



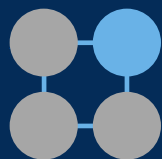
# MaTeGnu

**M**athematik mit **T**echnologie an **G**rundvorstellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

## Modul 3: Vektoren und Matrizen

Jürgen Roth & Susanne Digel

04.05.2024 Videokonferenz



Didaktik der  
Mathematik  
Sekundarstufen

R  
TU  
P

Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau



## Modul 3: Vektoren & Matrizen

1. Lehrplanalternativen RLP ↪
2. Algebraisieren des Anschauungsraums ↪
3. Skalarprodukt ↪
4. Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik ↪



# 1

## Lehrplanalternativen RLP

## Grundkurs

(ca. 44 Stunden)

Lineare Algebra  
und Analytische  
Geometrie

wahlweise

A1: Matrizen in  
praktischer  
Anwendung

A2: Geraden  
und Ebenen  
im Raum

## Leistungskurs

(ca. 75 Stunden)

Lineare Algebra  
und Analytische  
Geometrie

wahlweise

A1: Vektoren  
und Matrizen

A2: Geraden  
und Ebenen  
im Raum



## Wahlpflichtgebiet A1: Matrizen in praktischen Anwendungen

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren

- In Sachzusammenhängen folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und ausführen:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen
  - Inverse Matrix
- Komplexere Aufgaben aus mindestens zwei Anwendungsfeldern von Matrizen bearbeiten
- Erfahren, dass Matrizen auch zur Beschreibung von geometrischen Abbildungen dienen

## Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

- Begriff "Linearkombination" kennen & anwenden
- Parameterform von Geraden- & Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen bestimmen
- Lage gegebener Geraden & Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden
- Allg. Normalengleichung der Ebene kennen & anwenden
- Wissen und begründen:
  - eine Koordinatengleichung mit drei Variablen beschreibt eine Ebene
  - die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle „eine Lösung“, „keine Lösung“ oder „unendlich viele Lösungen“ geometrisch deuten

**In allen Wahl-  
pflichtgebieten  
enthalten!**

# Lehrplanalternativen RLP: Leistungskurs

(ca. 75 Stunden)

## Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

## Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

### Lineare Gleichungssysteme

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen
- Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren

**In allen Wahl-  
pflichtgebieten  
enthalten!**

### Matrizen

- Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen, sowie für Abbildungen und in nichtgeometrischen Sachbezügen anwenden:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen, Inverse Matrix

### Vektoralgebra

- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren
- Die Begriffe „Linearkombination“ und „linear abhängig/unabhängig“ verstehen & anwenden
- Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen
- Elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen



## Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

### Matrizen (Fortsetzung)

- Eigenschaften der affinen Abbildungen beweisen
- Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen verstehen
- Affine Abbildungen nach ihren Fixelementen untersuchen
- In mindestens einem nichtgeometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Sachaufgaben lösen

## Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

### Analytische Geometrie

- Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen
  - bestimmen und die Verfahren begründen
  - durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Allgemeine und Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung herleiten und anwenden
- Winkel und Abstände im Raum berechnen
- Kreis- und Kugelgleichung herleiten und zur Untersuchung von Lagebeziehungen anwenden
- Vektorprodukt:  
Definition & Eigenschaften kennen & anwenden

# 2

## Algebraisieren des Anschauungsraums



R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

MaTeGnu

## Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

- 2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums ↪
- 2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren ↪
- 2.3 Zugänge zum Vektorbegriff ↪
- 2.4 Geometrische Deutung von Vektoren ↪
- 2.5 Geraden- und Ebenengleichungen ↪
- 2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele ↪



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU



R

TU  
P Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

MaTeGnu

## Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

- 2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums
- 2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren
- 2.3 Zugänge zum Vektorbegriff
- 2.4 Geometrische Deutung von Vektoren
- 2.5 Geraden- und Ebenengleichungen
- 2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU



# Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums

## Zurückführen räumlicher Probleme auf ebene Probleme

- Schnittfiguren eines Körpers (einer Fläche) mit einer Ebene 🌐
- Projizieren eines Körpers (einer Fläche) in eine Koordinatenebene 🌐
- Folge: Einfachere Berechnung unbekannter Größen (Verfahren der ebenen Geometrie nutzbar.)

## Koordinatisierung

Geeignetes Koordinatensystem wählen

## Parametrisierung

Beschreiben von Bahnkurven durch Parametergleichungen

## Vektorisierung

Erfassen von Strecken mit Hilfe von Vektoren

## Kollinearität oder Vielfachheit

Vektorielle Beschreibung der Parallelität von Geraden untereinander

## Komplanarität

Vektorielle Beschreibung der Parallelität von Geraden zur selben Ebene

## Skalarprodukt

Grundlage von Längen-, Abstands- und Winkelberechnungen nach der Vektorisierung

R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

MaTeGnu

## Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

- 2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums
- 2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren**
- 2.3 Zugänge zum Vektorbegriff
- 2.4 Geometrische Deutung von Vektoren
- 2.5 Geraden- und Ebenengleichungen
- 2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

## Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

**1. Spiel:** Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

**2. Spiel:** Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

**3. Spiel:** Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

**4. Spiel:** Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

1

Bitte diese Aufgabe für Schülerinnen und Schüler zunächst selbst bearbeiten.

2

Welche Schwierigkeiten sind ggf. bei der Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler zu erwarten?



## Einige typische Schülerschwierigkeiten

- Schwierigkeit mit Pfeilklassen ↪
- Algebraische Auffassung von Vektoren fehlt („Vektor“ → „Schalter wird auf Geometrie gestellt“) ↪
- Deutung von Zahlenpaaren/-tripeln als Pfeile ↪
- Schwierigkeiten mit dem Nullvektor ↪
- Lernen ohne die Entwicklung von (Grund-)Vorstellungen ↪
- Vektorformeln aufstellen ↪
- „Ortsvektor“ als Problemfall ↪



## Interviewer (I)

Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

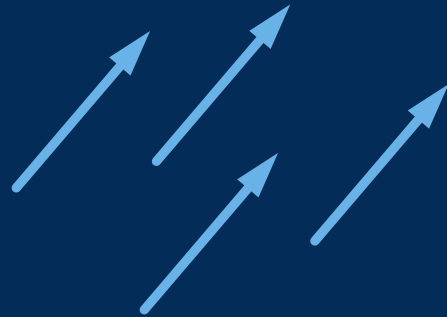
## Alexandra (A)

Einen Pfeil in einem Raum.

## Interviewer (I)

Jemand sagt:  
„Ein Vektor ist die  
Gesamtheit dieser  
Pfeile.“

Was sagst du dazu?



A: Stimmt nicht.

I: Warum?

A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.

I: Was ist für dich ein Vektor?

A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.

I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?

A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

# Schwierigkeit: Pfeilklassen

## Interviewer (I)

Jemand sagt:  
„Ein Vektor ist die  
Gesamtheit dieser  
Pfeile.“

Was sagst du dazu?



## Richard (R)

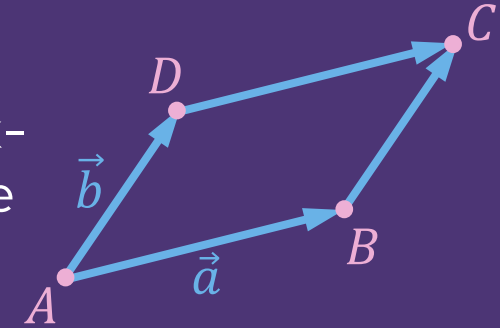
Diese vier Vektoren kann man aneinander-  
reihen und kommt dann auf einen Vektor,  
einen Gesamtvektor.

I: Bitte zeichne das auf.

R: [Fertigt eine Zeichnung an]



**Aufgabe:** Von einem Parallelo-  
gramm  $ABCD$  kennt man die Eck-  
punkte  $A$ ,  $B$  und  $D$ . Bestimme die  
Koordinaten des Eckpunkts  $C$ .



**A:** Ich würde Vektor  $\vec{b}$  auf Vektor  $\vec{a}$  so lange  
verschieben, bis ich zum Punkt  $B$  komme,  
und dann habe ich den Vektor  $\overrightarrow{BC}$  ... Das ist  
eigentlich genau derselbe Vektor wie  $\vec{b}$ , nur von  
einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.

I: Kann man behaupten:  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ?

**A:** Nein, weil  $\overrightarrow{BC}$  geht von einem anderen Punkt  
als  $\vec{b}$  aus.

# Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

## Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

**1. Spiel:** Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

**2. Spiel:** Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

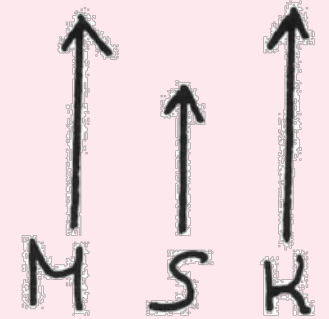
**3. Spiel:** Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

**4. Spiel:** Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

## Schülerlösungen

Sandra



Müller 1.  $\rightarrow$  2.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  3.  $\rightarrow$  4.  $\begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$

Richard

$\xrightarrow{1\text{cm } 1\text{cm}}$  S:  $\xrightarrow{1\text{cm}}$  K:  $\xrightarrow{2\text{cm } 1\text{cm}}$

Alexandra



# Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

## Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

**1. Spiel:** Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

**2. Spiel:** Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

**3. Spiel:** Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

**4. Spiel:** Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

## Schülerlösungen

1. Spiel

H: ↗

Sch: ↓

2. Spiel  
Maier ↗ ↗ ↗

Natascha

1.

2.

3.

4.

Christian

Müller

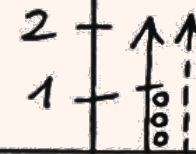
Maier

Kaiser

Schmid

↑ y + Tore

$G = \mathbb{N}_0^4$



# Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

## Interviewer (I)

Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

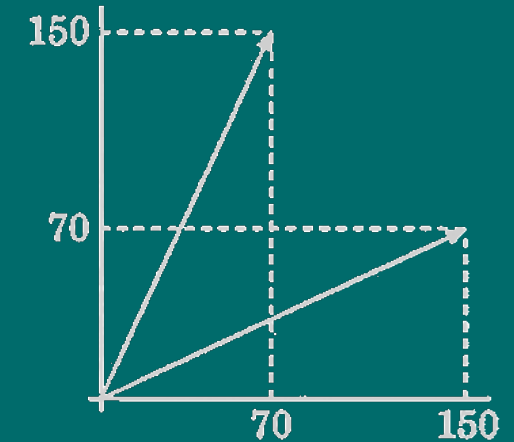
### Michaela

Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.



I: Sind die Vektoren  $\begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 70 \\ 150 \end{pmatrix}$  gleich oder verschieden?

A: [Fertigt eine Zeichnung an.]



I: Du erkennst die Ungleichheit dieser Vektoren aufgrund einer Zeichnung. Kannst du das auch ohne Zeichnung begründen?

A: Nein!

# Schwierigkeit: Deutung von Zahlenpaaren als Pfeile

## Zahlenpaare können ...

- in der Regel als Punkte gedeutet werden.
- häufig nicht als Pfeile gedeutet werden.

## Interviewer (I)

Stellt das Zahlenpaar  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  einen Pfeil oder einen Punkt dar?

## Christian

So wie es da steht mit dieser Spaltenform ist es ein Pfeil. Wenn  $(3|4)$  da stehen würde, wäre es ein Punkt.

## Interviewer (I)

Stellt das Zahlenpaar  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  einen Pfeil oder einen Punkt dar?

## Natascha (N)

$(3|4)$  sind die Koordinaten von einem Punkt im ebenen Koordinatensystem im Zweidimensionalen.

I: Kann dieses Zahlenpaar auch einen Pfeil darstellen?

N: Nein, da bräuchte ich noch ein zweites Koordinatenpaar, um den Pfeil darzustellen. Aber ich habe nur eines gegeben, also kann es nur einen Punkt darstellen.

## Nullvektor

- Grenzfall eines Vektors
- Entarteter Pfeil der Länge Null (das ist aber ein Punkt)
- Weil Lernende Vektoren häufig mit Pfeilen identifizieren, ist der Nullvektor für sie kein Vektor.

**Kathi (K):** [Schreibt]  $0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Dann ist es ein Punkt.

**I:** Dann ist es ein Punkt?

**K:** Ja, der Nullpunkt.

**I:** Kann es auch ein Pfeil sein?

**K:** Nein!

**I:** Warum nicht?

**K:** Es ist kein Pfeil. Es steckt keine Verbindung drinnen.

**I:** Das wäre also ein Zahlenpaar, das man nicht als Pfeil interpretieren kann?

**K:** Ja.



## Situation

Es geht um den Vektor  $r \cdot \vec{a}$ .

**Interviewer (I):** Und wenn  $r = 0$ ?

**Daniel (D):** Dann gibt's den Vektor nicht.

**Christoph (C):** Es ist der Nullpunkt.

**I:** Es ist der Nullpunkt?

**C:** Ja.

**D:** ... Ja, er muss im Koordinatenursprung liegen. Ah nein, es ist ein Vektor! Richtig. D.h. es ist der Punkt, wo der Vektor  $\vec{a}$  weggehen würde, also der Schaft ... Ja der kann auch irgendwo anders liegen, aber der Punkt muss da liegen [Er zeichnet ein Achsenkreuz und zeigt auf den Ursprung.]. Aber nein, der kann überall liegen. Denn wenn der Vektor überall liegen kann, kann der Punkt überall liegen.

# Schwierigkeit: Fehlende (Grund-)Vorstellungen

## Situation

Viele Lernende benutzen Vektoren, ohne zu verstehen, was sie tun.

**I:** Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?

## Florian (F):

Ich glaube, das hat etwas mit diesem großen  $X$  zu tun.  $X$  ist gleich irgendein Punkt  $A$  plus  $t$  mal  $\overrightarrow{AB}$ .  
[Er schreibt:]  $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$

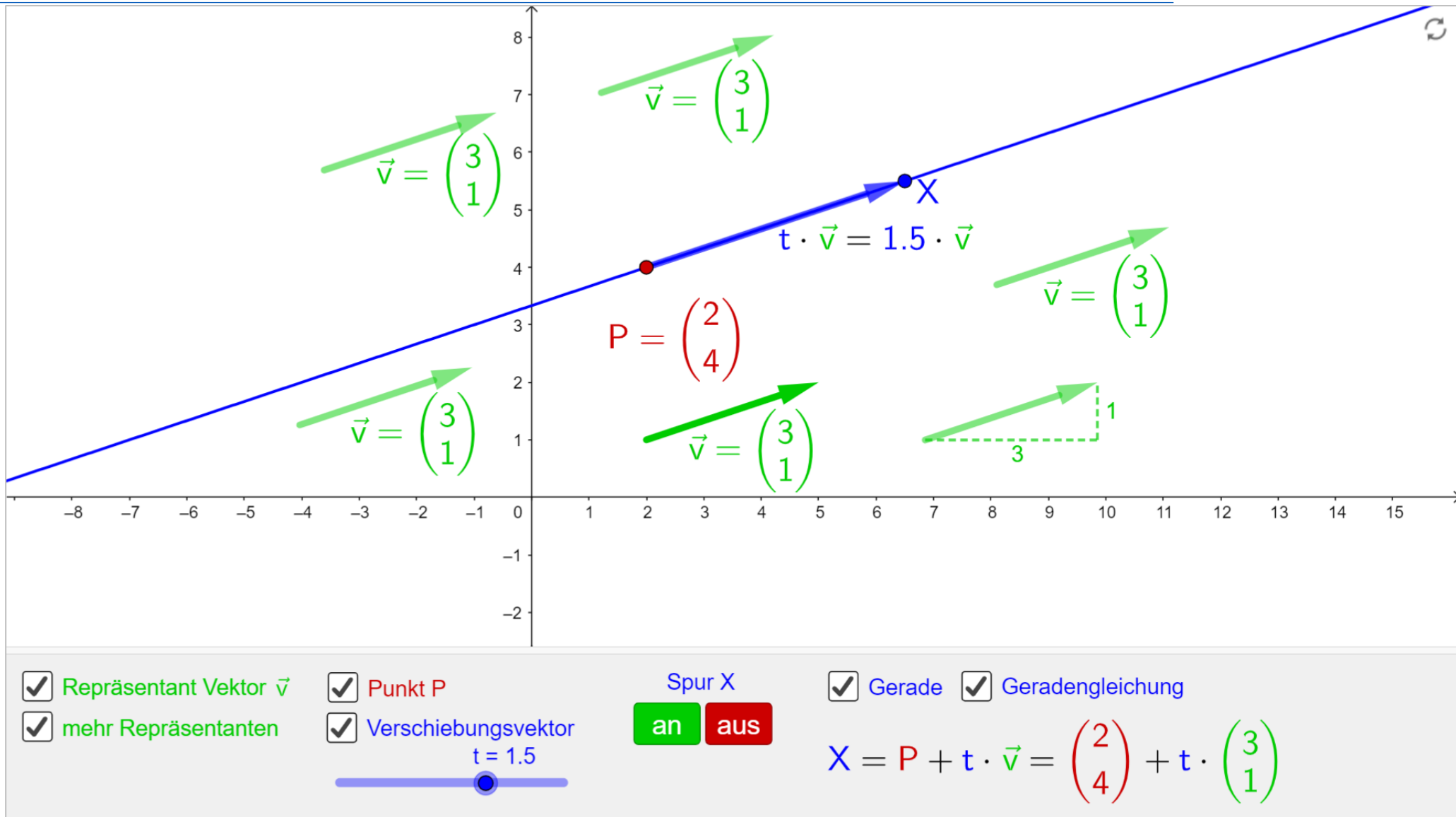
**I:** Warum stellt das eine Gerade dar?

**F:** Für  $t$  kann man auch Lambda schreiben.

**I:** Warum stellt das eine Gerade dar?

**F:** Weiß ich nicht!

# (Grund-)Vorstellungen zu Vektoren und Geraden





# Schwierigkeit: Vektorformeln aufstellen

## Aufgabe

Stelle eine Formel auf, für den Mittelpunkt  $M$  einer Strecke  $AB$ .

## Schülerlösungen

Alle gingen von derselben Skizze aus.



Sie schrieben aber unterschiedliches auf:

**Isabella:**  $M = \frac{A+B}{2}$

**Florian:**  $M = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

**Martin:**  $M = \frac{A+\overrightarrow{AB}}{2}$

**Karin:**  $M = \frac{A-B}{2}$

## Probleme

- Im Prinzip wird so gedacht:  
„Ich gehe von  $A$  aus, füge die Hälfte von  $\overrightarrow{AB}$  dazu und komme zu  $M$ .“
- Wie kann der Gedankengang mit Hilfe der Vektorsymbolik notiert werden?  
$$M = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$
- Unverständnis des Vektorbegriffs
- „Typkontrolle“ Pfeil  $\leftrightarrow$  Punkt fehlt.

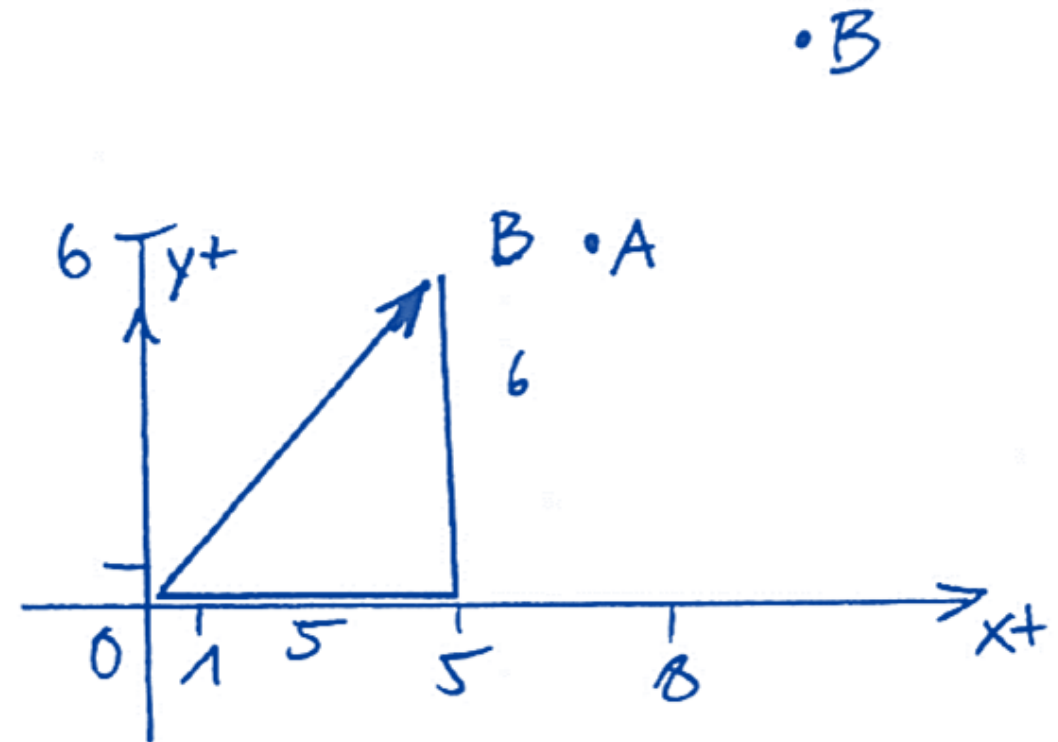
# Schwierigkeit: „Ortsvektoren“

## Aufgabe

Berechne den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  und veranschauliche ihn an einer Skizze:  $A = (8|6)$ ,  $B = (13|12)$

## Schülerlösung

- Christian rechnet richtig:  
 $B - A = (5|6)$
- Er zeichnet die Punkte  $A$  und  $B$  einigermaßen richtig in ein Koordinatensystem ein.
- Anschließend stellt er den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  aber als Ortspfeil dar.



## Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

- 2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums
- 2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren
- 2.3 Zugänge zum Vektorbegriff**
- 2.4 Geometrische Deutung von Vektoren
- 2.5 Geraden- und Ebenengleichungen
- 2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele



## Was ist ein Vektor?

Es gibt viele Antworten auf diese Frage.

### Hochschulmathematik

- Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.
- Axiomatischer Zugang über die Struktur

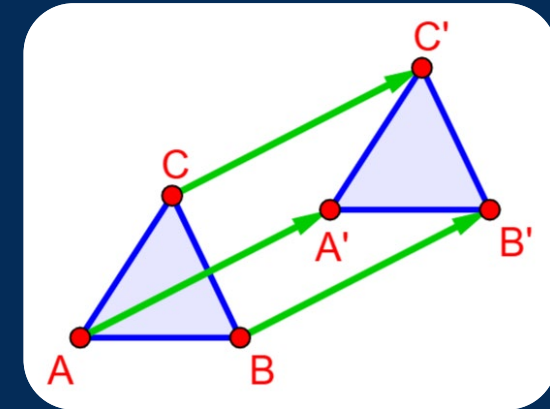


### Schulmathematik

(1) Ein Vektor ist eine Pfeilklassse.



(2) Ein Vektor ist eine Verschiebung.



(3) Ein Vektor ist ein  $n$ -Tupel.

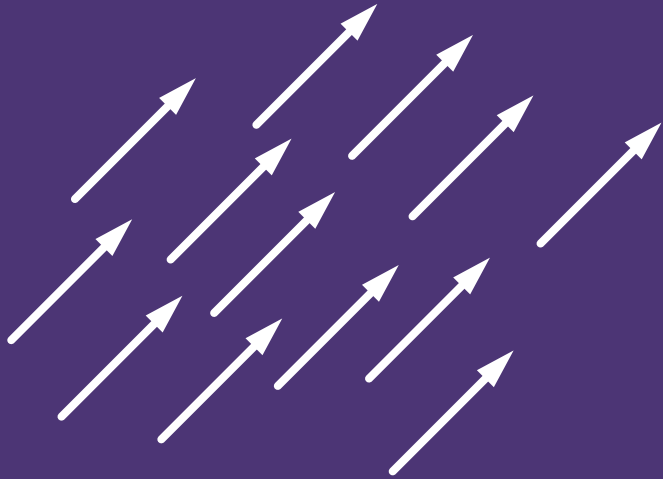
- Ein Vektor  $\vec{v}$  ist als  $n$ -Tupel ein Element des  $\mathbb{R}^n$ .
- Er kann je nach Bedarf als Zeilenvektor  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  oder auch als Spaltenvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  geschrieben werden.





## Vektor im Pfeilklassenmodell

Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.

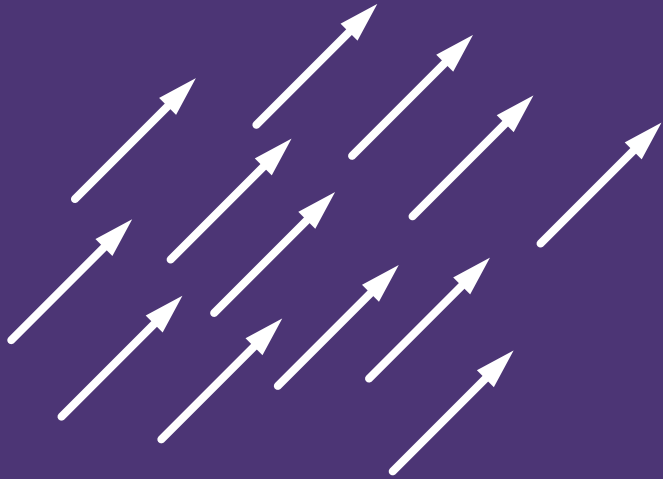


## Probleme mit dem Pfeilklassenmodell

- Erfüllt Vektorraumaxiome, aber Probleme mit der Definition der Rechengesetze über Repräsentanten ➡
- Einführung der Rechenoperationen und Beweise der Rechengesetze kompliziert  
⇒ Konsequente und saubere Anwendung des Pfeilklassenmodells findet oft nicht statt.
- Nur in der Schulmathematik etabliert.
- Passt nicht zur Denkweise in
  - Analytischer Geometrie ➡
  - und Physik. ➡

## Vektor im Pfeilklassenmodell

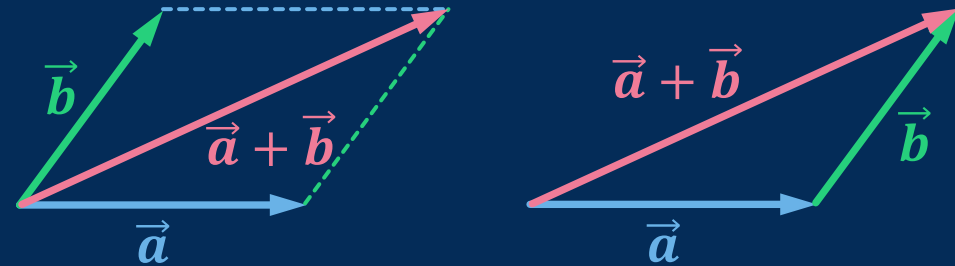
Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



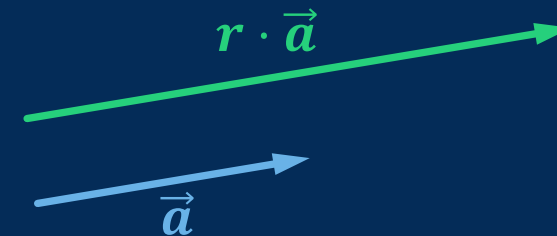
Bei jeder Definition muss die **Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten** gezeigt werden!

## Rechenoperationen für Pfeilklassen

- ... sind über Repräsentanten definiert.
- Definition der Addition durch Repräsentanten



- Definition der Vervielfachung durch Repräsentanten (für  $r > 0$ )

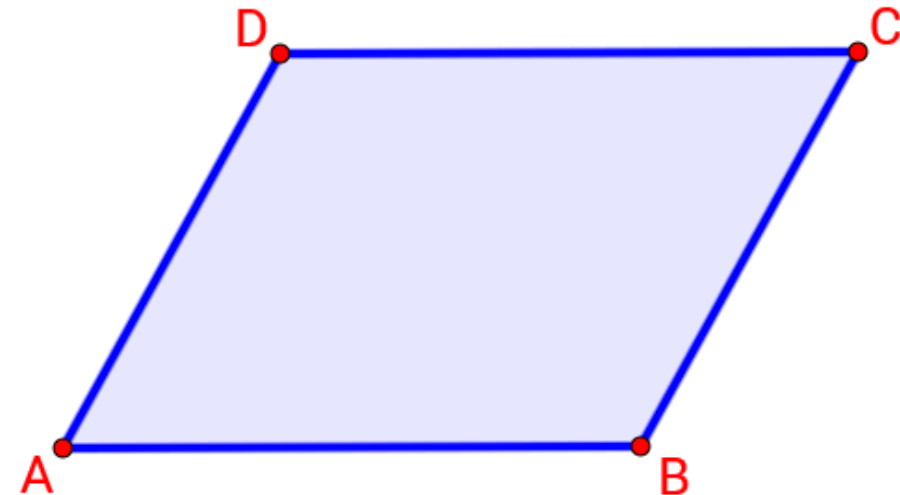


# Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Analytischen Geometrie

## Aufgabe

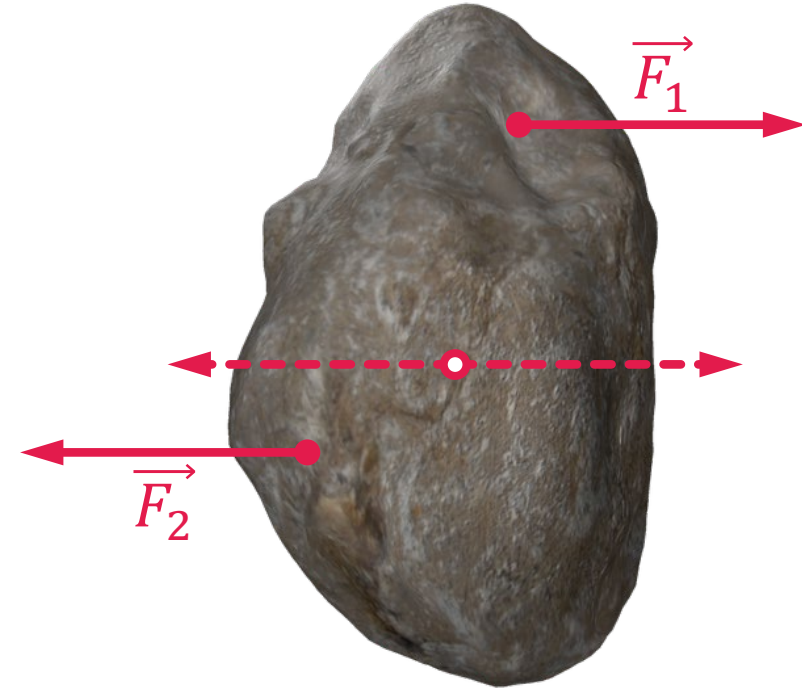
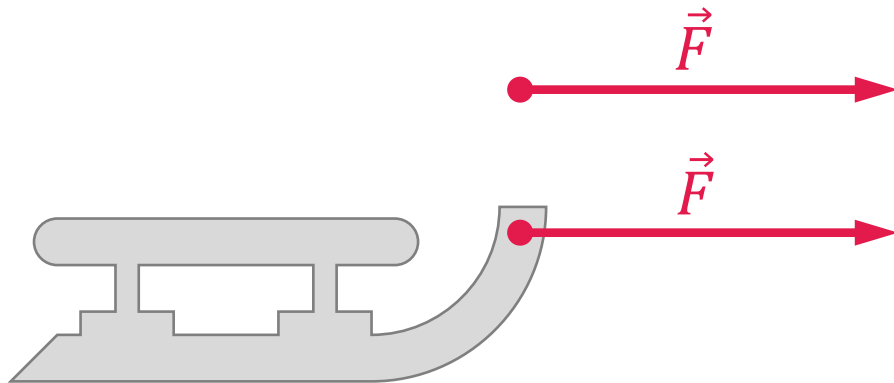
Von einem Parallelogramm  $ABCD$  kennt man die Eckpunkte  $A$ ,  $B$  und  $D$ .

Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts  $C$ .



# Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Physik

Wo greift die Zugkraft an?



Kraftpfeile dürfen nicht beliebig verschoben werden!



# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Von Koordinaten zu Vektoren

### Idee:

#### Sachverhalte mit Koordinaten und Vektoren darstellen

- **Skalen als Beispiele für eindimensionale Koordinaten**

Thermometer, Wasserstandsanzeiger, ...

- **Beispiele für zweidimensionale Koordinaten**

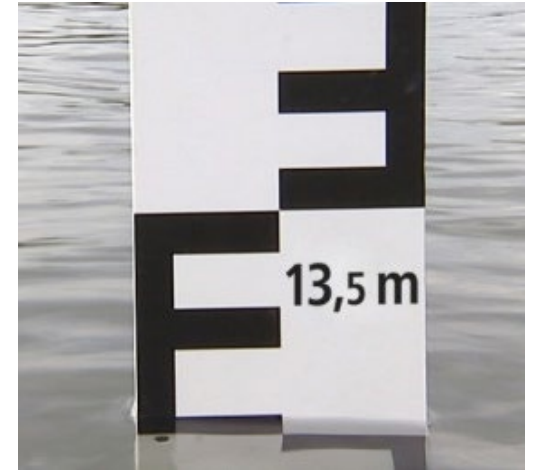
Stadtpläne, Schachbrett, Fahrtenschreiber,  
Festlegung von Geländepunkten, ...

- **Beispiele für mehrdimensionale Koordinaten**

Stückzahlen in einem Lager, Testergebnisse, ...

### Wichtig:

Dieser  
Zugang zum  
Vektorbegriff  
ist bewusst  
rein  
arithmetisch.

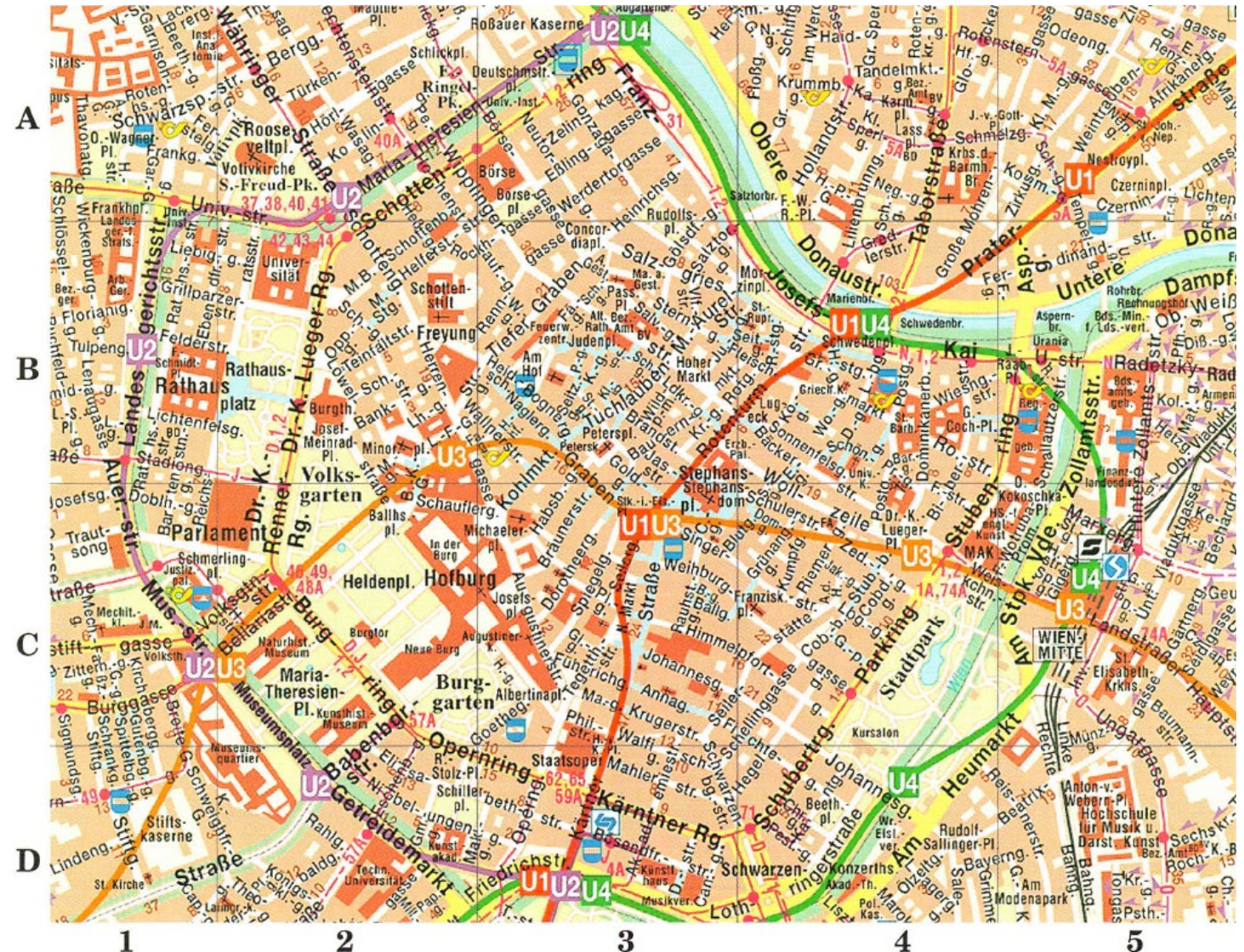




# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Von Koordinaten zu Vektoren

Das Burgtheater liegt  
in Planquadrat (B,2).



# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Aufgaben zu Zahlenpaaren und -tripeln

### Tests

Beate und Dora haben zwei Tests absolviert.  
Bei jedem Test konnte man 20 Punkte erreichen.  
Beate erhielt auf den ersten Test 15 Punkte  
und auf den zweiten 18 Punkte. Dora erhielt  
jedes Mal zwei Punkte weniger als Beate.

Gib ein Zahlenpaar an, das ...

- Beates Punktzahlen bei den beiden Tests angibt.
- Doras Punktzahl bei den beiden Tests angibt.
- die Punktzahlen der beiden Mädchen beim ersten Test angibt.
- Die Punktzahlen der beiden Mädchen beim zweiten Test angibt.



$(15|18)$

$(15 - 2|18 - 2)$

$(15|15 - 2)$

$(18|18 - 2)$



# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Aufgaben zu Zahlenpaaren und -tripeln

### Produktionskosten

Eine Firma erzeugt drei Waren. Die Stückpreise der Waren sind 115 €, 135 € und 140 €.

Im Lager befinden sich von diesen Waren 728, 644 bzw. 840 Stück, bestellt wurden 411, 433 bzw. 596 Stück. Es fallen Produktionskosten von 65 €, 70 € bzw. 72 € pro Stück an.

- a) Beschreibe die Stückpreise, den Lagerbestand, die Bestellzahlen und die Produktionskosten jeweils durch ein Zahlentripel.
- b) Die Produktionskosten steigen um 5 € pro Stück. Deshalb erhöht die Firma die Stückpreise ebenfalls um 5 € pro Stück. Dadurch sinken die Bestellungen für die erste Ware um 56 Stück, für die zweite Ware um 112 Stück und für die dritte Ware um 134 Stück. Um weitere Kosten zu sparen, wird der Lagerbestand um ein Viertel gesenkt. Wie lauten jetzt die Zahlentripel?

Stückpreise: (115€|135€|140€)

Lagerbestand: (728|644|840)

Bestellzahlen: (411|433|596)

Produktionskosten: (65€|70€|72€)



# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Vektortermine & -formeln aufstellen & interpretieren

### Warenlager

Eine Firma verkauft zwei Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. Der Vektor  $A = (a_1 | a_2)$  gibt die Stückzahlen der beiden Waren im ersten Lager, der Vektor  $B = (b_1 | b_2)$  die Stückzahlen der beiden Waren im zweiten Lager an. Der Vektor  $C$  gebe die Stückzahlen der beiden Waren in beiden Lagern zusammen an.

- a) Drücke  $C$  durch  $A$  und  $B$  aus.
- b) Was gibt der Vektor  $B - A$  an?
- c) Was sagt die Gleichung  $B = 2 \cdot A$  aus?
- d) Drücke in diesem Fall  $C$  durch  $A$  aus.

