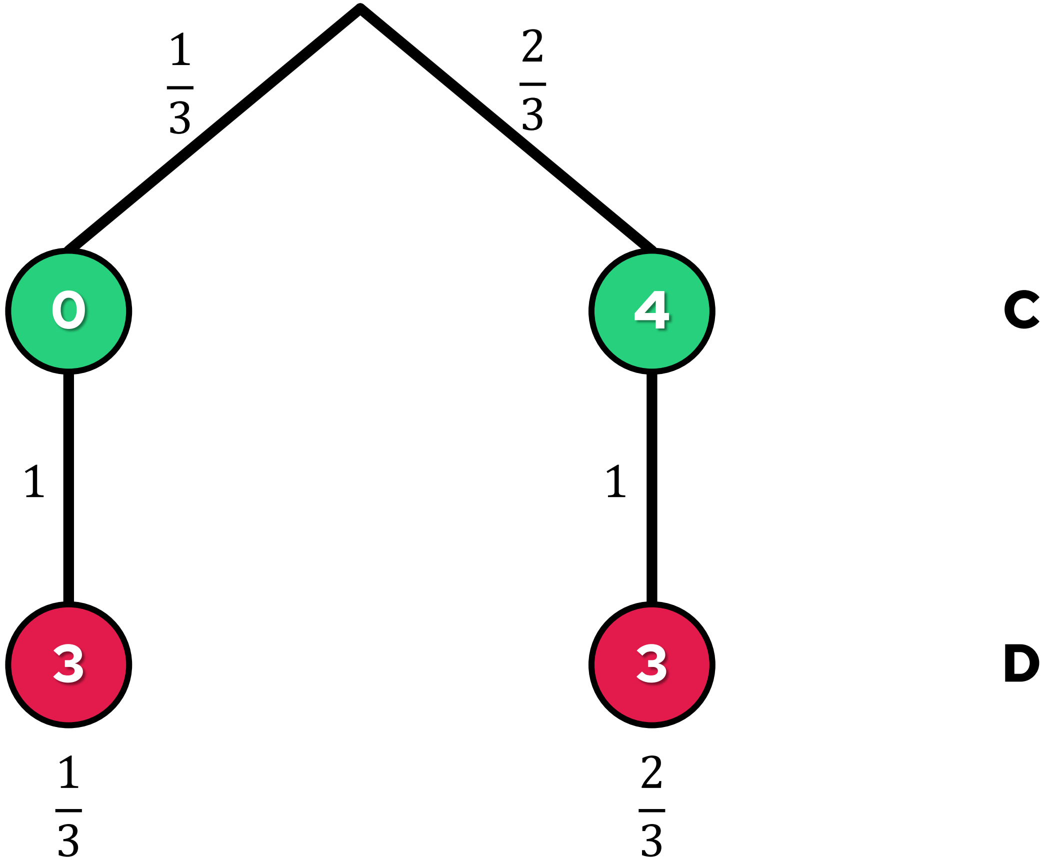
Der Würfel **B** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **C**

 Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Chinesische Würfel





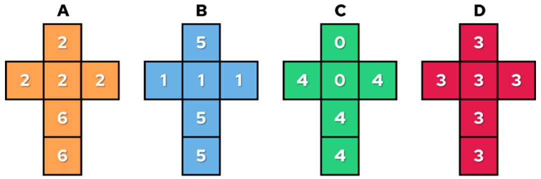


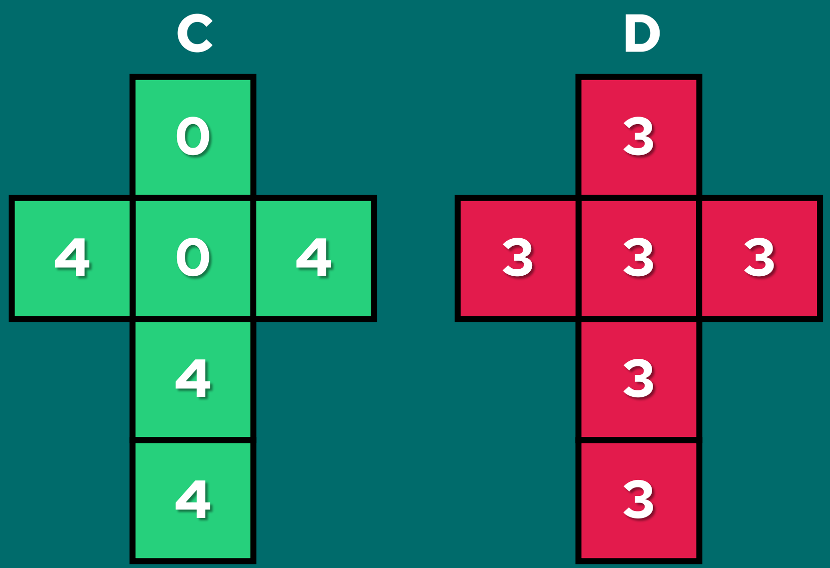
Gewinner: D C

Der Würfel **C** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **D**.

Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Chinesische Würfel





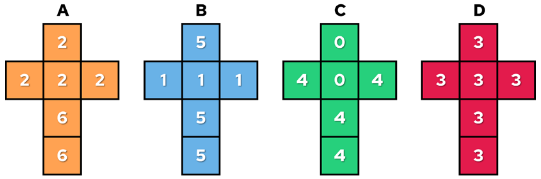
	3	3	3	3	3	3
0	D	D	D	D	D	D
0	D	D	D	D	D	D
4	C	C	C	C	C	C
4	C	C	C	C	C	C
4	C	C	C	C	C	C
4	C	C	C	C	C	C

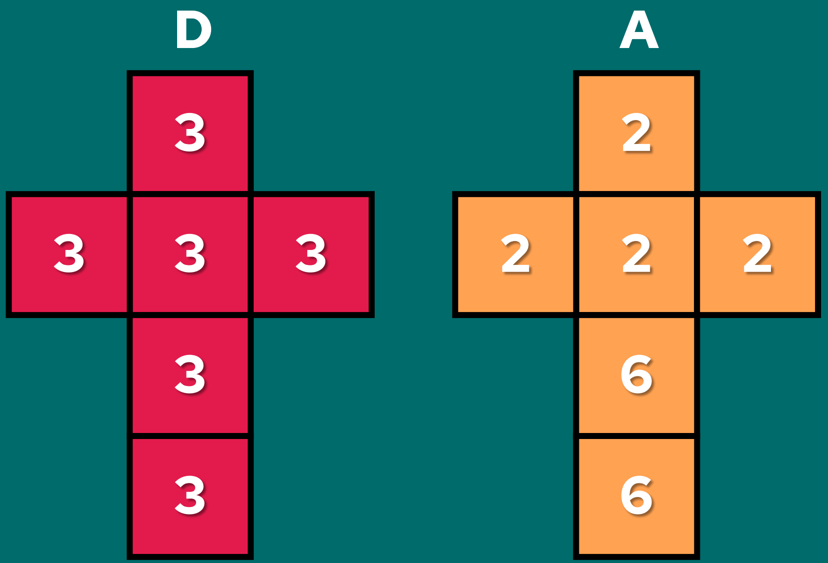
$$P(\text{Würfel } \mathbf{C} \text{ gewinnt}) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

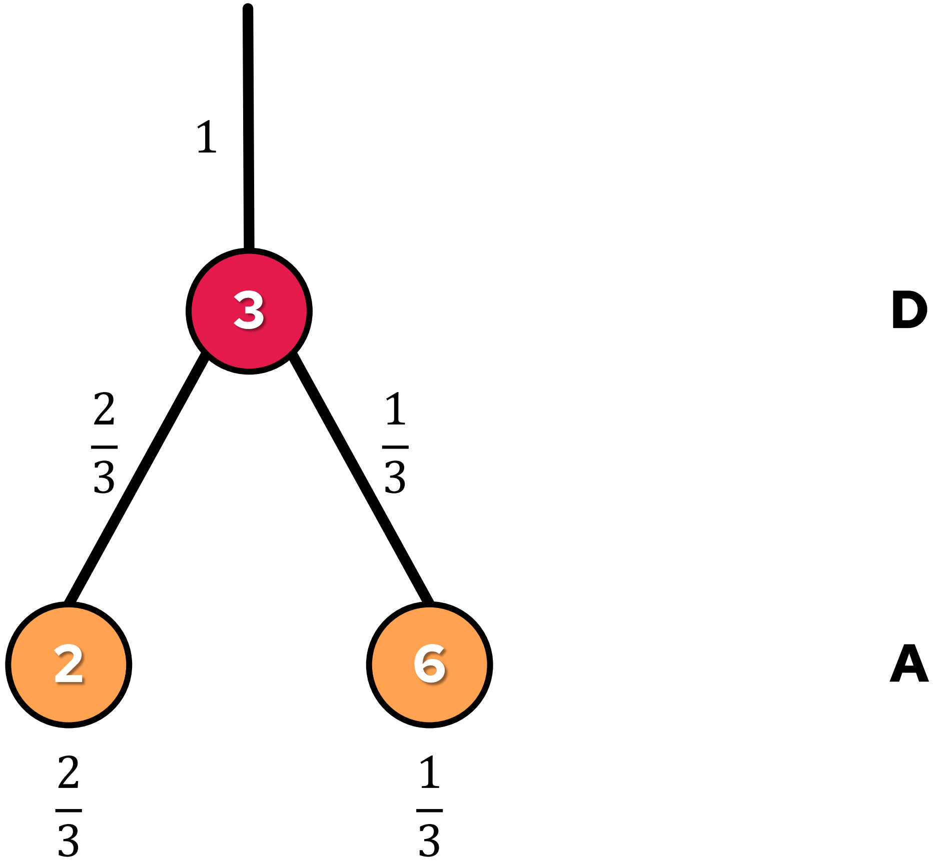
Der Würfel **C** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **D**.

Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18-22

Chinesische Würfel





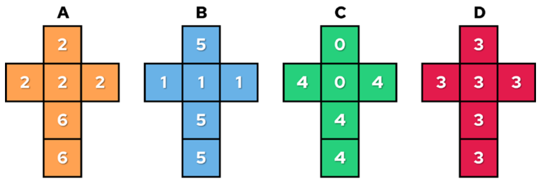


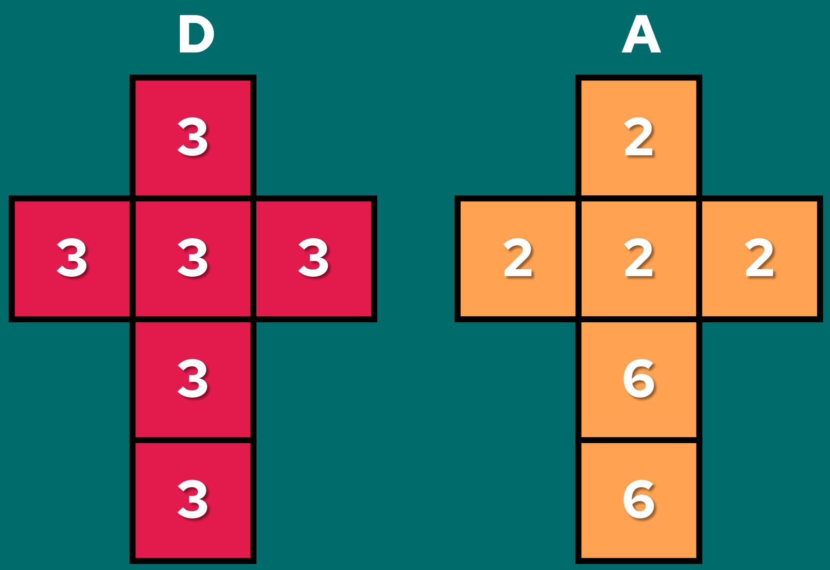
Gewinner: D A

Der Würfel **D** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **A**.

Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Chinesische Würfel





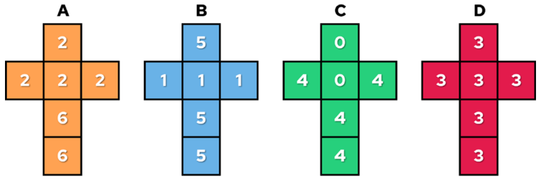
Der Würfel **D** gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen Würfel **A**.