### Rabatte

Die Verkaufspreise (in Euro) von vier Waren werden durch den Vektor  $V = (v_1 | v_2 | v_3 | v_4)$  angegeben. Bei Großabnahme erhält man 35 % Rabatt. Es sei  $V'$  der Vektor der Preise bei Großabnahme und  $R$  der Vektor der Rabatte.

- a) Welche Beziehung besteht zwischen  $R$  und  $V$ ?
- b) Welche Beziehung besteht zwischen  $V'$  und  $V$ ?



# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Vektortermine & -formeln aufstellen & interpretieren

### Zimmerpreise

Ein Hotel hat 25 Zimmer. Der Vektor  $P \in \mathbb{R}^{25}$  gibt die Zimmerpreise an, der Vektor  $B \in \mathbb{R}^{25}$  gibt an, wie oft jedes Zimmer im laufenden Monat belegt war.

- a) **D**rücke die Gesamteinnahmen  $G$  des Hotels im laufenden Monat durch  $P$  und  $B$  aus.
- b) **I**m nächsten Monat werden die Zimmerpreise um 5% erhöht. Drücke wiederum  $G$  durch  $P$  und  $B$  aus.

### Firmenbestellung

Eine Firma bestellt 100 Waren. Die Stückzahlen der bestellten Waren seien  $s_1, s_2, \dots, s_{100}$ , die Preise der Waren seien  $p_1, p_2, \dots, p_{100}$ .

- a) **S**chreibe einen Stückzahlvektor  $S$  und einen Preisvektor  $P$  auf.
- b) **W**as bedeutet  $S \cdot P$ ?



# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Komponentenweise Erklärung von Rechenoperationen

### Addition, Subtraktion, Vervielfachung

- Komponentenweise erklärt
  - $(a_1|a_2) \pm (b_1|b_2) = (a_1 \pm b_1|a_2 \pm b_2)$
  - $r \cdot (a_1|a_2) = (r \cdot a_1|r \cdot a_2)$
- Formeln von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^n$  übertragen
  - $b = 1,2 \cdot n$
  - $\vec{b} = 1,2 \cdot \vec{n}$

Die Erkenntnis, dass Addition, Subtraktion und Vervielfachung von Vektoren komponentenweise erklärbar ist, wird anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug erarbeitet.

(Vgl. etwa die Aufgaben auf den Folien 35-38.)

### Skalarprodukt

Am Beispiel (Stückpreis, Stückzahl) einführen.  
(Vgl. Kapitel 3: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen)

$$(a_1|a_2) \cdot (b_1|b_2) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

# Erarbeitungsweg: Vektor als $n$ -Tupel

## Rechengesetze erarbeiten

### Rechengesetze für Zahlenpaare

Für alle  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$  und alle  $r, s \in \mathbb{R}$  gilt:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  Kommutativität der Vektoraddition
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  Assoziativität der Vektoraddition
- $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$  Existenz eines Nullvektors  
 $\vec{o} = (0|0)$  ist der Nullvektor.
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$  Existenz eines Gegenvektors zu jedem Vektor  
 $-\vec{a} = (-a_1|-a_2)$  ist der Gegenvektor zu  $\vec{a} = (a_1|a_2)$ .
- $(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$  Assoziativität der Vervielfachung eines Vektors
- $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$  1. Distributivgesetz
- $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$  2. Distributivgesetz
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Rechengesetze werden anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug (vgl. etwa die Folien 35–38) erarbeitet.





R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

MaTeGnu

## Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

- 2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums
- 2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren
- 2.3 Zugänge zum Vektorbegriff
- 2.4 Geometrische Deutung von Vektoren**
- 2.5 Geraden- und Ebenengleichungen
- 2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

# Vektoren als **$n$ -Tupel** (Zahlenpaare, -tripel, ...)

## 2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

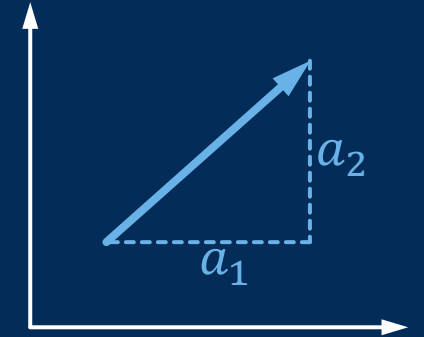
### Was ist ein Pfeil?

Ein Pfeil ist  
ein  $n$ -Tupel  
(Zahlenpaar,  
Zahlentripel, ...).

### Geometrische Darstellung

Jedem Zahlenpaar entsprechen unendlich viele Pfeile in der Ebene, die alle gleich lang, gleich gerichtet sowie gleich orientiert sind. Die Komponenten können als Veränderungen bzw. Verschiebungen in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse gedeutet werden.

Umgekehrt entspricht jedoch jedem Pfeil in der Ebene genau ein Zahlenpaar.

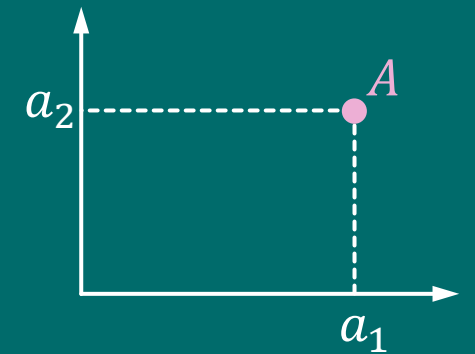


### Was ist ein Punkt?

Ein Punkt ist  
ein  $n$ -Tupel  
(Zahlenpaar,  
Zahlentripel, ...).

### Geometrische Darstellung

Jedem Zahlenpaar entspricht genau ein Punkt in der Ebene und umgekehrt.



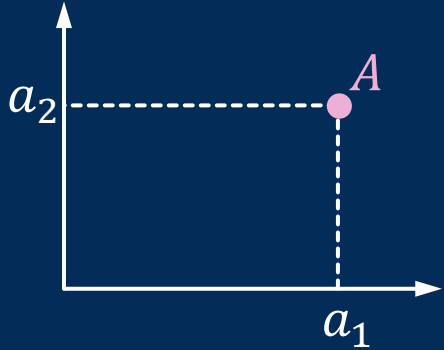
Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren*, 133, 4-7.

Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).

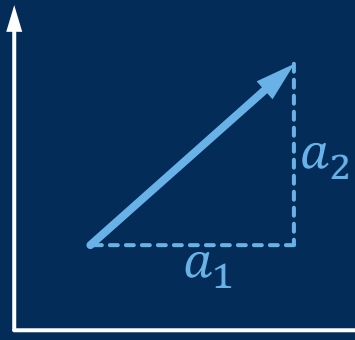
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. *JMD*, 1(3), 171-187.

# Vektoren als **$n$ -Tupel** (Zahlenpaare, -tripel, ...)

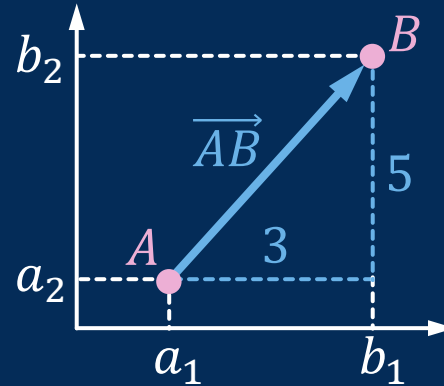
## 2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten



Zahlenpaar  $A = (a_1 | a_2)$   
als Punkt in der Ebene.

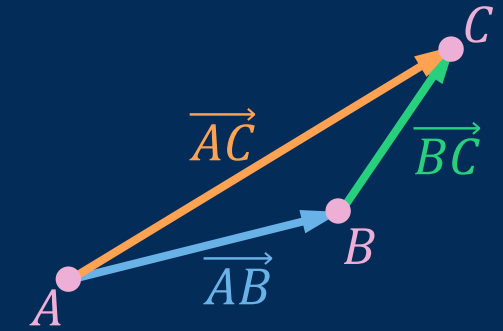


Zahlenpaar  $\vec{a} = (a_1 | a_2)$   
als Pfeil in der Ebene.



Vektor  $\overrightarrow{AB}$  gegeben durch  
Anfangs- und Endpunkt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1 | b_2 - a_2) \\ &= (b_1 | b_2) - (a_1 | a_2) \\ &= B - A \\ \Rightarrow A + \overrightarrow{AB} &= B\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= (B - A) + (C - B) \\ &= C - A \\ &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

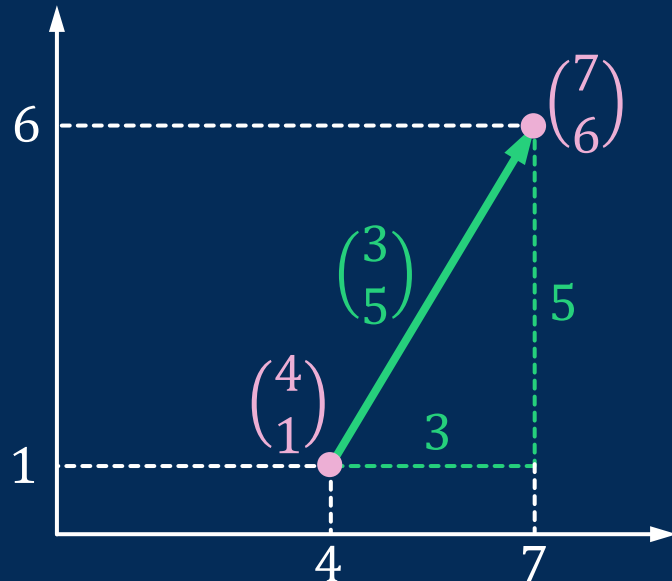
# Geometrische Darstellungen der (arithmetischen) Addition

**Punkt-Pfeil-Darstellung:**  
**Zustand** + **Änderung** = **Zustand**

- Reelle Zahlen → Zahlengerade

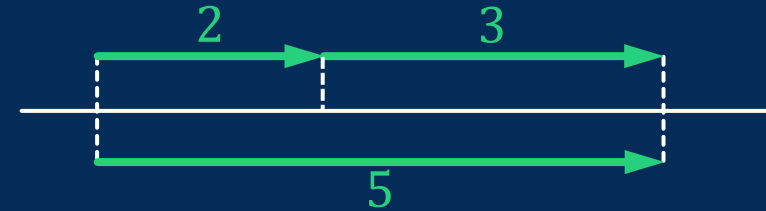


- Vektor (n-Tupel) → Koordinatensystem

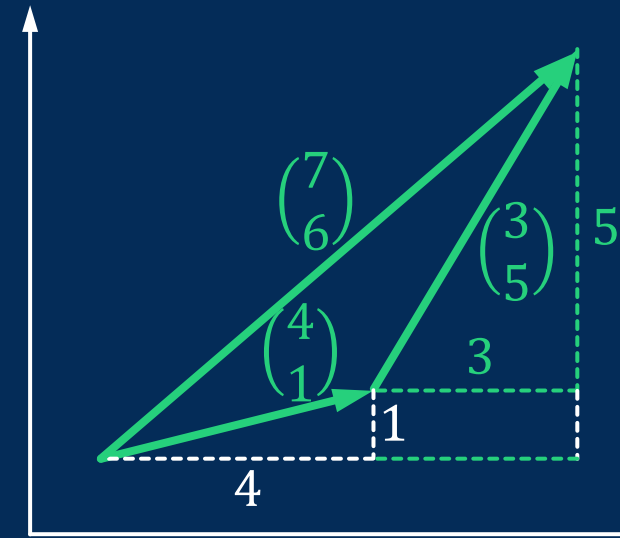


**Pfeildarstellung:**  
**Änderung** + **Änderung** = **Gesamtänderung**

- Reelle Zahlen → Zahlengerade



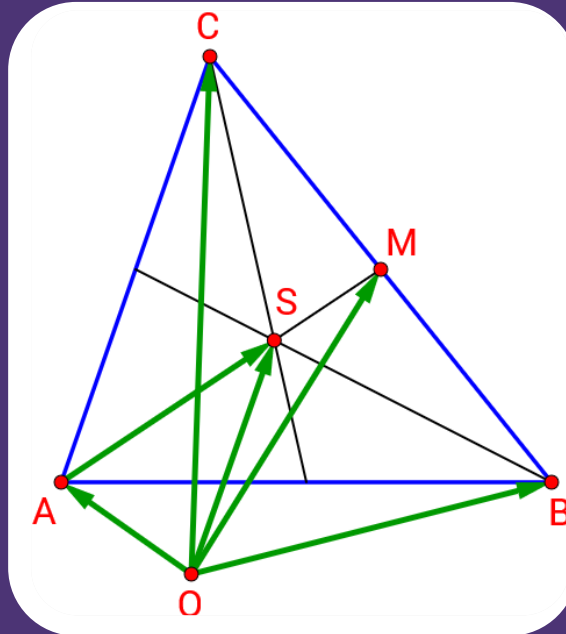
- Vektor (n-Tupel) → Koordinatensystem



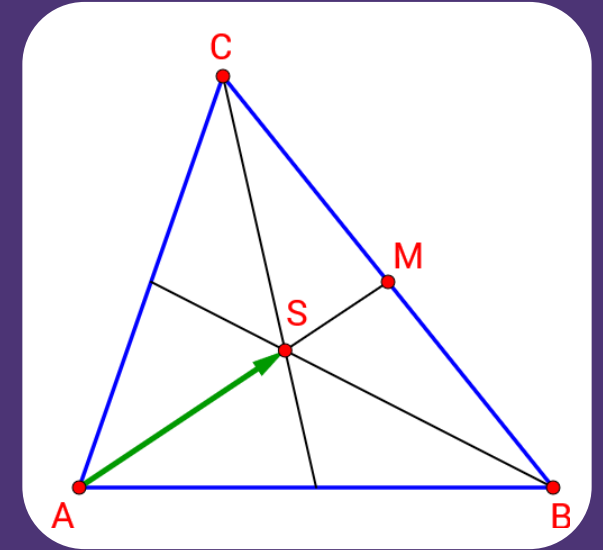
# Ebene Geometrie mit analytischen Methoden

## Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right) \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\end{aligned}$$



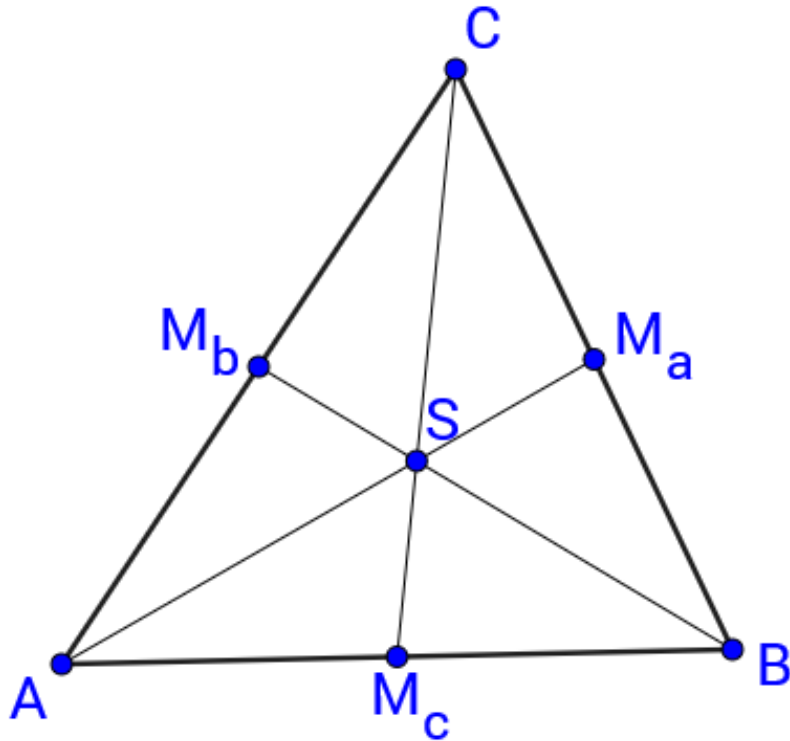
$$\begin{aligned}S &= A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= A + \frac{2}{3} \cdot (M - A) \\ &= \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot M \\ &= \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (B + C) \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} (B + C) \\ &= \frac{1}{3} (A + B + C)\end{aligned}$$





# Ebene Geometrie mit analytischen Methoden

## Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

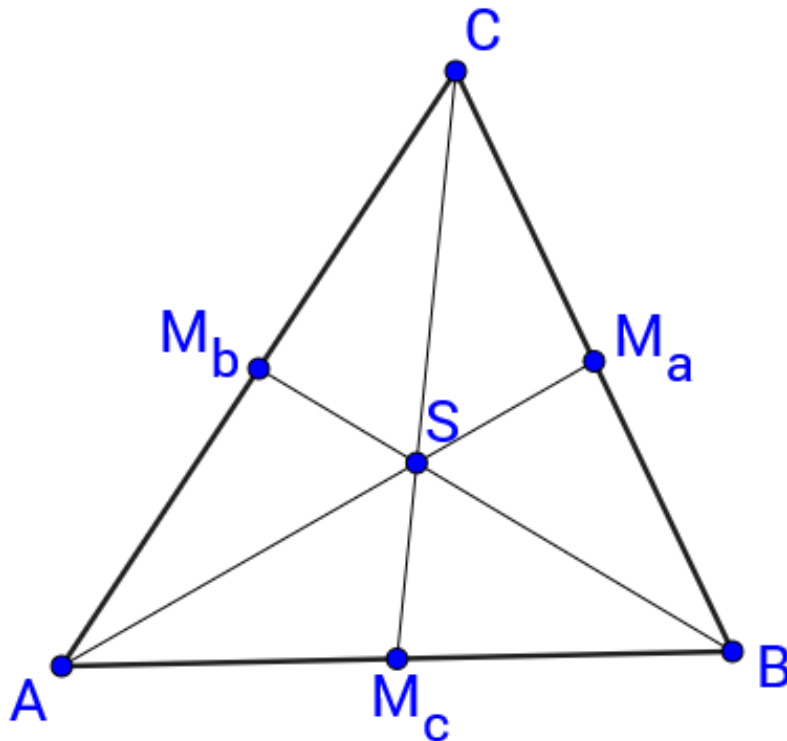


### Satz

- In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt  $S$ , dem Schwerpunkt.
- Zwischen den Eckpunkten  $A, B, C$  und dem Schwerpunkt  $S$  besteht die Lagebeziehung  $3 \cdot S = A + B + C$ .

# Ebene Geometrie mit analytischen Methoden

## Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



### Beweis

- Die Seitenhalbierenden  $s_a$  und  $s_b$  sind gegeben durch  $s_a: X = A + t \cdot \overrightarrow{AM_a}$  und  $s_b: X = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$ .

- Es gibt reelle Zahlen  $t$  und  $u$ , so dass für den Schnittpunkt  $S$  dieser Seitenhalbierenden gilt:

$$A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = S = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$

- Richtungsvektoren  $\overrightarrow{AM_a}$  und  $\overrightarrow{BM_b}$  als Linearkombinationen von  $\overrightarrow{BA}$  und  $\overrightarrow{BC}$  schreiben:

$$\overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

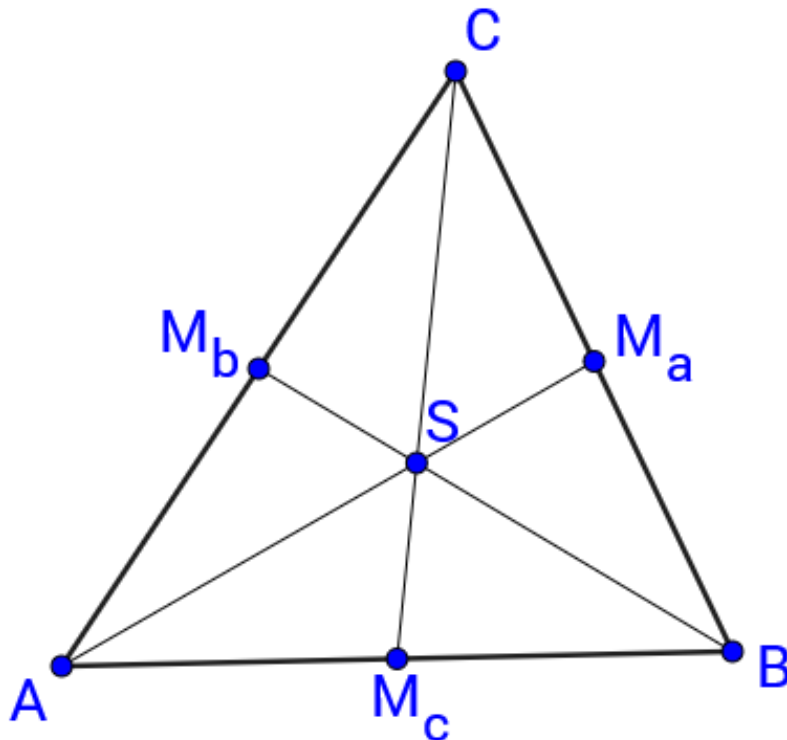
$$\overrightarrow{BM_b} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \left( \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

# Ebene Geometrie mit analytischen Methoden

## Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



### Beweis (Fortsetzung)

- Wir erhalten damit:

$$A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$

$$\Leftrightarrow A + t \cdot \left( -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \right) = B + u \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \right)$$

$$\Leftrightarrow A - B - t \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{t}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \left( 1 - t - \frac{u}{2} \right) \cdot \overrightarrow{BA} = \left( \frac{u}{2} - \frac{t}{2} \right) \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Weil  $\overrightarrow{BA}$  und  $\overrightarrow{BC}$  nicht parallel sind, ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn  $1 - t - \frac{u}{2} = 0$  und  $\frac{u}{2} - \frac{t}{2} = 0$ .

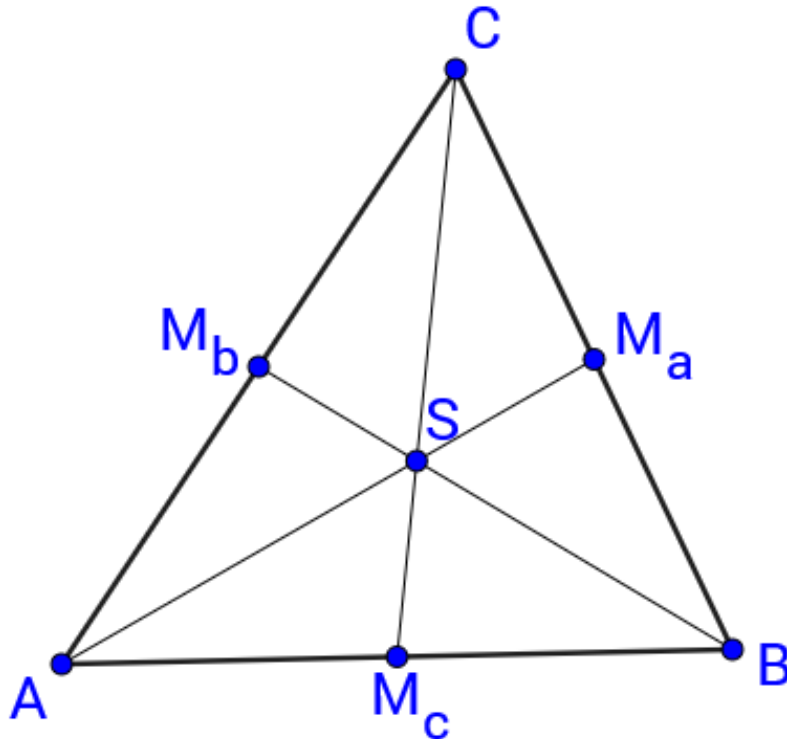
- Lösen dieses Gleichungssystems ergibt:  $u = t = \frac{2}{3}$

- Als Schnittpunkt S von  $s_a$  und  $s_b$  erhält man also:

$$S = A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_a} = A + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (B + C) - A \right) = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$$

# Ebene Geometrie mit analytischen Methoden

## Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



### Beweis (Fortsetzung)

- Aus  $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$  folgt durch nachrechnen:
$$S = C + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM_c}$$
- Folglich liegt  $S$  auch auf der dritten Seitenhalbierenden  $s_c$  des Dreiecks.
- Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.
- Der zweite Teil des Satzes folgt direkt aus
$$S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C).$$
$$\Leftrightarrow 3 \cdot S = A + B + C$$

■

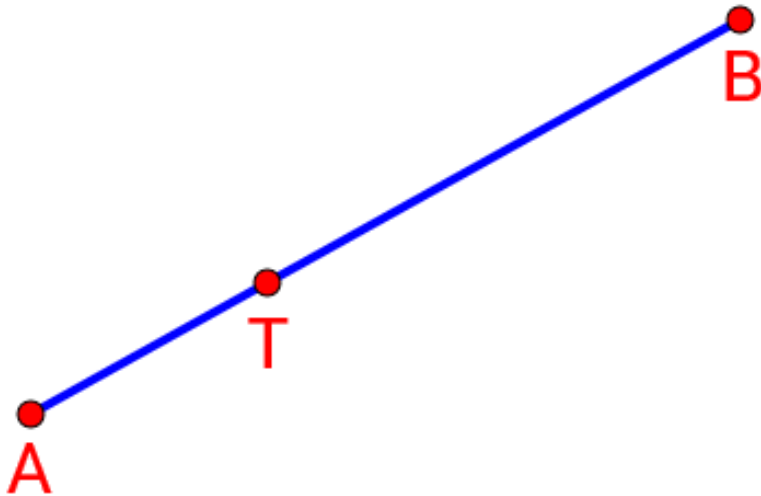
# Ebene Geometrie mit analytischen Methoden

## Beispiel: Teilung einer Strecke

### Aufgabe

Die Strecke  $AB$  wird durch den Punkt  $T$  im Verhältnis  $1 : 2$  geteilt.

Drücke  $T$  durch  $A$  und  $B$  aus.



### 1. Lösungsmöglichkeit

$$T = A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow T = A + \frac{1}{3} \cdot (B - A)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{3} \cdot (2A + B)$$

### 2. Lösungsmöglichkeit

$$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow T - A = \frac{1}{3} \cdot (B - A)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{3} \cdot (2A + B)$$



R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

MaTeGnu

## Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

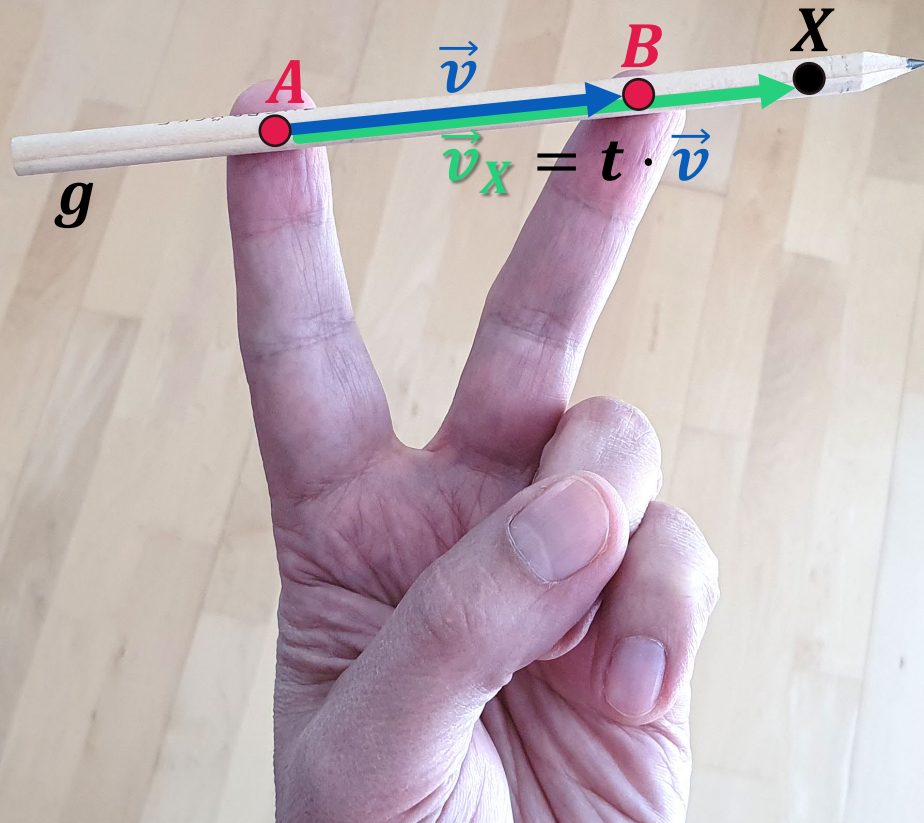
- 2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums
- 2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren
- 2.3 Zugänge zum Vektorbegriff
- 2.4 Geometrische Deutung von Vektoren
- 2.5 Geraden- und Ebenengleichungen**
- 2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU



## Bemerkung

- Eine Gerade  $g$  ist eindeutig festgelegt über
  - zwei verschiedene Punkte  $A, B$  bzw.
  - einen Anfangspunkt  $A$  und einen Richtungsvektor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ .
- Für jeden Punkt  $X$  der Gerade  $g$  gibt es eine reelle Zahl  $t$ , so dass gilt:

$$X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

## Geradengleichung: Parameterform

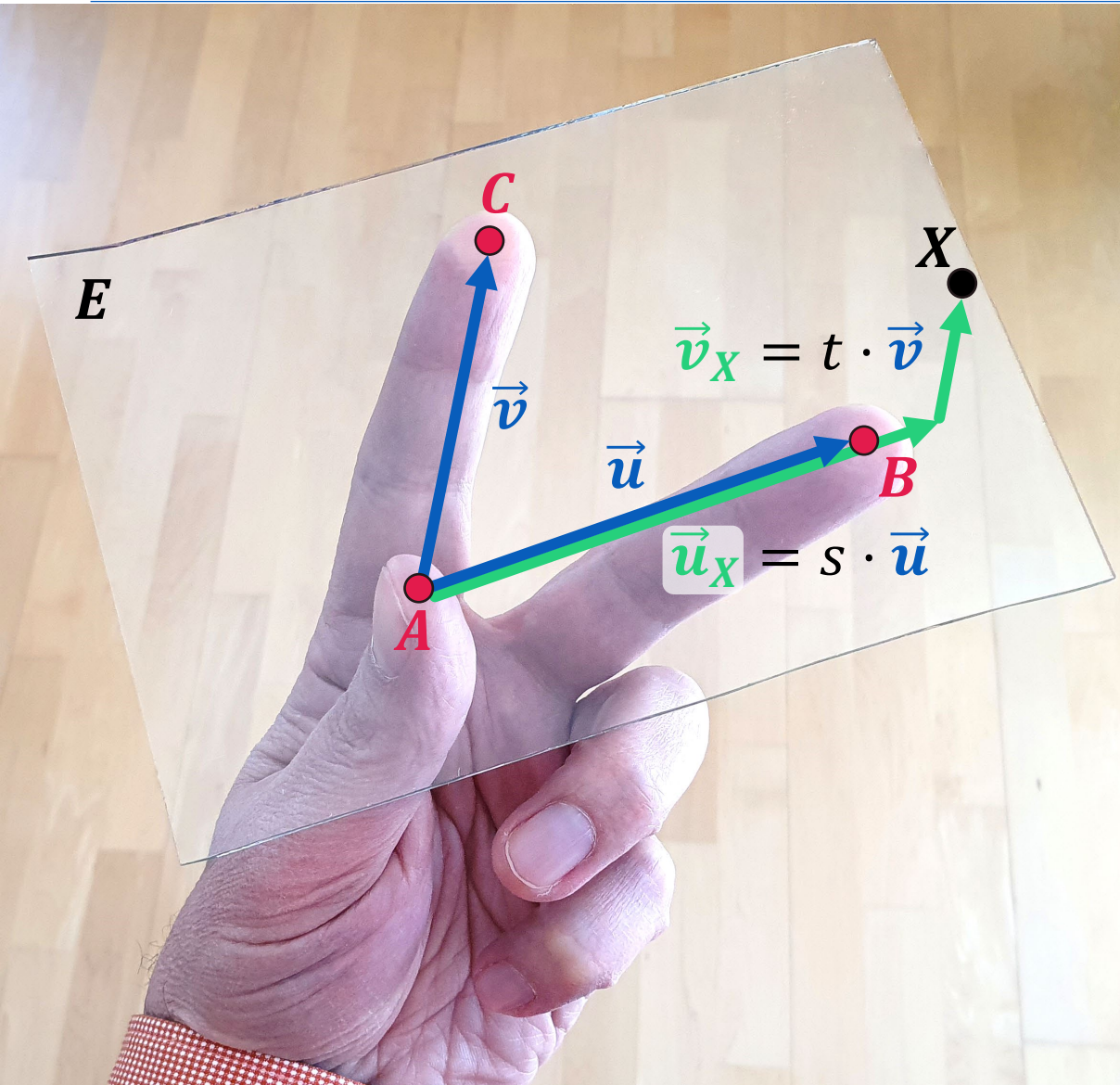
Eine Gerade  $g$  ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als

$$g = \{X \mid X = A + t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz  $g: X = A + t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}.$



# Ebenengleichung: Parameterform



## Bemerkung

- Eine Ebene  $E$  ist eindeutig festgelegt über
  - drei nicht kollineare Punkte  $A, B, C$  bzw.
  - einen Anfangspunkt  $A$  und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

- Für jeden Punkt  $X$  der Ebene  $E$  gibt es zwei reelle Zahlen  $s$  und  $t$ , so dass gilt:

$$X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

## Ebenengleichung: Parameterform

Eine Ebene  $E$  ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als:

$$E = \{X \mid X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, s, t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz

$$E: X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, s, t \in \mathbb{R}.$$

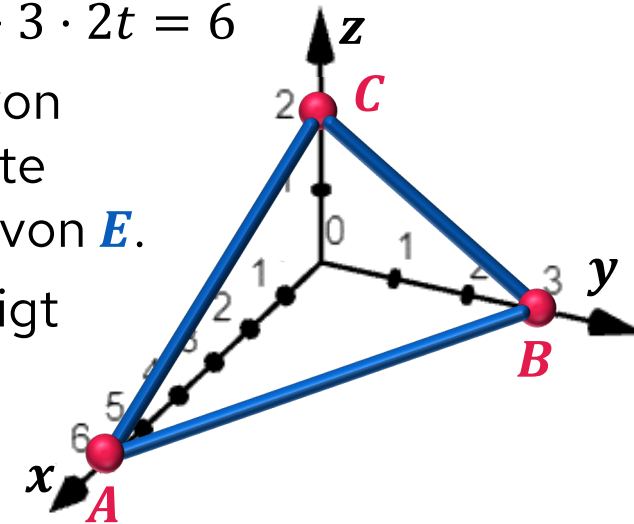
**Beispiel:**  $x + 2y + 3z = 6$  (\*)

Vermutung: Die Lösungsmenge  $E$  der Gleichung  $x + 2y + 3z = 6$  ist eine Ebene.

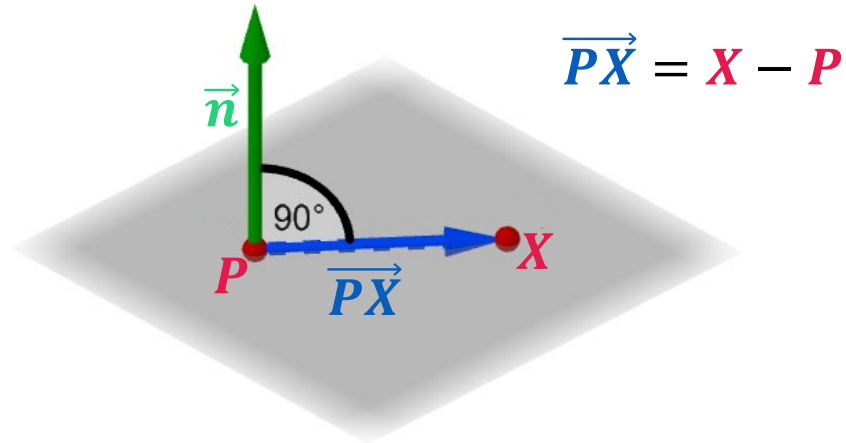
## Vorgehen

- Setzt man  $y = z = 0$  dann ergibt sich  $x = 6$ .
- Daraus ergibt sich der Punkt  $A = (6|0|0)$ , den man als Schnittpunkt von  $E$  mit der  $x$ -Achse deuten kann.
- $x = z = 0$  liefert  $y = 3$ .  $B = (0|3|0)$  ist Schnittpunkt von  $E$  mit der  $y$ -Achse.
- $x = y = 0$  liefert  $z = 2$ .  $C = (0|0|2)$  ist Schnittpunkt von  $E$  mit der  $z$ -Achse.
- $A$ ,  $B$  und  $C$  heißen **Spurpunkte** und man kann vermuten, dass die von ihnen bestimmte Ebene die Lösungsmenge  $E$  ist.

- Zu zeigen: Für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  ist der Punkt  $X = A + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$  Lösung der Gleichung (\*).
- Einsetzen der Punktkoordinaten liefert:
$$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6s - 6t \\ 3s \\ 2t \end{pmatrix}$$
- Einsetzen in die Gleichung (\*) ergibt:
$$(6 - 6s - 6t) + 2 \cdot 3s + 3 \cdot 2t = 6$$
- Also ist  $X \in E$  und die von  $A$ ,  $B$  und  $C$  aufgespannte Ebene eine Teilmenge von  $E$ .
- Durch Nachrechnen zeigt man, dass jede weitere Lösung von (\*) wieder in der von den Spurpunkten aufgespannten Ebene liegt.



## Ebene mit Normalenvektor beschreiben



- Ein Normalenvektor einer Ebene  $E$  ist ein Vektor  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , der zu jedem Verbindungsvektor zweier beliebiger Punkte  $P$  und  $X$  der Ebene  $E$  orthogonal ist, für den also gilt:  $\vec{PX} \perp \vec{n}$

- Damit folgt für das Skalarprodukt:

$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

## Ebenengleichung in Normalenform

Ist  $P$  ein Punkt der Ebene  $E$  und  $\vec{n}$  ein Normalenvektor der Ebene  $E$ , dann kann man alle Punkte  $X$  der Ebene schreiben als

$$E = \{X | (X - P) \cdot \vec{n} = 0\}$$

oder kurz:

$$E: (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

## Hesse'sche Normalenform

Ist  $P$  ein Punkt der Ebene  $E$  und  $\vec{n}$  ein Normalenvektor der Ebene  $E$ , dann kann man alle Punkte  $X$  der Ebene schreiben als

$$E = \left\{ X | (X - P) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0 \right\}$$

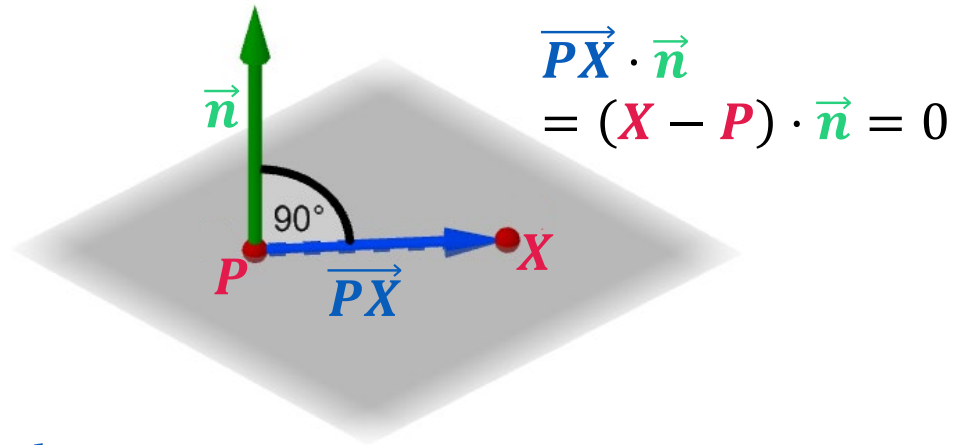
Oder mit dem Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

kurz:  $E: (X - P) \cdot \vec{n}_0 = 0$



# Ebenengleichung: Normalenform

## Ebene mit Normalenvektor beschreiben



## Beispiel

Gegeben: Punkt  $\mathbf{P} = (2, 2, 1)$   
und Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$   
einer Ebene  $\mathbf{E}$ .

Für alle Punkte  $\mathbf{X}$  der Ebene gilt dann  
 $(\mathbf{X} - \mathbf{P}) \cdot \vec{n} = 0$ , bzw. mit Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 2 \\ z - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$\begin{aligned} -1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) &= 0 \\ -1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z & \\ + (-1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1)) &= 0 \\ -1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z &= 6 \end{aligned}$$

## Bemerkung

Wie das Beispiel zeigt, lässt sich die Normalenform einer Ebenengleichung in eine Koordinatenform umwandeln, bei der die Koeffizienten die Koordinaten eines Normalenvektors sind.

## Satz

Ist  $\mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b} \cdot y + \mathbf{c} \cdot z = d$  eine Gleichung einer Ebene  $\mathbf{E}$ , dann ist  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor von  $\mathbf{E}$ .

R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

MaTeGnu

## Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

- 2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums
- 2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren
- 2.3 Zugänge zum Vektorbegriff
- 2.4 Geometrische Deutung von Vektoren
- 2.5 Geraden- und Ebenengleichungen
- 2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele**



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

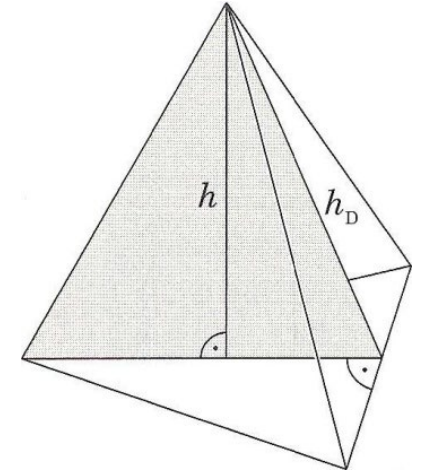
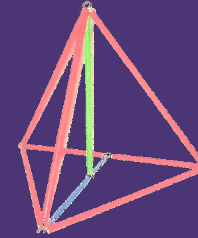
[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

# Beispiel: Tetraeder

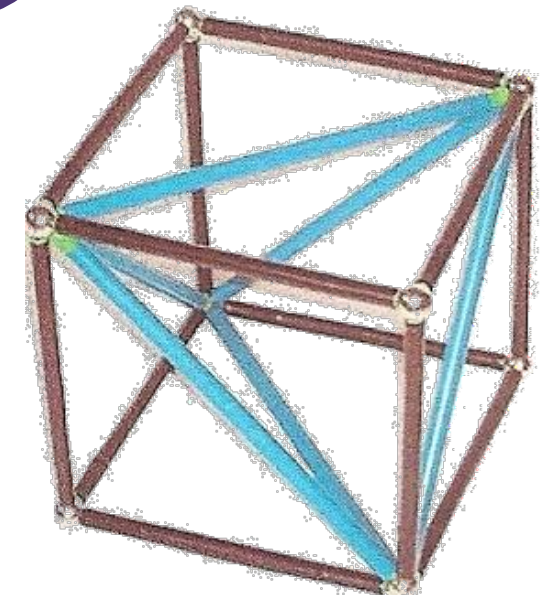
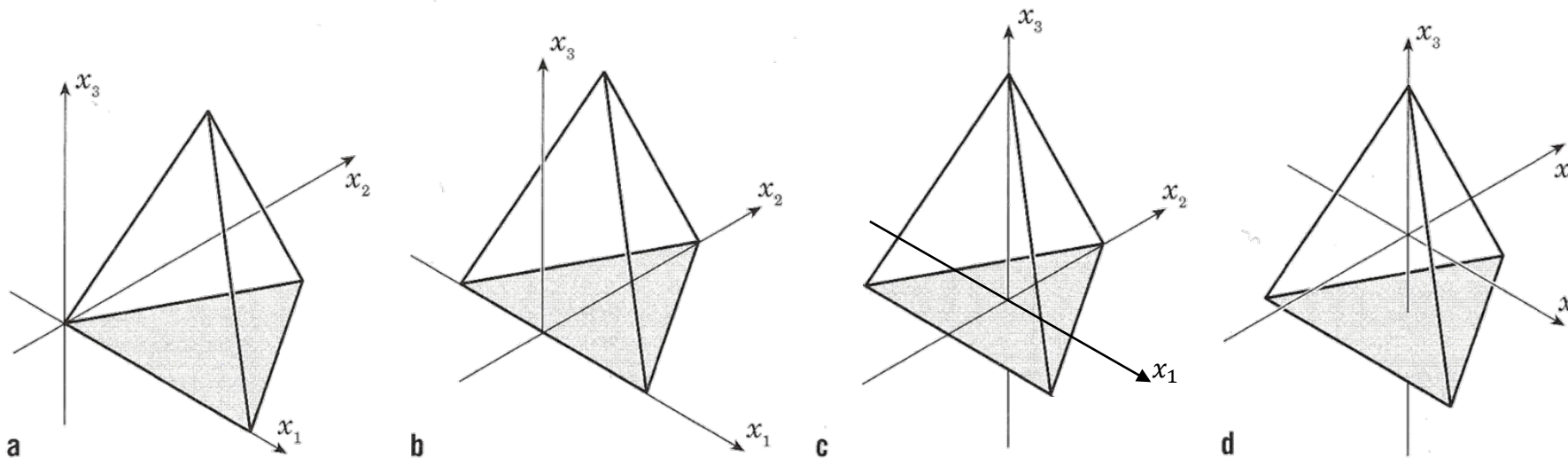
## Aufgabe 1

Wie hoch ist ein gleichseitiger Tetraeder.



## Aufgabe 2:

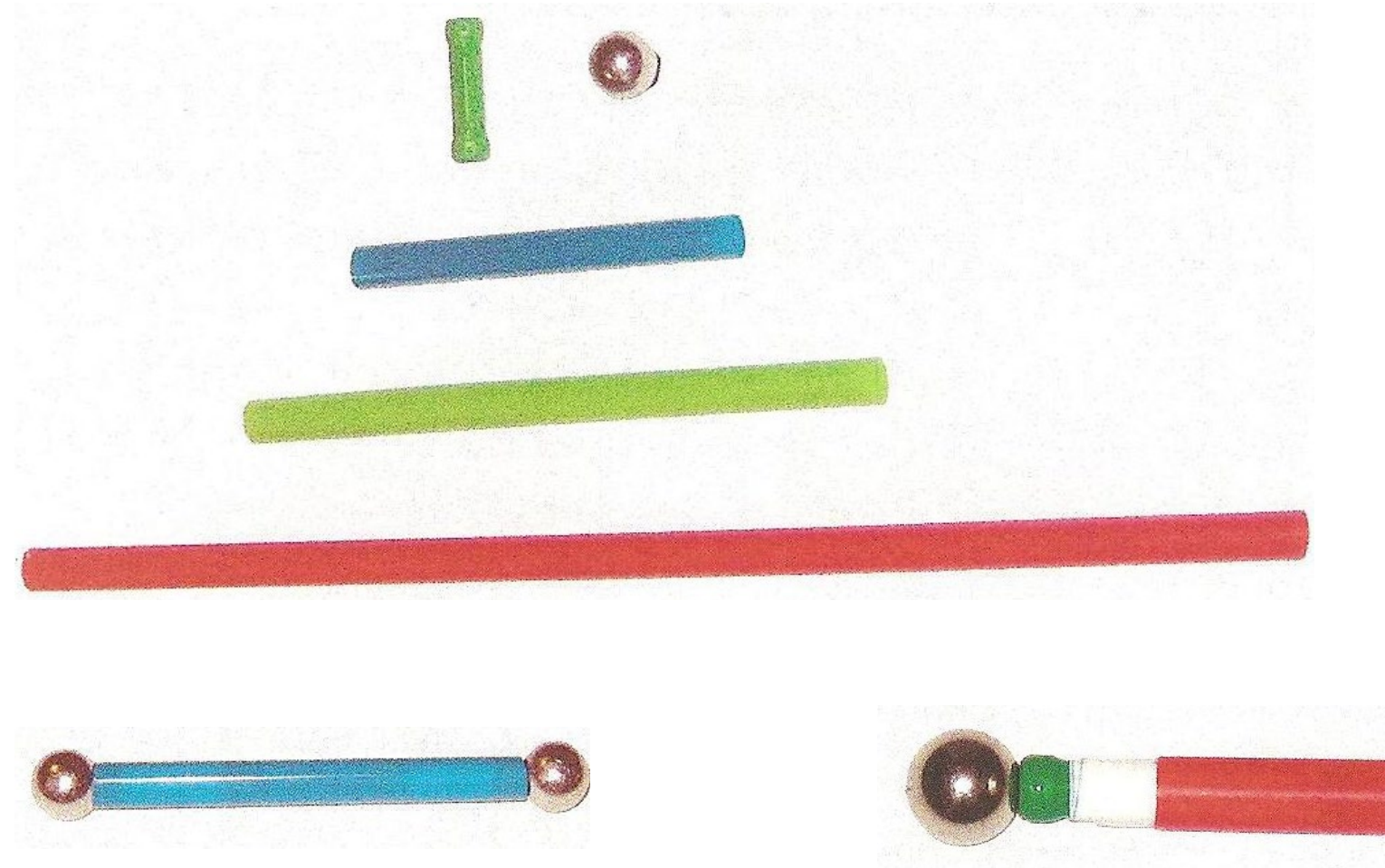
Wie können die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders der Kantenlänge  $a$  durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben werden?

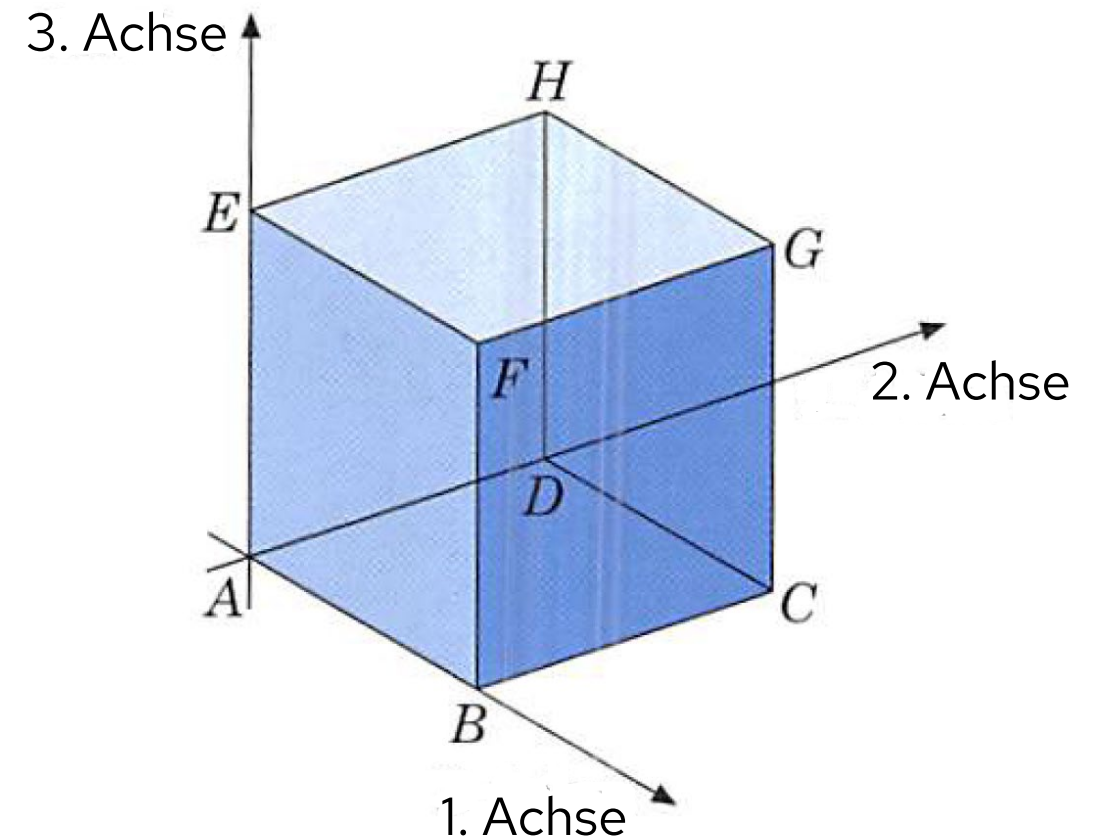
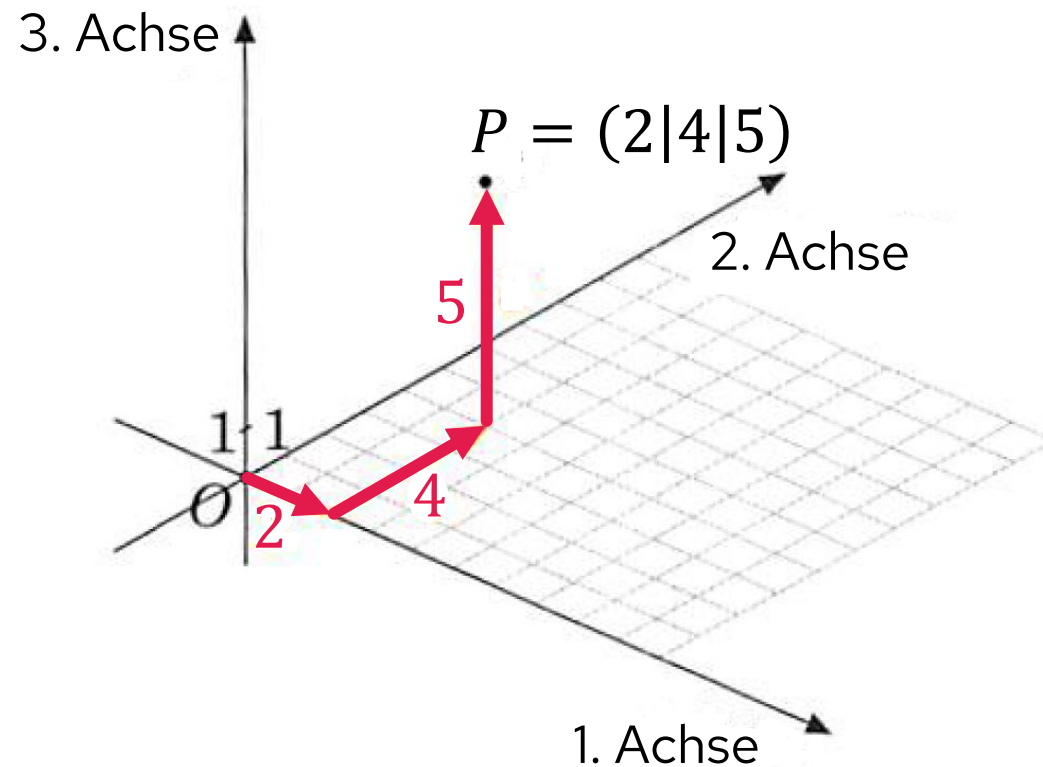




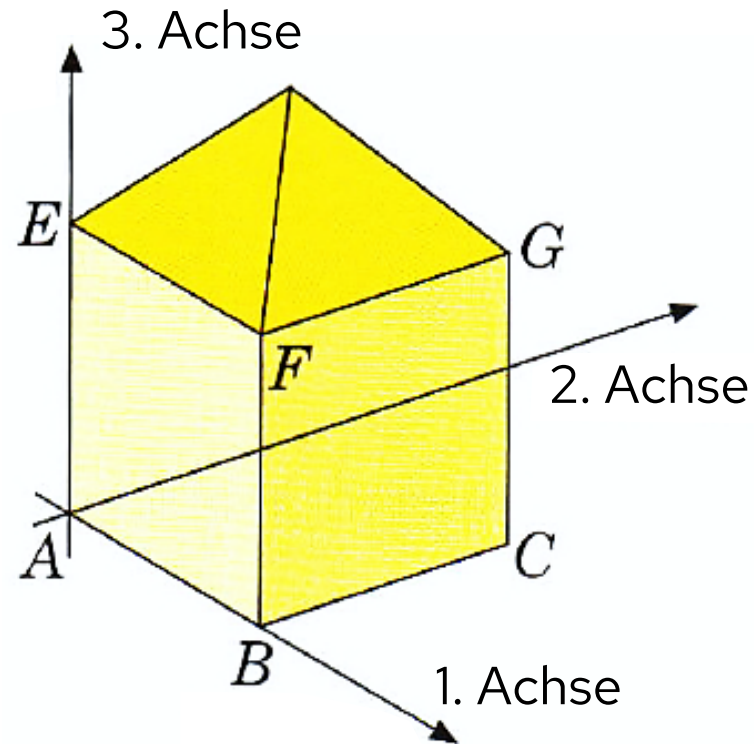
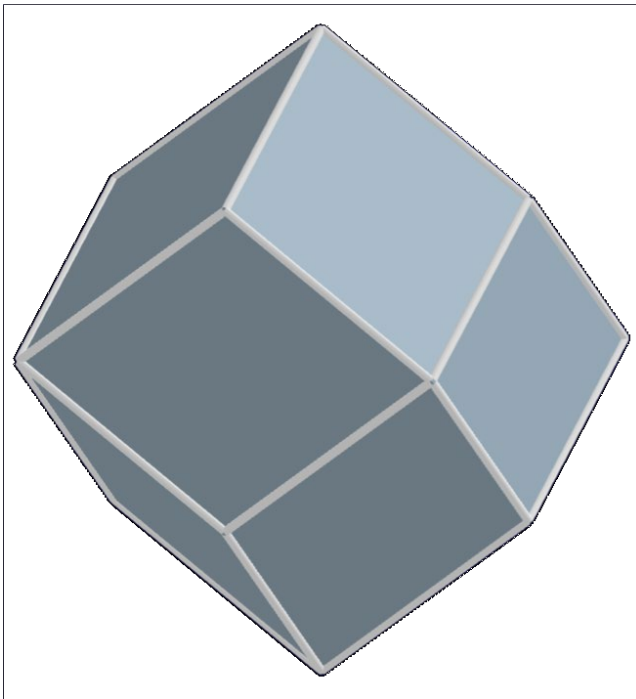
## Modellbaukasten

Mit Hilfe bunter Strohhalme und eines Magnetbaukastens lassen sich auf einfache Weise Kantenmodelle herstellen. Die Magnetstäbchen müssen ggf. mit etwas Papier umwickelt werden, so dass sie nicht so leicht herausrutschen. Damit alles zusammen passt, müssen vorher die Kantenlängen berechnet und die Strohhalme entsprechend zugeschnitten werden.



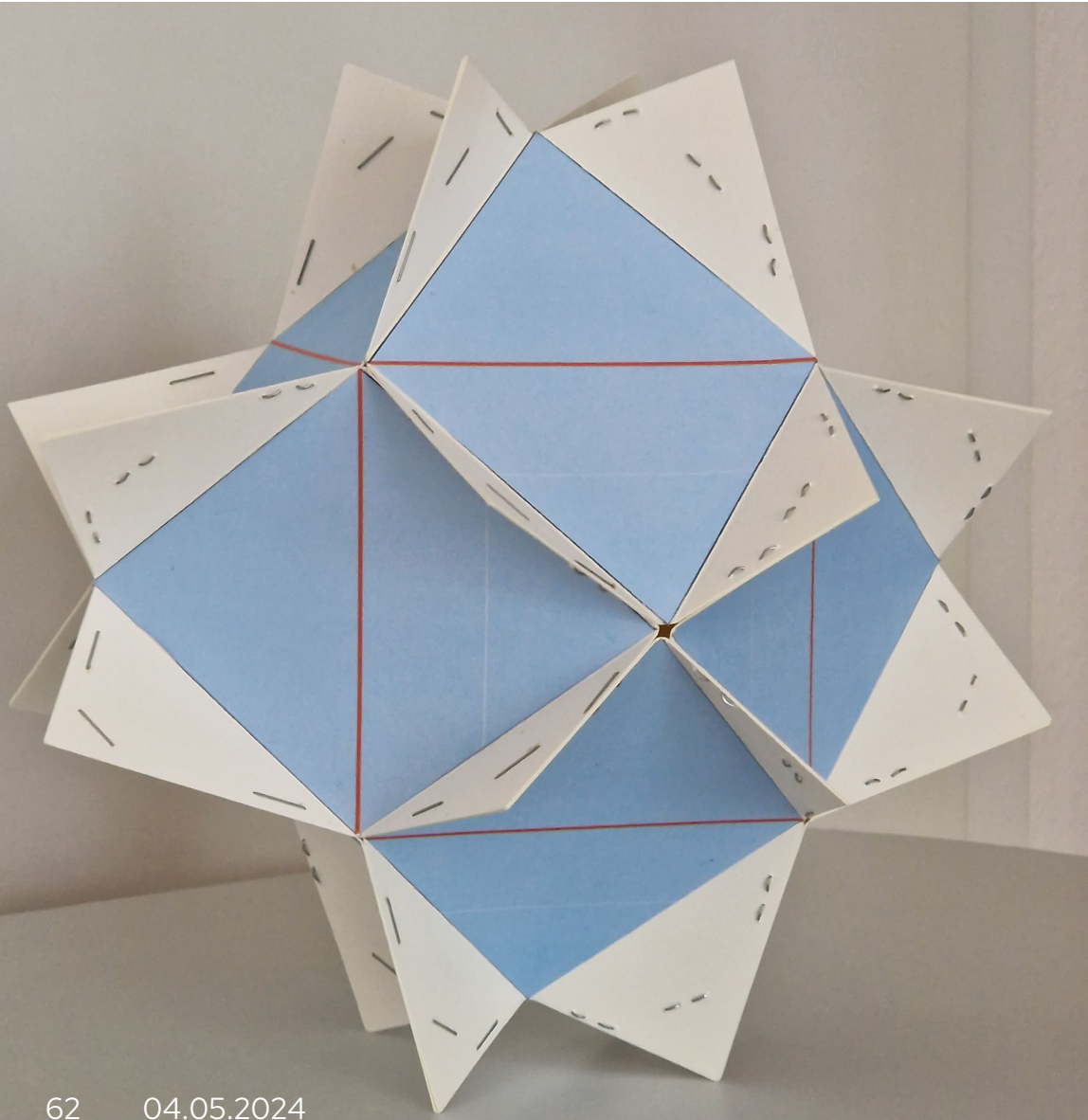






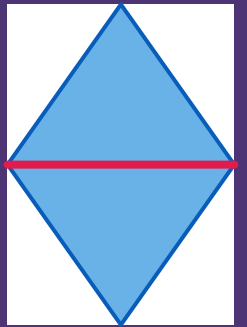
## Rhombendodekaeder

Errichtet man über jeder der sechs Flächen eines Würfels eine gerade quadratische Pyramide, mit geeigneter Höhe, so erhält man ein Rhombendodekaeder. Dies ist ein von zwölf zueinander kongruenten Rauten (Rhomben) begrenzter Körper.



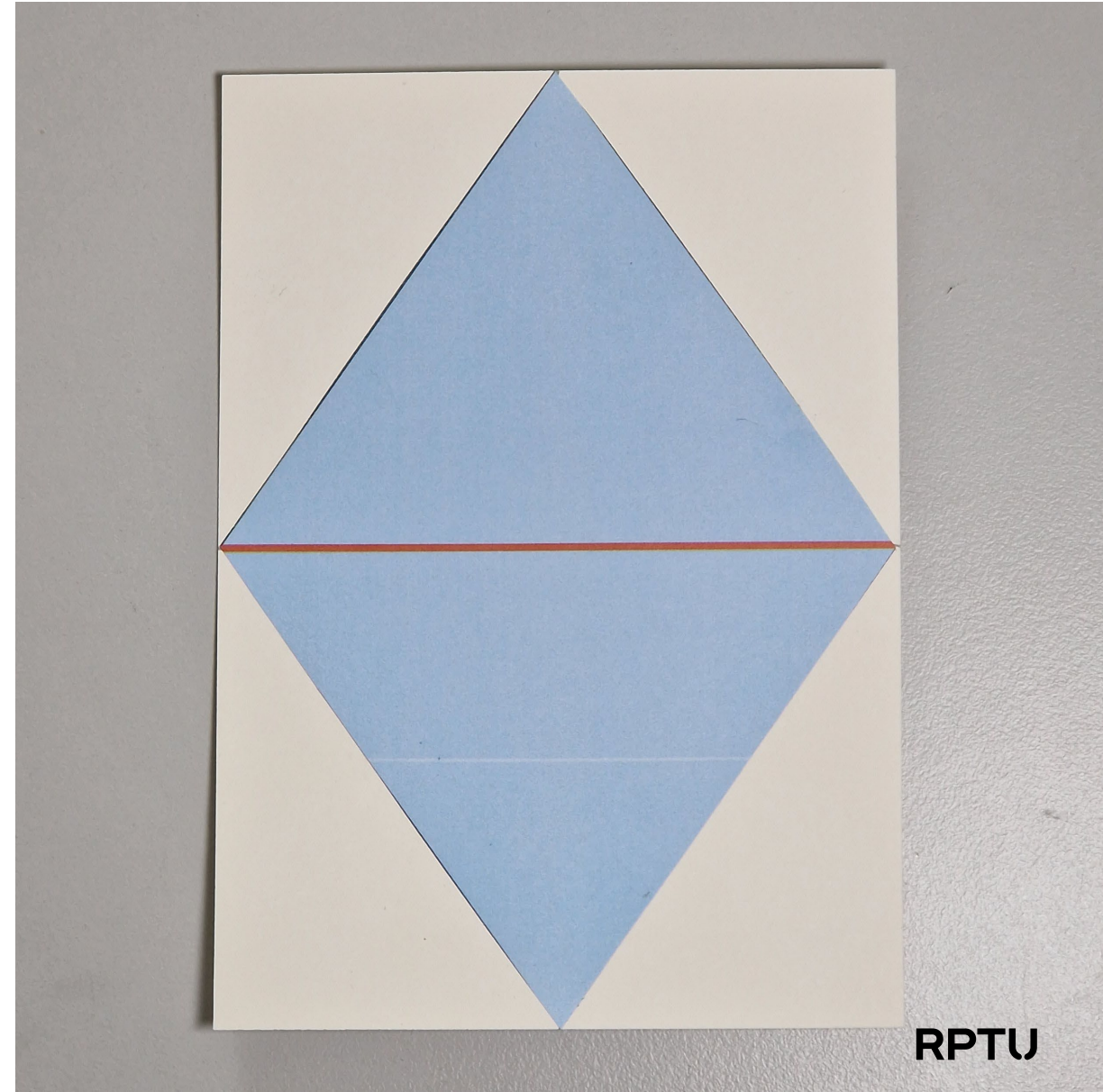
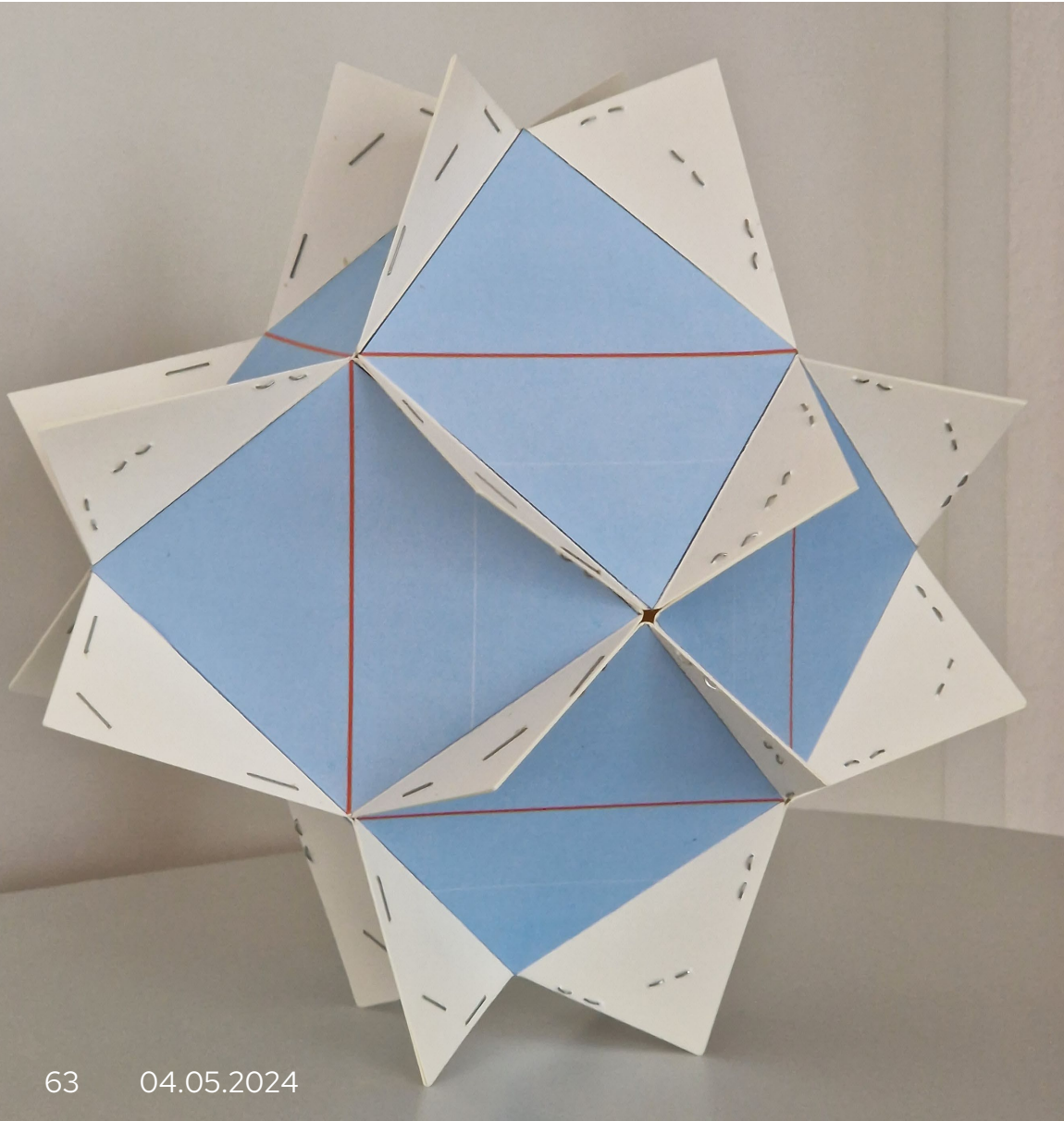
## Rhombendodekaeder aus Postkarten

- Mittelpunkte benachbarter Seiten verbinden.
- Ergebnis: Eine Raute (Rhombus) und vier rechtwinklige Dreiecke.
- Kürzere Diagonale in die Raute einzeichnen.
- Rechtwinklige Dreiecke an der Hypotenuse nach oben falten.
- Geeignete Anzahl an Postkarten auf diese Weise vorbereiten. (Wie viele werden benötigt?)
- Je ein rechtwinkliges Dreieck von zwei Postkarten zur Deckung bringen und zusammentackern.



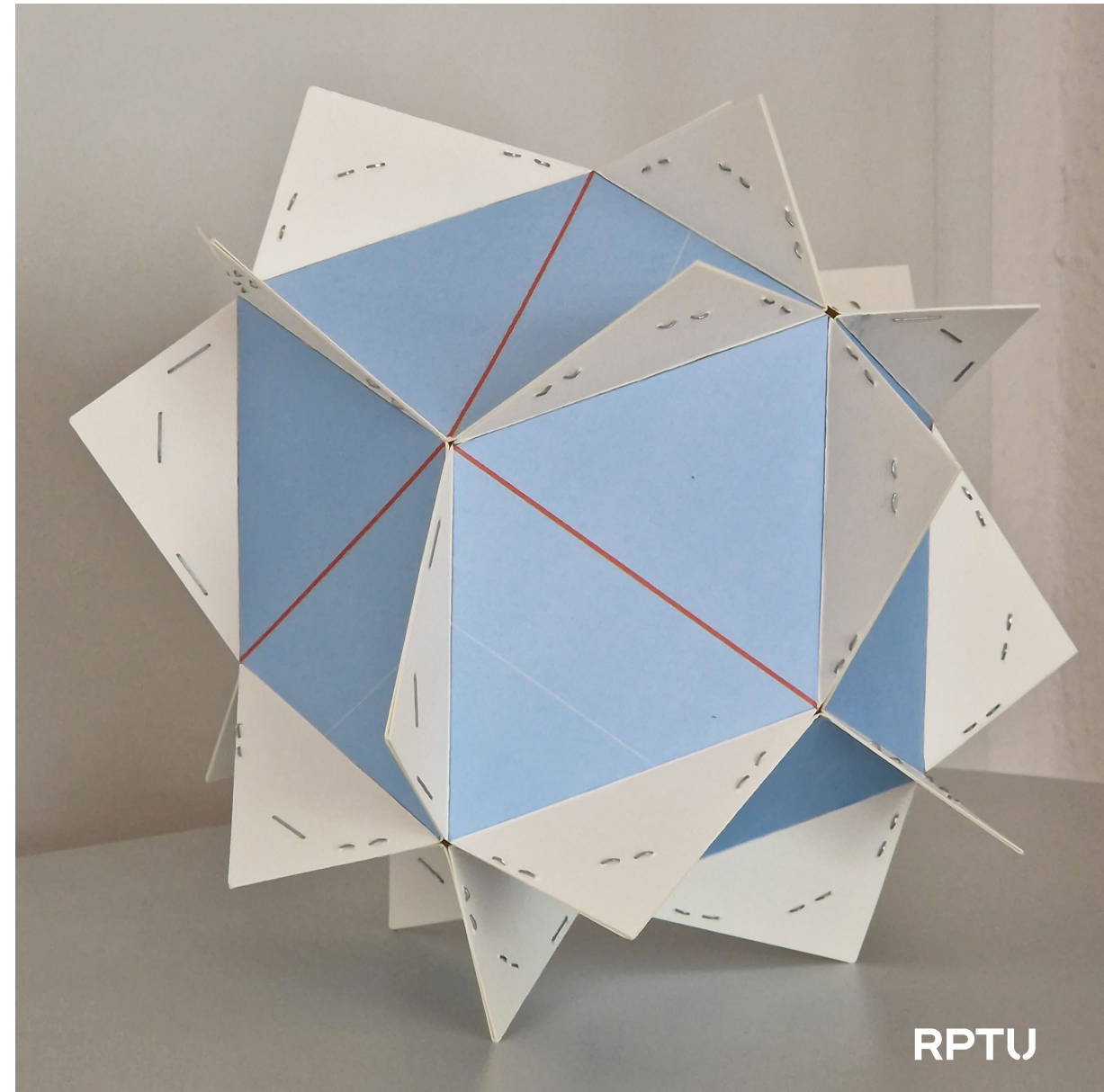
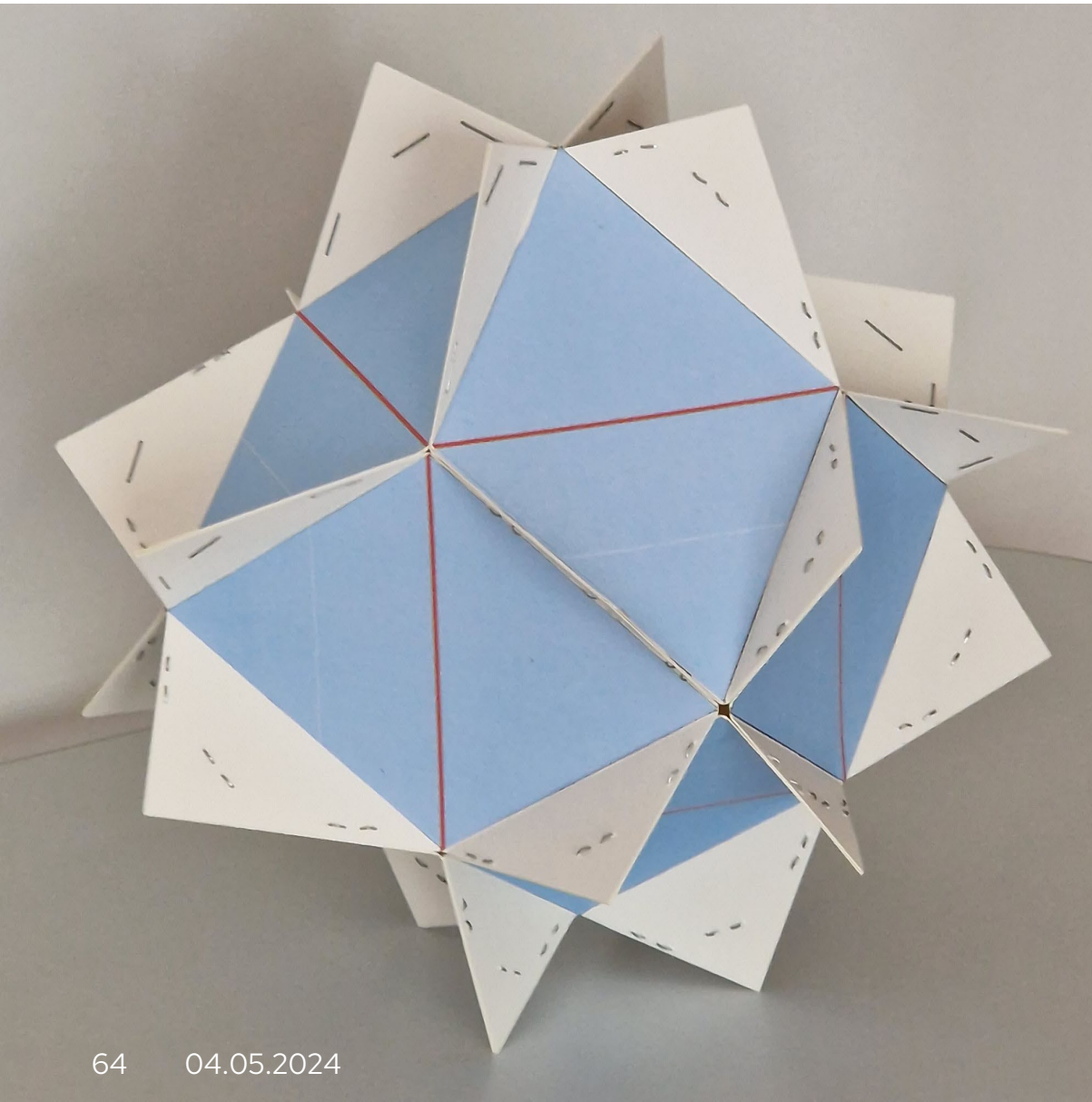