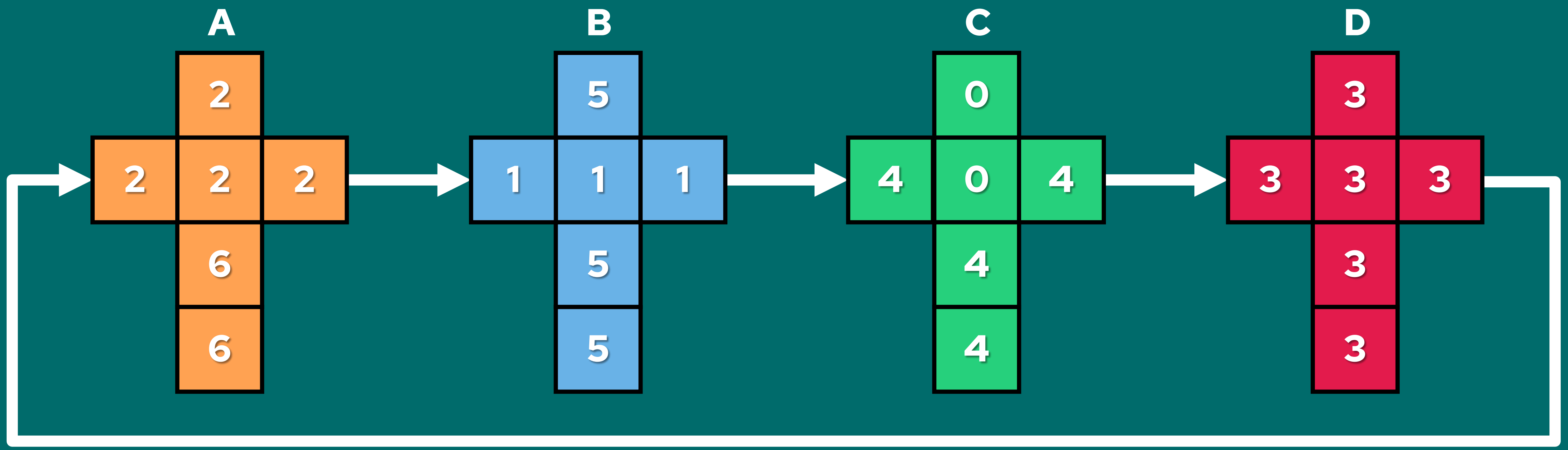
	2	2	2	2	6	6
3	D	D	D	D	A	A
3	D	D	D	D	A	A
3	D	D	D	D	A	A
3	D	D	D	D	A	A
3	D	D	D	D	A	A
3	D	D	D	D	A	A

$$P(\text{Würfel } \mathbf{D} \text{ gewinnt}) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Chinesische Würfel





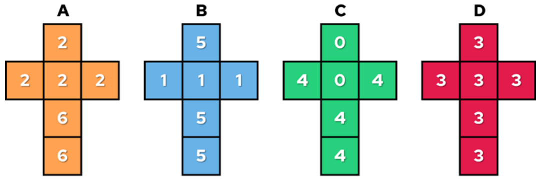
„ Gewinnt gegen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ “

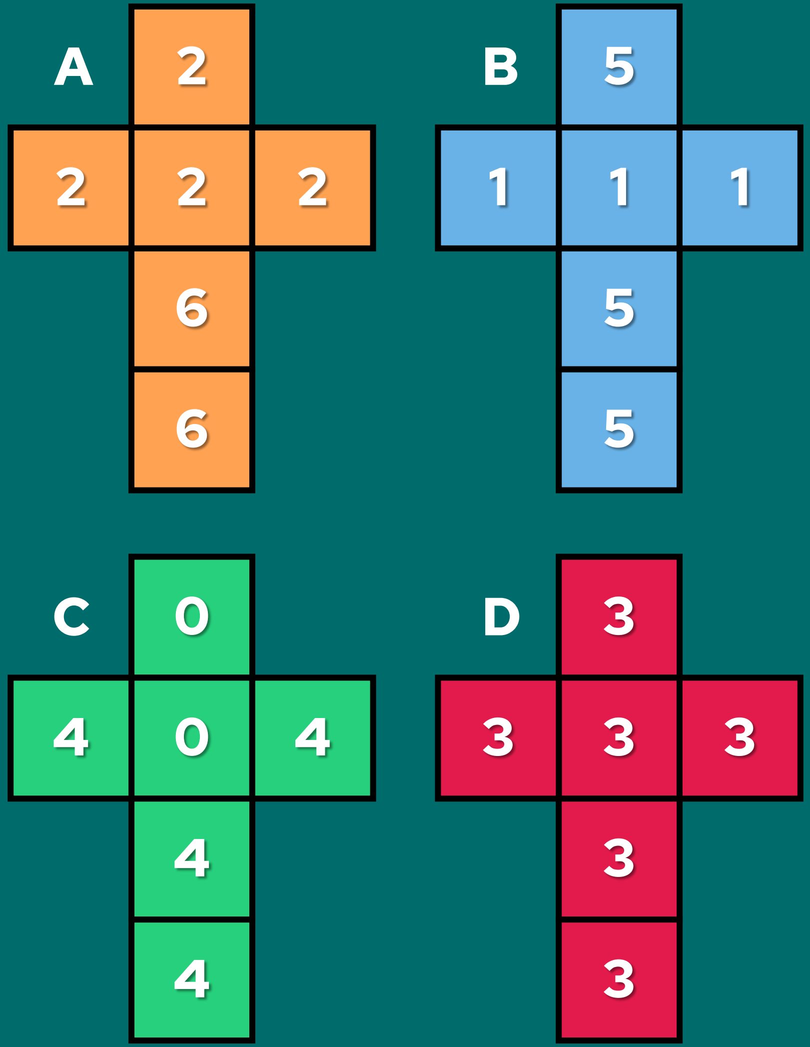
Ergebnis

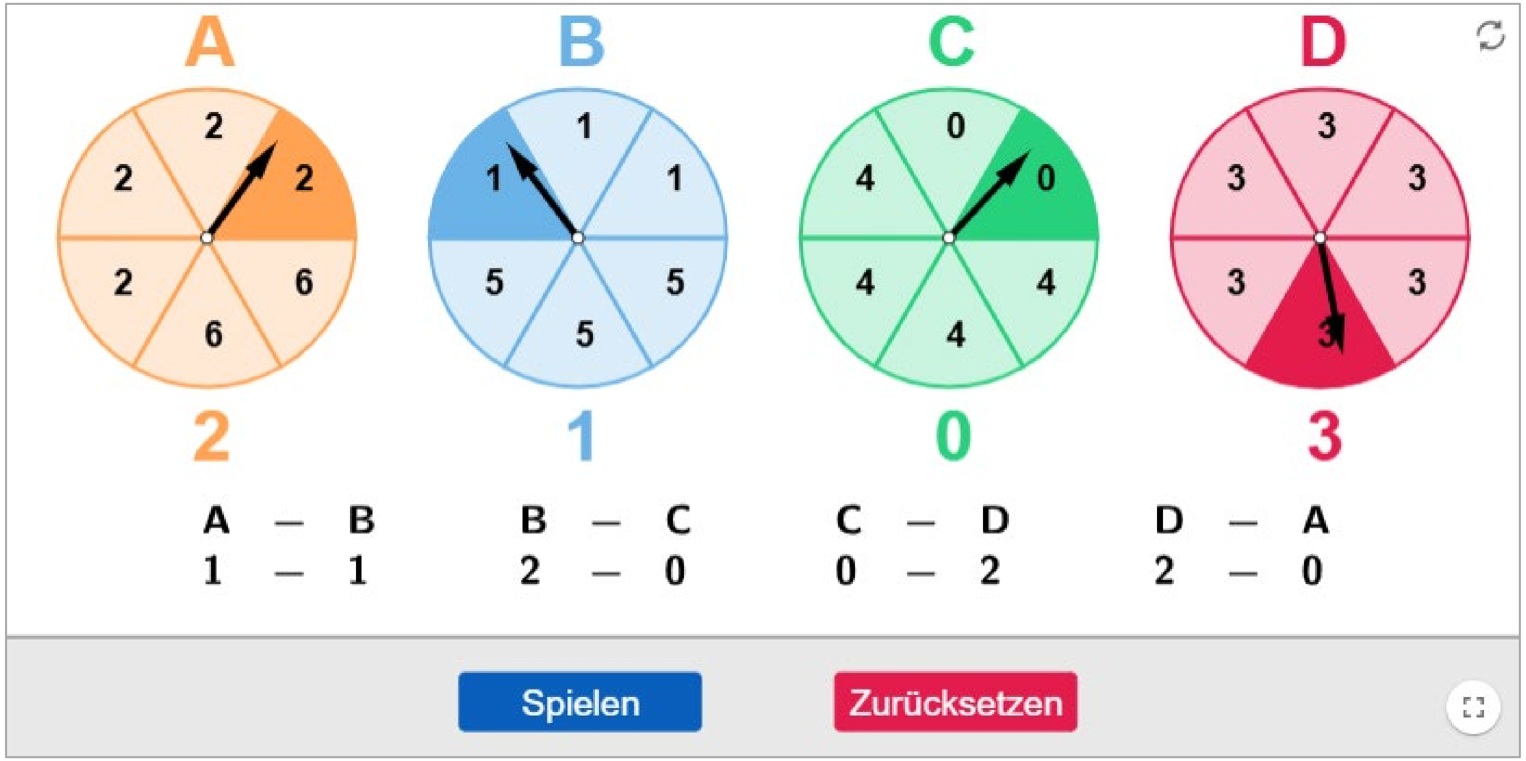
- Die Relation „gewinnt gegen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$“ ist auf der Menge dieser Würfel nicht transitiv. Man findet zu jedem Würfel einen „besseren“.
- Der Spieler, der die zweite Wahl hat, ist im Vorteil!

 Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

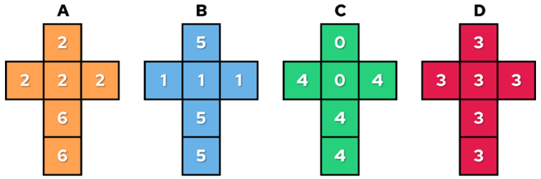
Chinesische Würfel

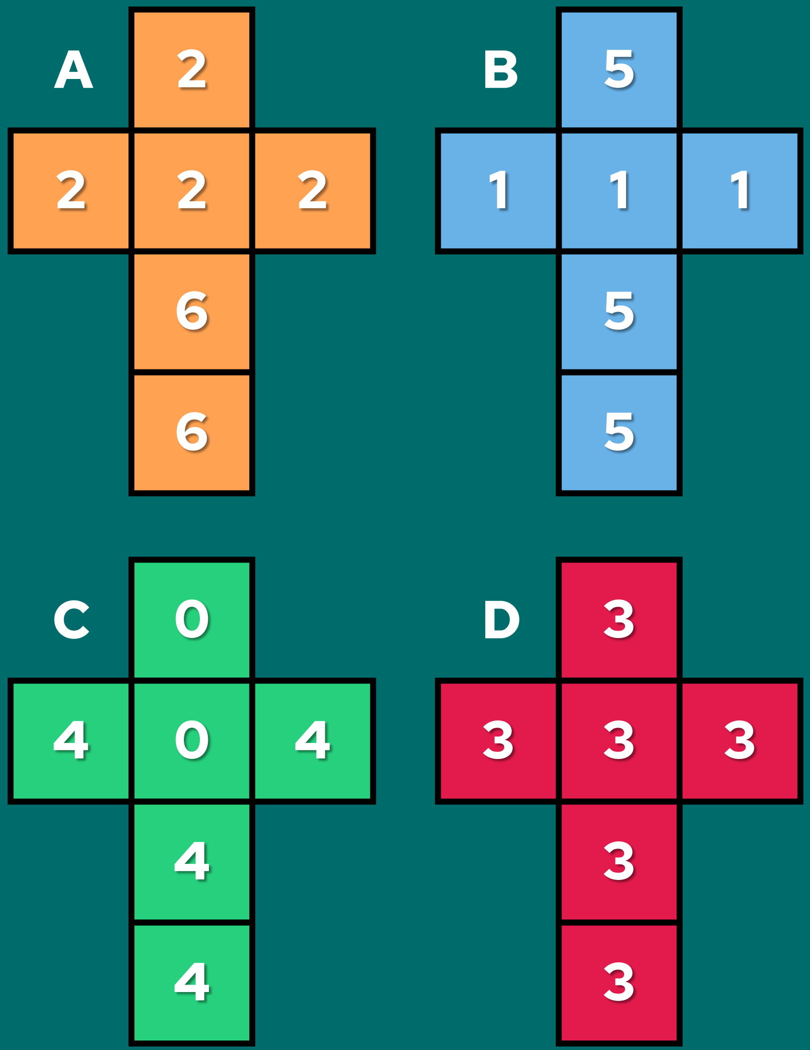






Chinesische Würfel

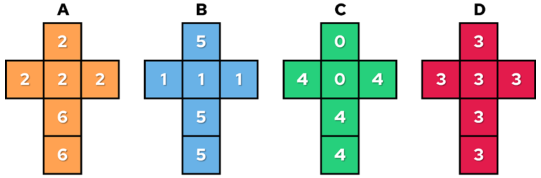


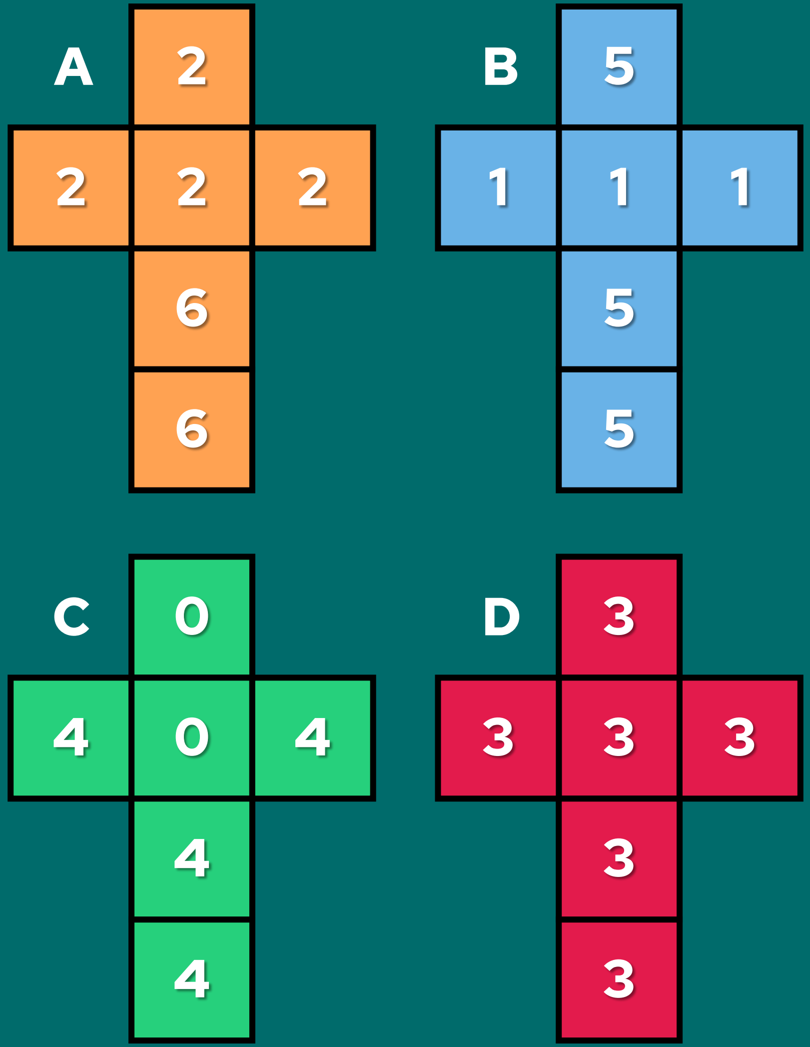


	A	B	C	D
A	–			
B		–		
C			–	
D				–

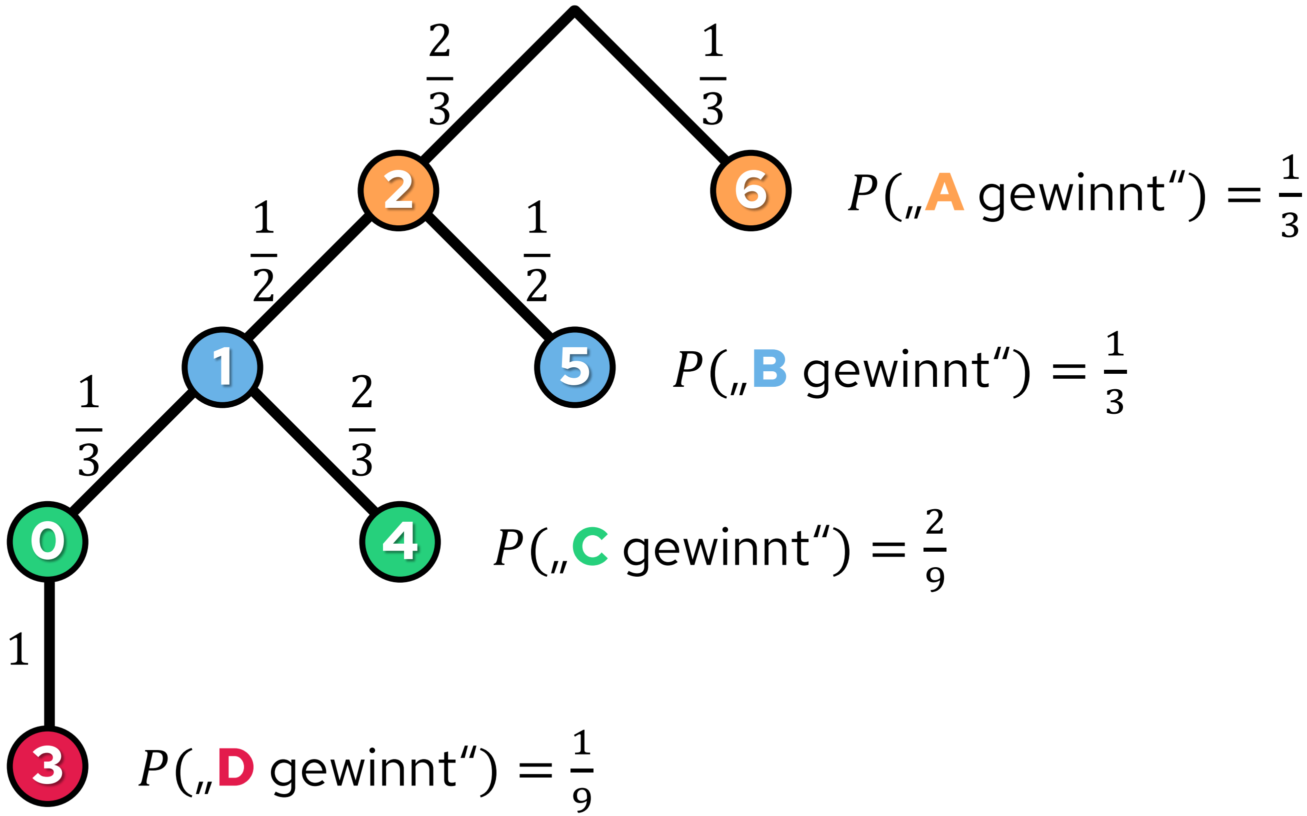
Aufgabe
Tragen Sie in die Zellen der Tabelle jeweils die Wahrscheinlichkeit ein, dass Zeile gegen Spalte gewinnt.

Chinesische Würfel

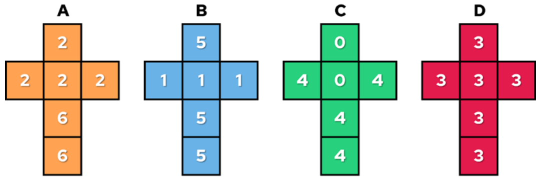




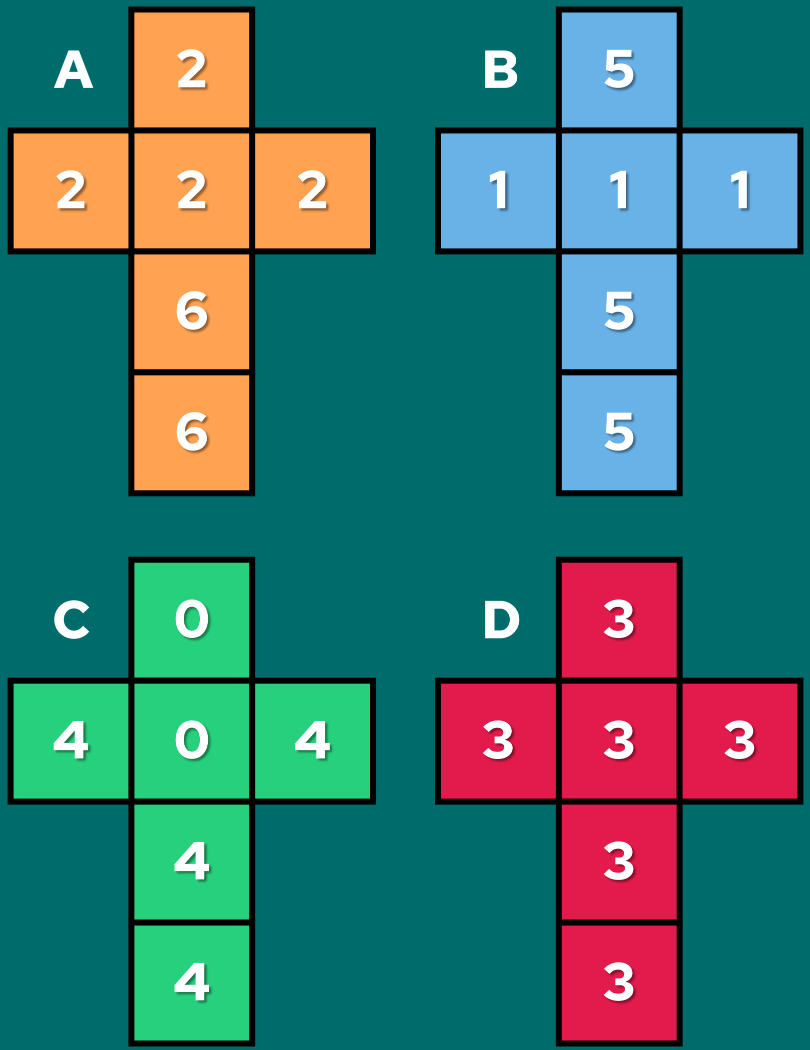
Aufgabe: Wie groß ist die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für jeden der Würfel, wenn alle vier Würfel geworfen werden?



Chinesische Würfel



RPTU
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



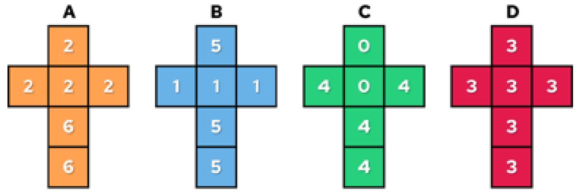
Gewinner	A	B	C	D
abs. Häufigkeit	166	176	111	47
rel. Häufigkeit	33,2%	35,2%	22,2%	9,4%

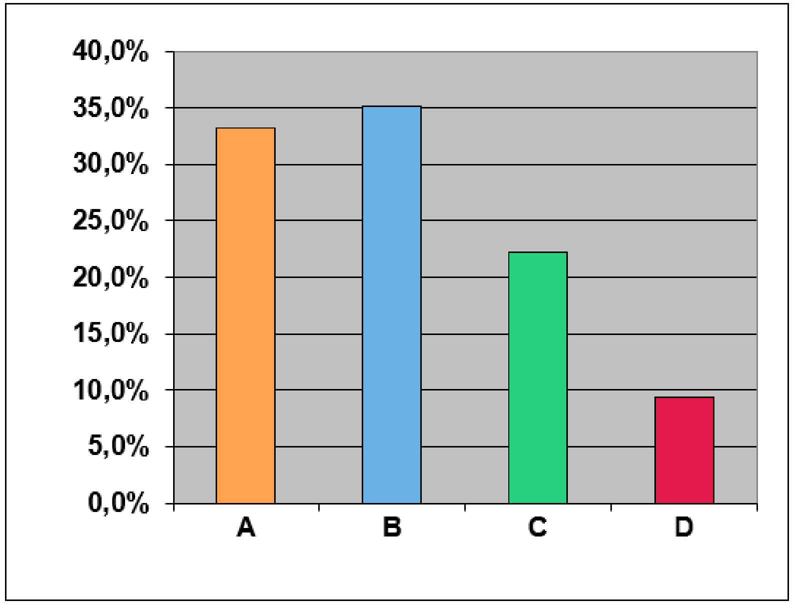
Würfe mit vier chinesischen Würfeln

Anzahl n der Würfe: 500

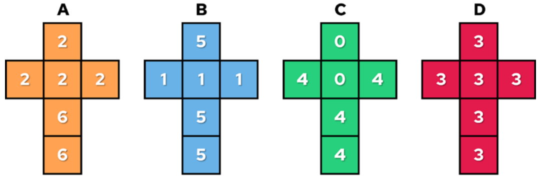
Taste F9 drücken!

A	B	C	D
6	1	0	3
6	5	4	3
2	5	4	3
2	5	0	3
2	5	4	3
2	1	4	3
2	5	4	3
2	1	4	3
2	5	4	3
6	5	4	3
2	1	4	3
6	1	4	3
2	5	4	3
6	5	4	3
6	1	4	3
2	5	4	3
2	1	4	3
6	5	4	3

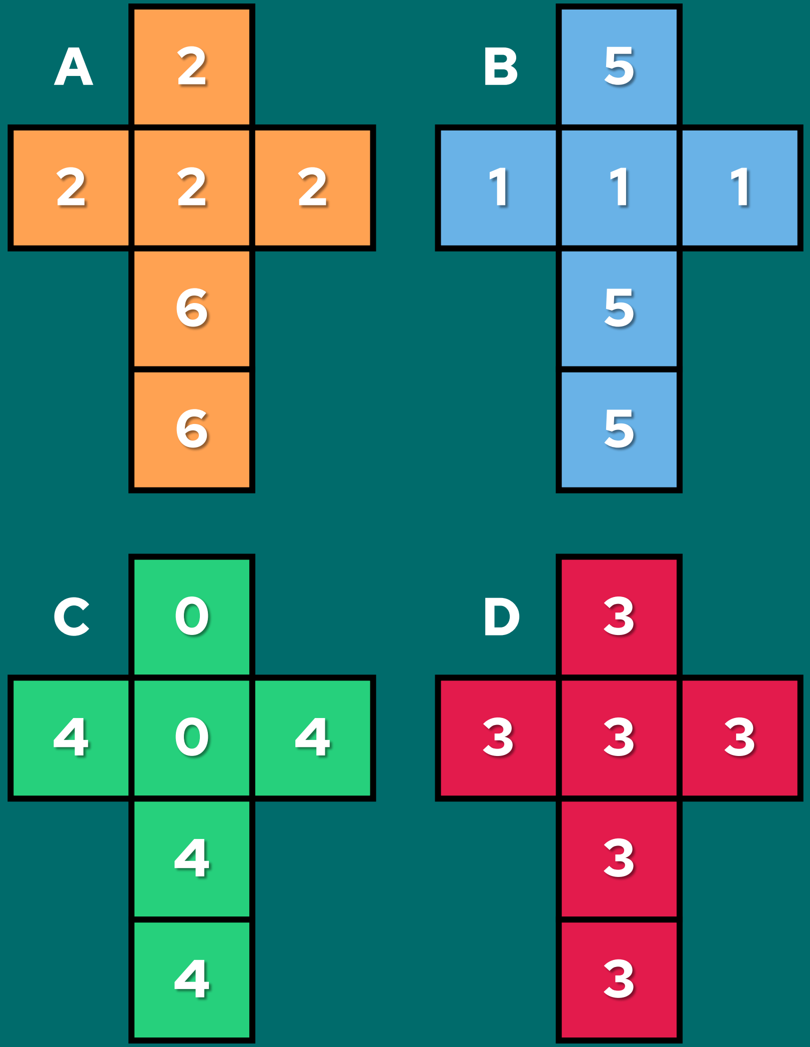




Chinesische Würfel

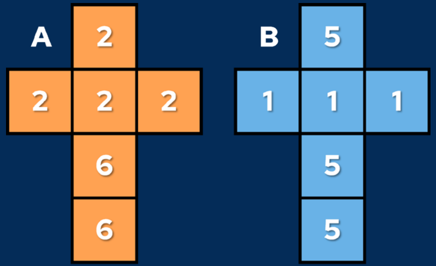


Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Neues Spiel

- Die beiden Spieler wählen je einen Würfel aus und spielen anschließend fünf Runden.
- Gewonnen hat der Spieler, der die meisten Runden gewonnen hat.