# Rhombendodekaeder



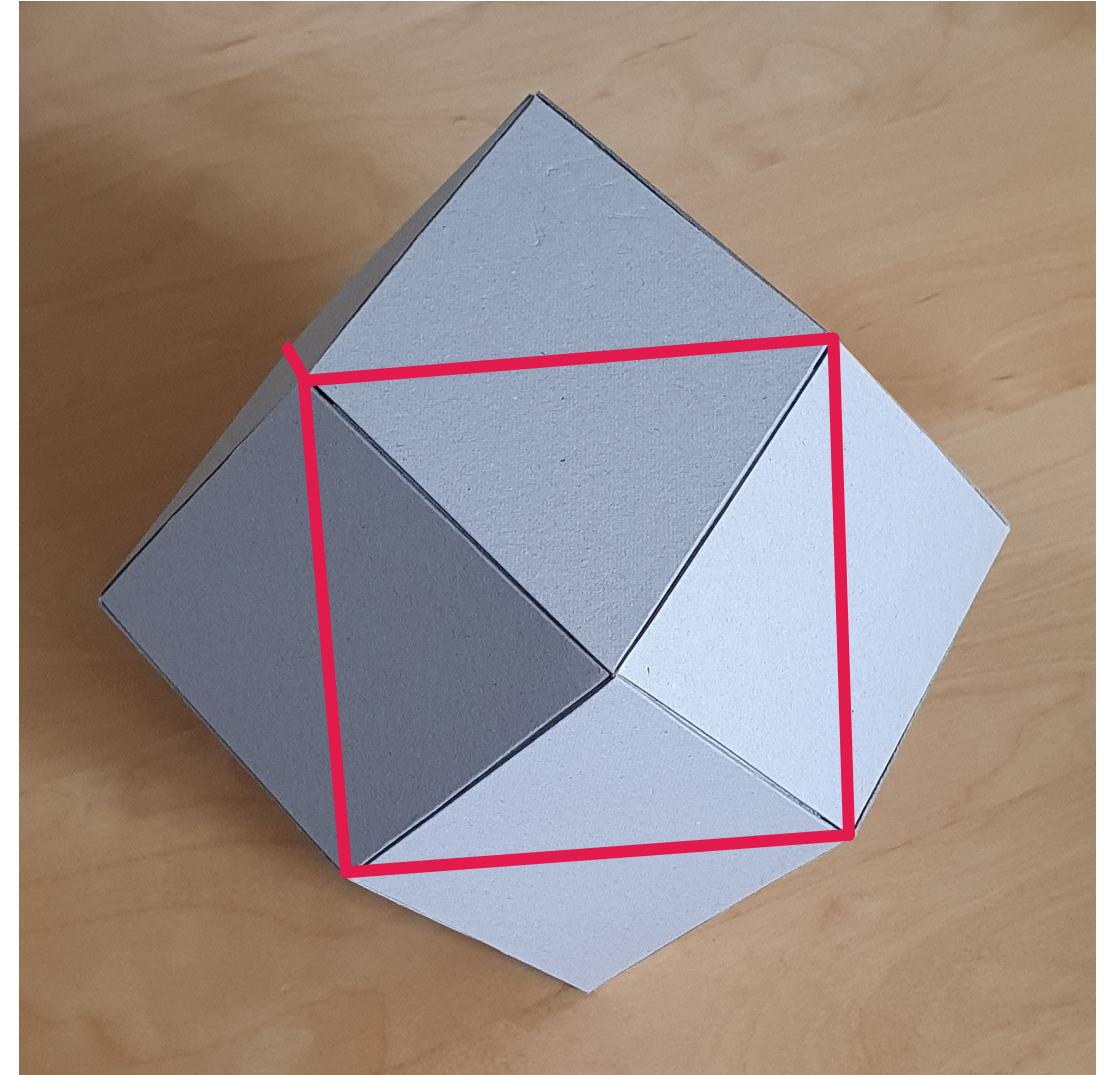
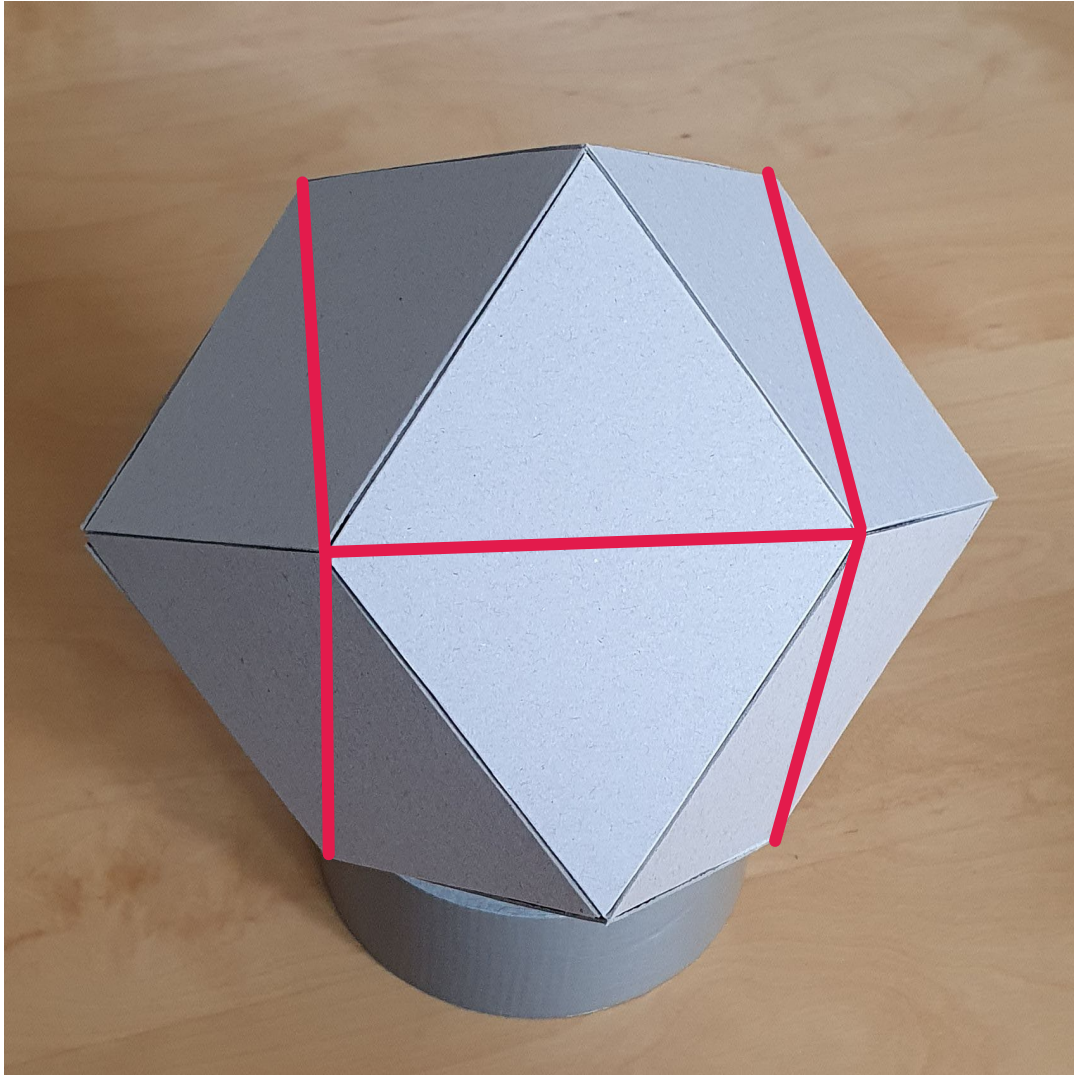


# Rhombendodekaeder



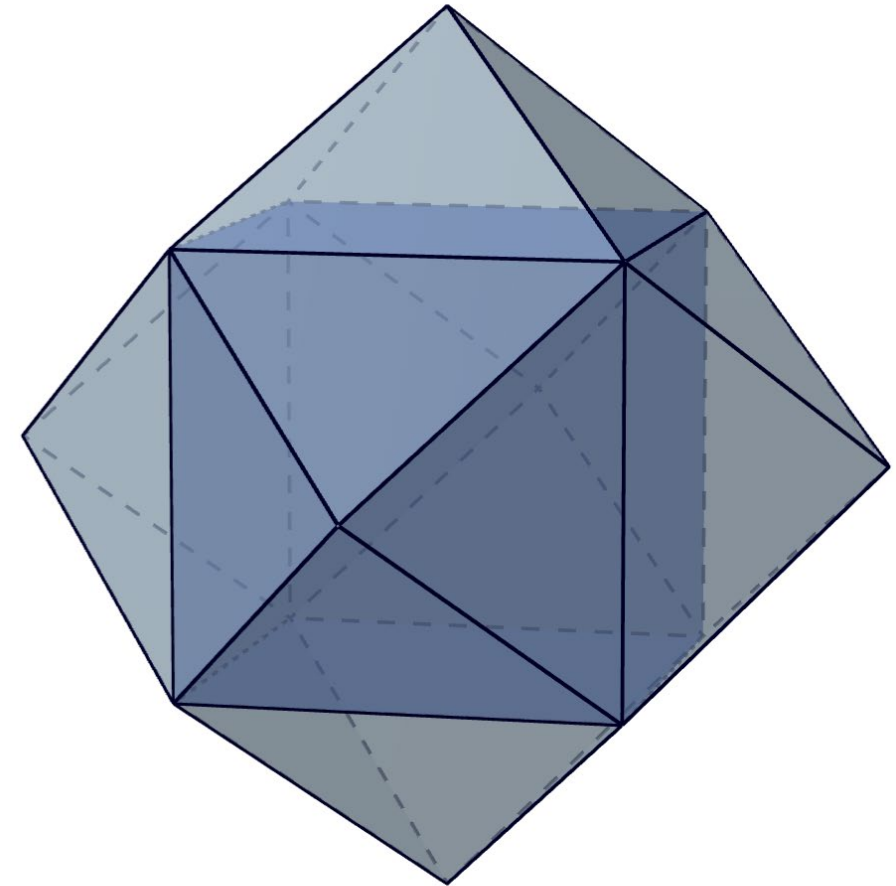
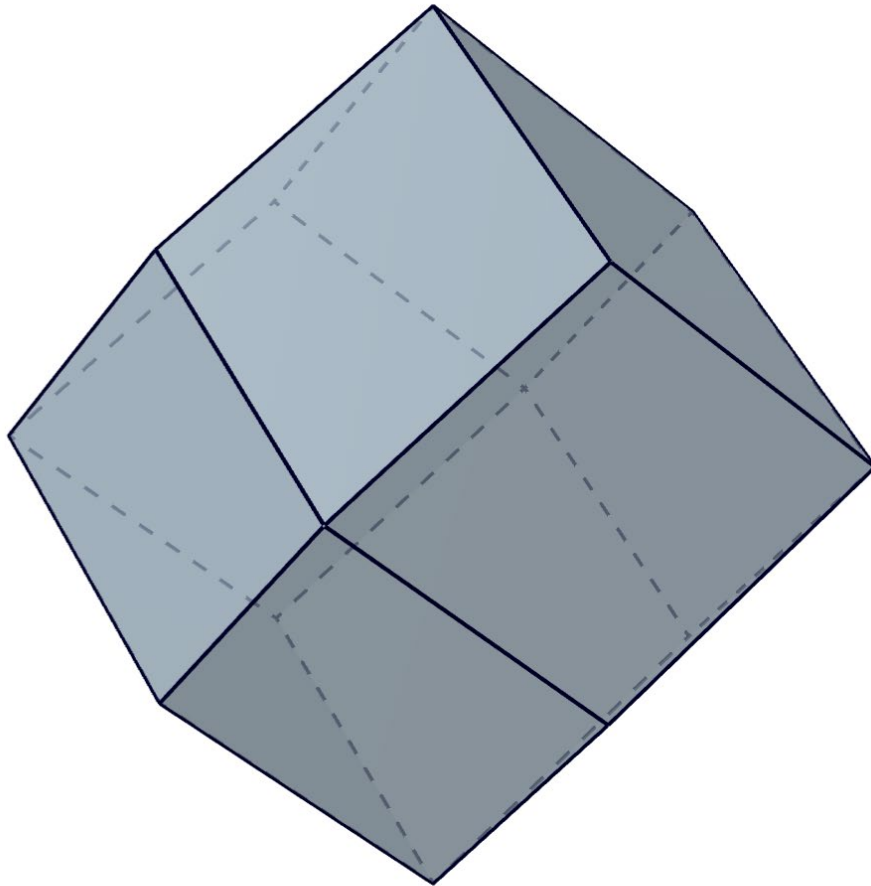


# Rhombendodekaeder





# Rhombendodekaeder



# Aufgaben zum Rhombendodekaeder

**GeoGebra Classroom:** <https://www.geogebra.org/classroom/hvaduj4r>

(1) **Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Seitenflächen des Würfels und die Rauten der Oberfläche des Rhombendodekaeders einschließen.**

(2) **In welchem Verhältnis  $\frac{d_{lang}}{d_{kurz}}$  stehen die Längen der Diagonalen der Rauten?**

(3) **Bestimmen Sie die Höhe der Pyramiden, die auf die Seiten des Würfels aufgesetzt werden, in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{kurz}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).**

(4) **Berechnen Sie die Länge der Kanten des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{kurz}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).**

(5) **Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, um möglichst einfache Koordinaten der Eckpunkte des Rhombendodekaeders zu erhalten.**

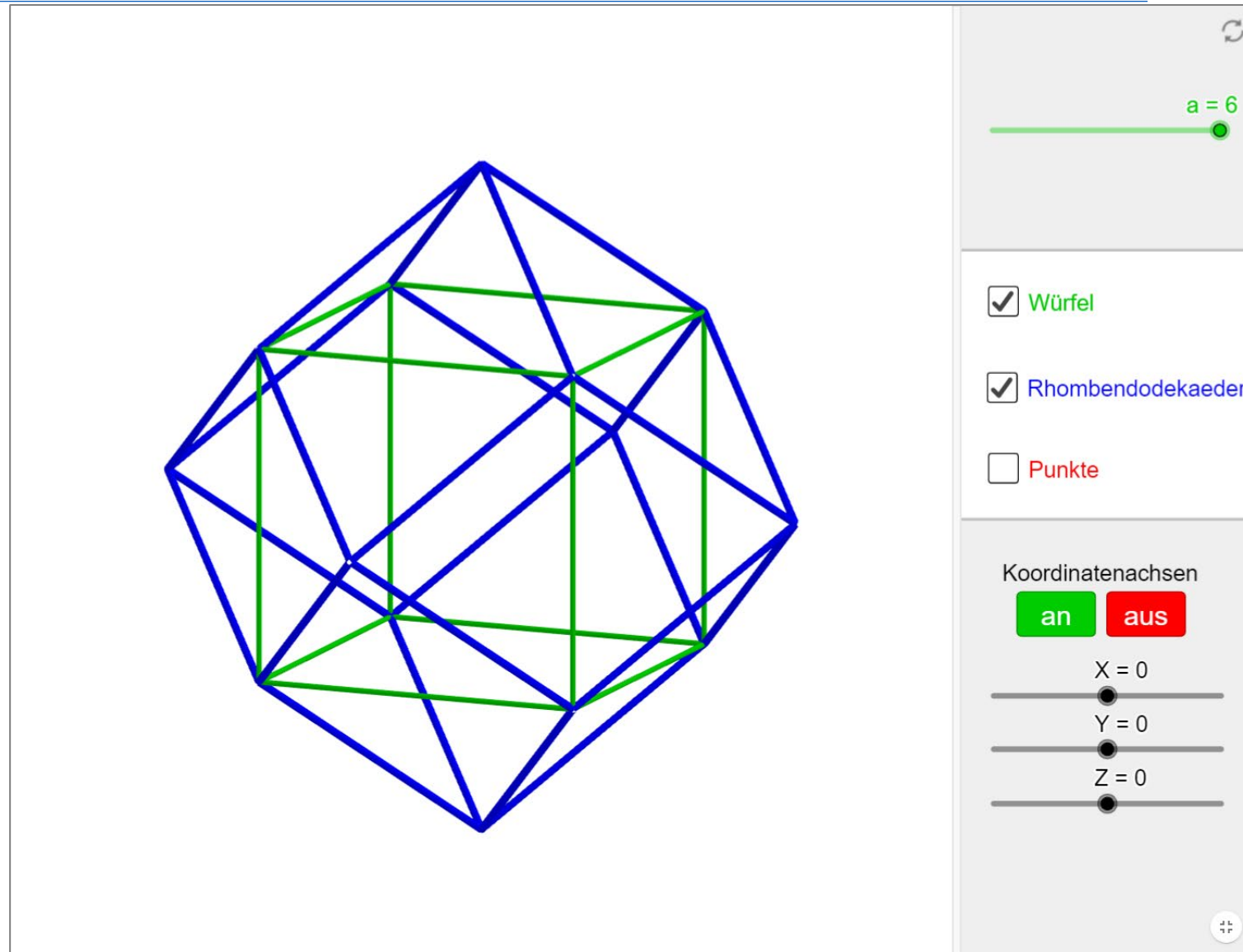
(6) **Bestimmen Sie Koordinaten aller Eckpunkte des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{kurz}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).**

(7) **Berechnen Sie das Volumen des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{kurz}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).**

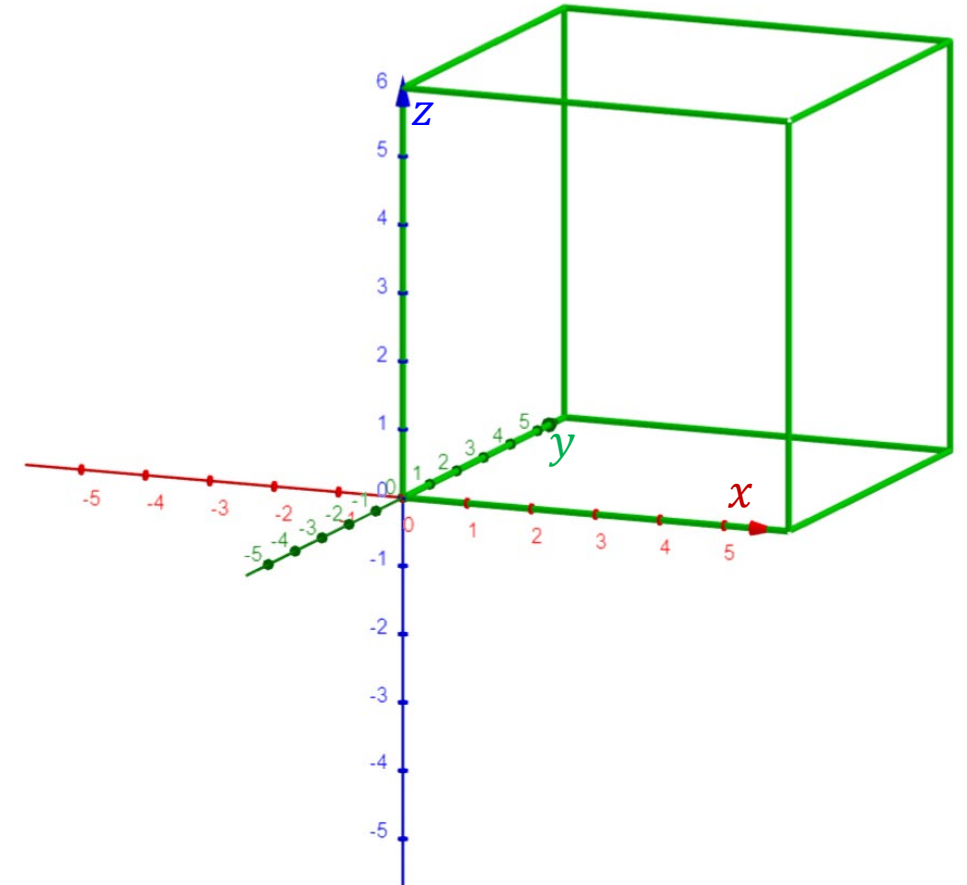
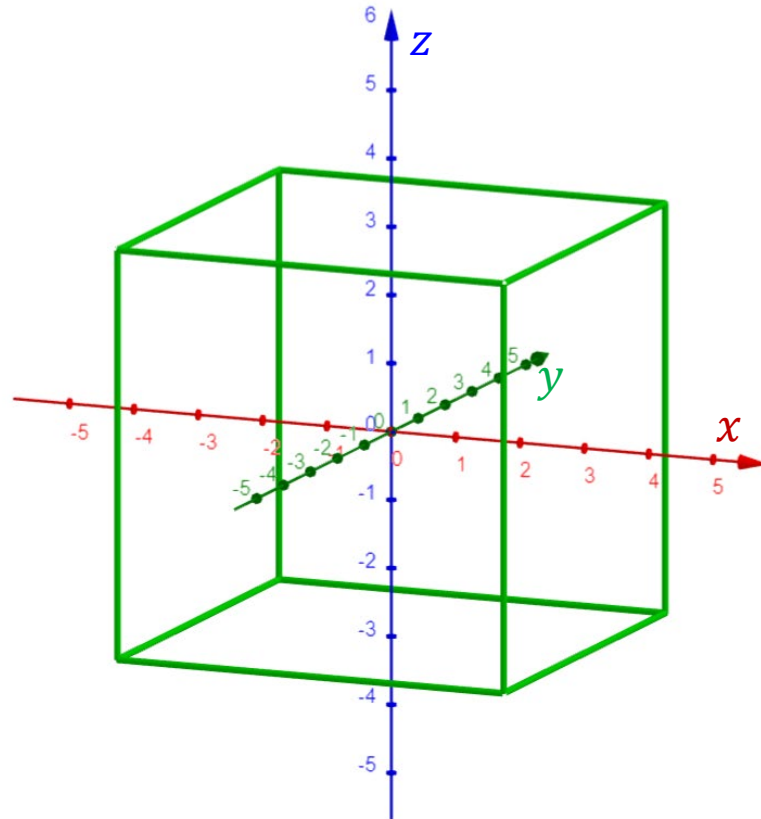
(8) **Berechnen Sie den Abstand der Trägerebenen zweier gegenüberliegender Rauten des Rhombendodekaeders.**

(9) **Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.**

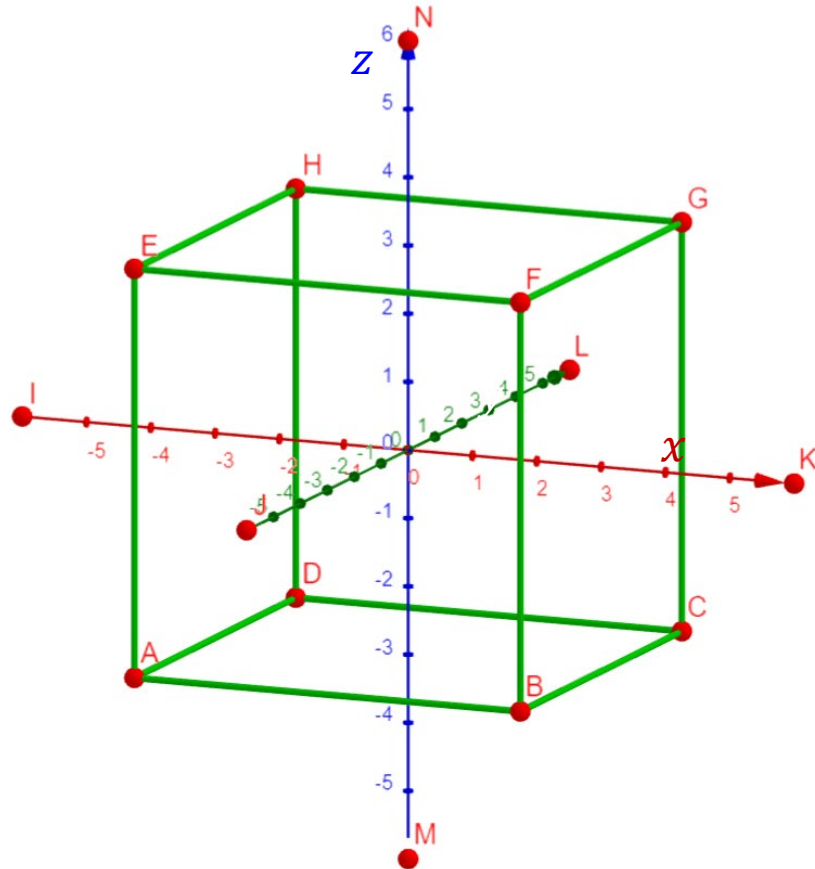
# Rhombendodekaeder



# Rhombendodekaeder: Koordinatensystem



# Rhombendodekaeder: Koordinaten der Eckpunkte



$$A = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

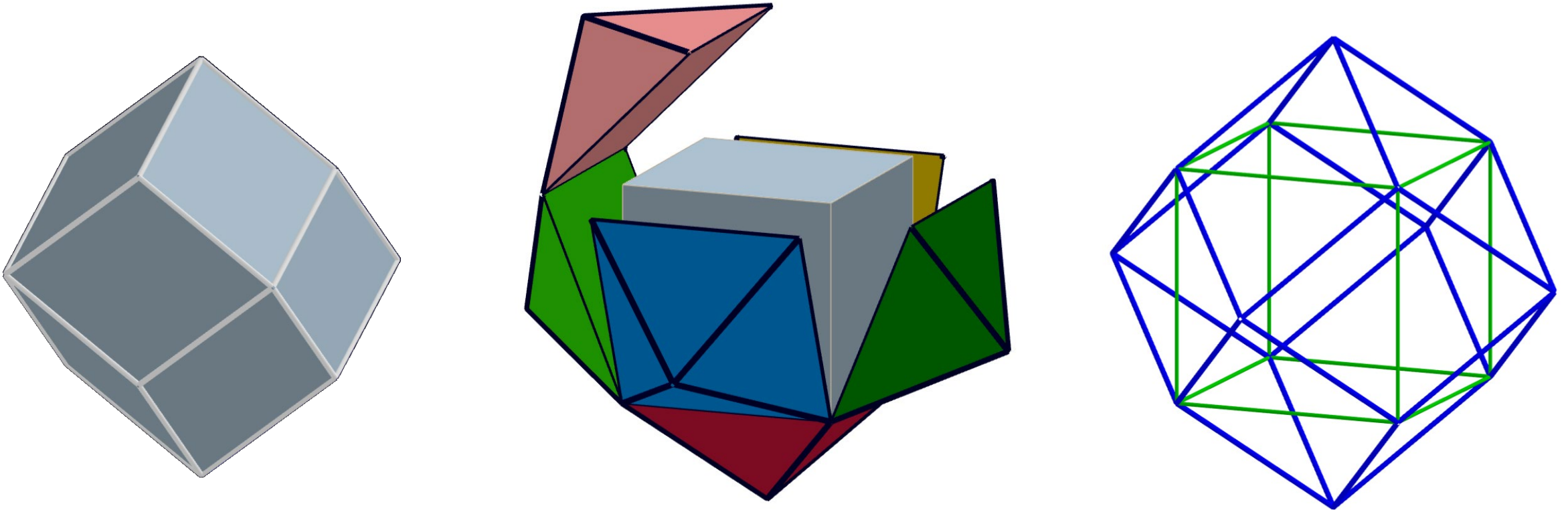
$$L = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$

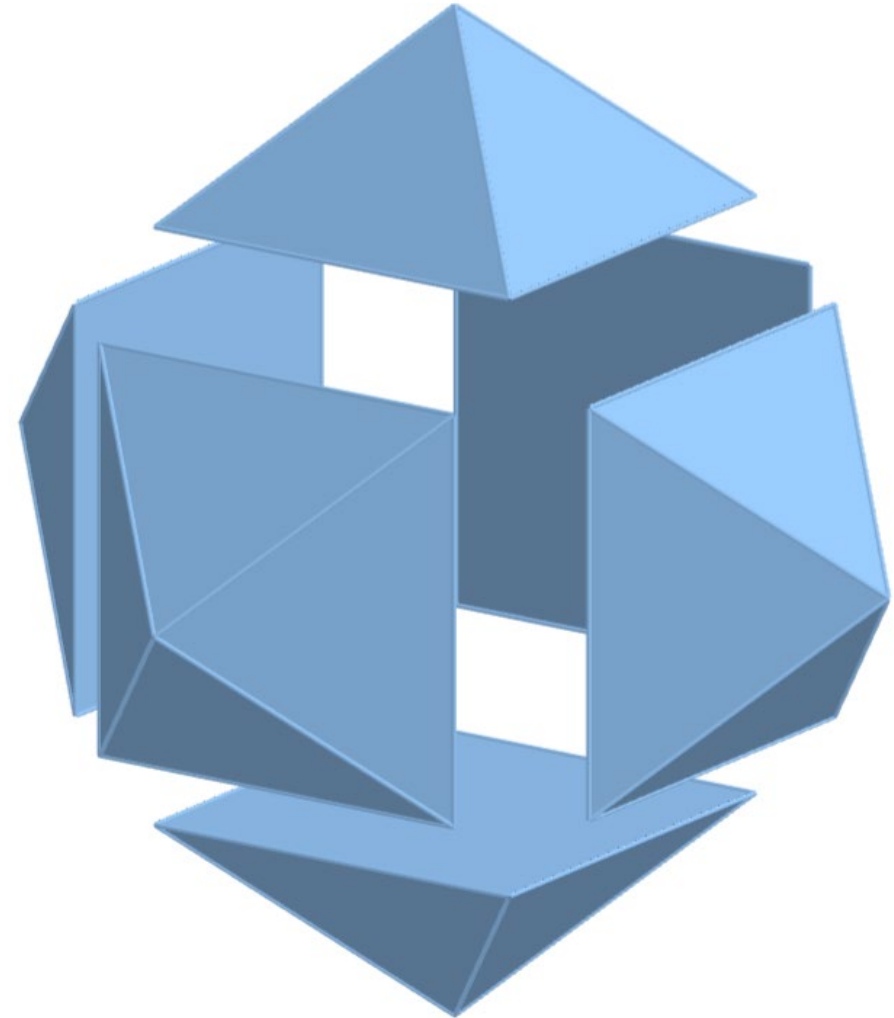
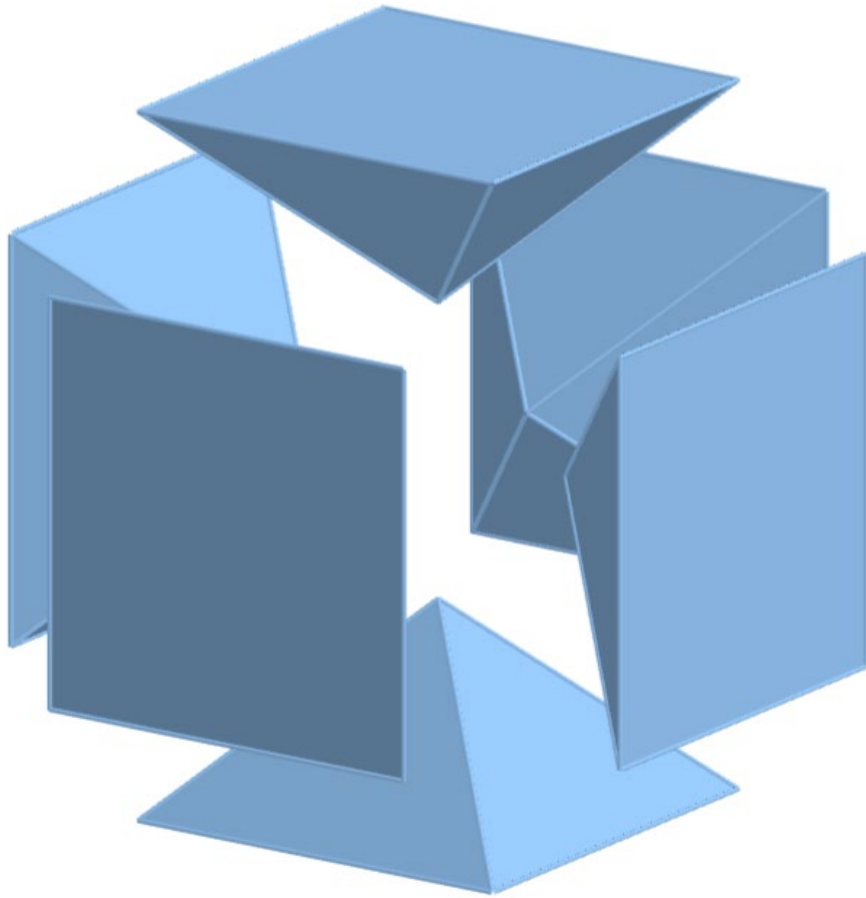
$$N = \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{pmatrix}$$



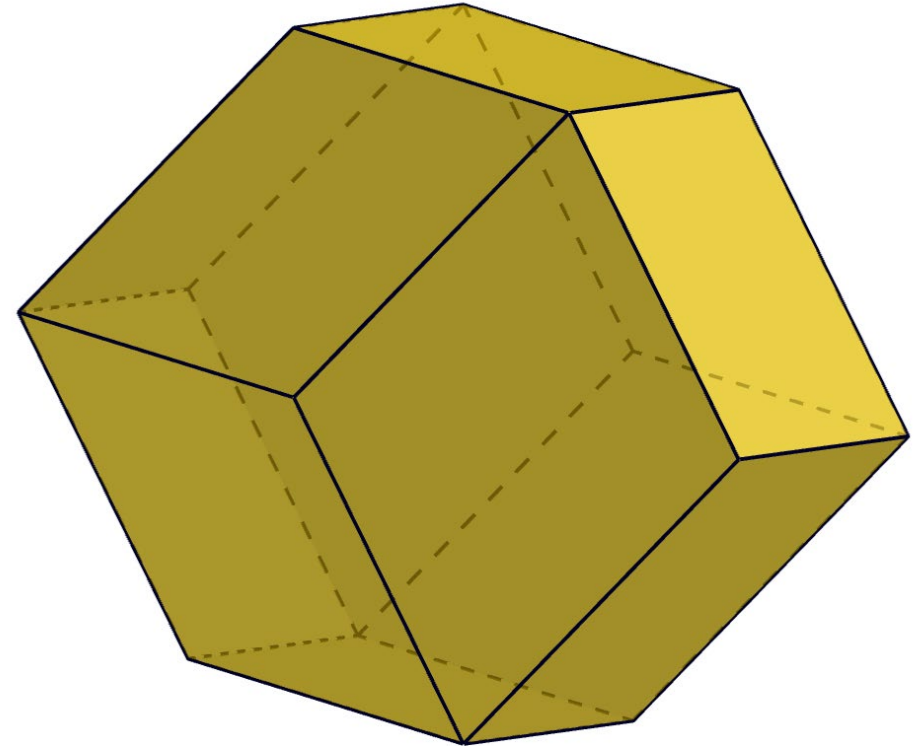
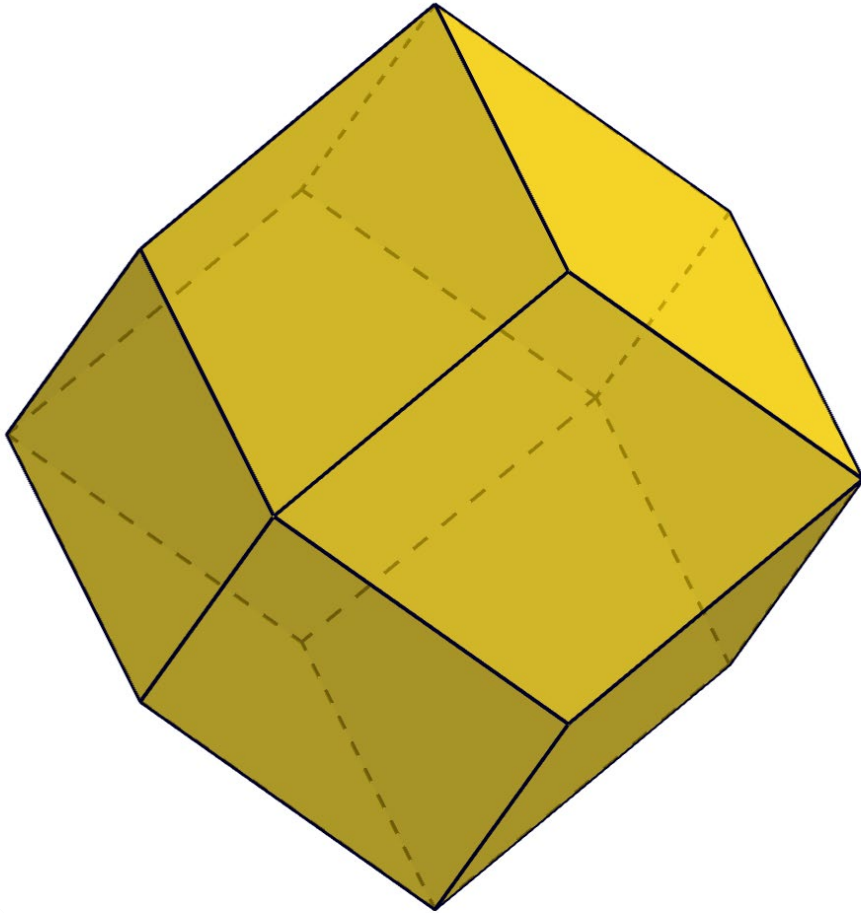
# Rhombendodekaeder



# Rhombendodekaeder



# Rhombendodekaeder

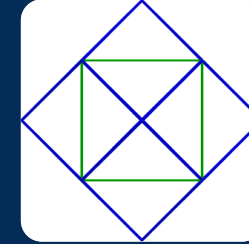
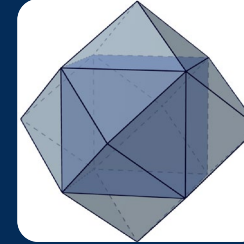


# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

- (1) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Seitenflächen des Würfels und die Rauten der Oberfläche des Rhombendodekaeders einschließen.
- (2) In welchem Verhältnis  $\frac{d_{\text{lang}}}{d_{\text{kurz}}}$  stehen die Längen der Diagonalen der Rauten?
- (3) Bestimmen Sie die Höhe der Pyramiden, die auf die Seiten des Würfels aufgesetzt werden, in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{\text{kurz}}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).
- (4) Berechnen Sie die Länge der Kanten des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{\text{kurz}}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(1)



$$\rho = 45^\circ$$

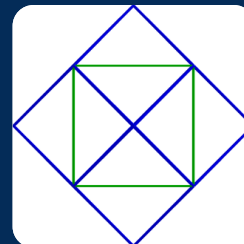
(2)



DIN-Format:

$$\frac{d_{\text{lang}}}{d_{\text{kurz}}} = \frac{d_{\text{kurz}}}{\frac{d_{\text{lang}}}{2}} \Rightarrow \frac{d_{\text{lang}}}{d_{\text{kurz}}} = \sqrt{2}$$

(3)



$$h_{\text{Pyramide}} = \frac{a}{2}$$

(4)



Satz des  
Pythagoras

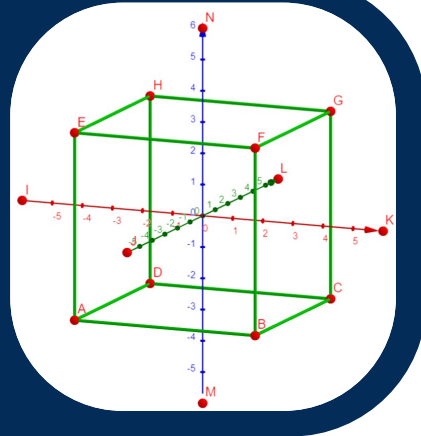
$$s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



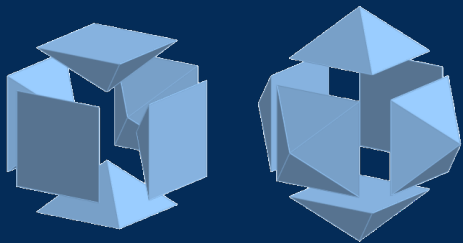
# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

(5) und (6)  
Vgl. Folien 68 bis 70

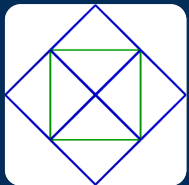


(7)



$$V_{\text{Rhombendodekaeder}} = 2 \cdot a^3$$

(8)



Vgl. Abschnitt 3.8  
Grundvorstellungen  
zum Abstand

(9)

**Idee:**

- (1) Bestimmen der Normalenvektoren der Trägerebenen der beteiligten Rauten.
- (2) Bestimmen des Zwischenwinkels der Normalenvektoren.

- (5) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, um möglichst einfache Koordinaten der Eckpunkte des Rhombendodekaeders zu erhalten.
- (6) Bestimmen Sie Koordinaten aller Eckpunkte des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{\text{kurz}}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).
- (7) Berechnen Sie das Volumen des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge  $a := d_{\text{kurz}}$  der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).
- (8) Berechnen Sie den Abstand der Trägerebenen zweier gegenüberliegender Rauten des Rhombendodekaeders.
- (9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

- (9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

### (9) Lösungsidee (\*) Vgl. Kapitel 3: Skalarprodukt

- a) Bestimmen der Normalenvektoren der Trägerebenen der beteiligten Rauten.

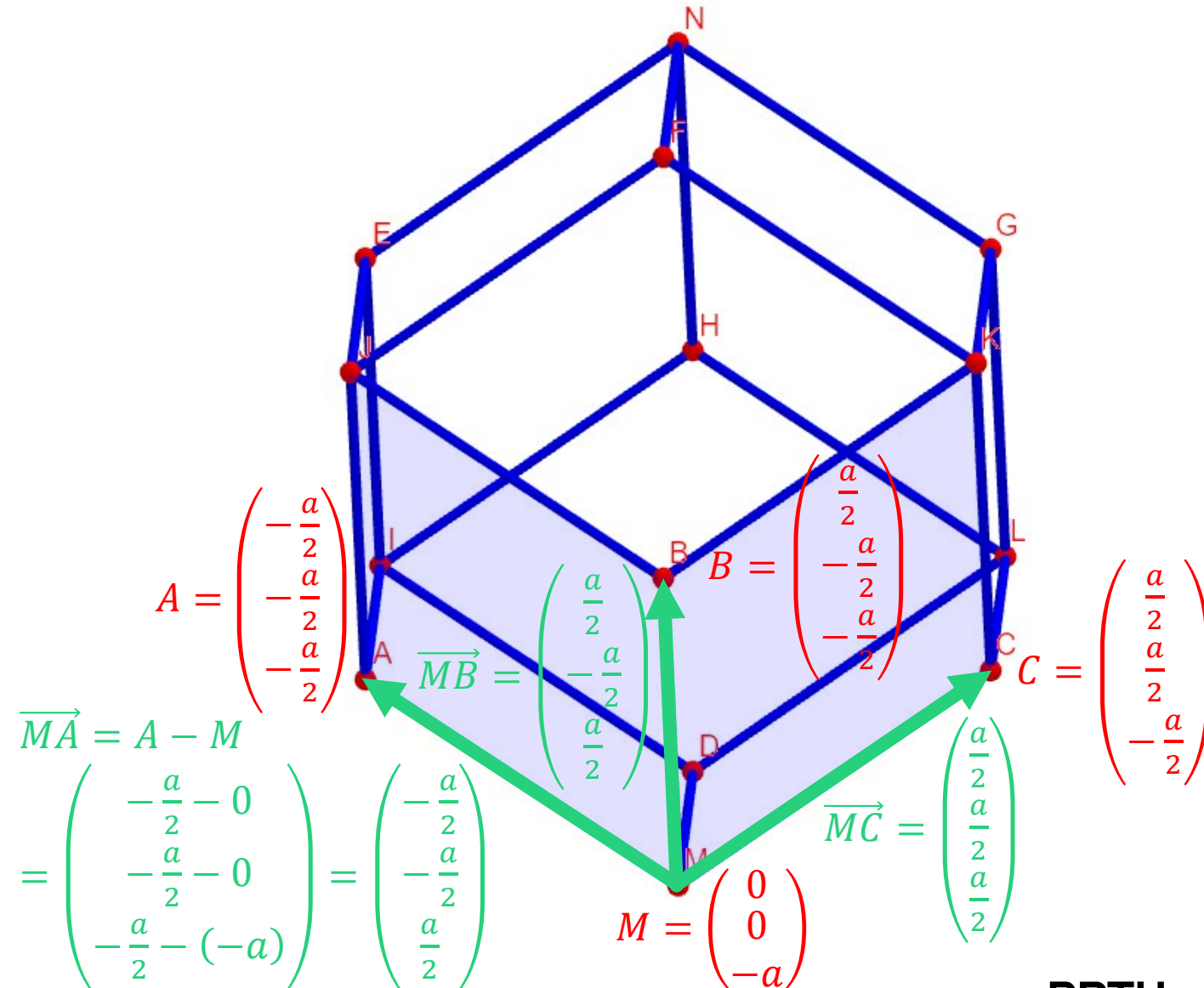
Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Nutzung des Skalarprodukts (\*)
- Nutzung des Vektorprodukts ➡

- b) Bestimmen des Zwischenwinkels der Normalenvektoren.

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Nutzung des Skalarprodukts (\*)
- Nutzung des Vektorprodukts ➡



# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

- (9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

Normalenvektor  $\vec{n}_a$  zu den Spannvektoren  $\vec{MA}$  und  $\vec{MB}$

Für den Normalenvektor  $\vec{n}_a$  gilt:

$$(I) \quad 0 = \vec{n}_a \cdot \vec{MA} = \begin{pmatrix} n_{a1} \\ n_{a2} \\ n_{a3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = -\frac{a}{2} \cdot n_{a1} - \frac{a}{2} \cdot n_{a2} + \frac{a}{2} \cdot n_{a3}$$

$$(II) \quad 0 = \vec{n}_a \cdot \vec{MB} = \begin{pmatrix} n_{a1} \\ n_{a2} \\ n_{a3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{a1} - \frac{a}{2} \cdot n_{a2} + \frac{a}{2} \cdot n_{a3}$$

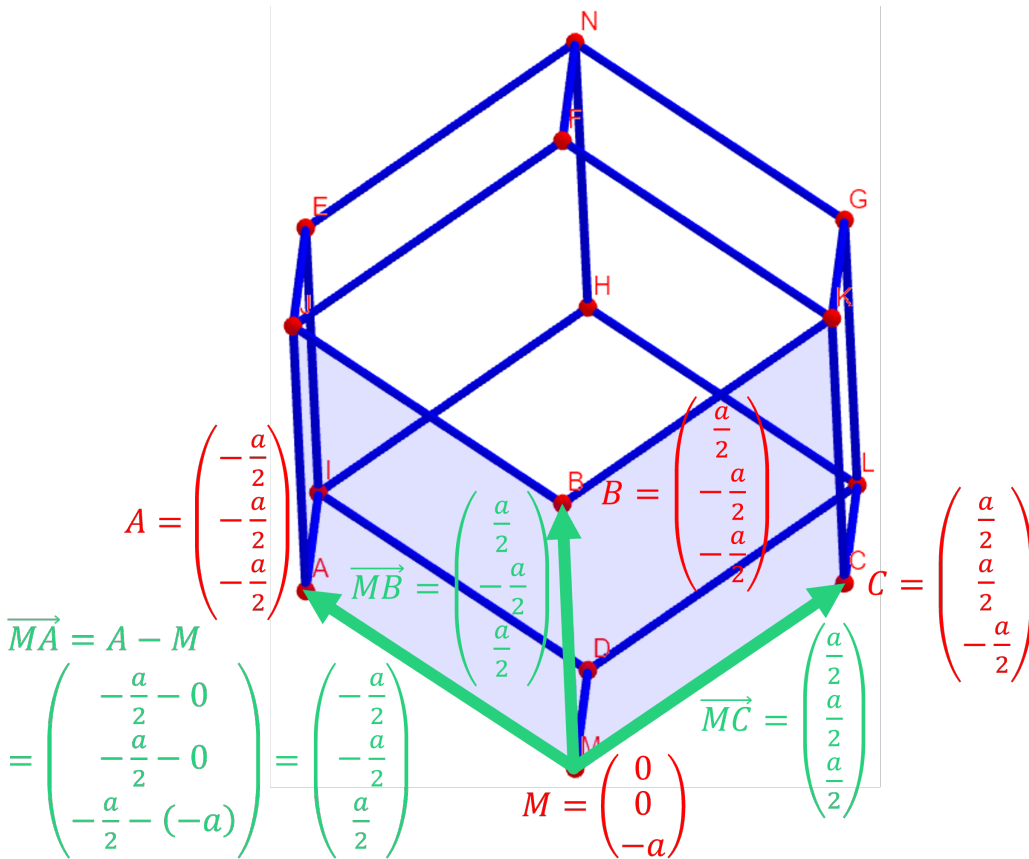
$$(I) + (II) \text{ liefert: } a \cdot n_{a2} = a \cdot n_{a3} \xrightarrow{a>0} n_{a2} = n_{a3}$$

Wähle  $n_{a2} = n_{a3} = 1$ .

Einsetzen in (II) liefert:

$$\frac{a}{2} \cdot n_{a1} = 0 \xrightarrow{a>0} n_{a1} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_a = \begin{pmatrix} n_{a1} \\ n_{a2} \\ n_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

- (9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

Normalenvektor  $\vec{n}_b$  zu den Spannvektoren  $\vec{MC}$  und  $\vec{MB}$

Für den Normalenvektor  $\vec{n}_b$  gilt:

$$(I) \quad 0 = \vec{n}_b \cdot \vec{MC} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{b_1} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_3}$$

$$(II) \quad 0 = \vec{n}_b \cdot \vec{MB} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{b_1} - \frac{a}{2} \cdot n_{b_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_3}$$

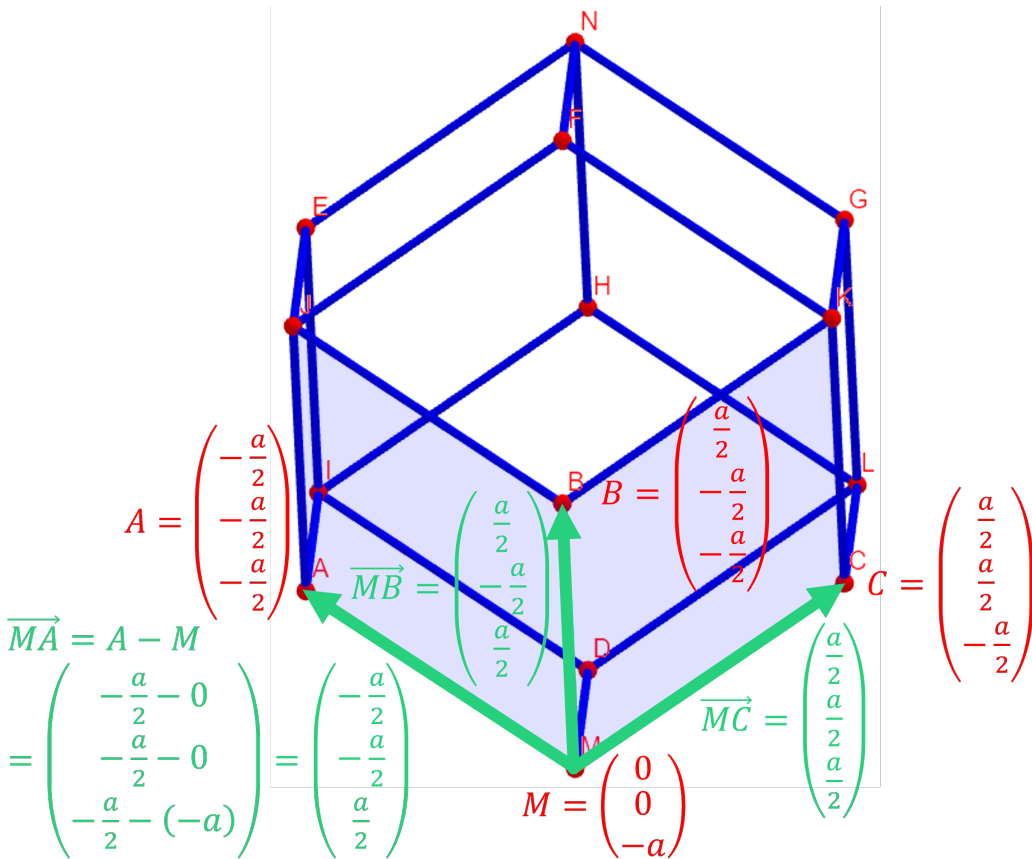
$$(I) + (II) \text{ liefert: } a \cdot n_{b_1} = -a \cdot n_{b_3} \stackrel{a>0}{\Rightarrow} n_{b_1} = -n_{b_3}$$

Wähle  $n_{b_3} = 1 \Rightarrow n_{b_1} = -1$ .

Einsetzen in (I) liefert:

$$\frac{a}{2} \cdot n_{b_2} = 0 \stackrel{a>0}{\Rightarrow} n_{b_2} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_b = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

- (9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

Der Winkel zwischen den von  $\overrightarrow{MC}$  und  $\overrightarrow{MB}$  sowie von  $\overrightarrow{MC}$  und  $\overrightarrow{MB}$  aufgespannten Ebenen entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren  $\vec{n}_a$  und  $\vec{n}_b$  dieser Ebenen.

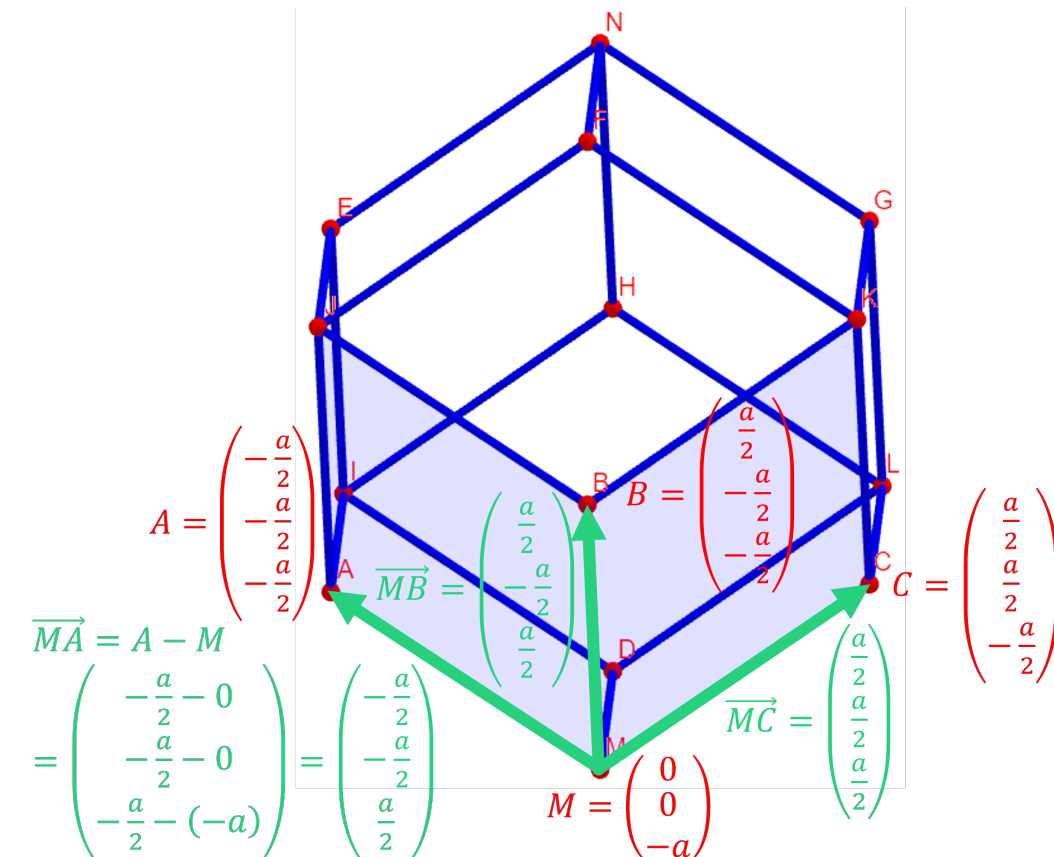
Bestimmung des Winkels  $\varphi = \angle(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = \angle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- Mit Hilfe des Skalarprodukts ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b}{|\vec{n}_a| \cdot |\vec{n}_b|} = \frac{n_{a1} \cdot n_{b1} + n_{a2} \cdot n_{b2} + n_{a3} \cdot n_{b3}}{\sqrt{n_{a1}^2 + n_{a2}^2 + n_{a3}^2} \cdot \sqrt{n_{b1}^2 + n_{b2}^2 + n_{b3}^2}} \\ &= \frac{0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

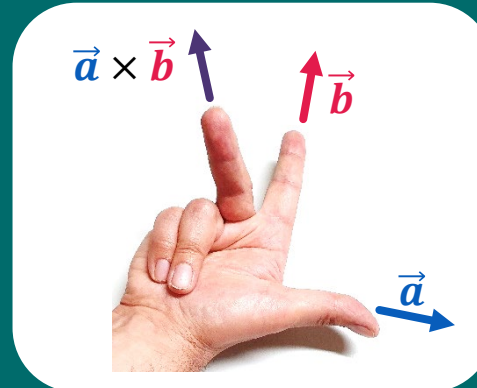
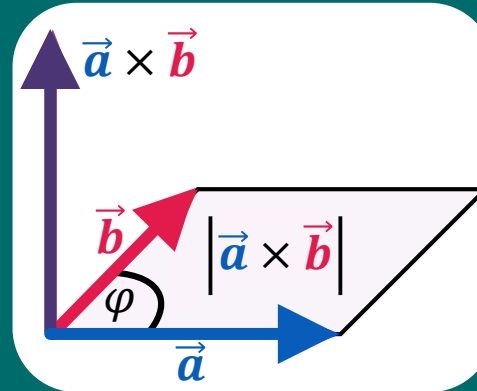
- Daraus folgt für  $\varphi = \angle(\vec{n}_a, \vec{n}_b)$  und damit für den Winkel, den die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten des Rhombendodekaeders miteinander einschließen:

$$\varphi = \angle(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = 60^\circ$$



## Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- Das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist ein Vektor, der senkrecht auf der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet (**Rechte-Hand-Regel**).
- Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird.



- Das Vektorprodukt wird wie folgt berechnet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

## Vorgehensweise bei der Berechnung:

### 1. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

### 2. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

### 3. Schritt

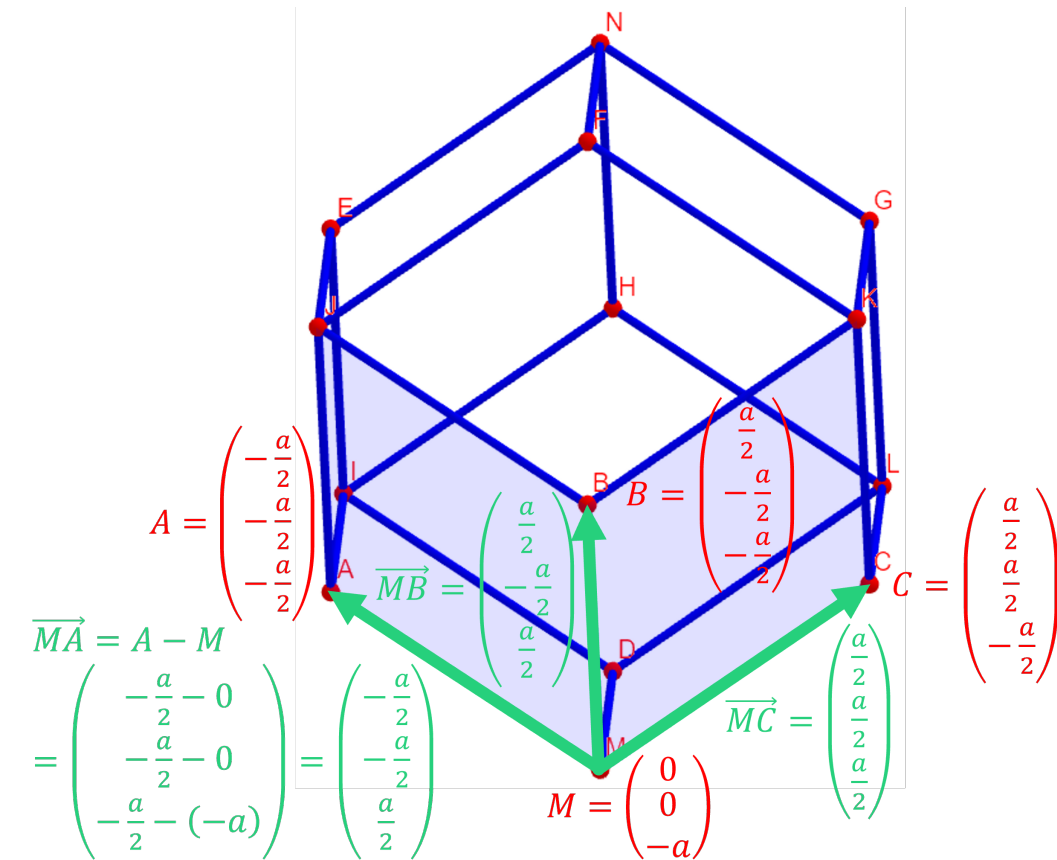
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

- (9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

Bestimmung der Normalenvektoren  $\vec{n}_a$  und  $\vec{n}_b$  der von  $\vec{MA}$  und  $\vec{MB}$  sowie von  $\vec{MC}$  und  $\vec{MB}$  aufgespannten Ebenen und deren Zwischenwinkel  $\varphi = \angle(\vec{n}_a, \vec{n}_b)$  mit dem Vektorprodukt.



$$\vec{MA} \times \vec{MB} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \\ -\left(-\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MB} \times \vec{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \\ -\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Damit ergeben sich folgende Normalenvektoren:

$$\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

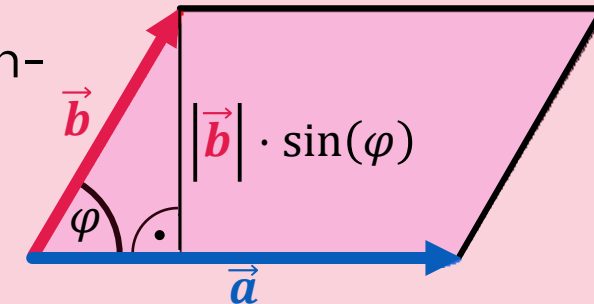
# Rhombendodekaeder

## Lösungshinweise zu den Aufgaben

- (9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

- Der Betrag  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  des Vektorprodukts  $\vec{a} \times \vec{b}$  gibt den Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt Parallelogramms an.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



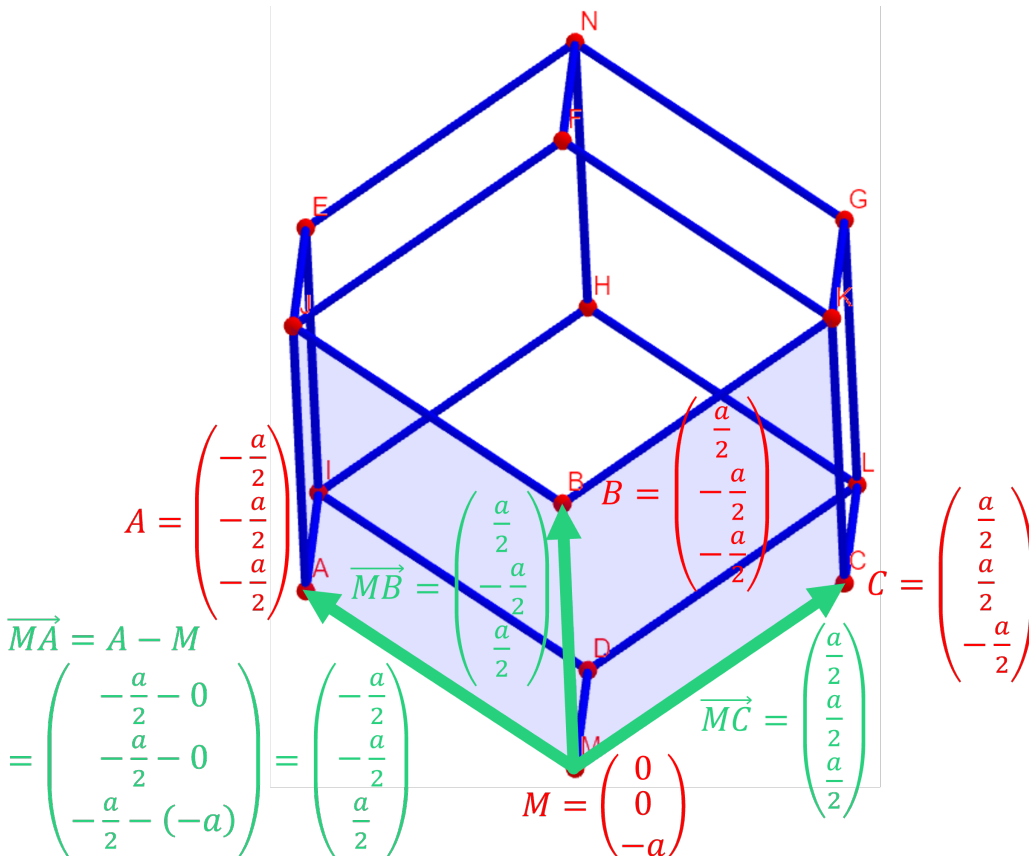
- Damit ergibt sich für den Zwischenwinkel  $\varphi$  von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

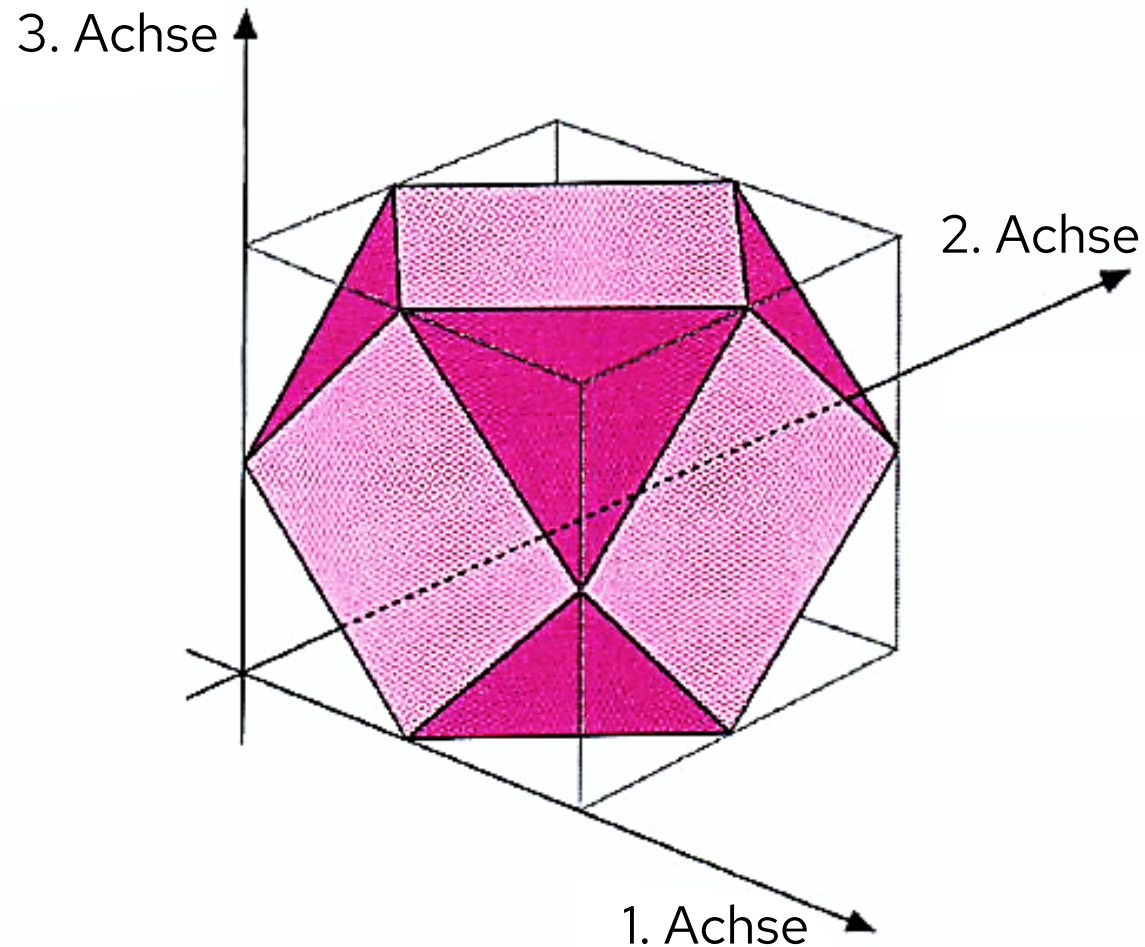
$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

- Mit den Werten von  $\vec{n}_a$  und  $\vec{n}_b$  der vorherigen Folie folgt:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n}_a \times \vec{n}_b|}{|\vec{n}_a| \cdot |\vec{n}_b|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Daraus folgt:  $\varphi = \angle(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = 60^\circ$

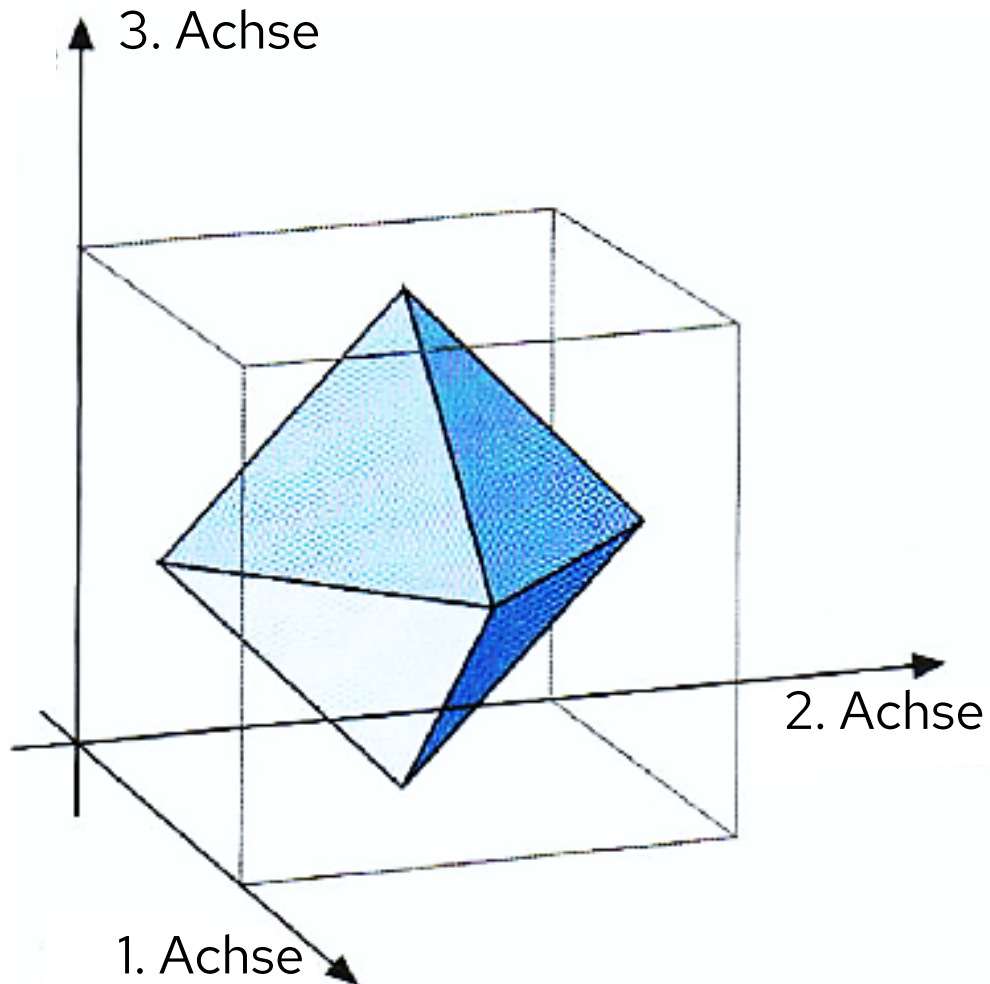




## Kuboktaeder

Die Mittelpunkte der zwölf Würfelkanten sind die Eckpunkte des Kuboktaeders, eines Körpers, der von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.





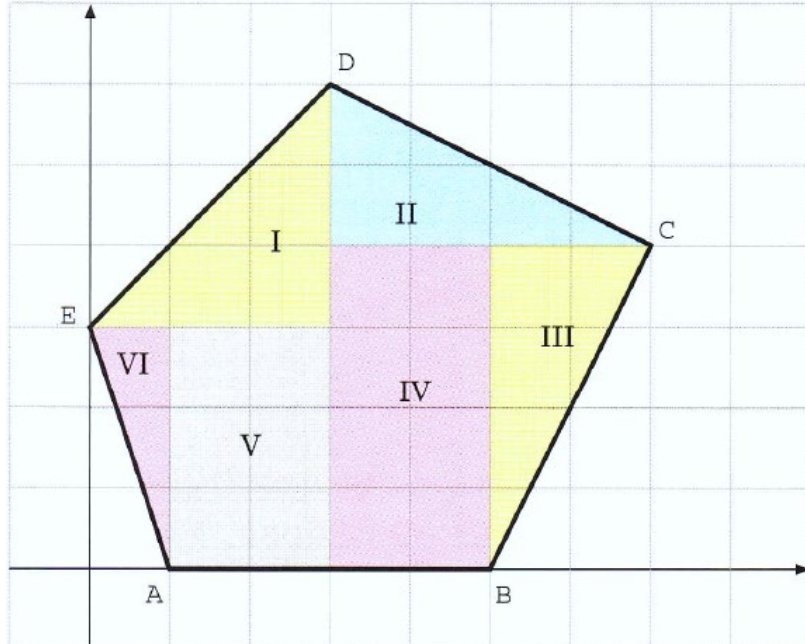
## Oktaeder

Die Mittelpunkte der sechs Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte des Oktaeders, einer von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzten Doppelpyramide.

**Aufgabe:** Es soll der Flächeninhalt eines Fünfecks  $ABCDE$  bestimmt werden, von dem wir die Koordinaten der Eckpunkte kennen (Rasterquadrate haben die Seitenlänge 1.). Führe beide Lösungsansätze weiter aus.

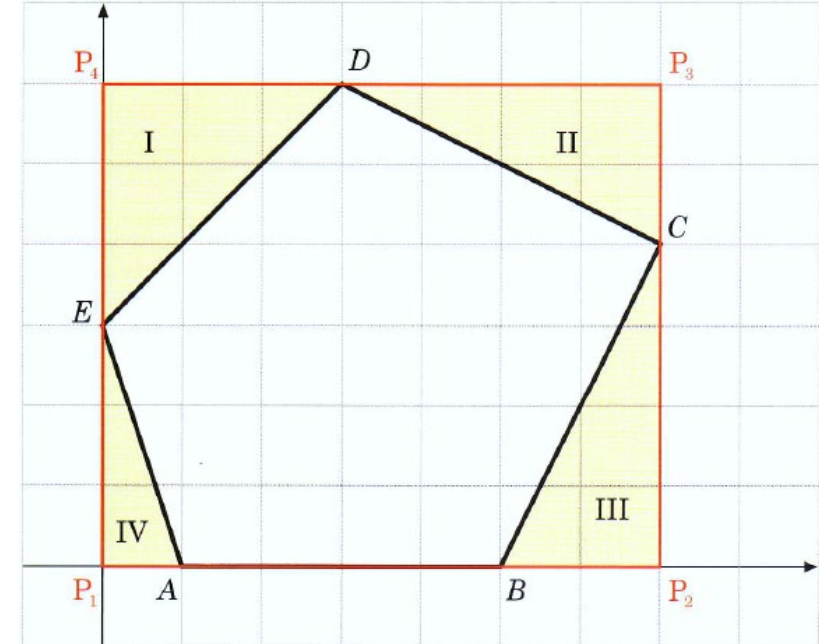
## Sandras Lösungsvorschlag

$$A_{\text{Fünfeck}} = A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} + A_V + A_{VI}$$

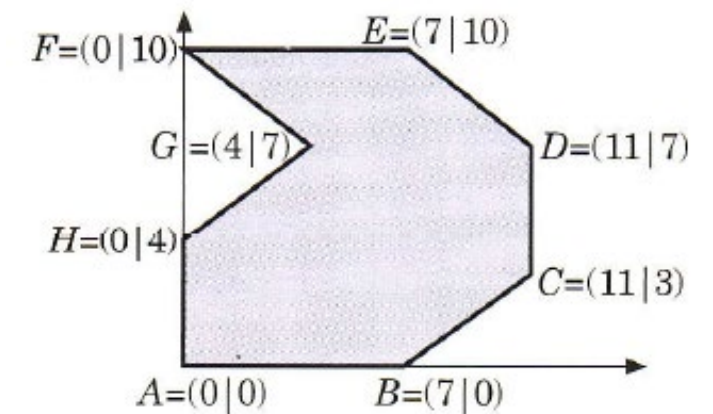
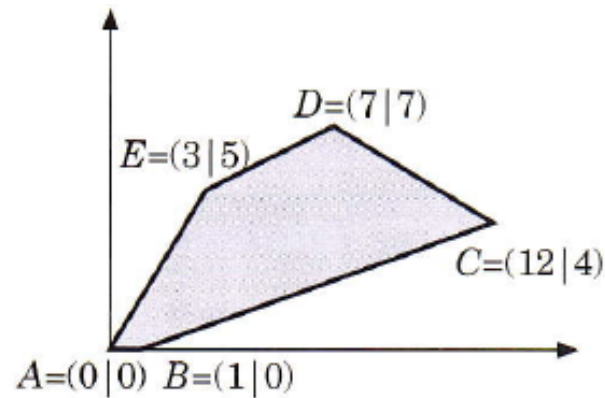
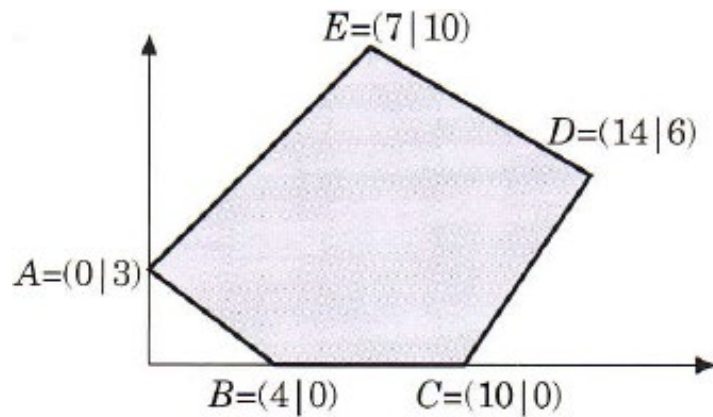


## Olivers Lösungsvorschlag

$$A_{\text{Fünfeck}} = A_{P_1P_2P_3P_4} - (A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV})$$

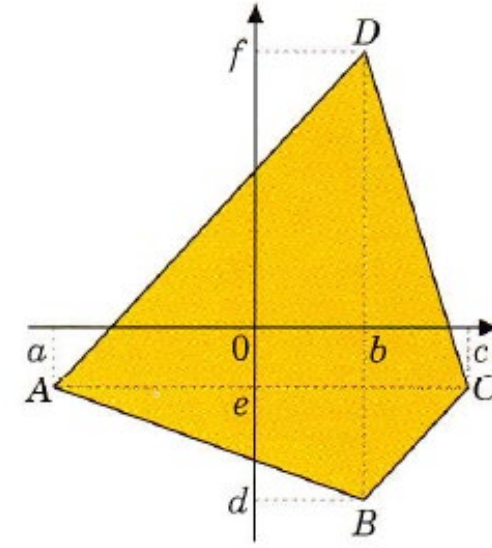
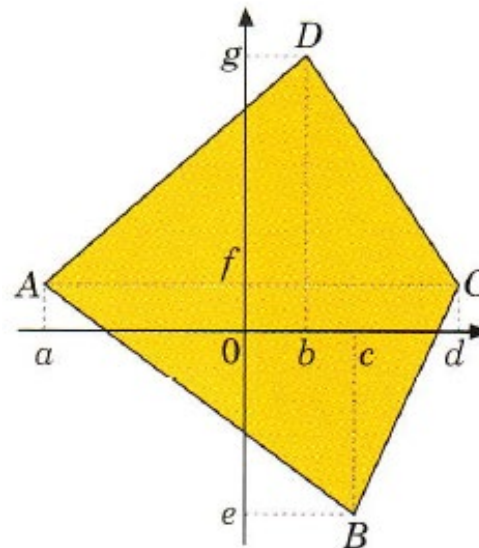
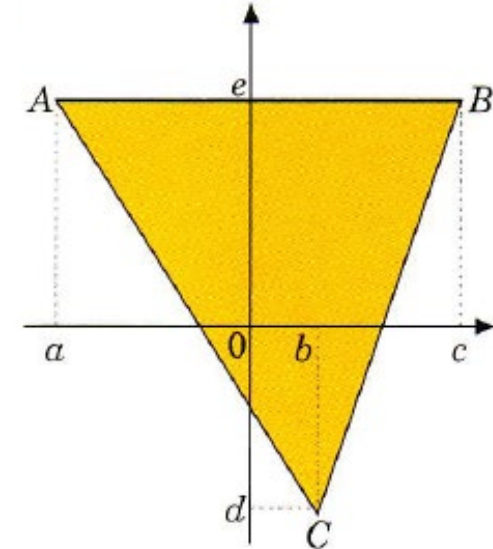
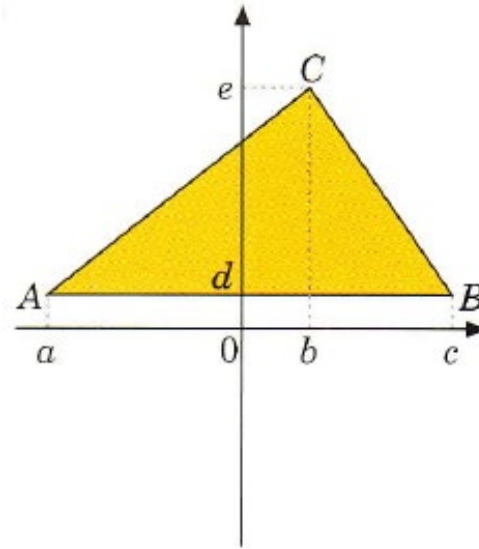


**Aufgabe:** Berechne die Flächeninhalte der Vierecke.



## Aufgabe:

Drücke die Koordinaten der Eckpunkte und die Flächeninhalte der Figuren mit den gegebenen Variablen aus.