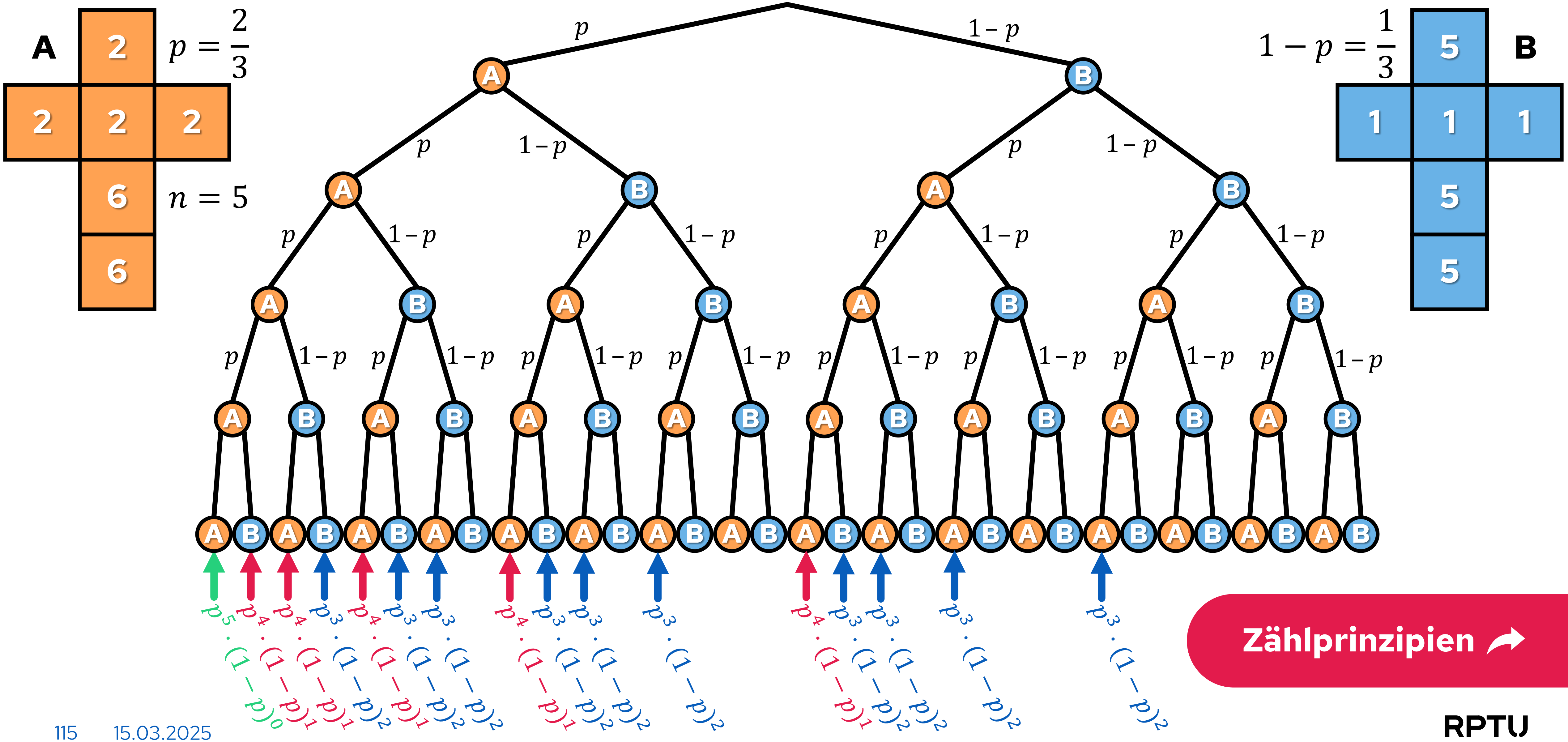
Aufgabe

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der mit dem „besseren“ bzw. der mit dem „schlechteren“ Würfel gewinnt?

Pundsack, F. & Schlie, S. (2014). Spielerisch zu den Pfadregeln. *Mathematik lehren, 186*, 18–22

Baumdiagramm bei fünf Wurfrunden

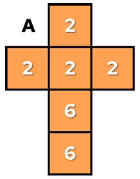
https://www.geogebra.org/m/da3z944b

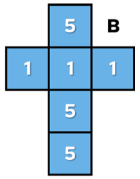


Zählprinzipien

RPTU

Ergebnisraum bei fünf Wurfrunden





Treffer 1: Würfel **A** gewinnt in einer Wurfrunde

Niete 0: Würfel **B** gewinnt in einer Wurfrunde

Ergebnisraum Ω

$\Omega = \{(1,1,1,1,1); (1,1,1,1,0); (1,1,1,0,1); (1,1,0,1,1); (1,0,1,1,1); (0,1,1,1,1); (1,1,1,0,0); (1,1,0,1,0);$
$(1,1,0,0,1); (1,0,1,1,0); (1,0,1,0,1); (1,0,0,1,1); (0,1,1,1,0); (0,1,1,0,1); (0,1,0,1,1); (0,0,1,1,1);$
$(1,1,0,0,0); (1,0,1,0,0); (1,0,0,1,0); (1,0,0,0,1); (0,1,1,0,0); (0,1,0,1,0); (0,1,0,0,1); (0,0,1,1,0);$
$(0,0,1,0,1); (0,0,0,1,1); (1,0,0,0,0); (0,1,0,0,0); (0,0,1,0,0); (0,0,0,1,0); (0,0,0,0,1); (0,0,0,0,0)\}$

Ereignis	**Wahrscheinlichkeit**
„0 Treffer“: $E_0 = \{(0,0,0,0,0)\}$	$P(E_0) = 1 \cdot p^0 \cdot (1-p)^5$
„1 Treffer“: $E_1 = \{(1,0,0,0,0); (0,1,0,0,0); (0,0,1,0,0); (0,0,0,1,0); (0,0,0,0,1)\}$	$P(E_1) = 5 \cdot p^1 \cdot (1-p)^4$
„2 Treffer“: $E_2 = \{(1,1,0,0,0); (1,0,1,0,0); (1,0,0,1,0); (1,0,0,0,1); (0,1,1,0,0); (0,1,0,1,0); (0,1,0,0,1); (0,0,1,1,0); (0,0,1,0,1); (0,0,0,1,1)\}$	$P(E_2) = 10 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3$
„3 Treffer“: $E_3 = \{(1,1,1,0,0); (1,1,0,1,0); (1,1,0,0,1); (1,0,1,1,0); (1,0,1,0,1); (1,0,0,1,1); (0,1,1,1,0); (0,1,1,0,1); (0,1,0,1,1); (0,0,1,1,1)\}$	$P(E_3) = 10 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2$
„4 Treffer“: $E_4 = \{(1,1,1,1,0); (1,1,1,0,1); (1,1,0,1,1); (1,0,1,1,1); (0,1,1,1,1)\}$	$P(E_4) = 5 \cdot p^4 \cdot (1-p)^1$
„5 Treffer“: $E_5 = \{(1,1,1,1,1)\}$	$P(E_5) = 1 \cdot p^5 \cdot (1-p)^0$

$\Rightarrow P(\text{„}\mathbf{A}\text{ gewinnt“}) = P(E_3 \cup E_4 \cup E_5) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) = \frac{64}{81} \approx 0{,}79$

Beispiel: Randomized-Response-Technik
Datengewinnung bei heiklen Themen

Problem

Direkte Fragen zu heiklen Themen (z. B. „Haben Sie schon einmal Cannabis konsumiert?“) werden in Umfragen oft nicht ehrlich beantwortet.

„Naive“ Umfragen liefern deshalb keine verlässlichen Informationen.

A

Haben Sie schon einmal Cannabis konsumiert?

Ja / Nein

B

Sehen Sie unten einen Schwarzen Punkt?

Ja / Nein

●

C

Sehen Sie unten einen Schwarzen Punkt?

Ja / Nein

○

Randomized-Response-Technik …

- versucht mit geeigneten Methoden verlässliche Antworten auf heikle Fragen zu ermitteln.
- kann nur bei größeren Gruppen sinnvoll umgesetzt werden kann.

Vorgehen bei der Randomized-Response-Technik

Eine Person zieht aus einem verdeckten Stapel eine der obigen Karten A, B oder C und hält diese geheim.

Anschließend beantwortet sie die auf der Karte stehende Frage wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“.

Krüger, K. (2004): Wahrheit oder Pflicht. Die Methode der Zufallsantworten bei sensitiven Umfragen. *Mathematik lehren, 125*, 50-54
https://o-mathe.de/stochastik/wahrscheinlichkeit/mehrstufige_ze/anwendung/lernstrecke Ω-mathe

Beispiel: Randomized-Response-Technik
Datengewinnung bei heiklen Themen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

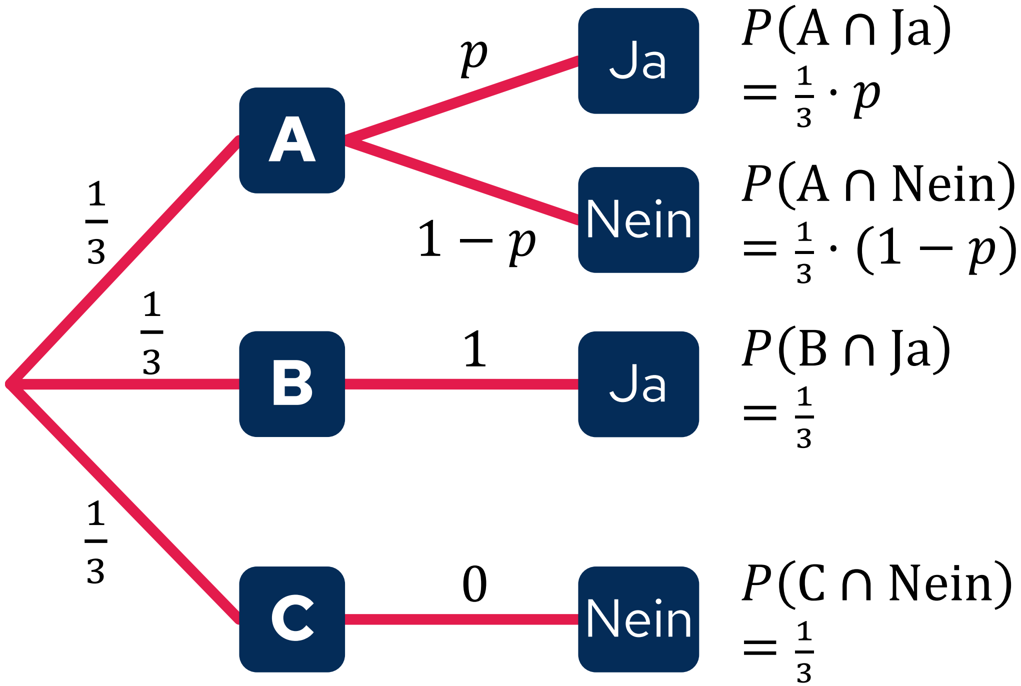
Aufgabe

Erstellen Sie ein Baumdiagramm zu diesem Zufallsexperiment und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p für die Antwort „Ja“ nach ziehen von **A** , wenn insgesamt 40% aller Befragten mit „Ja“ antworten.

A
Haben Sie schon einmal Cannabis konsumiert?
Ja / Nein

B
Sehen Sie unten einen Schwarzen Punkt?
Ja / Nein

C
Sehen Sie unten einen Schwarzen Punkt?
Ja / Nein



Vorgehen bei der Randomized-Response-Technik

Eine Person zieht aus einem verdeckten Stapel eine der obigen Karten A, B oder C und hält diese geheim.

Anschließend beantwortet sie die auf der Karte stehende Frage wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“.

Krüger, K. (2004): Wahrheit oder Pflicht. Die Methode der Zufallsantworten bei sensitiven Umfragen. *Mathematik lehren, 125*, 50-54
https://o-mathe.de/stochastik/wahrscheinlichkeit/mehrstufige_ze/anwendung/lernstrecke Ω-mathe

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

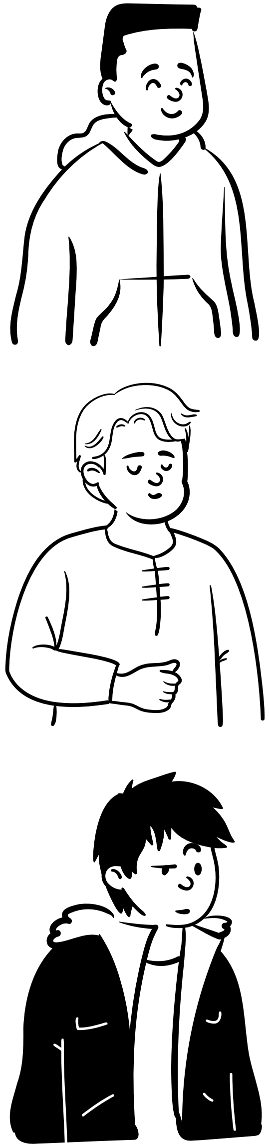
Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Referatsthemen



Aufgabe: Die Schüler Tobias, Alexander und Stefan erhalten je eines von fünf zum Referat anstehenden Büchern. Auf wie viele Arten ist eine solche Verteilung möglich?

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *DdM, 12*(4), 245-262

Zählprinzipien

Zu beachten
- Gedankengänge sind umkehrbar.
- Lösungswege variieren.

Produktregel → Fundamentales Zählprinzip
Das zu Zählende wird in voneinander unabhängige Stufen aufgespalten, die einzeln gezählt und multipliziert werden. Es werden also die Möglichkeiten gezählt, Teile zu einem Ganzen zusammenzusetzen.

Beispiel:
Wie viele Zahlen aus drei Ziffern kann man bilden, wenn keine Ziffer wiederholt werden darf?
$3 \cdot 2 \cdot 1$

Summenregel → Regel des getrennten Abzählens
Sich gegenseitig ausschließende, aber in sich vollständige Fälle werden gezählt und anschließend addiert.