# 3

## Skalarprodukt

R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

## Kapitel 3:

MaTeGnu

# Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

- 3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU ↪
- 3.2 Skalarprodukt und Messen ↪
- 3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt ↪
- 3.4 Geometrische Deutung des Skalarprodukts ↪
- 3.5 Produktive Übungen und systematische Variation ↪
- 3.6 Geometrische Eigenschaften des Skalarprodukts ↪
- 3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff ↪



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU



R

TU  
P Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

## Kapitel 3: **MaTeGnu** Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

### 3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU

### 3.2 Skalarprodukt und Messen

### 3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt

### 3.4 Geometrische Deutung des Skalarprodukts

### 3.5 Produktive Übungen und systematische Variation

### 3.6 Geometrische Eigenschaften des Skalarprodukts

### 3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

**RPTU**

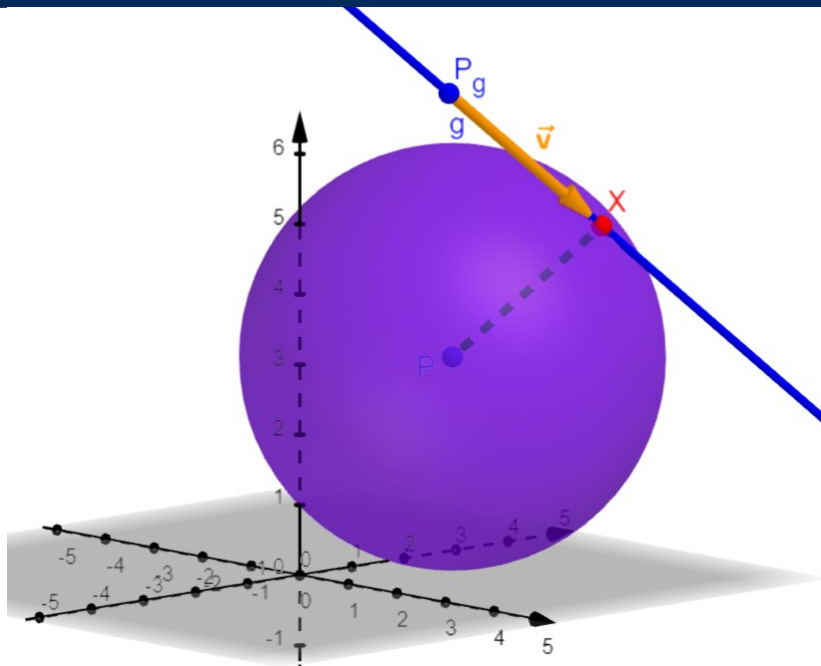




## Skalarprodukt: Weitere Struktur in einem Vektorraum

Um in einem Vektorraum Längen und Winkel messen zu können, muss eine weitere Struktur, das Skalarprodukt, hinzugefügt werden.

⇒ Euklidischer Vektorraum



## Anwendungen des Skalarprodukts

- Abstandsbestimmung
  - Punkt  $\leftrightarrow$  Gerade, Ebene  $\leftrightarrow$  Gerade
  - parallele Geraden (z. B. zur Flächenberechnung)
  - Windschiefe Geraden
- Berechnung von Schnittwinkeln
  - Gerade  $\leftrightarrow$  Gerade
  - Ebene  $\leftrightarrow$  Ebene
  - Gerade  $\leftrightarrow$  Ebene
- Prüfen auf Orthogonalität
  - Gerade  $\leftrightarrow$  Gerade
  - Ebene  $\leftrightarrow$  Ebene
  - Gerade  $\leftrightarrow$  Ebene
- Bestimmung
  - Normalenvektor einer Ebene
  - Normalengleichung einer Ebene

R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

## Kapitel 3:

MaTeGnu

# Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU

## 3.2 Skalarprodukt und Messen

3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt

3.4 Geometrische Deutung des Skalarprodukts

3.5 Produktive Übungen und  
systematische Variation

3.6 Geometrische Eigenschaften  
des Skalarprodukts

3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff



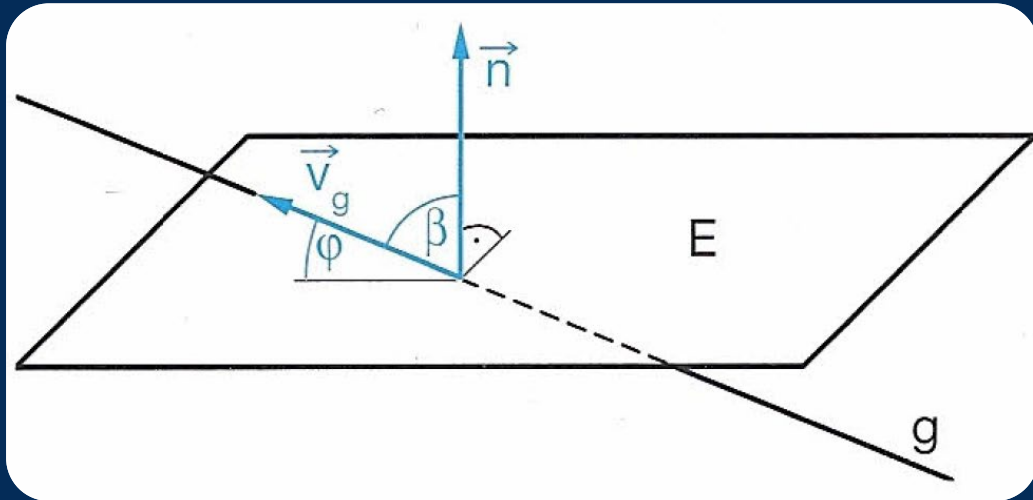
GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

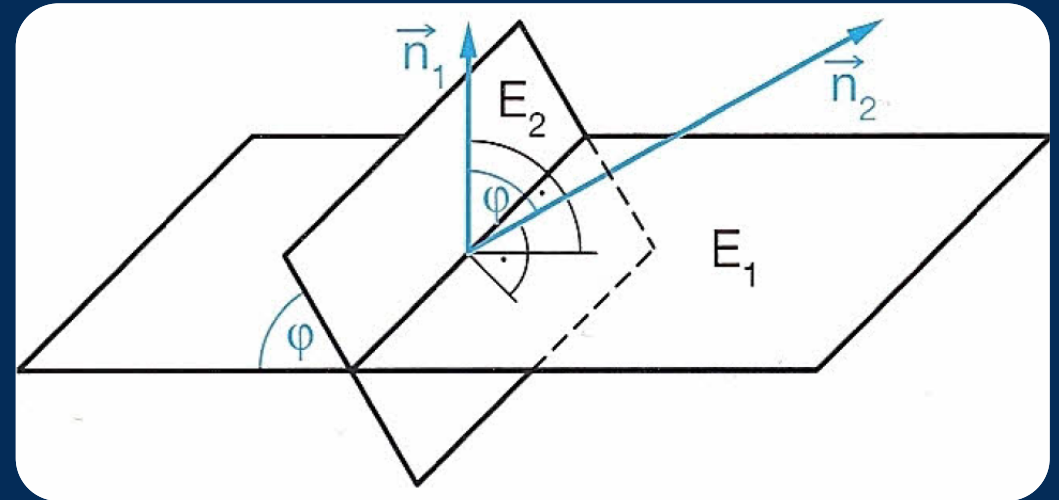
## Winkel zwischen Gerade und Ebene

Der Winkel  $\varphi$  zwischen einer Ebene  $E$  und einer Gerade  $g$  ist der Ergänzungswinkel zum Winkel  $\beta$  zwischen dem Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene und dem Richtungsvektor  $\vec{v}_g$  der Gerade:  $\varphi = 90^\circ - \beta$



## Winkel zwischen Ebenen

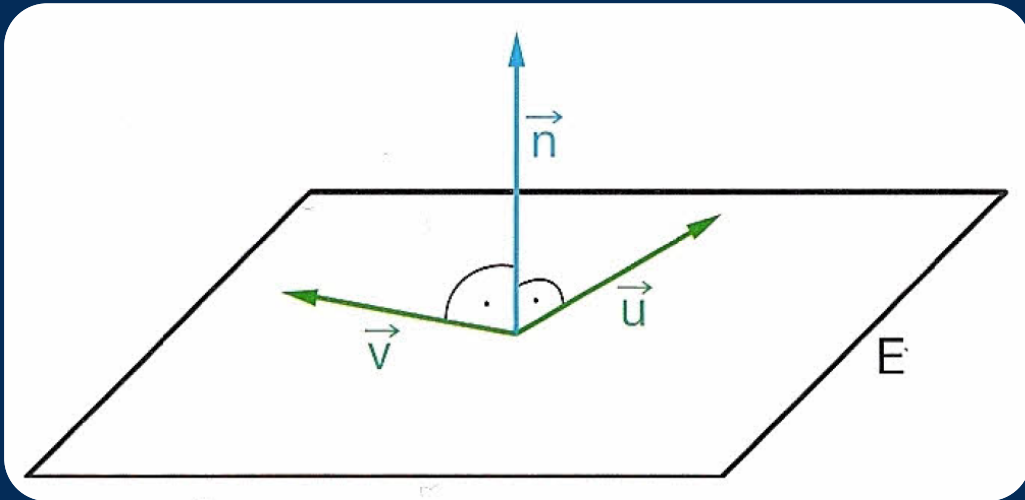
Der Winkel  $\varphi$  zwischen zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  der Ebenen.



## Normalenvektor einer Ebene

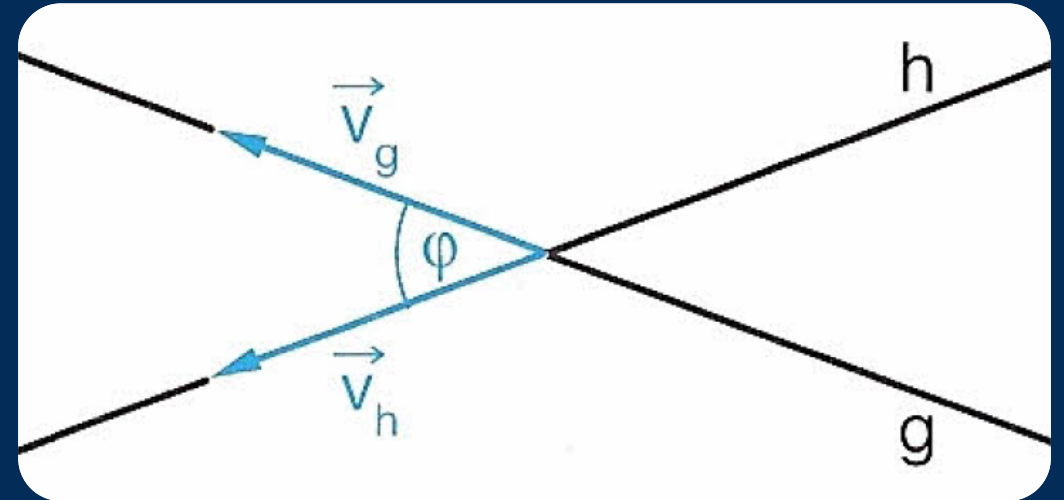
Ein Vektor  $\vec{n}$ , der orthogonal zu beiden Richtungsvektoren der Ebene ist, heißt **Normalenvektor der Ebene**.

Es gilt:  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$



## Winkel zwischen Geraden

Der Winkel  $\varphi$  zwischen zwei Geraden  $g$  und  $h$  ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren  $\vec{v}_g$  und  $\vec{v}_h$  der Geraden.





## Abstand Punkt $P \leftrightarrow$ Punkt $Q$

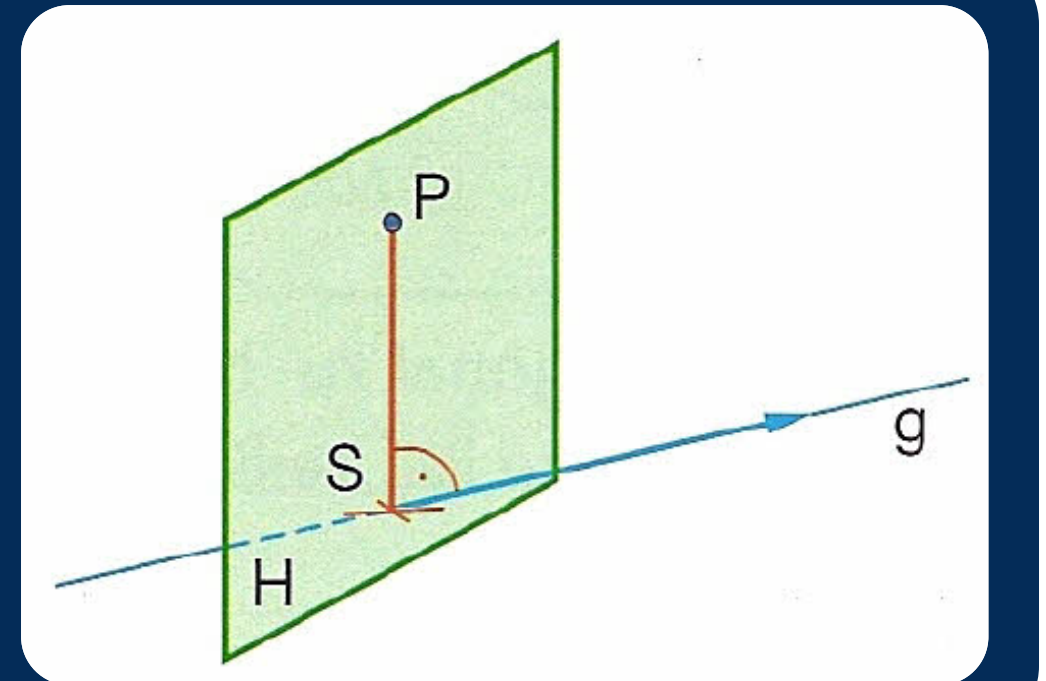
$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

## Abstand Punkt $P \leftrightarrow$ Gerade $g$

- (1) Hilfsebene  $H$  bestimmen, die senkrecht zu  $g$  ist und  $P$  enthält.
- (2) Schnittpunkt  $S$  von  $g$  und  $H$  bestimmen.
- (3) Abstand der Punkte  $P$  und  $S$  bestimmen.

### Spezialfall: Abstand paralleler Geraden

$P$  ist ein beliebiger Punkt einer der Geraden. Der Abstand von  $P$  zur anderen Geraden ist der gesuchte Abstand.

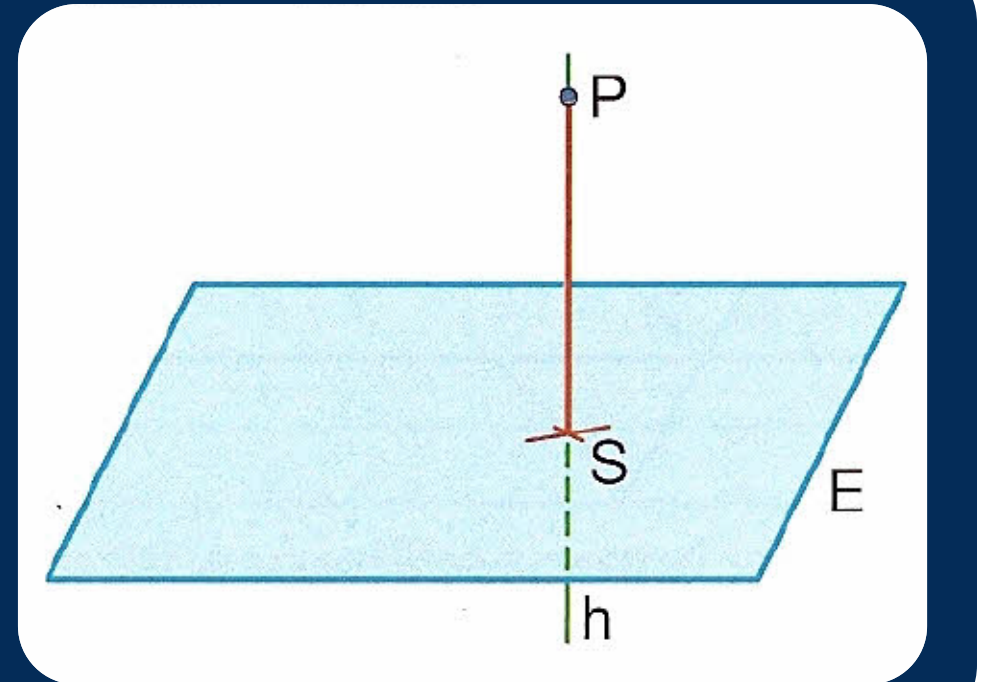


## Abstand Punkt $P \leftrightarrow$ Ebene $E$

- (1) Hilfsgerade  $h$  bestimmen, die senkrecht zu  $E$  ist und  $P$  enthält.
- (2) Schnittpunkt  $S$  von  $h$  und  $E$  bestimmen.
- (3) Abstand der Punkte  $P$  und  $S$  bestimmen.

## Spezialfall: Abstand paralleler Ebenen

$P$  ist ein beliebiger Punkt einer der Ebenen.  
Der Abstand von  $P$  zur anderen Ebene ist der gesuchte Abstand.



## Normalenform einer Ebenengleichung

Wenn  $P$  ein Punkt der Ebene  $E$  ist und  $\vec{n}$  ein Normalenvektor von  $E$ , dann ist

$$E: (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

eine Normalenform der Ebenengleichung.

## Spezialfall: Hesse'sche Normalenform

Wenn  $P$  ein Punkt der Ebene  $E$  ist und  $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$  ein normierter Normalenvektor von  $E$ , dann ist

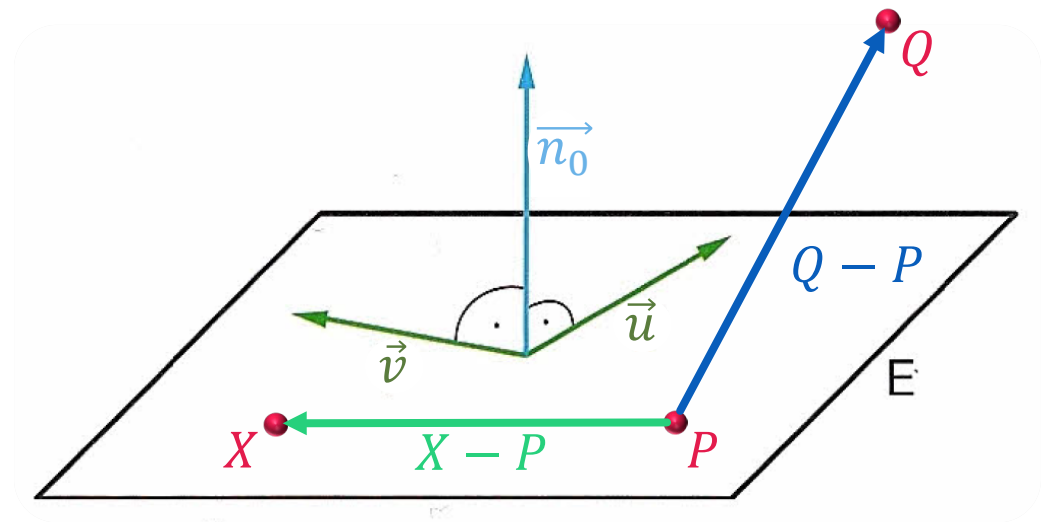
$$E: (X - P) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

eine Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung.

## Anwendung der Hesse'schen Normalenform

Berechnung des Abstands  $d(Q, E)$  eines Punktes  $Q$  zur Ebene  $E$ :

$$d(Q, E) = |\vec{n}_0 \cdot (Q - P)|$$



## Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann orthogonal zueinander ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ), wenn gilt  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

In Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

## Länge eines Vektors

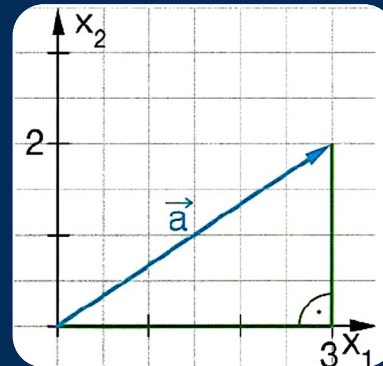
Für die Länge  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a}$  gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiele:

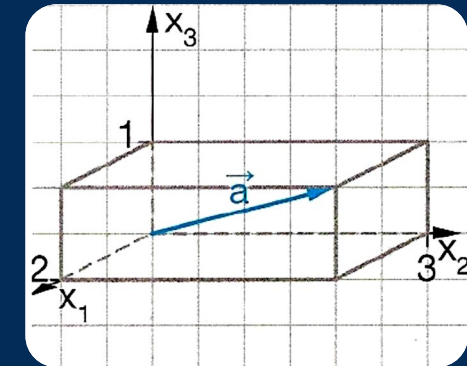
In der Ebene

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



Im Raum

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$





R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

## Kapitel 3: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

MaTeGnu

- 3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU
- 3.2 Skalarprodukt und Messen
- 3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt**
- 3.4 Geometrische Deutung des Skalarprodukts
- 3.5 Produktive Übungen und systematische Variation
- 3.6 Geometrische Eigenschaften des Skalarprodukts
- 3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

# Arithmetischer Zugang

## Beispiel Modelleisenbahnbau

Artikel	Stückzahl im Basissortiment	Stückzahl im Ergänzungssortiment 1	Stückzahl im Ergänzungssortiment 2	Preis pro Stück
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	8	15	2,40 €
Gleisstück gebogen (45°)	8	4	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	0	1	6,29 €
Weiche links	0	1	2	17,98 €
Weiche rechts	0	1	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	2	4	12,98 €



Anschluss-Gleisstück



Gleisstück (gerade)



Gleisstück (gebogen)



Weichenantrieb



Weiche (rechts)



Weiche (links)

# Arithmetischer Zugang

## Beispiel Modelleisenbahnbau

Artikel	Stückzahl im Basissortiment	Stückzahl im Ergänzungssortiment 1	Stückzahl im Ergänzungssortiment 2	Preis pro Stück
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	8	15	2,40 €
Gleisstück gebogen (45°)	8	4	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	0	1	6,29 €
Weiche links	0	1	2	17,98 €
Weiche rechts	0	1	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	2	4	12,98 €

### Teilevektor

Stückliste  
Ergän-  
zungs-  
sorti-  
ment 2:

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

### Preisvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2,40 \\ 2,70 \\ 6,29 \\ 17,98 \\ 17,98 \\ 12,98 \end{pmatrix}$$

### Gesamtpreis eines Sortiments

Summe der Produkte einander  
entsprechender Komponenten  
des Teile- und des Preisvektors

$$15 \cdot 2,40 + 8 \cdot 2,70 + 1 \cdot 6,29 + 2 \cdot 17,98 + 2 \cdot 17,98 + 4 \cdot 12,98 = 187,73 \text{ (in €)}$$

### Skalarprodukt

Die Produktsumme,  
die den Gesamtpreis  
ergibt, nennen wir  
Skalarprodukt der  
Vektoren  $\vec{e}_2$  und  $\vec{p}$ .



# Arithmetischer Zugang

## Definition Skalarprodukt

### Definition: Skalarprodukt

Als Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

wird die Summe der Produkte einander entsprechender Komponenten von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  bezeichnet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i$$





# Arithmetischer Zugang

## Definition Skalarprodukt

### Bemerkungen

- Der Name **Skalarprodukt** kommt daher, dass zwei Vektoren ein Skalar, d. h. eine reelle Zahl zugeordnet wird.
- Beim Rechnen mit Vektoren treten damit nun drei Arten von Produkten auf, für die jeweils das Zeichen „ $\cdot$ “ verwendet wird:
  - das Produkt zweier reeller Zahlen,
  - das Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl,
  - das Skalarprodukt zweier Vektoren.
- Was das Zeichen „ $\cdot$ “ jeweils bedeutet, ergibt sich aus der Art von Objekten (Vektoren oder reelle Zahlen), zwischen denen es steht.



R

TU Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

P

## Kapitel 3: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

MaTeGnu

- 3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU
- 3.2 Skalarprodukt und Messen
- 3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt
- 3.4 Geometrische Deutung  
des Skalarprodukts**
- 3.5 Produktive Übungen und  
systematische Variation
- 3.6 Geometrische Eigenschaften  
des Skalarprodukts
- 3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

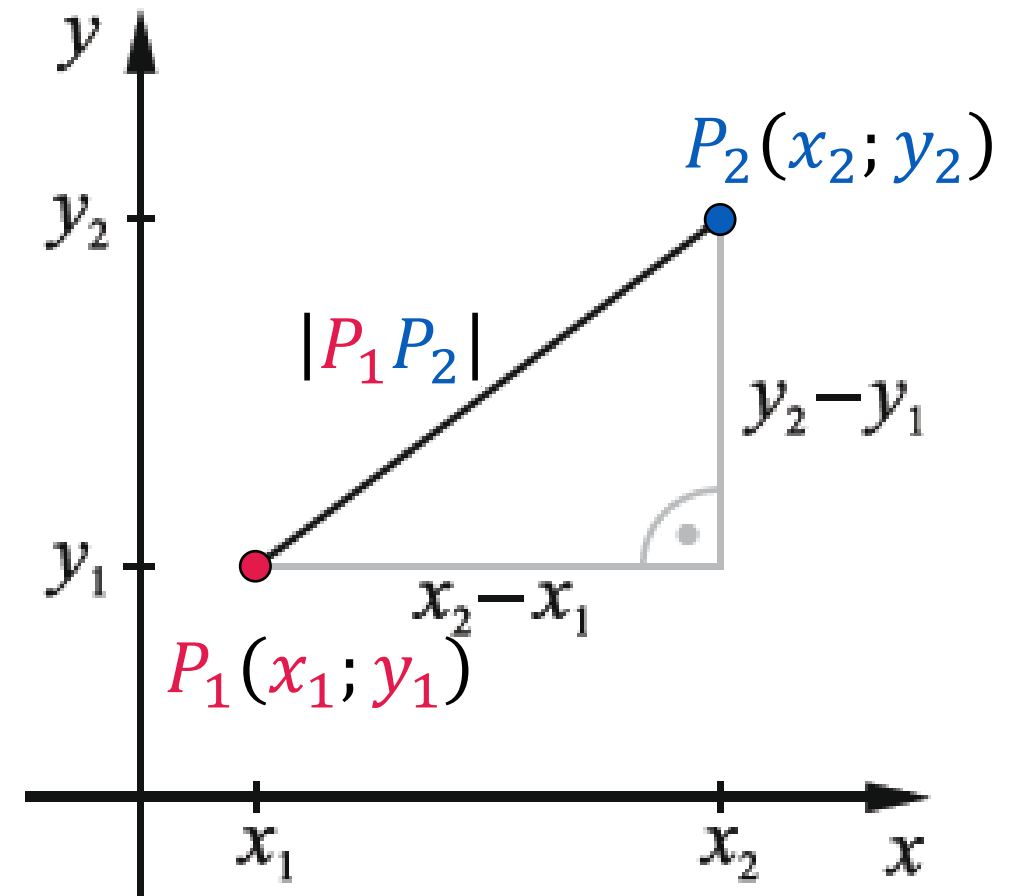
[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

## Abstand zweier Punkte der Ebene

Für den Abstand zweier Punkte  $P_1(x_1; y_1)$  und  $P_2(x_2; y_2)$  der Ebene ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

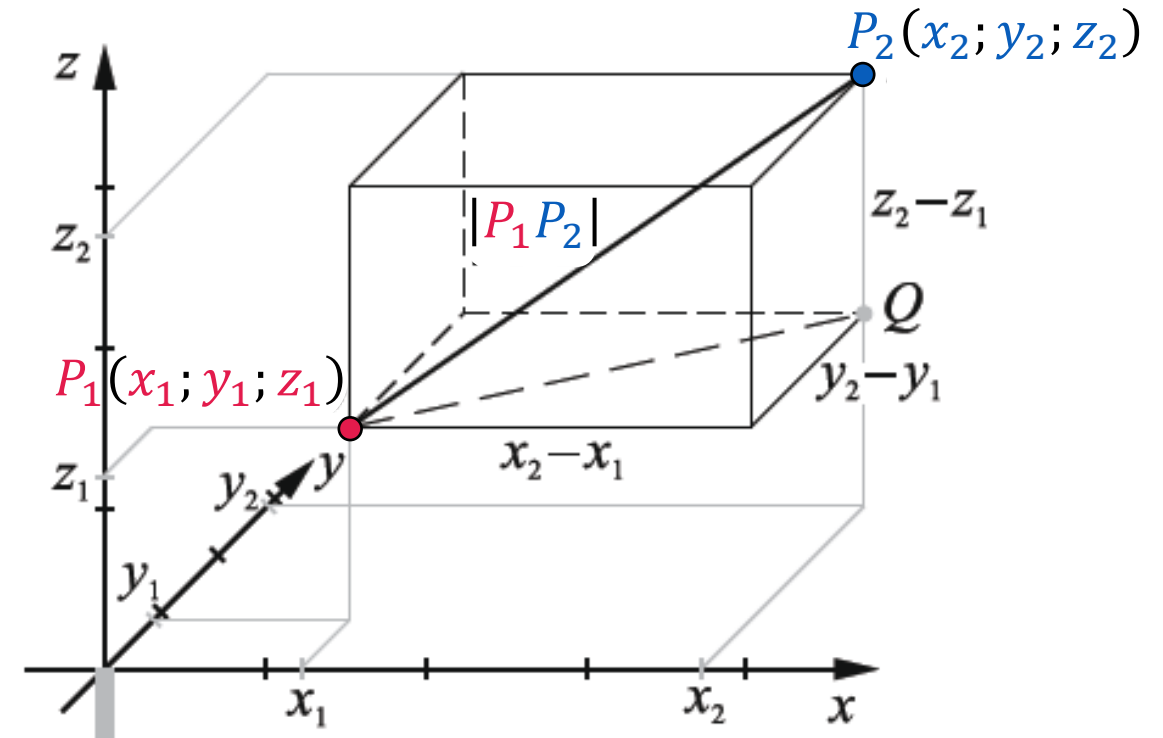
$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



## Abstand zweier Punkte des Raums

Für den Abstand zweier Punkte  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  und  $P_2(x_2; y_2; z_2)$  des Raums ergibt sich (zweimaliges Anwenden des Satzes des Pythagoras):

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

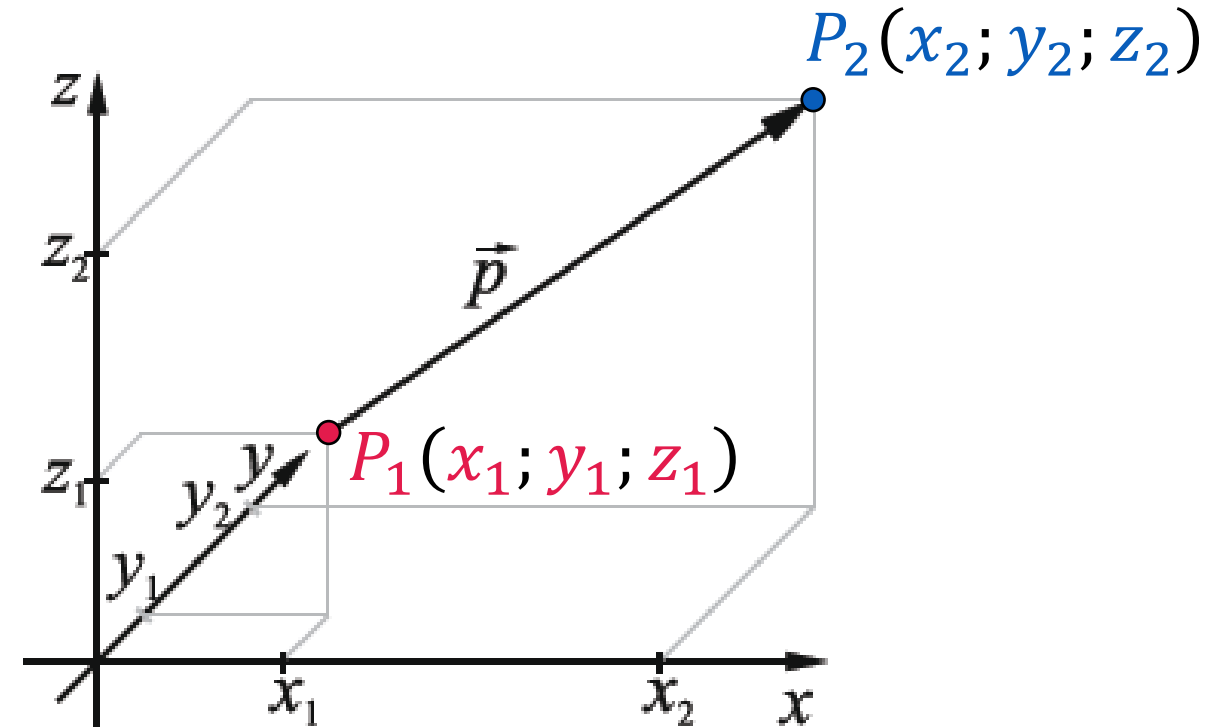




## Darstellung von Vektoren

- Der Abstand zweier Punkte  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  und  $P_2(x_2; y_2; z_2)$  des Raums entspricht der Länge des Pfeils  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .
- Wird ein Vektor  $\vec{p}$  durch den Pfeil  $\overrightarrow{P_1P_2}$  repräsentiert, dann kann man diesen Vektor auch so darstellen:

$$\vec{p} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$



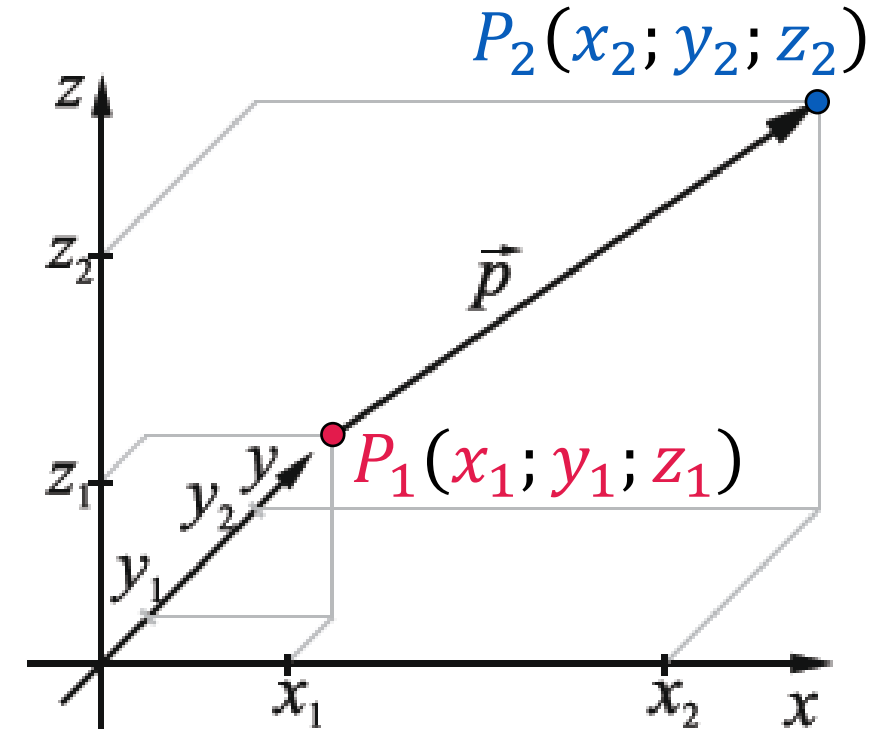
## Betrag (Länge) eines Vektors

Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors

$$\vec{p} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

mit sich selbst, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p} &= x_p \cdot x_p + y_p \cdot y_p + z_p \cdot z_p \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= \left( \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \right)^2 = |\overrightarrow{P_1 P_2}|^2 \end{aligned}$$



## Definition: Betrag eines Vektors

Als Betrag  $|\vec{v}|$  eines Vektors  $\vec{v}$  bezeichnet man die Wurzel aus dem Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst:  $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$

R

TU  
P Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

## Kapitel 3: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

MaTeGnu

- 3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU
- 3.2 Skalarprodukt und Messen
- 3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt
- 3.4 Geometrische Deutung des Skalarprodukts
- 3.5 Produktive Übungen und systematische Variation**
- 3.6 Geometrische Eigenschaften des Skalarprodukts
- 3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

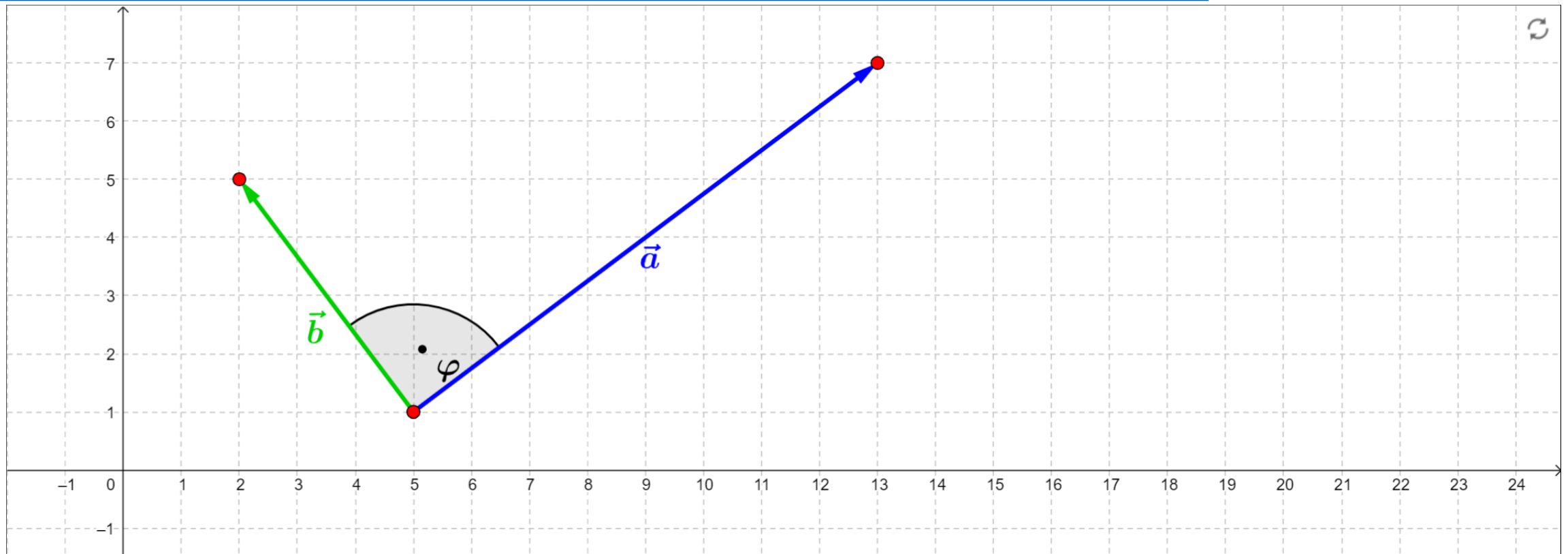


GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

# Skalarprodukt erkunden



## Erkundungsaufträge

- Was fällt auf?
- Was passiert, wenn die Vektoren parallel zueinander sind?
- Wann ist das Skalarprodukt positiv, wann negativ?
- Wie kann man einen der beiden Vektoren ändern, ohne dass sich das Skalarprodukt ändert?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 10$$

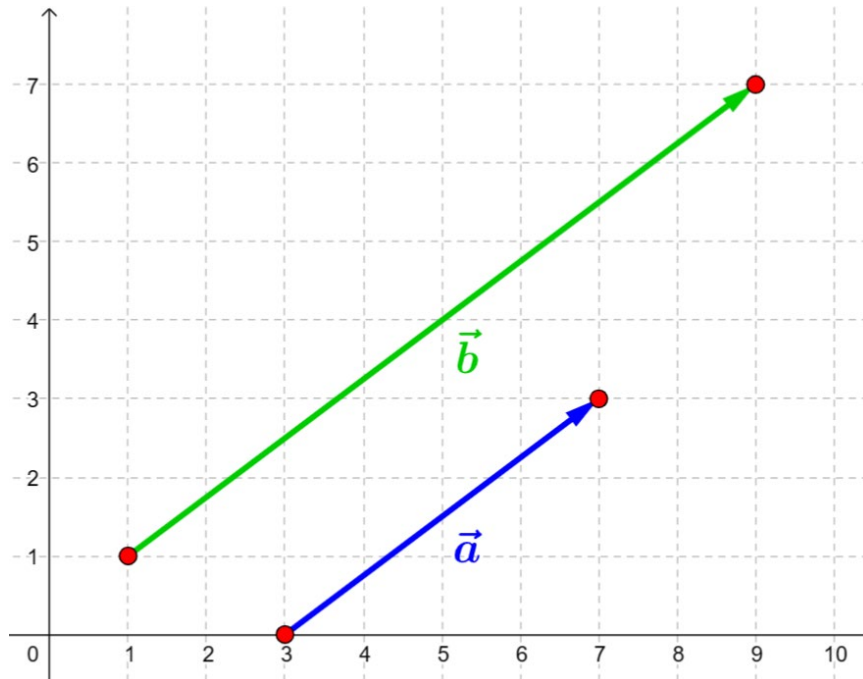
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 5$$

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



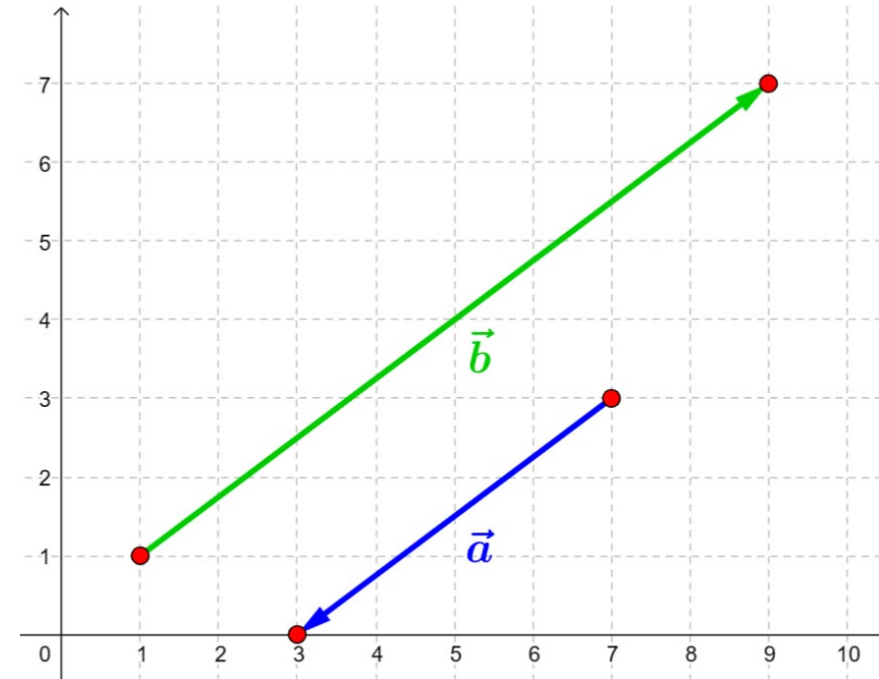
**Aufgabe:** Was passiert, wenn die beiden Vektoren parallel zueinander sind?



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 50$$

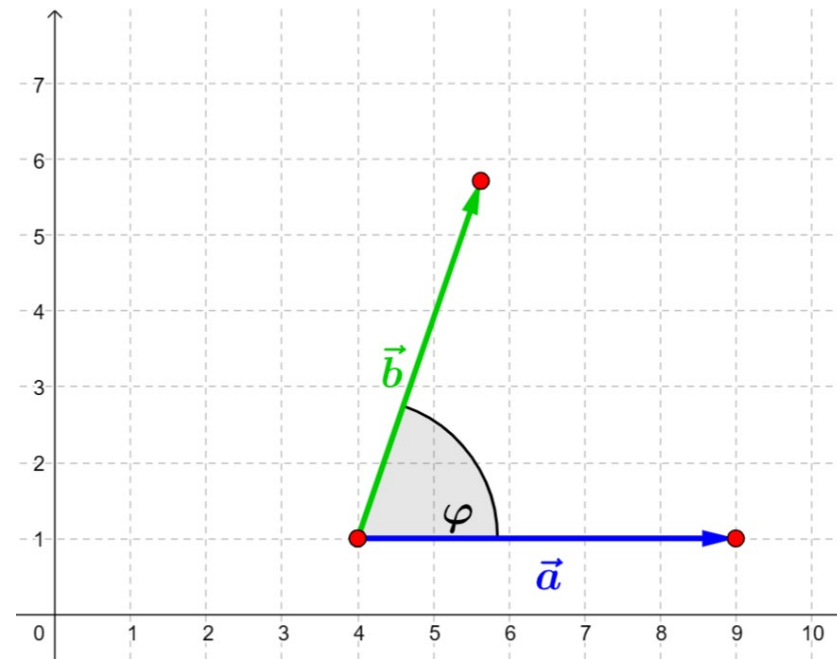


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 10$$

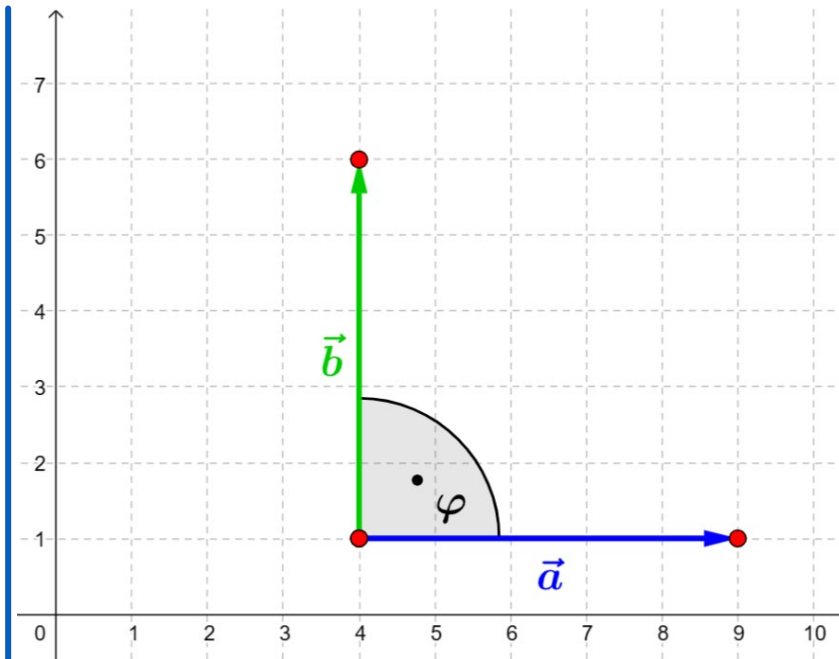
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -50$$

**Aufgabe:** Wann ist das Skalarprodukt positiv, wann ist es negativ?



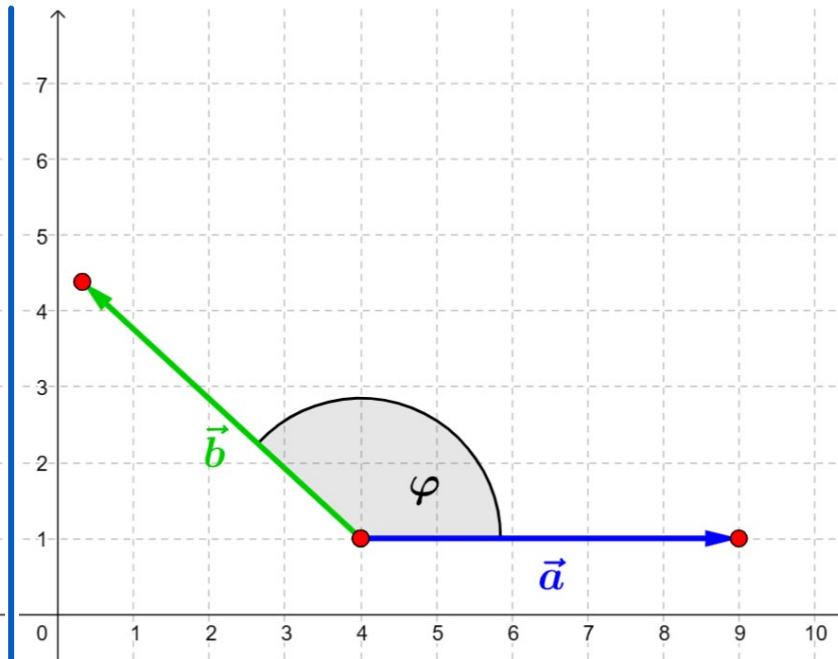
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5 \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 71^\circ$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4.7 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 5 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 8.1$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5 \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 5 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



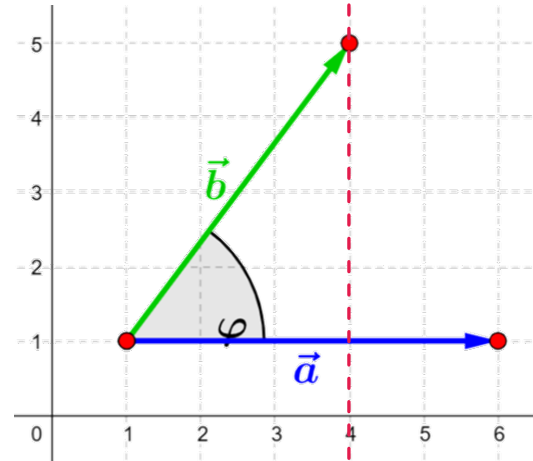
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5 \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 137.4^\circ$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3.7 \\ 3.4 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 5 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -18.4$$

# Skalarprodukt erkunden

## Aufgabe

Wie kann man einen der beiden Vektoren ändern, ohne dass sich das Skalarprodukt ändert?

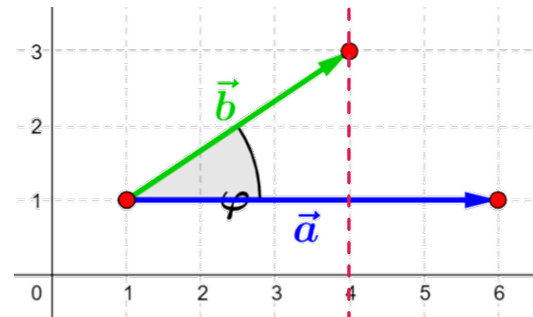


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 5$$

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 53.1^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$$

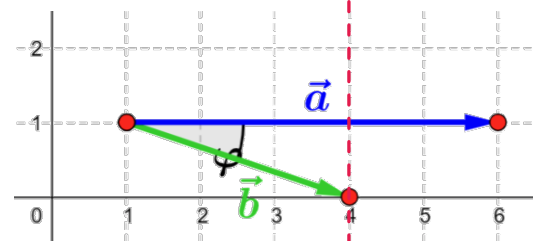


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 3.6$$

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 33.7^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 5$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = 3.2$$

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 18.4^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$$

# Produktive Übungen: Systematische Variation nutzen

## Aufgabe

- a) Zeichne zunächst jeweils die beiden Vektoren des Produktes in ein Koordinatenkreuz. Bearbeite mithilfe eines CAS die Aufgaben.
- b) Man nennt diese multiplikative Verknüpfung Skalarprodukt. Beschreibe deine Beobachtungen über die Funktionsweise des Skalarprodukts vor dem Hintergrund deiner Ergebnisse und der jeweiligen Vektoren.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

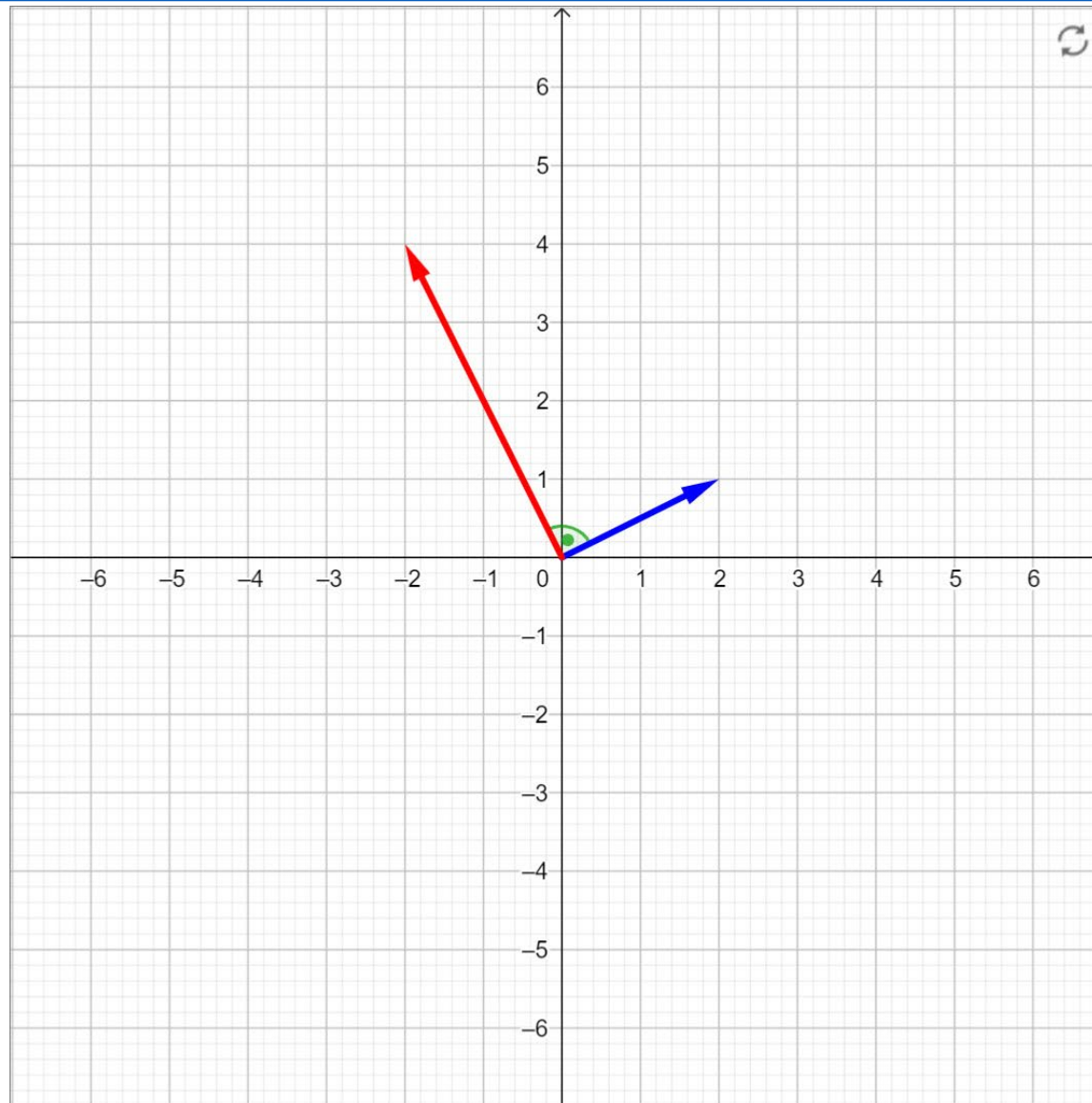
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$



# Produktive Übungen: Systematische Variation nutzen

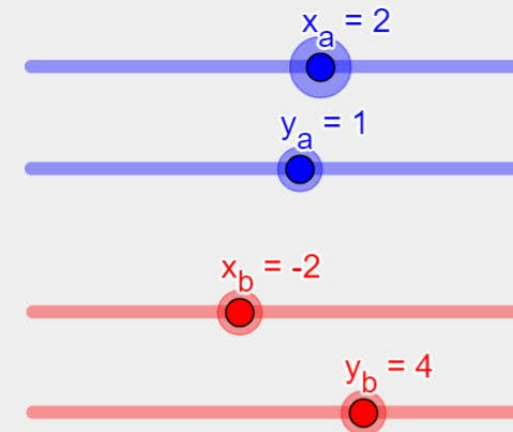


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

☒ Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



# Produktive Übungen: Systematische Variation nutzen

## Aufgabe

- a) Finde zunächst jeweils die Vektoren in der Abbildung und berechne dann die angegebenen Skalarprodukte.
- b) Beschreibe deine Beobachtungen und formuliere Hypothesen zur Funktionsweise des Skalarprodukts vor dem Hintergrund der Ergebnisse und der jeweils zugrunde liegenden Vektoren.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

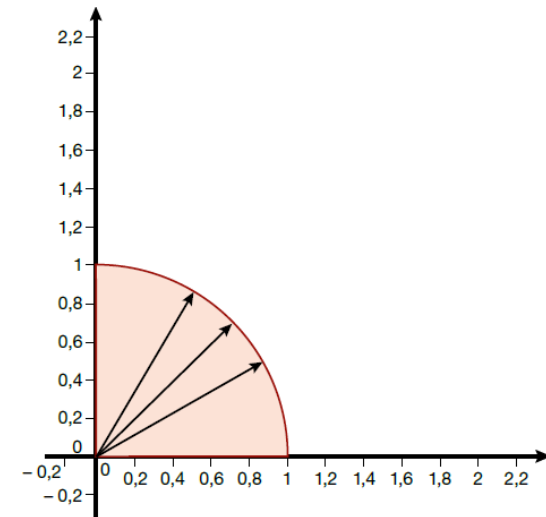
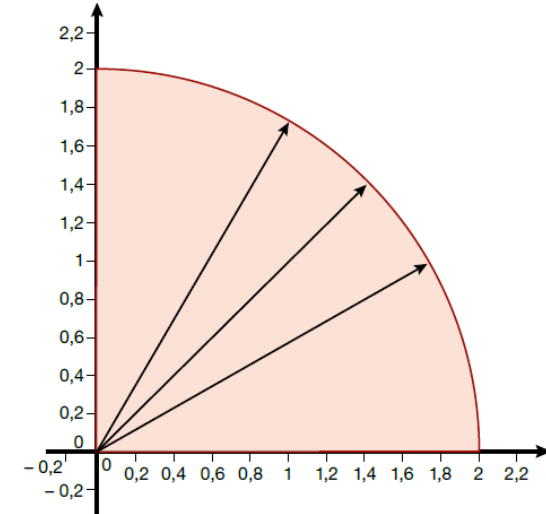
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

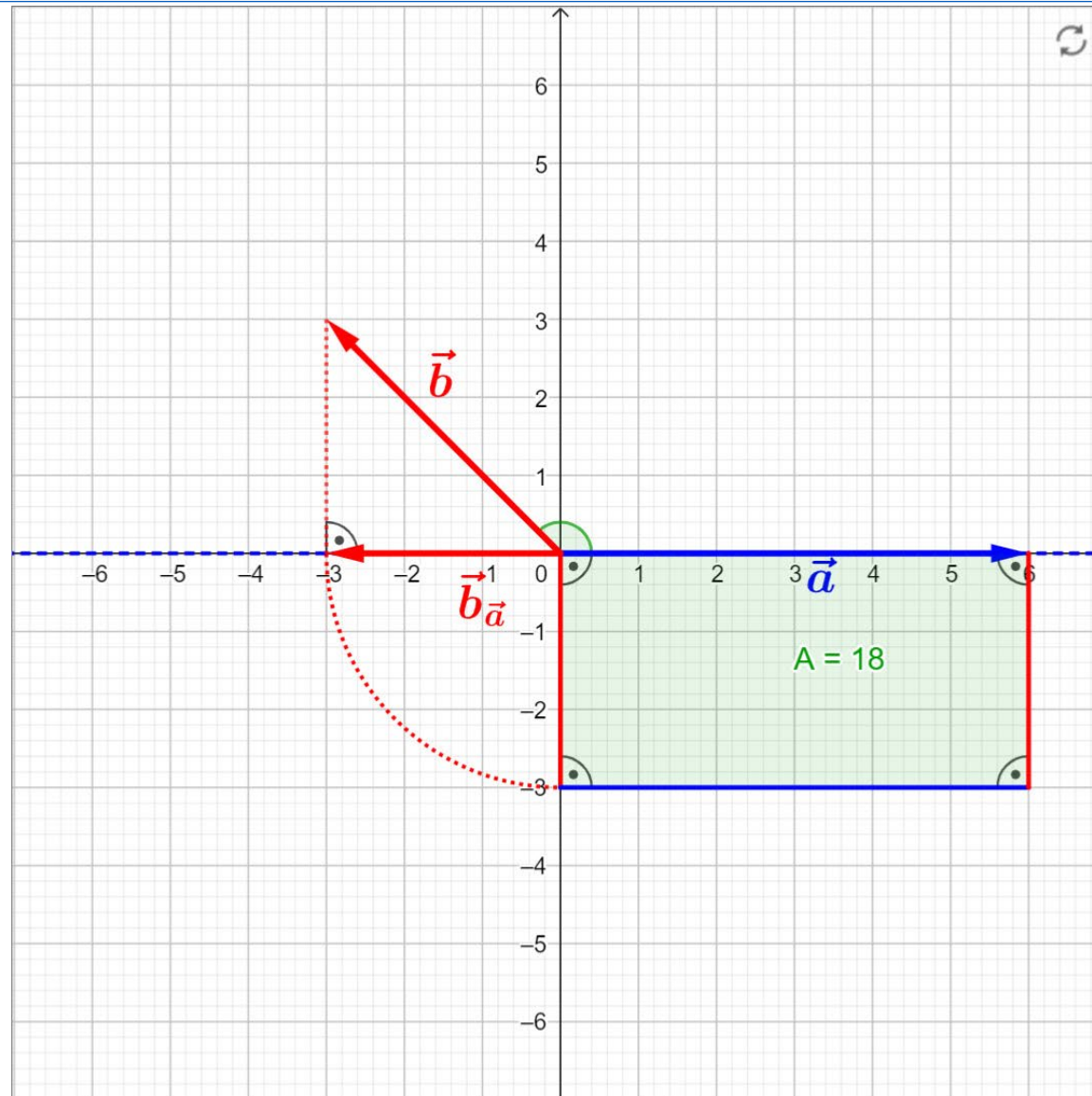
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$



# Produktive Übungen: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts



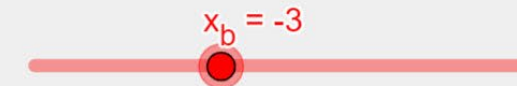
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$$

☒ Skalarprodukt ☐  $\vec{b}_{\vec{a}}$

☒ geometrische Interpretation





R

TU  
P Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau



## Kapitel 3: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

MaTeGnu

- 3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU
- 3.2 Skalarprodukt und Messen
- 3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt
- 3.4 Geometrische Deutung des Skalarprodukts
- 3.5 Produktive Übungen und systematische Variation
- 3.6 Geometrische Eigenschaften des Skalarprodukts**
- 3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

Selbst-  
studium



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU



## Satz: Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  sind genau dann orthogonal, wenn  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  gilt.

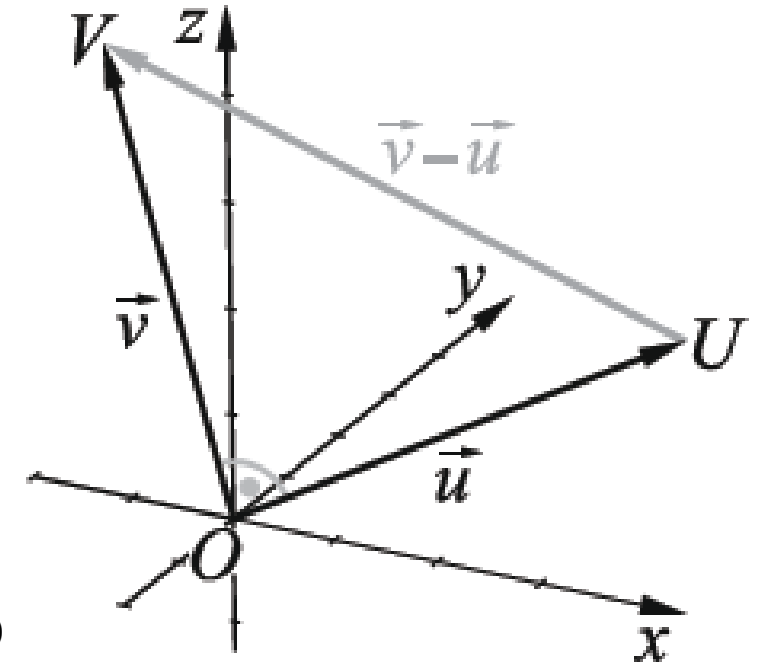
### Beweis

- Von zwei Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \text{ ist keiner der Nullvektor.}$$

(Wenn  $\vec{u} = \vec{0}$  oder  $\vec{v} = \vec{0}$ , dann folgt  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  direkt aus der Definition des Skalarprodukts.)

- Betrachte die Pfeile  $\overrightarrow{OU}$  und  $\overrightarrow{OV}$  die Repräsentanten von  $\vec{u}$  bzw.  $\vec{v}$  sind und deren Anfangspunkt der Koordinatenursprung  $O$  ist.
- Die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  sind genau dann orthogonal, wenn das Dreieck  $\Delta UVV$  bei  $O$  rechtwinklig ist.
- Nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung ist das genau dann der Fall, wenn  $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$  gilt.

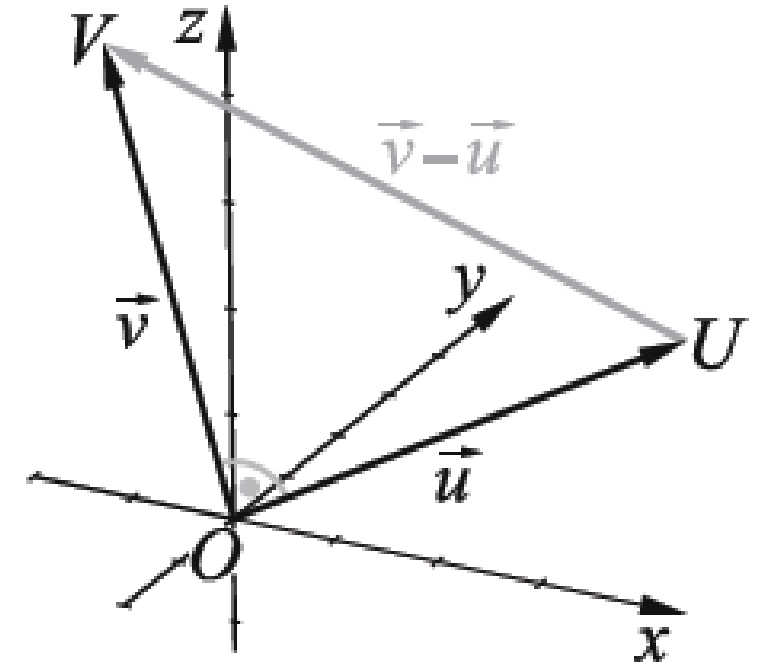


## Satz: Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  sind genau dann orthogonal, wenn  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  gilt.

### Beweis (Fortsetzung)

- Zu zeigen:  $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$
- $|OU|^2 = |\vec{u}|^2$
- $|OV|^2 = |\vec{v}|^2$
- $$\begin{aligned} |UV|^2 &= |\vec{v} - \vec{u}|^2 = (x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2 \\ &= x_v^2 - 2x_u x_v + x_u^2 + y_v^2 - 2y_u y_v + y_u^2 + z_v^2 - 2z_u z_v + z_u^2 \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - 2 \cdot (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = |OU|^2 + |OV|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$
- Damit gilt  $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$  genau dann, wenn  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Genau in diesem Fall sind die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  orthogonal. ■



## Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für beliebige Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gilt:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

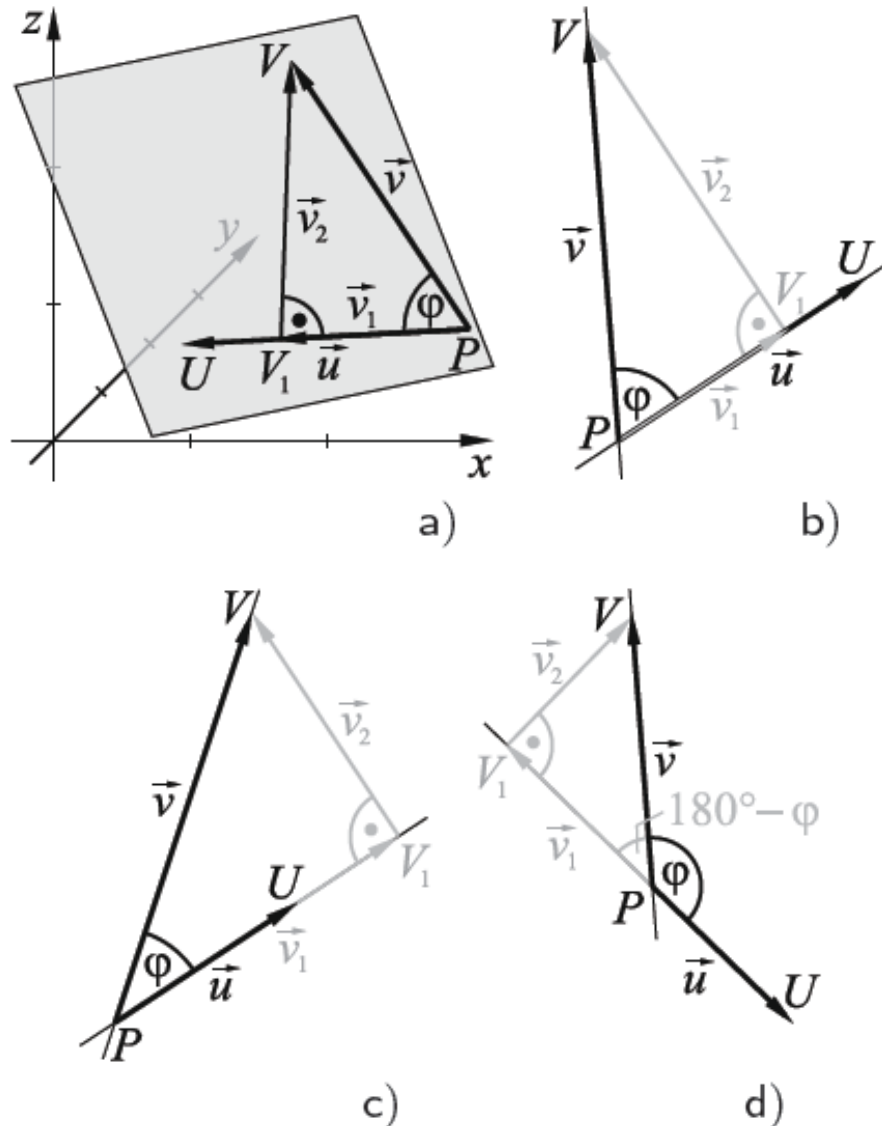
## Satz: Skalarprodukt kollinearer Vektoren

- Für zwei kollineare und gleichorientierte Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gilt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

- Für zwei kollineare und entgegengesetzt orientierte Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gilt:

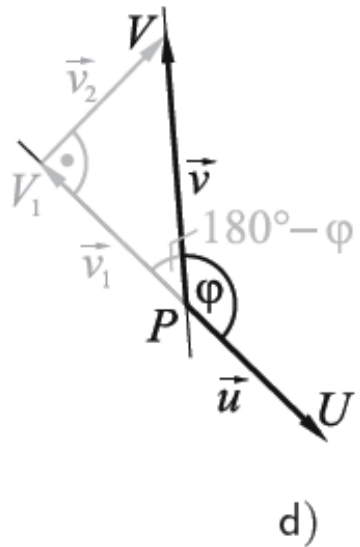
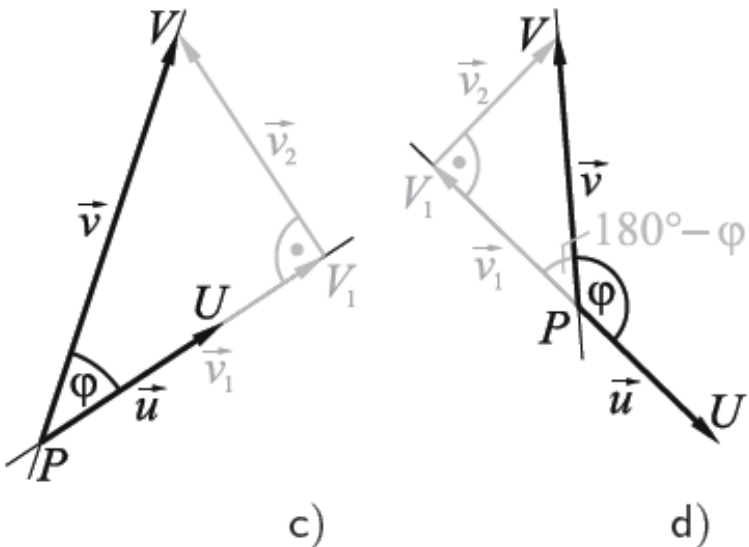
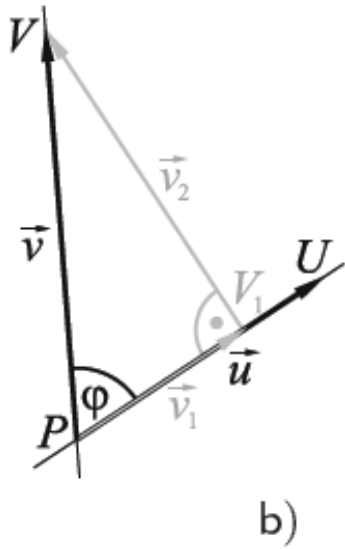
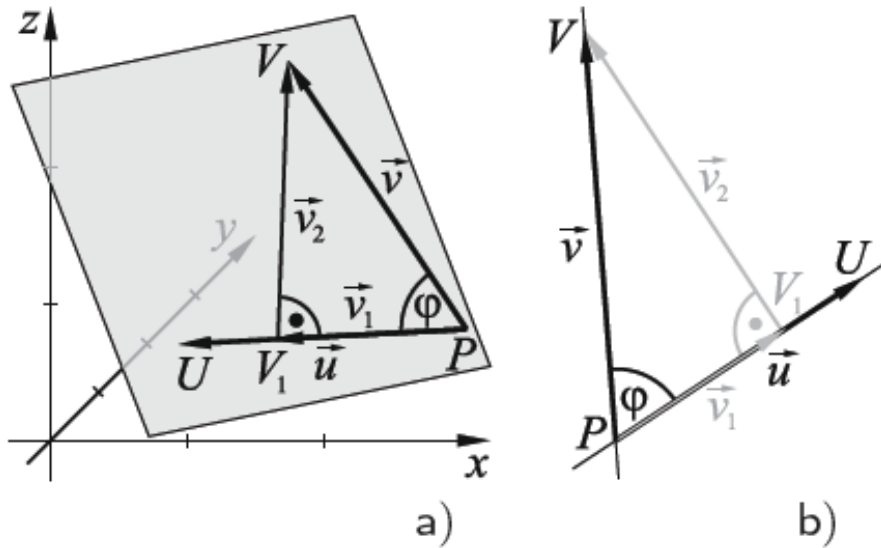
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$



## Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

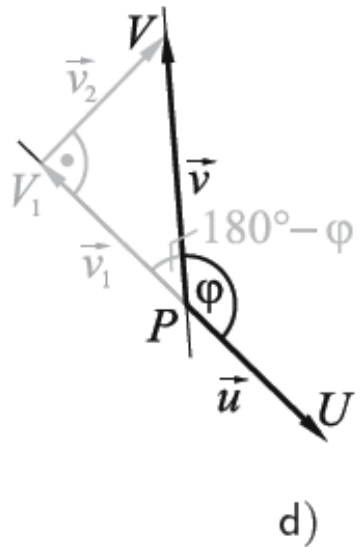
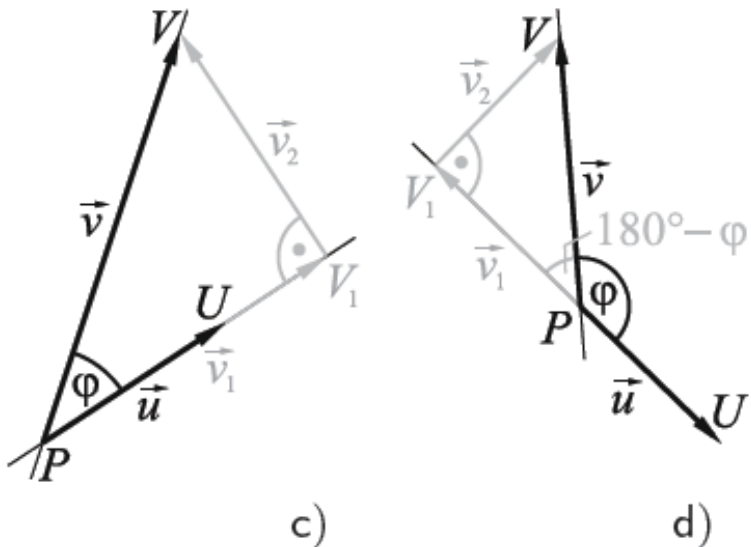
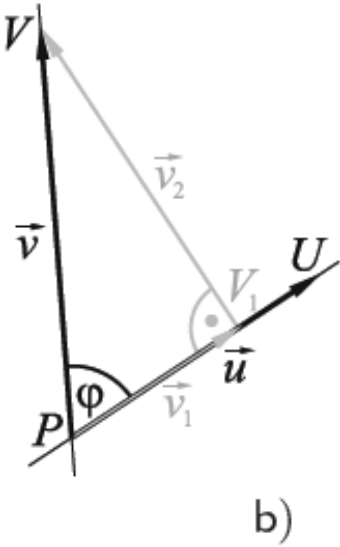
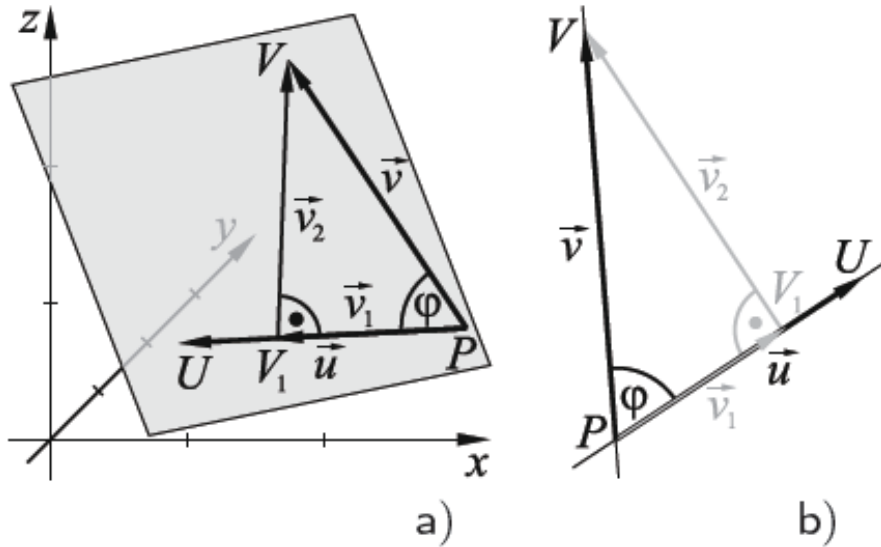
- Der Betrag des Skalarprodukts zweier Vektoren ist also
  - maximal, wenn die Vektoren kollinear und
  - minimal (nämlich Null), wenn die Vektoren orthogonal sind.
- Damit liegt nahe, dass das Skalarprodukt von den Beträgen und dem Zwischenwinkel der Vektoren abhängt.
- Der Winkel zwischen zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ist der Winkel zwischen zwei repräsentierenden Pfeilen  $\overrightarrow{PU}$  und  $\overrightarrow{PV}$  mit demselben Anfangspunkt  $P$ .





## Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

- Lot von  $V$  auf die Gerade  $UP$  fällen.  
 $V_1$  ist der Lotfußpunkt.  
 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  (vgl. Abbildungen)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_2}_{=0} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$  (#)  
wegen  $\vec{u} \perp \vec{v}_2$
- $\vec{u}$  und  $\vec{v}_1$  können abhängig vom Zwischenwinkel  $\varphi$  von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  (mit  $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$ )
  - gleich orientiert ( $\varphi < 90^\circ$ ) oder
  - entgegengesetzt orientiert ( $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ ) sein.



## Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

- Seien  $\vec{u}$  und  $\vec{v}_1$  gleichorientiert, dann gilt nach dem Satz über das Skalarprodukt gleichorientierter, kollinearer Vektoren:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \quad (*)$$

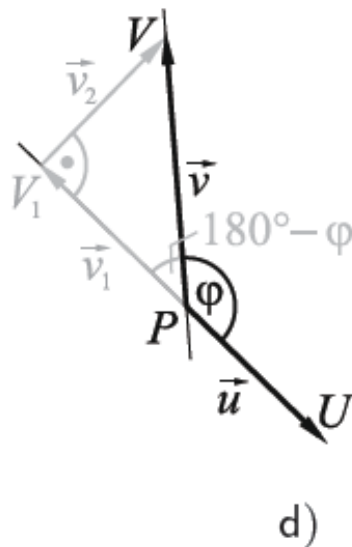
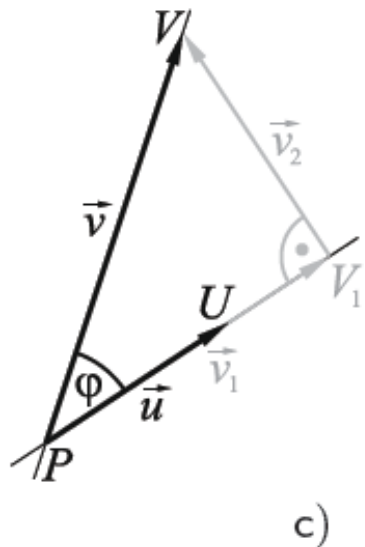
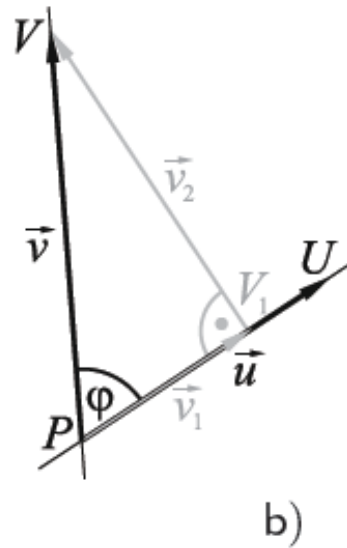
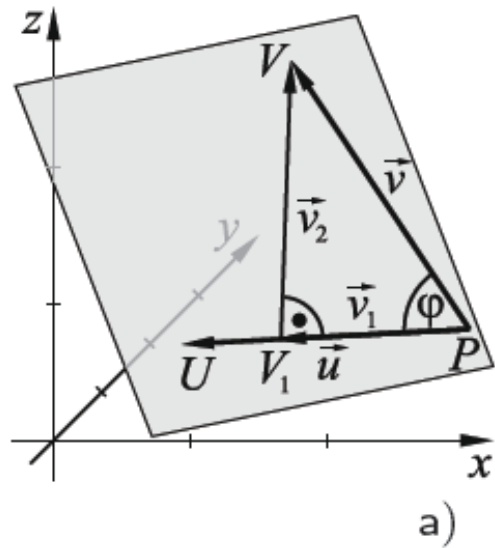
- Im rechtwinkligen Dreieck  $\Delta PV_1V$  gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}|} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{v}_1| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi) \quad (**)$$

- Damit folgt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{(\#)}{=} \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \stackrel{(*)}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \stackrel{(**)}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

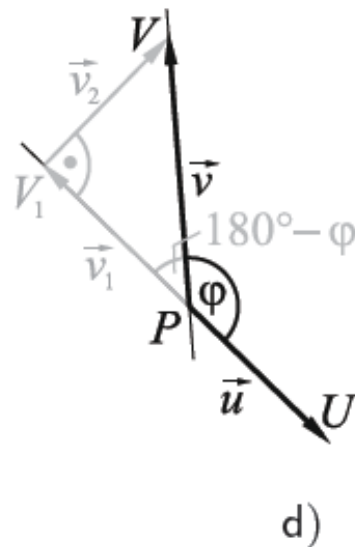
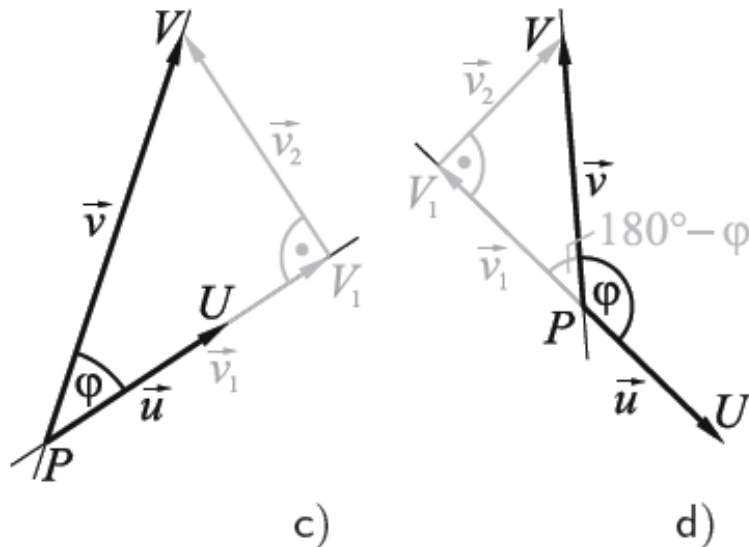
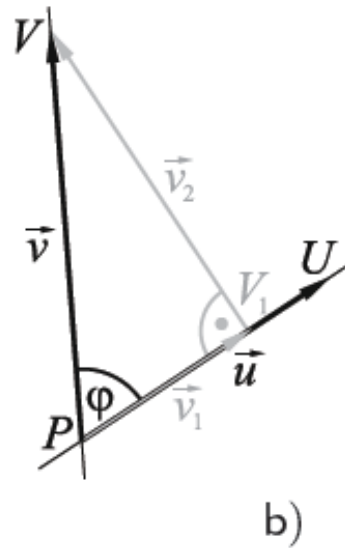
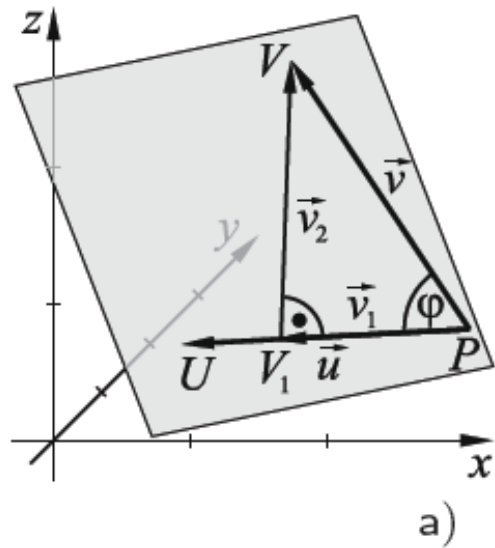
# Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften



## Satz

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ , ihre Beträge  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$  und den Winkel  $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v})$  gilt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$



## Winkel zwischen zwei Vektoren

Wenn  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$  zwei Vektoren des Raumes sind, dann ergibt sich:

$$\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}$$



## Aufgabe

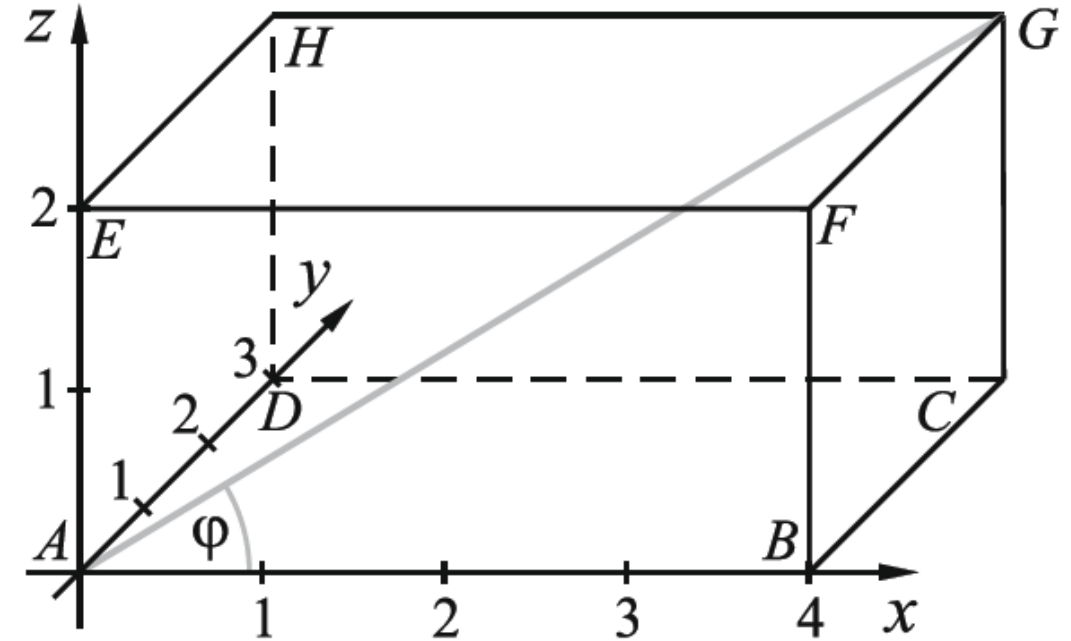
Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Seite  $[AB]$  und der Raumdiagonalen  $[AG]$  im Quader  $ABCDEFGH$ .

## Lösungshinweis

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\left(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}|} = \frac{4 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{16}{4 \cdot \sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) \approx 42^\circ$$



R

TU  
P Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau



GeoGebra-Buch „Didaktik  
der Linearen Algebra und  
Analytischen Geometrie“  
<https://roth.tel/anageo>

## Kapitel 2: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

MaTeGnu

- 3.1 Aspekte des Skalarprodukts im MU
- 3.2 Skalarprodukt und Messen
- 3.3 Arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt
- 3.4 Geometrische Deutung des Skalarprodukts
- 3.5 Produktive Übungen und systematische Variation
- 3.6 Geometrische Eigenschaften des Skalarprodukts
- 3.7 Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff**

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](https://dms.nuw.rptu.de/mategnu)

RPTU

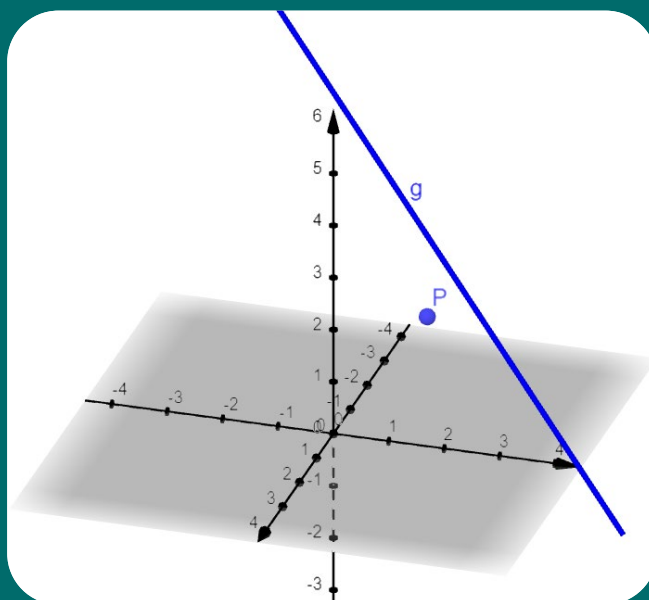
# Abstand Punkt $\leftrightarrow$ Gerade Strategie gesucht

## Ausgangssituation

Gegeben sind ein Punkt  $P$  und eine Gerade  $g$  in einem räumlichen Koordinatensystem.

## Problem

Wie kann man vorgehen, um den Abstand des Punktes  $P$  zur Geraden  $g$  zu bestimmen?



## Aufgaben

- a) Sammeln Sie möglichst viele verschiedene Lösungsideen zur Abstandsbestimmung. 

**Hinweis:** Welche geometrischen Objekte (z. B. Punkt, Vektor, Gerade, Ebene, Dreieck, Viereck, Kugel) können dabei helfen?

- b) Entwickeln Sie für eine Idee ein konkretes Vorgehen und beschreiben Sie dieses mit allen notwendigen Schritten.
- c) Berechnen Sie mit diesem Vorgehen den Abstand des Punktes  $P(1|2|3)$  zur Geraden  $g$ .

$$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## Idee: Normalenvektor



- Die Ebene, die  $P$  und  $g$  enthält, hat einen Normalenvektor.
- Ein Verbindungsvektor von  $P$  zu  $g$ , soll senkrecht zum Normalenvektor und zu  $g$  sein!
- Das Skalarprodukt kann helfen!

## Idee: Senkrechte Verbindung



- Wähle einen allgemeinen Punkt  $Q$  auf  $g$ ! Er hängt noch von  $t$  ab.
- Der Verbindungsvektor  $\overrightarrow{PQ}$  soll senkrecht zu  $g$  sein!
- Das Skalarprodukt kann helfen!

## Idee: Hilfsebene



- Finde die Ebene, die  $P$  enthält und senkrecht zu  $g$  verläuft!
- In dieser Ebene kann ein weiterer Punkt bei der Abstandsbestimmung helfen!

## Idee: Berührkugel



- Finde eine Kugel mit Mittelpunkt  $P$ , die  $g$  berührt.
- Der Radius  $r$  dieser Kugel muss so gewählt werden, dass es nur einen Schnittpunkt mit  $g$  gibt.
- Wissen über quadratische Gleichungen kann helfen!

## Idee: Kürzeste Verbindung



- Wähle einen allgemeinen Punkt  $Q$  auf  $g$ ! Er hängt noch von  $t$  ab.
- Der Verbindungsvektor  $\overrightarrow{PQ}$  soll möglichst kurz sein!
- Eine quadratische Funktion kann helfen!

## Idee: Geradenschar



- Es gibt eine Schar von unendlich vielen Geraden durch  $P$ , die senkrecht zum Richtungsvektor von  $g$  verlaufen.
- Diejenige Gerade der Schar, die  $g$  schneidet, kann bei der Abstandsbestimmung helfen!



## Idee: Orthogonalisierung



- Ein Verbindungsvektor  $\vec{v}$  von  $P$  zu  $g$  kann in einem zu  $g$  parallelen und einen zu  $g$  orthogonalen Anteil zerlegt werden:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

- Ist  $\vec{u}$  ein Richtungsvektor von  $g$ , so gilt:

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

- Der Vektor  $\vec{v}_{\perp}$  kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

## Idee: Höhe im Parallelogramm



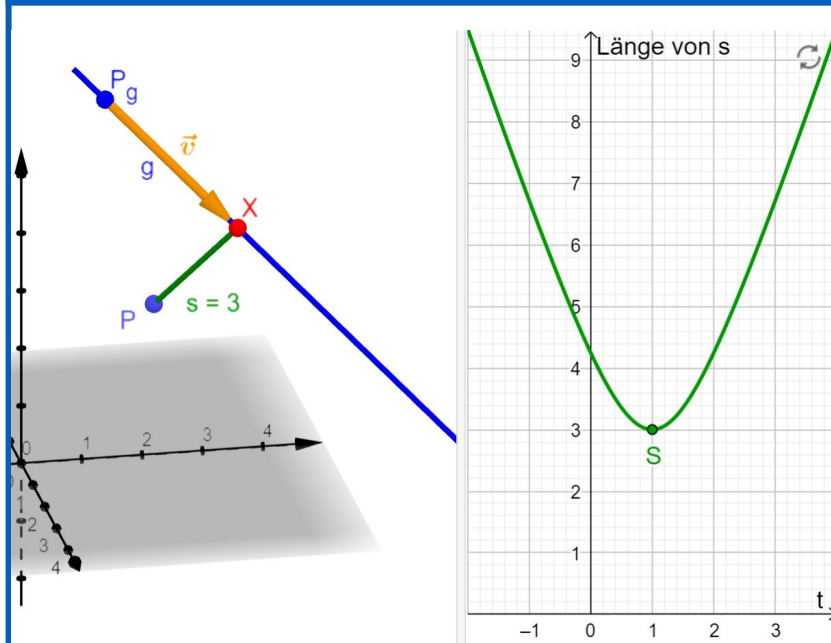
- Ein Verbindungsvektor von  $P$  zu  $g$  spannt mit einem Richtungsvektor von  $g$  ein Parallelogramm auf.
- Hat man den Flächeninhalt und eine Seitenlänge, so kann man die Höhe im Parallelogramm bestimmen!
- Das Vektorprodukt kann helfen!

## Idee: Kugelschnittpunkte



- Finde eine Kugel mit Mittelpunkt  $P$ , die von  $g$  in zwei Punkten  $A$  und  $B$  getroffen wird!
- Der Mittelpunkt der Punkte  $A$  und  $B$  kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

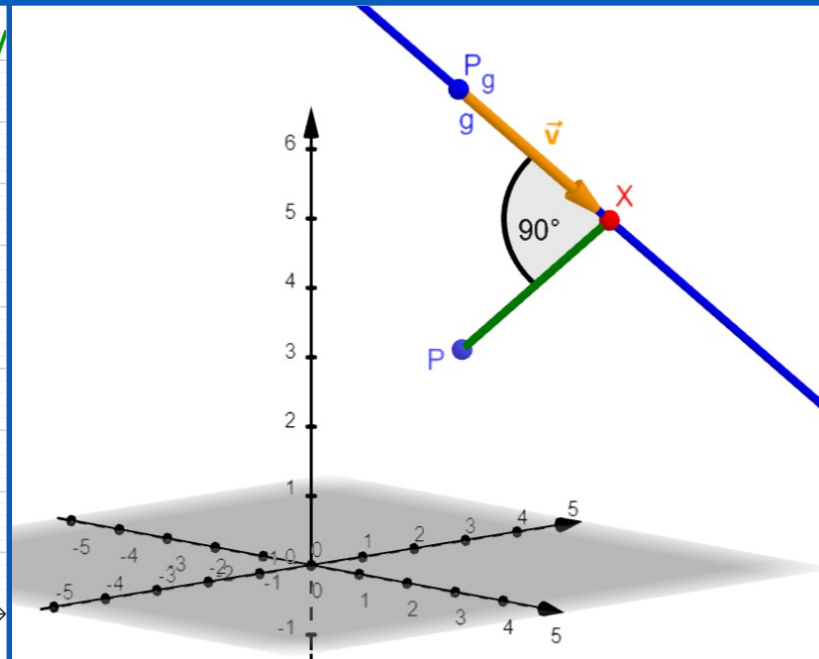
## Abstand als kürzeste Verbindung



<https://www.geogebra.org/m/r2tjbnrj>



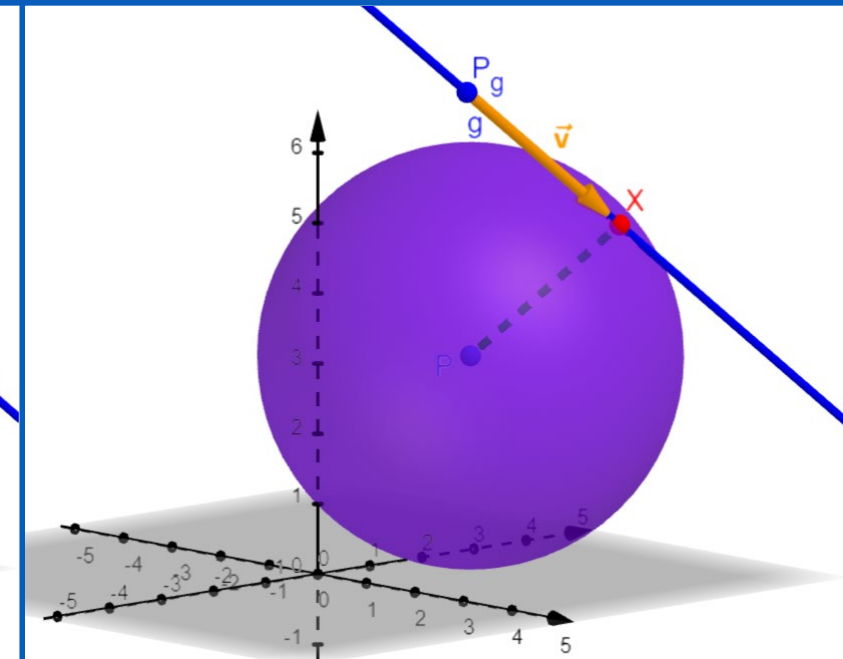
## Abstand als orthogonale Verbindung



<https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk>



## Abstand als Radius einer Berührkugel (3D) bzw. eines Berührkreises (2D)

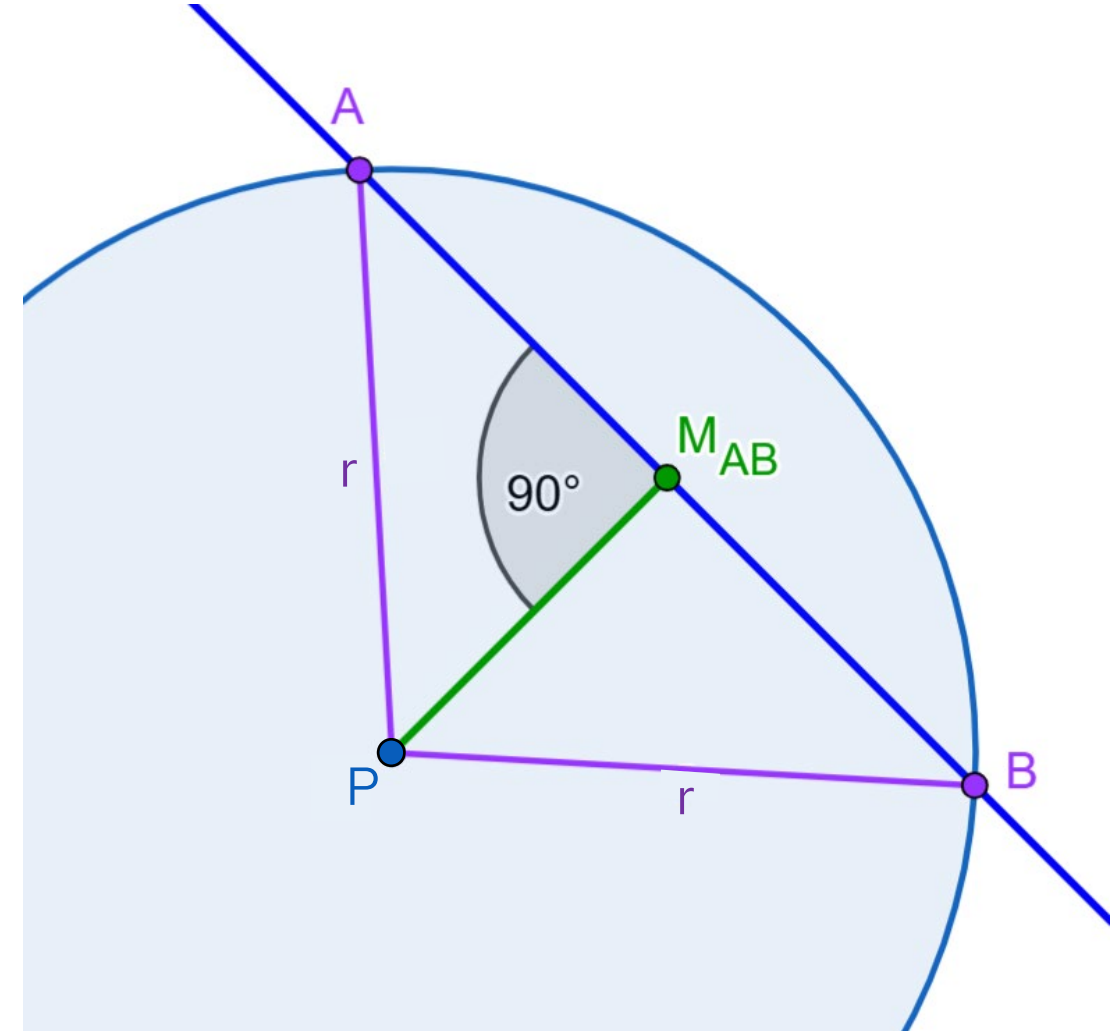
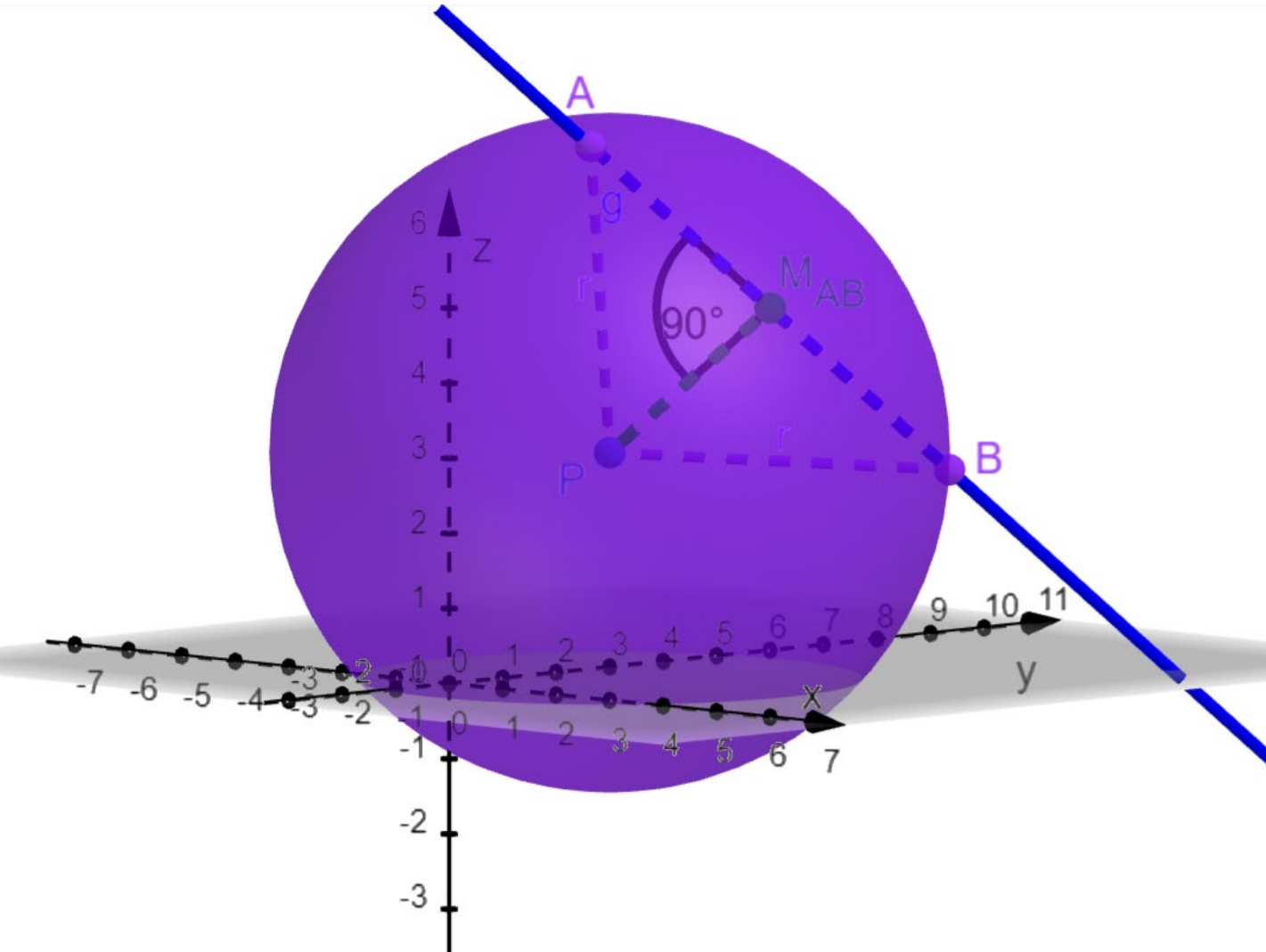


<https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk>



# Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

## Spezialfall: Kugel, die die Gerade schneidet

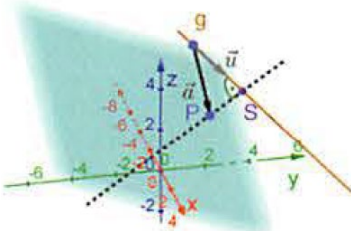
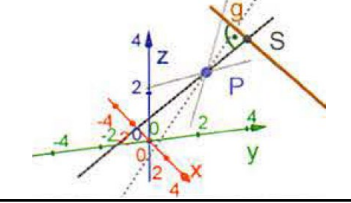
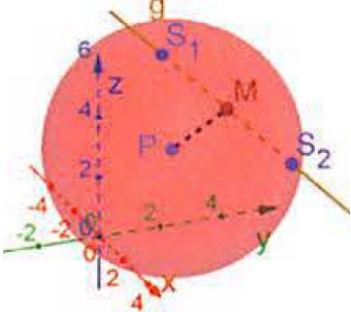
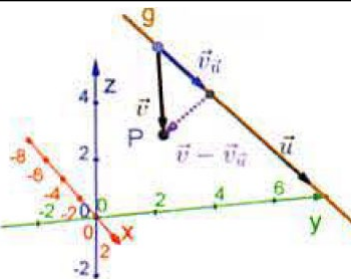


# Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

Nr.	Idee	Abbildung	GV zum Abstand	Bezüge zu weiteren Begriffen und Grundvorstellungen
1	Länge des Verbindungsvektors, der orthogonal zur Geraden verläuft		orthogonale Verbindung	<b>Gerade als Punktmenge:</b> Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt. Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung & Orientierung
2	Länge des kürzesten Verbindungsvektors		Kürzeste Verbindung	<b>Skalarprodukt:</b> Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren  <b>Funktionaler Zusammenhang:</b> Jedem Parameterwert wird die Länge des Verbindungsvektors zugeordnet.
3	Normalebene zur Geraden durch den Punkt, Schnittpunkt mit der Geraden		orthogonale Verbindung	<b>Gerade als Punktmenge:</b> Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung & Orientierung <b>Normalenform einer Ebene:</b> Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor.
4	Höhe eines Parallelogramms, das durch einen Richtungs- und einen Verbindungsvektor aufgespannt wird		orthogonale Verbindung	Richtungsvektor einer Geraden und Verbindungsvektor zweier Punkte als Pfeile mit Länge, Richtung und Orientierung <b>Vektorprodukt:</b> Betrag gibt Flächeninhalt des Parallelogramms an Flächeninhalt Parallelogramm: Produkt von Seitenlänge & Höhe

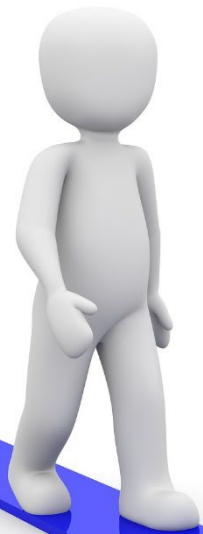


# Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

Nr.	Idee	Abbildung	GV zum Abstand	Bezüge zu weiteren Begriffen und Grundvorstellungen
5	Lotgerade sowohl orthogonal zur Geraden als auch zum Normalenvektor derjenigen Ebene, die Punkt und Gerade enthält		orthogonale Verbindung	<b>Normalenform einer Ebene:</b> Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor Skalar-/Vektorprodukt zur Bestimmung des Normalenvektors Richtungsvektor einer Geraden als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung
6	Geradenschar durch den Punkt, die orthogonal zur gegebenen Gerade sind; nur eine Gerade der Schar schneidet diese		orthogonale Verbindung	<b>Gerade als Punktmenge:</b> Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung <b>Skalarprodukt:</b> Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren
7	Berührungspunkt an die Gerade von einer passend großen Kugel um den Punkt		Radius einer Berührkugel	<b>Gerade als Punktmenge:</b> Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt
8	Mittelpunkt der Schnittpunkte von der Geraden mit einer genügend großen Kugel um den Punkt		orthogonale Verbindung	<b>Kugel als Ortsfläche:</b> Kugel als Menge von Punkten gleichen Abstands zum Mittelpunkt
9	Beliebiger Verbindungsvektor ist Summe von parallelem und orthogonalen Anteil; Berechnung des parallelen und damit dann des orthogonalen Anteils (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)		orthogonale Verbindung	<b>Skalarprodukt:</b> Projektionsvorstellung $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}}$ <b>Skalare Multiplikation:</b> $\vec{u}$ wird zu $\vec{v}_{\vec{u}}$ gestaucht/streckt: $\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$ <b>Vektoraddition:</b> orthogonaler Verbindungsvektor ist $\vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}$

# 4

## Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik



## Zielrichtungen

- Die Frage nach dem „Warum?“ wird von Anfang an thematisiert.
- Begriffe, Verfahren und Strukturen
  - an konkreten Beispielen erarbeiten,
  - als Grundlage von Problemlösungen nutzen und
  - in vielfältigen Anwendungsbereichen einsetzen.



## Streaming-Dienste

- Ein Marktforschungsinstitut wird beauftragt, das Verhalten der Abo-Kunden von Streaming-Diensten zu untersuchen.
- **Ziel:** Argumente für Marketingentscheidungen liefern.



## Modellannahmen

- Es gibt zwei Streaming-Dienste: GoVideo (**G**) und Hetzfix (**H**)
- Die Gesamtzahl der Kunden bleibt konstant.
- Der Marktmechanismus ändert sich nicht.



## Daten über Umfragen

- Streaming-Dienst GoVideo (**G**) hat 20.000 Kunden.
- Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) hat 30.000 Kunden.
- Pro Monat wechseln 20% der **G**-Kunden zu **H**.
- Pro Monat wechseln 5% der **H**-Kunden zu **G**.

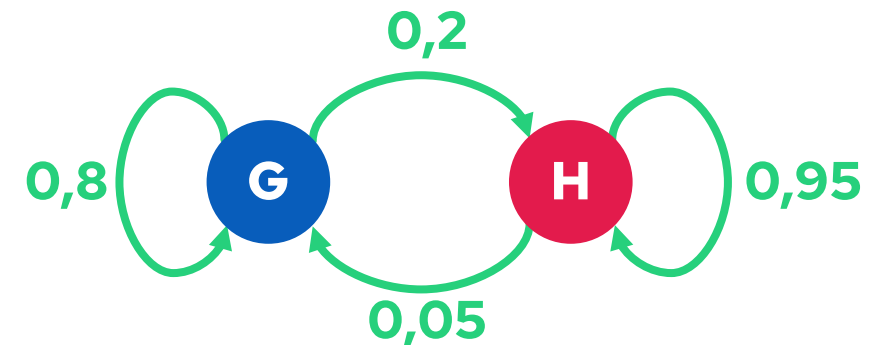
## Wie entwickeln sich die Kundenzahlen?

- Abonnieren irgendwann alle den Streaming-Dienst Hetzfix (**H**)?
- Oszillieren die Kundenzahlen?
- Stellt sich ein Gleichgewicht ein?

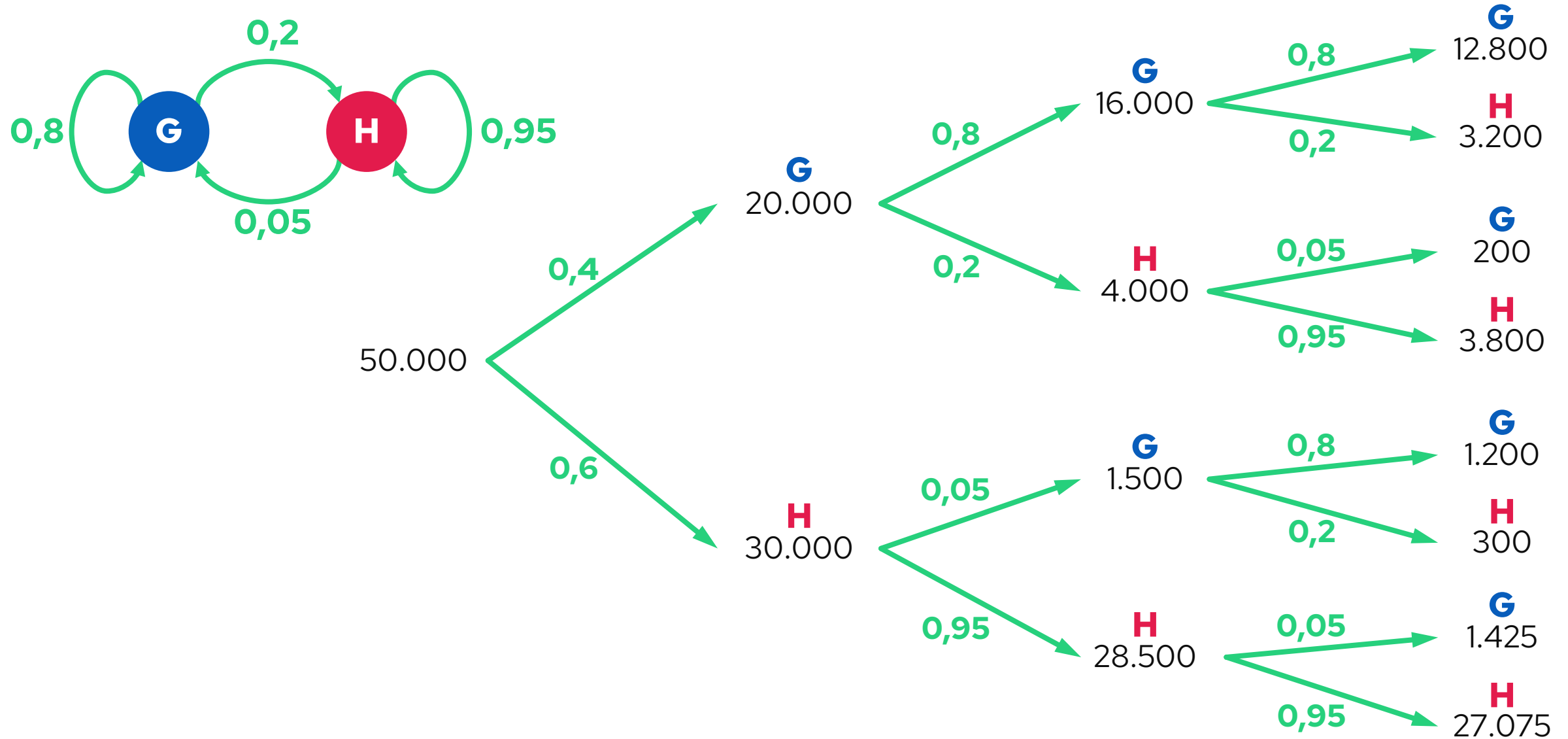
## Übergangstabelle

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

## Übergangsgraph



# Baumdiagramm