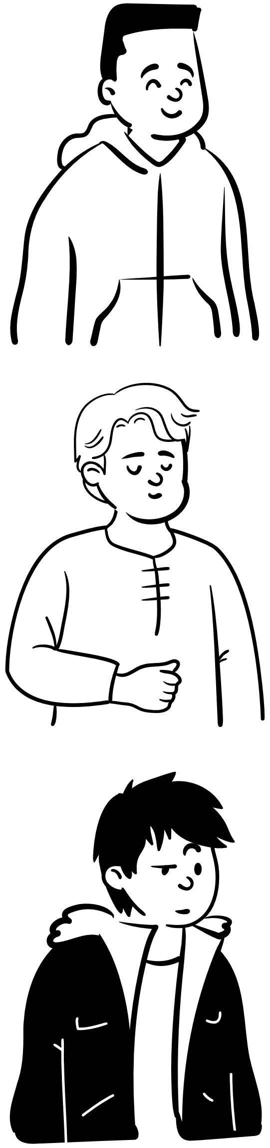
Beispiel:
Auf wie viele Arten können sich 3 Mädchen und 3 Jungen so in eine Reihe setzen, dass Mädchen und Jungen abwechselnd sitzen?
$(3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) + (3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1)$

„Prinzip der Schäfer"
Ein Schäfer, der sehr schnell die Anzahl der Schafe in seiner Herde bestimmt, erklärt seine Vorgehensweise wie folgt: „Ich zähle die Beine und teile die Anzahl durch vier."

Beispiel:
Wie viele 8-stellige Zahlen gibt es, in denen zweimal die Ziffer 3 und je dreimal die Ziffern 1 und 2 vorkommen? $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *DdM, 12*(4), 245-262

Referatsthemen



Aufgabe: Die Schüler Tobias, Alexander und Stefan erhalten je eines von fünf zum Referat anstehenden Büchern. Auf wie viele Arten ist eine solche Verteilung möglich?

Ansatz 1: Stufung über Personen

Verteilungsprozess in drei Stufen, entsprechend den drei Personen, wobei nacheinander 5, 4 bzw. 3 Bücher zur Verfügung stehen.

Anzahl der Möglichkeiten: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *DdM, 12*(4), 245-262

Referatsthemen

Aufgabe: Die Schüler Tobias, Alexander und Stefan erhalten je eines von fünf zum Referat anstehenden Büchern. Auf wie viele Arten ist eine solche Verteilung möglich?

Ansatz 2: Stufung über Bücher

- 1. Buch wird verteilt $\longrightarrow$ 3 mögliche Adressaten
- 2. Buch wird verteilt $\longrightarrow$ 2 mögliche Adressaten
- 3. Buch wird verteilt $\longrightarrow$ 1 möglicher Adressat

Verteilungsvorgang ist mangels weiterer Adressaten beendet.

Anzahl der Möglichkeiten: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Problem: Es wurden nur 3 Bücher verteilt, die erst aus den 5 Büchern ausgewählt werden müssen! $\binom{5}{3}$

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{5}{3} \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *DdM, 12*(4), 245-262

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

Kernideen im Fokus bei stochastischer (Un-)Abhängigkeit und bedingter Wahrscheinlichkeit

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit) ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

- Struktur erfassen (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Lehrplan RLP: Leistungskurs

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
5.	Die Begriffe „bedingte Wahrscheinlichkeit" und „Unabhängigkeit zweier Ereignisse" kennen und anwenden (5.02g, 5.03g)	Im Rahmen des pädagogischen Freiraums sollte in diesem Zusammenhang auch der Satz von Bayes behandelt werden.

Lehrplan RLP: Grundkurs – Stochastik 1

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	**Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz**
4.	Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen (5.03g)	

 MBWWK (2015). Lehrplan Mathematik – Grund- und Leistungsfach in der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), S. 34 & 54

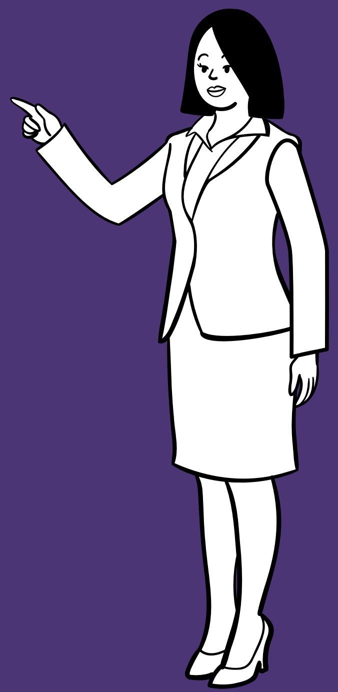
„Linda" – Eine Umfrage

Linda ist 31 Jahre alt und Single. Sie unterhält sich gerne über Themen wie Abrüstung oder Gleichberechtigung.

Einschätzung
Welche der folgenden Behauptungen ist dann eher wahrscheinlich?

A Linda ist Bankkauffrau.

B Linda ist Bankkauffrau und aktiv in der feministischen Bewegung.



Tomlinson & Quinn (1998). Bedingte Wahrscheinlichkeit verstehen. *Stochastik in der Schule, 18*(3), 27-40

Intuitive Urteile → Sekundäres Denken

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Intuitive Urteile

- wie beim „Linda“-Problem sind nach Gardner (1991) mit optischen Täuschungen vergleichbar und unvermeidbar.
- können durch Metakognition, sogenanntes **sekundäres Denken**, (z. B. den bewussten Gebrauch von mathematischen Werkzeugen) überwunden werden.

Geeignete Aktivitäten zur Entwicklung sekundären Denkens

- Experimentieren und Spiele durchführen
- Computersimulationen einsetzen
- graphische Darstellungen nutzen

Daneben müssen mathematische Theorien stehen!

Ziel

Intuitives Verständnis für mathematische Argumente aufbauen.

- Verbessert die Fähigkeit rational zu denken.
- Hilft dabei, stochastische Situationen zu beurteilen.

Gardner, H. (1991). The unschooled mind: How children think and how schools should teach. New York: Basic Books

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe

- Es werden nacheinander zwei Karten aus einem verdeckten Kartenstapel mit 32 Karten gezogen.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte ein As ist unter der Bedingung, dass die erste Karte ein Bube ist?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein As ist unter der Bedingung, dass die zweite Karte ein Bube ist?

 Bender, P. (1997). Grundvorstellungen & Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule, 17*(1), 8-33

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$

- ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, wenn man weiß, dass B eingetreten ist.
- ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B (bereits) eingetreten ist.

Sprechweise

- Der senkrechte Strich ist zu lesen als „unter der Bedingung/Voraussetzung".
- Man sagt auch, $P(A|B)$ ist „die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B".

Alternative Schreibweisen

- Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B
- $P(A|B)$
- $P_B(A)$

Stochastische Unabhängigkeit

Beispiele

- Die Wahrscheinlichkeit für Regen ist **unabhängig** von unseren Wünschen.
- Die Zahl der Leute, die mit einem Regenschirm aus dem Haus gehen ist **abhängig** von der Wettervorhersage.

Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B sind (stochastisch) unabhängig, wenn

- sie sich in Hinblick auf die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens nicht beeinflussen.
- $P(A) = P(A|B)$ bzw. $P(B) = P(B|A)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definition

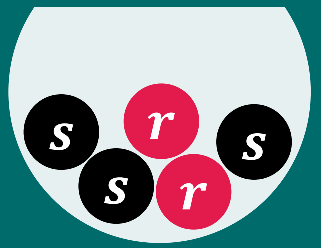
Zwei Ereignisse A und B heißen **(stochastisch) unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Stochastische Unabhängigkeit

Urnenexperiment

Aus einer Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln wird zweimal nacheinander eine Kugel gezogen. Vor jedem Zug wird sorgfältig gemischt.



Ziehen mit Zurücklegen

Legt man die Kugel nach dem ersten Ziehen wieder zurück, so sind die Ereignisse

- S_1: „Schwarz beim ersten Zug" und
- S_2: „Schwarz beim zweiten Zug"

voneinander **unabhängig**.

Ziehen ohne Zurücklegen

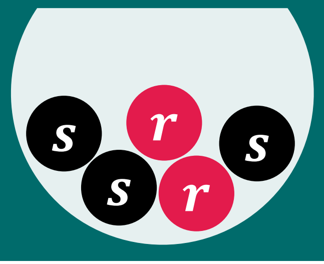
Legt man die Kugel nach dem ersten Ziehen nicht zurück, so sind die Ereignisse

- S_1: „Schwarz beim ersten Zug" und
- S_2: „Schwarz beim zweiten Zug"

voneinander **abhängig**.

Hinweis: Zeichnen Sie Baumdiagramme, um die Unterschiede zu sehen!

Ziehen mit Zurücklegen

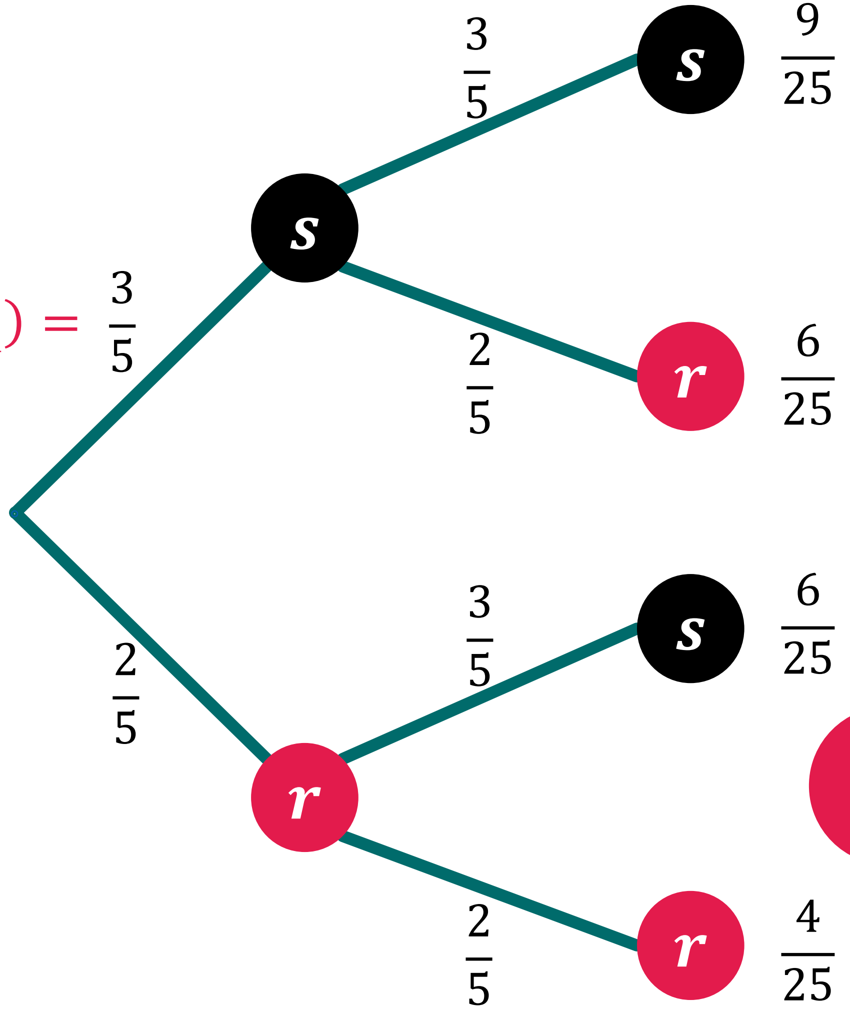


S_1	Ereignis: „Schwarz beim ersten Zug“
S_2	Ereignis: „Schwarz beim zweiten Zug“
$S_1 \cap S_2$	Ereignis: „Schwarz beim ersten und beim zweiten Zug“

1. Zug

2. Zug

$P(S_1) = \frac{3}{5}$

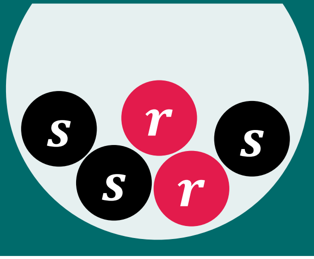


$P(S_1 \cap S_2) = \frac{9}{25}$

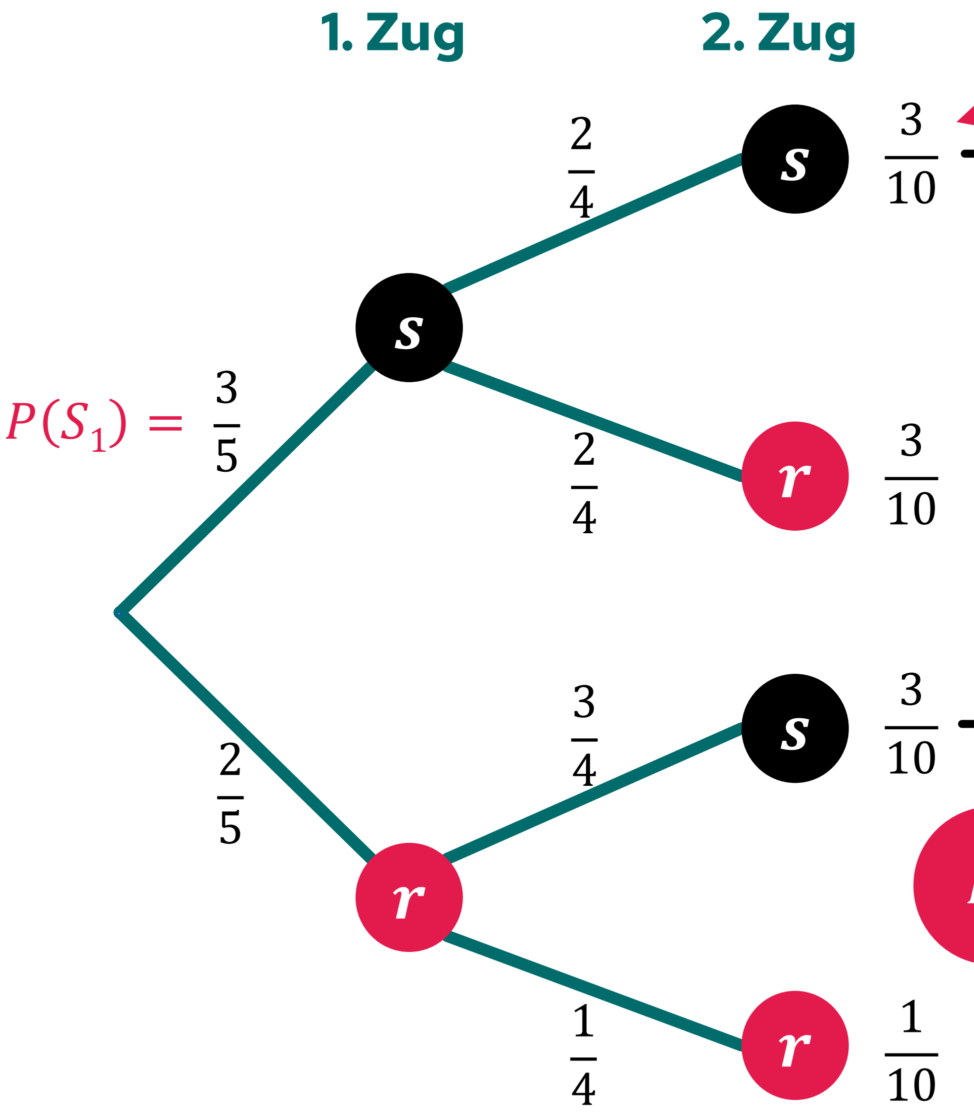
$$P(S_2) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$P(S_1 \cap S_2) \overset{!}{=} P(S_1) \cdot P(S_2)$$

Ziehen ohne Zurücklegen



S_1	Ereignis: „Schwarz beim ersten Zug“
S_2	Ereignis: „Schwarz beim zweiten Zug“
$S_1 \cap S_2$	Ereignis: „Schwarz beim ersten und beim zweiten Zug“



$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{3}{10}$$

$$P(S_2) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(S_1 \cap S_2) \overset{!}{\neq} P(S_1) \cdot P(S_2)$$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

Zufallsexperiment

Es wird einmal mit einem fairen Würfel gewürfelt.

Dabei interessieren folgende Ergebnisse bzgl. der Augenzahl:

X „Gerade Zahl“

Y „Zahl größer als 2“

Z „Primzahl“

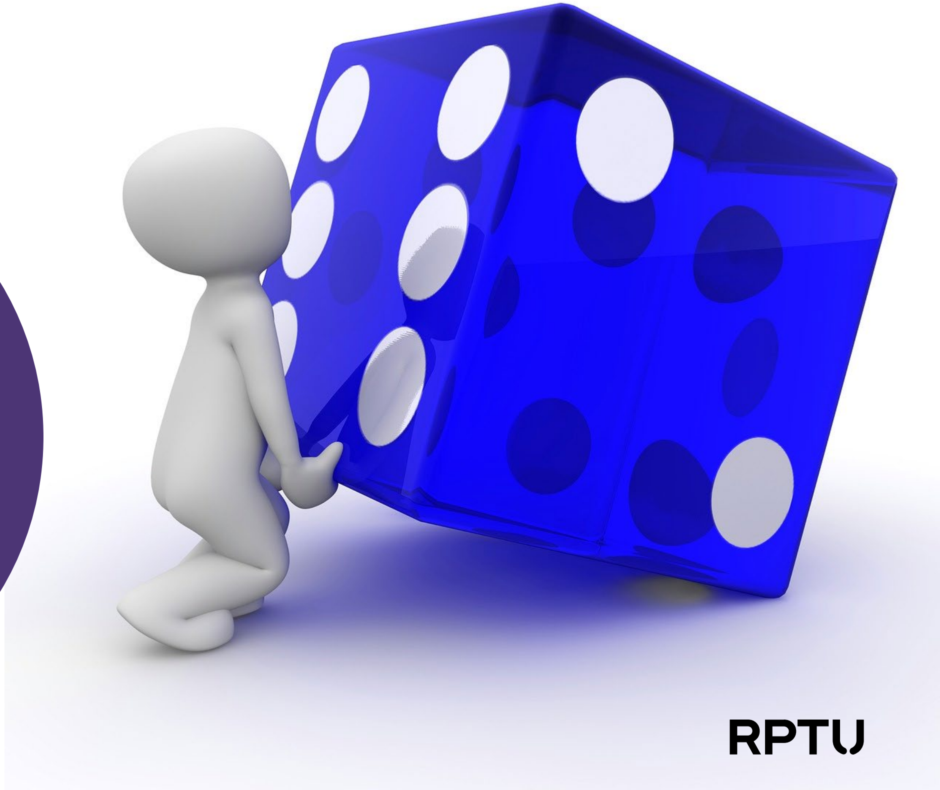
Aufgabe

Wie kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass

- X und Y,
- Y und Z bzw.
- X und Z

$$P(X \cap Y) \stackrel{?}{=} P(X) \cdot P(Y)$$

gleichzeitig eintreten? Gesucht sind also die Wahrscheinlichkeiten $P(X \cap Y)$, $P(Y \cap Z)$ und $P(X \cap Z)$.



Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

$X \cap Y$	Y	$\bar{Y}$
	2 **4** / **3** **6** / **5** 1	**2** 4 / 3 6 / 5 **1**
X: **2** **4** / 3 **6** / 5 1	2 **4** / 3 **6** / 5 1	**2** 4 / 3 6 / 5 1
$\bar{X}$: 2 4 / **3** 6 / **5** **1**	2 4 / **3** 6 / **5** 1	2 4 / 3 6 / 5 **1**

$X \cap Y$	$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(\bar{Y}) = \frac{1}{3}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Y) = \frac{1}{3}$ $= P(X) \cdot P(Y)$	$P(X \cap \bar{Y}) = \frac{1}{6}$
$P(\bar{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\bar{X} \cap Y) = \frac{1}{3}$	$P(\bar{X} \cap \bar{Y}) = \frac{1}{6}$

X: „Gerade Zahl“

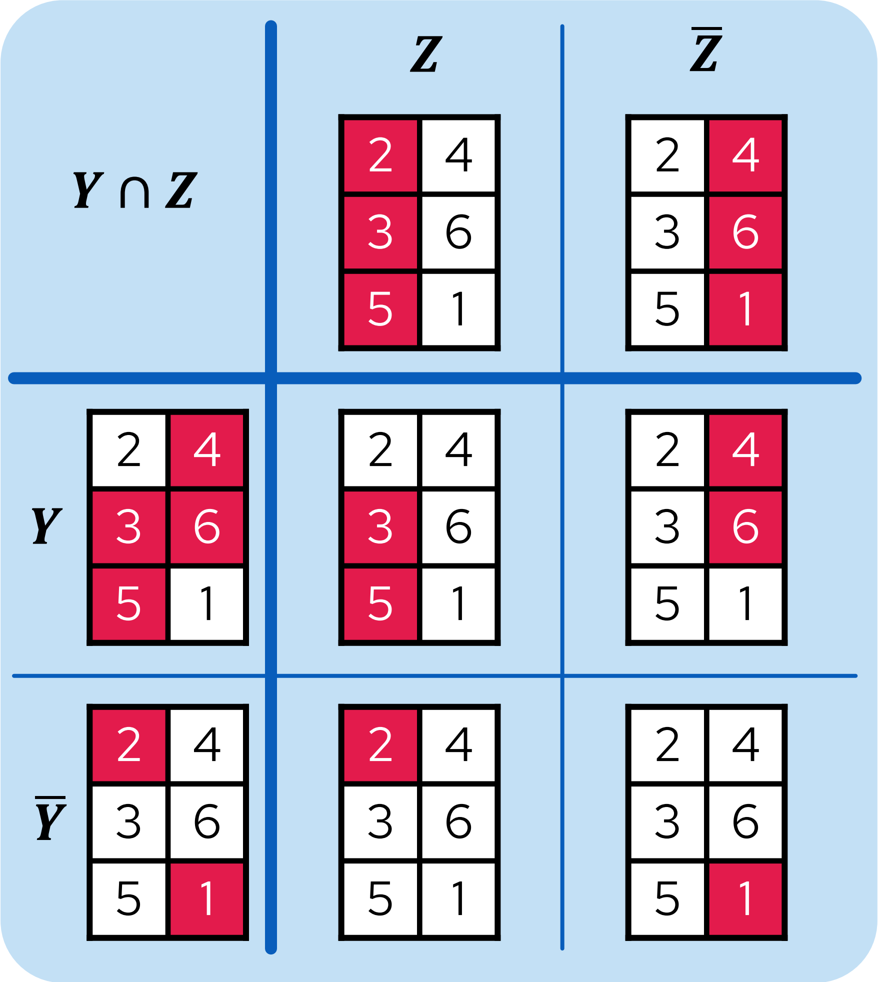
unabhängig

Y: „Zahl größer als 2“

Z: „Primzahl“

Tomlinson, S. & Quinn, R. (1998). Bedingte Wahrscheinlichkeit Verstehen. *Stochastik in der Schule, 18*(3), 27-40

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel



$Y \cap Z$	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(Y \cap Z) = \frac{1}{3}$ $= P(Y) \cdot P(Z)$	$P(Y \cap \overline{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\overline{Y}) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{Y} \cap Z) = \frac{1}{6}$	$P(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = \frac{1}{6}$

X: „Gerade Zahl“

Y: „Zahl größer als 2“

unabhängig

Z: „Primzahl“

 Tomlinson, S. & Quinn, R. (1998). Bedingte Wahrscheinlichkeit Verstehen. *Stochastik in der Schule, 18*(3), 27-40

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

$X \cap Z$	Z	$\bar{Z}$
X 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\bar{X}$ 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

$X \cap Z$	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\bar{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Z) = \frac{1}{6}$ $\neq P(X) \cdot P(Z)$	$P(X \cap \bar{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\bar{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\bar{X} \cap Z) = \frac{1}{3}$	$P(\bar{X} \cap \bar{Z}) = \frac{1}{6}$

X: „Gerade Zahl“

abhängig

Y: „Zahl größer als 2“

Z: „Primzahl“

Tomlinson, S. & Quinn, R. (1998). Bedingte Wahrscheinlichkeit Verstehen. *Stochastik in der Schule, 18*(3), 27-40

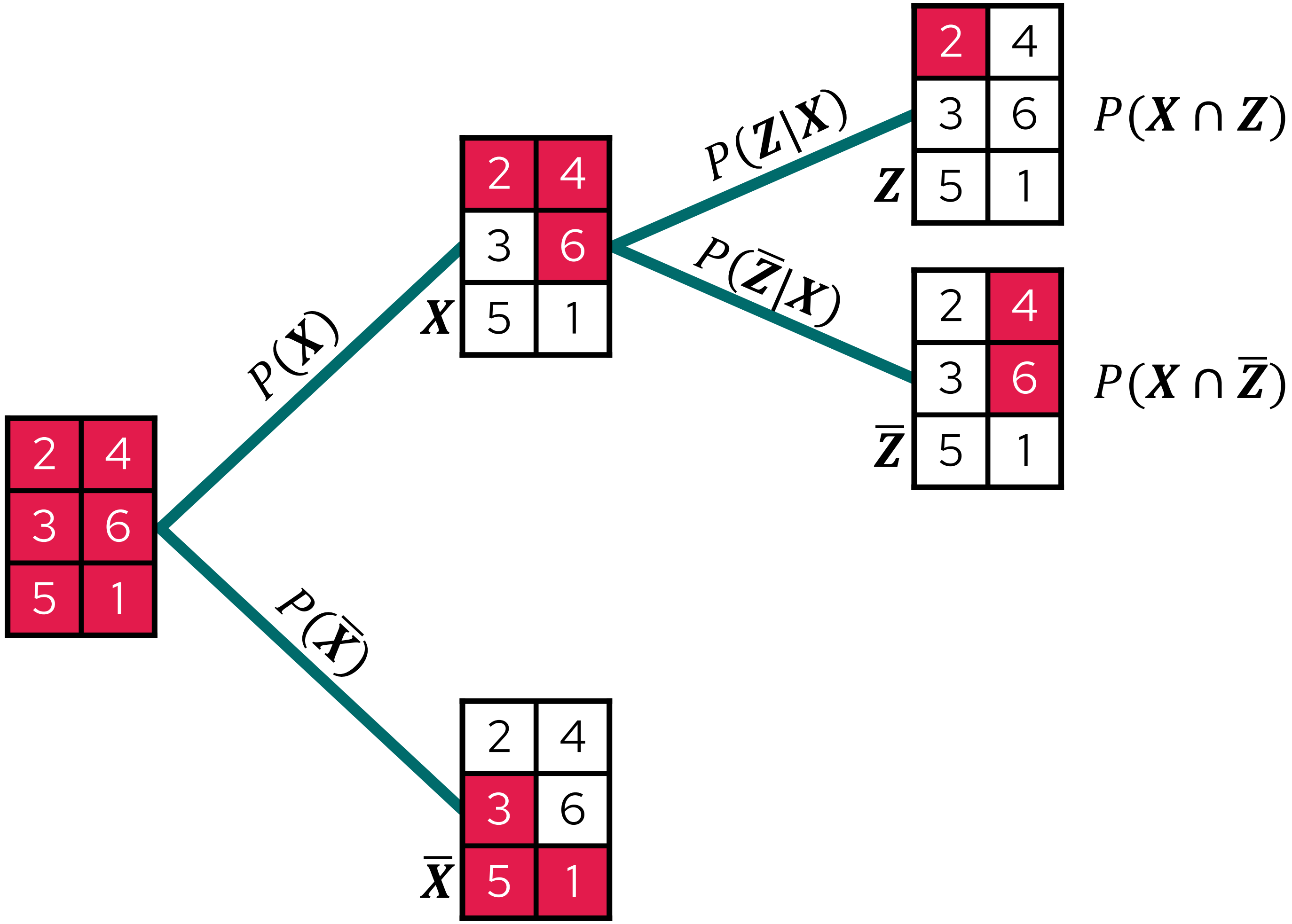
Bedingte Wahrscheinlichkeit

$\boldsymbol{X}$: „Gerade Zahl“

2	4
3	6
5	1

$\boldsymbol{Z}$: „Primzahl“

2	4
3	6
5	1

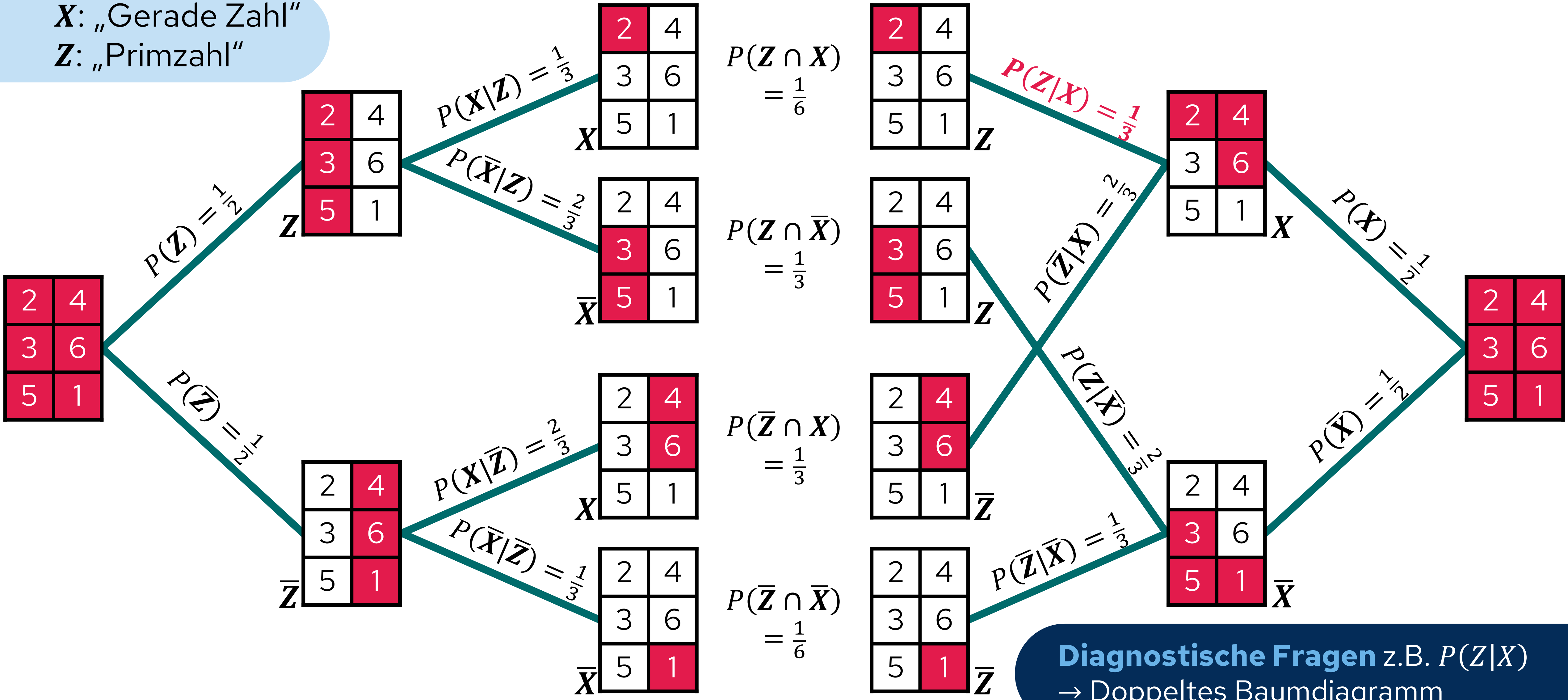


$$P(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}) = \frac{P(\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Z})}{P(\boldsymbol{X})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{\boldsymbol{Z}}|\boldsymbol{X}) = \frac{P(\boldsymbol{X} \cap \overline{\boldsymbol{Z}})}{P(\boldsymbol{X})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit
Doppeltes Baumdiagramm

X: „Gerade Zahl“
Z: „Primzahl“



Diagnostische Fragen z.B. $P(Z|X)$
→ Doppeltes Baumdiagramm

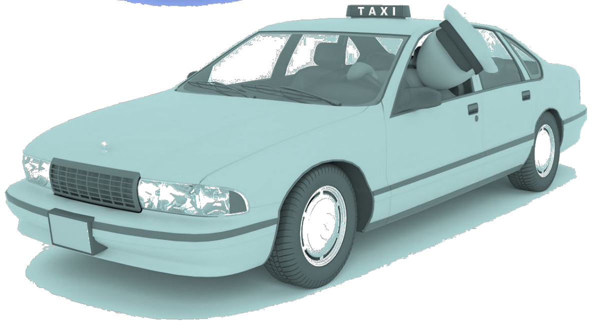
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Taxi-Problem

Taxi-Problem

Ein alter Mann wird Zeuge eines Autounfalls mit Fahrerflucht und berichtet, dass das flüchtende Auto ein blaues Taxi gewesen sei (Behauptung b). Es gibt zwei Taxiunternehmen in der Stadt, die 15 blaue (B) bzw. 85 grüne (G) Taxen haben. In der Verhandlung wird die Sehfähigkeit des Mannes geprüft und man bekommt heraus, dass er in 80% der Fälle die richtige Farbe zuordnen kann, d. h.:

$$P(b|B) = P(g|G) = 0{,}8$$



Aufgabe

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich ein blaues Taxi in den Unfall verwickelt war?

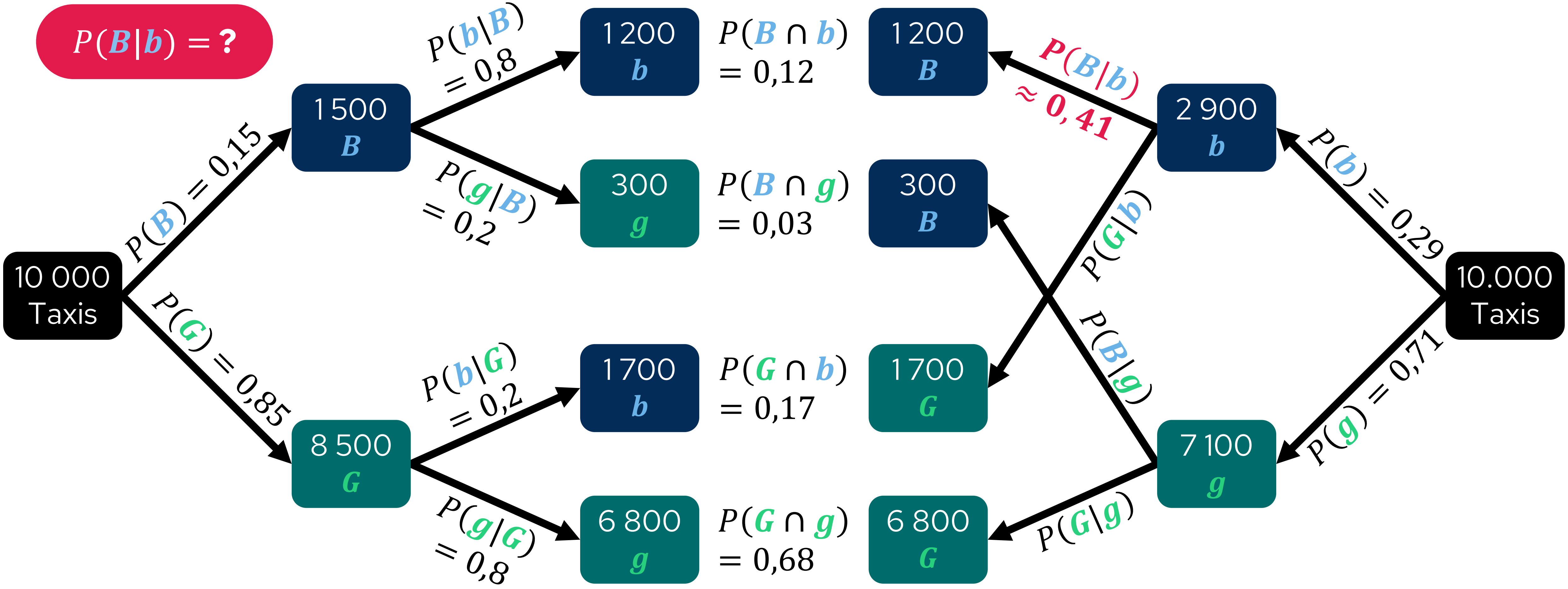
$$P(B|b) = ?$$

Die meisten Befragten nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeit deutlich über 0,5 liegt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Taxi-Problem

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



$$P(B|b) = \frac{P(B \cap b)}{P(b)} = \frac{0{,}12}{0{,}29} \approx 0{,}41$$

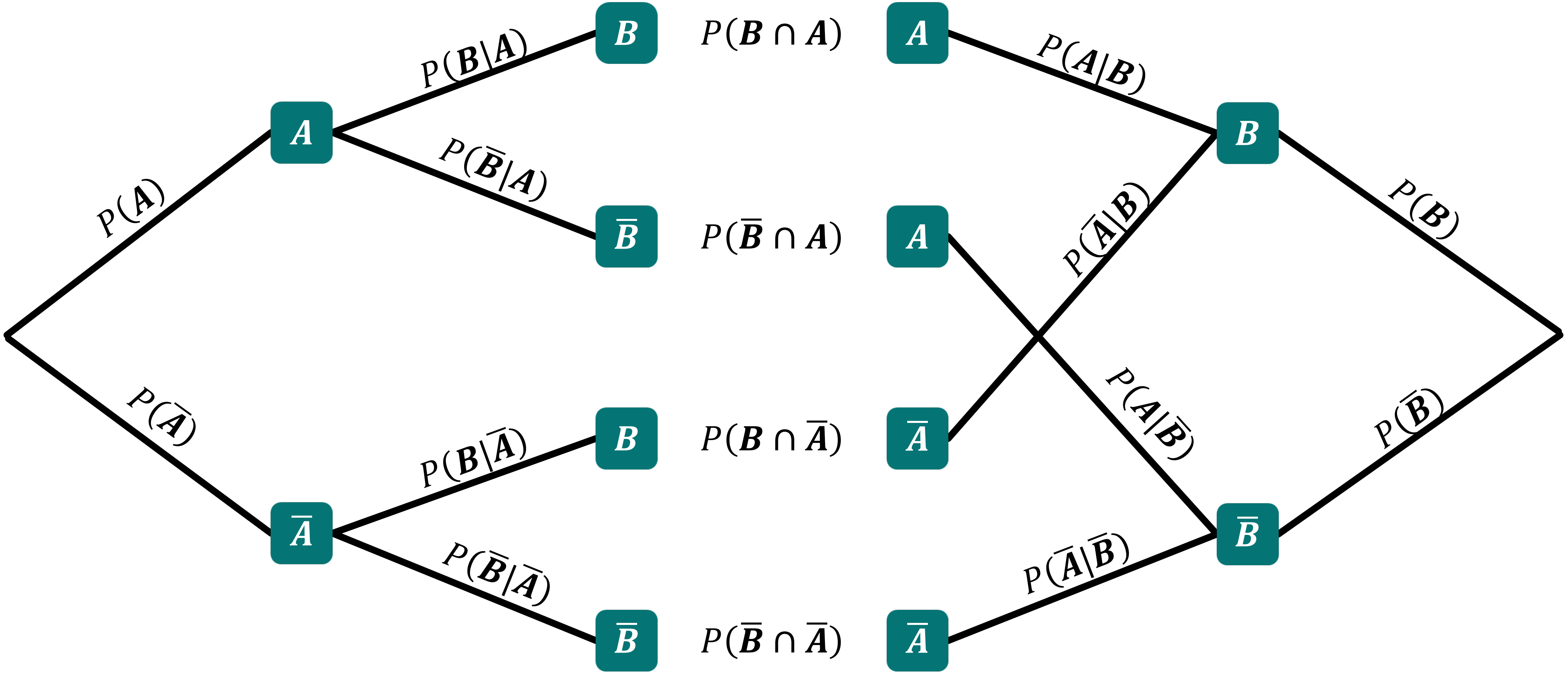
$$P(b) = P(B \cap b) + P(G \cap b) = 0{,}12 + 0{,}17 = 0{,}29$$

https://www.geogebra.org/m/dbstyj36

https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=c437fc6d-82b8-424c-a0a3-b247012dee66

Bedingte Wahrscheinlichkeit

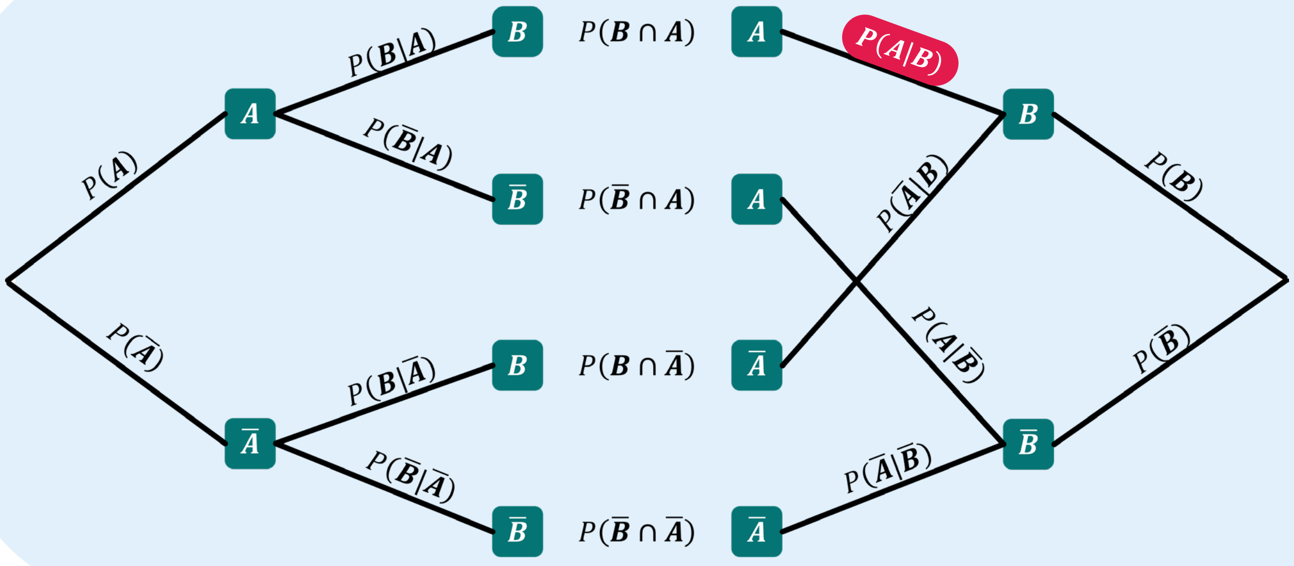
Doppeltes Baumdiagramm



 https://www.geogebra.org/m/dbstyj36

Totale Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B\cap A)+P(B\cap \bar{A})} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})}$$



Totale Wahrscheinlichkeit von B

Für $\Omega = A \cup \bar{A}$ und $B \subseteq \Omega$ gilt:

$$P(B) = P(A)\cdot P(B|A) + P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})$$

Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})}$$

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen
Fachbegriffe

Prävalenz	Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung	auch: Verbreitung
Sensitivität eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein erkrankter Mensch positiv getestet wird	auch: Empfindlichkeit, Richtigpositiv-Rate
Spezifität eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein gesunder Mensch negativ getestet wird	auch: Richtignegativ-Rate
Positiver Vorhersagewert (ppV) eines Tests	Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Mensch tatsächlich erkrankt ist	auch: positive predictive Value (ppV), positiver Prädiktionswert, Relevanz

Pinkernell, G. (2006). Test positiv – Diagnose negativ. Medizinische Testergebnisse richtig interpretieren. *Mathematik lehren, 138*, 50-55

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen
Mammographie

Mammographie

Für die Mammographie als Diagnose-Methode für Brustkrebs sind folgende auf Grund von quantitativen Untersuchungen geschätzten Wahrscheinlichkeiten bekannt:

- **1%** der weiblichen Bevölkerung einer bestimmten Altersgruppe hat Brustkrebs. (**Prävalenz**)
- Die **Sensitivität** der Mammographie beträgt **80%**. (Hat eine Patientin Brustkrebs, so kommt es in 80% der Fälle auch zu einer positiven Diagnose.)
- Die **Spezifität** der Mammographie beträgt **90%**. (Hat eine Patientin keinen Brustkrebs, so kommt es in 90% der Fälle auch zu einer negativen Diagnose.)

Aufgabe: Wie viel Prozent der bei einer Mammographie positiv getesteten Patientinnen sind tatsächlich krank?

Pinkernell, G. (2006). Test positiv – Diagnose negativ. Medizinische Testergebnisse richtig interpretieren. *Mathematik lehren, 138*, 50-55

Medizinische Tests → Ärztliche Diagnosen

Mammographie – Vierfeldertafel

Prävalenz	1,00%
Sensitivität	80,00%
Spezifität	90,00%

Anzahl der Untersuchten	3000

	Testergebnis positiv	Testergebnis negativ	Σ
tatsächlich krank	24	6	30
tatsächlich gesund	297	2673	2970
Σ	321	2679	3000

positiver Vorhersagewert	7,48%

Gestaffelte Mehrfachtests sind sehr sinnvoll!

Pinkernell, G. (2006). Test positiv – Diagnose negativ. Medizinische Testergebnisse richtig interpretieren. *Mathematik lehren, 138*, 50-55
https://juergen-roth.de/excel_material/stochastik/vierfeldertafel_zu_medizinischen_tests.xlsx https://geogebra.org/m/wg7bbs5k

Darstellungen im Vergleich: Vierfeldertafel

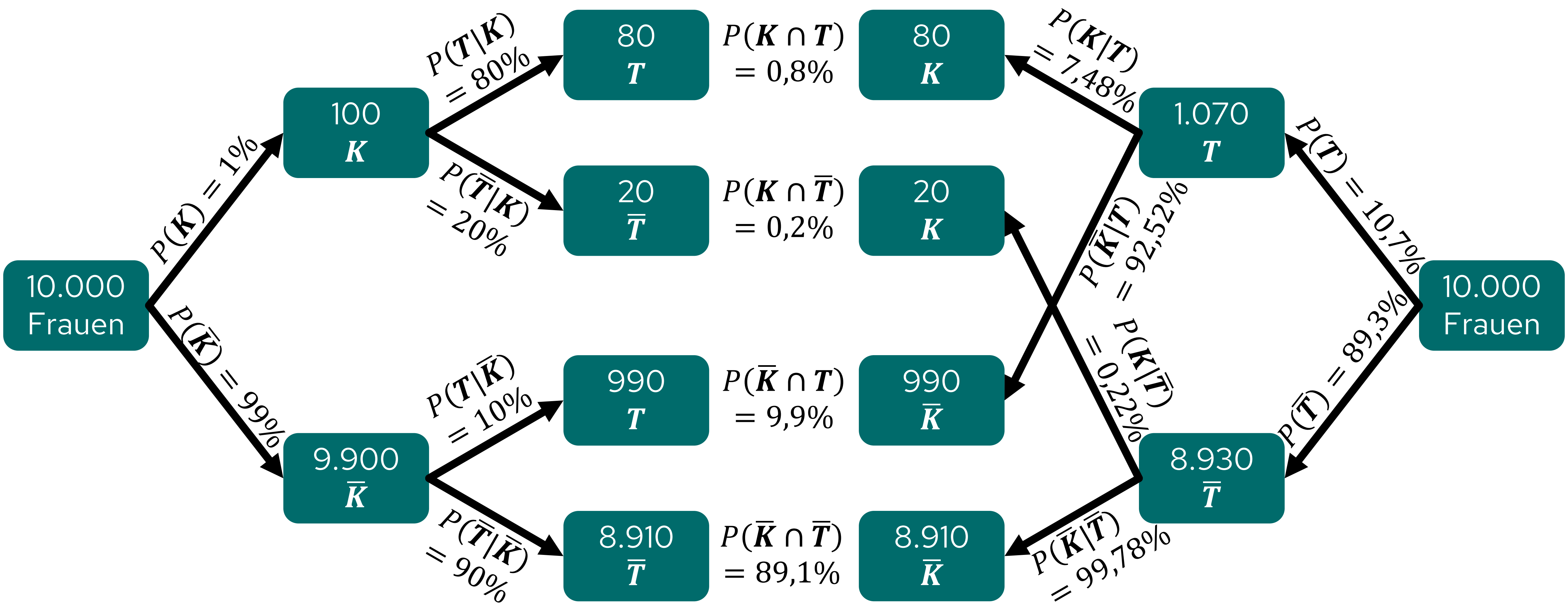
Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten

	T Testergebnis positiv	$\overline{T}$ Testergebnis negativ	
K tatsächlich krank	$P(K \cap T) = 0{,}8\%$	$P(K \cap \overline{T}) = 0{,}2\%$	$P(K) = 1\% = P(K \cap T) + P(K \cap \overline{T})$
$\overline{K}$ tatsächlich gesund	$P(\overline{K} \cap T) = 9{,}9\%$	$P(\overline{K} \cap \overline{T}) = 89{,}1\%$	$P(\overline{K}) = 99\% = P(\overline{K} \cap T) + P(\overline{K} \cap \overline{T})$
	$P(T) = 10{,}7\% = P(K \cap T) + P(\overline{K} \cap T)$	$P(\overline{T}) = 89{,}3\% = P(K \cap \overline{T}) + P(\overline{K} \cap \overline{T})$	$P(\Omega) = 100\% = P(K) + P(\overline{K}) = P(T) + P(\overline{T})$

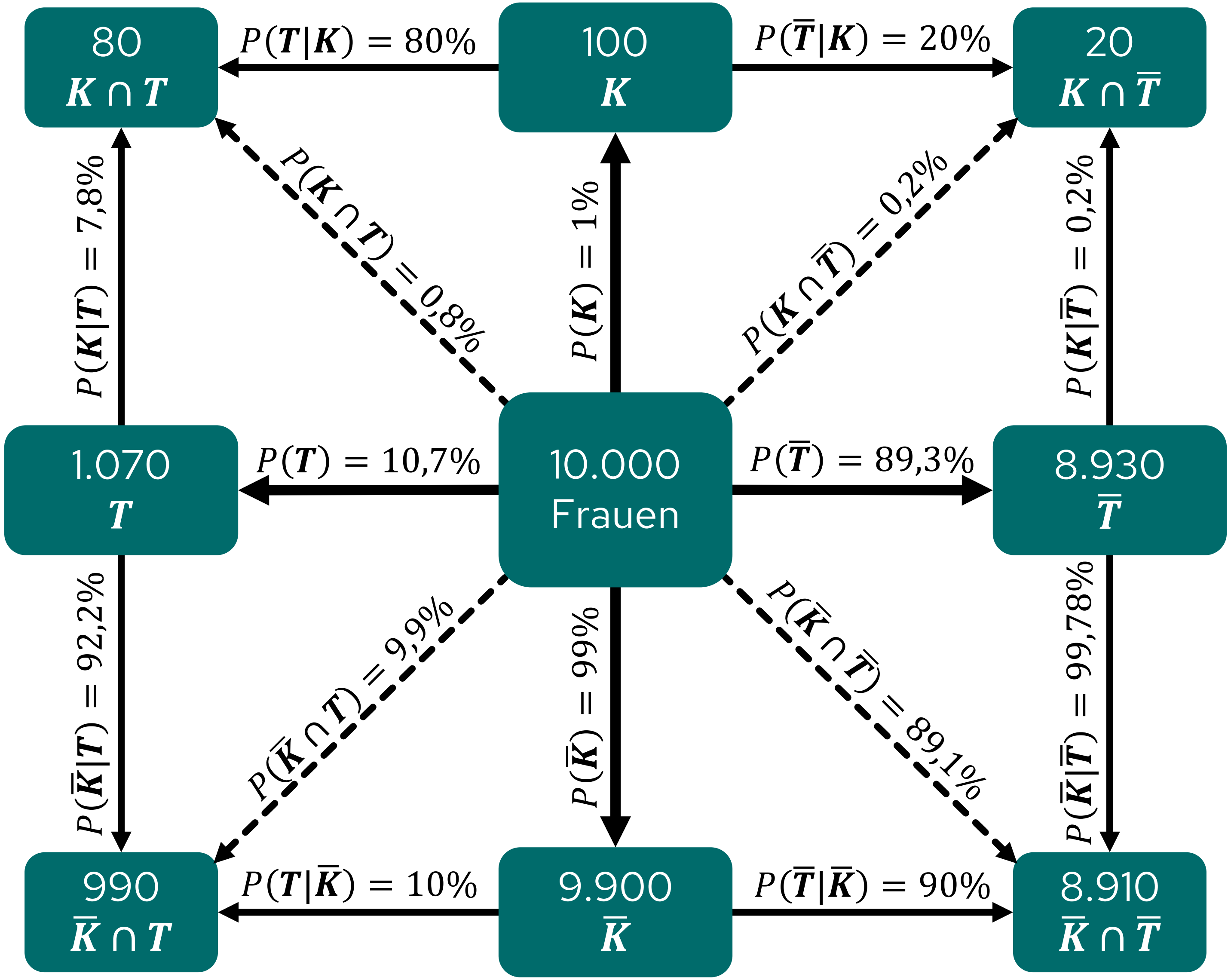
Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	T Testergebnis positiv	$\overline{T}$ Testergebnis negativ	
K tatsächlich krank	$H(K \cap T) = 80$	$H(K \cap \overline{T}) = 20$	$H(K) = 100 = H(K \cap T) + H(K \cap \overline{T})$
$\overline{K}$ tatsächlich gesund	$H(\overline{K} \cap T) = 990$	$H(\overline{K} \cap \overline{T}) = 8.910$	$H(\overline{K}) = 9.900 = H(\overline{K} \cap T) + H(\overline{K} \cap \overline{T})$
	$H(T) = 1.070 = H(K \cap T) + H(\overline{K} \cap T)$	$H(\overline{T}) = 8.930 = H(K \cap \overline{T}) + H(\overline{K} \cap \overline{T})$	$H(\Omega) = 10.000 = H(K) + H(\overline{K}) = H(T) + H(\overline{T})$

Darstellungen im Vergleich:
Doppeltes Baumdiagramm

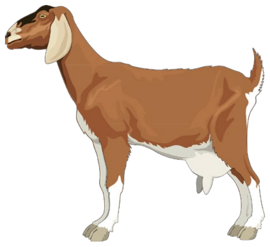


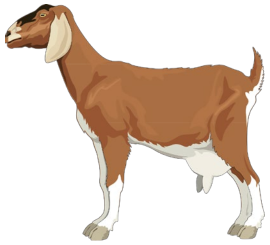
Darstellungen im Vergleich:
Häufigkeits-/Wahrscheinlichkeitsnetz



Binder, K., Steib, N. & Krauss, S. (2023). Von Baumdiagrammen über Doppelbäume zu Häufigkeitsnetzen – kognitive Überlastung oder didaktische Unterstützung? *Journal für Mathematik-Didaktik, 44*(2), 471–503

Ziegenproblem





Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth & Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de; s.digel@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU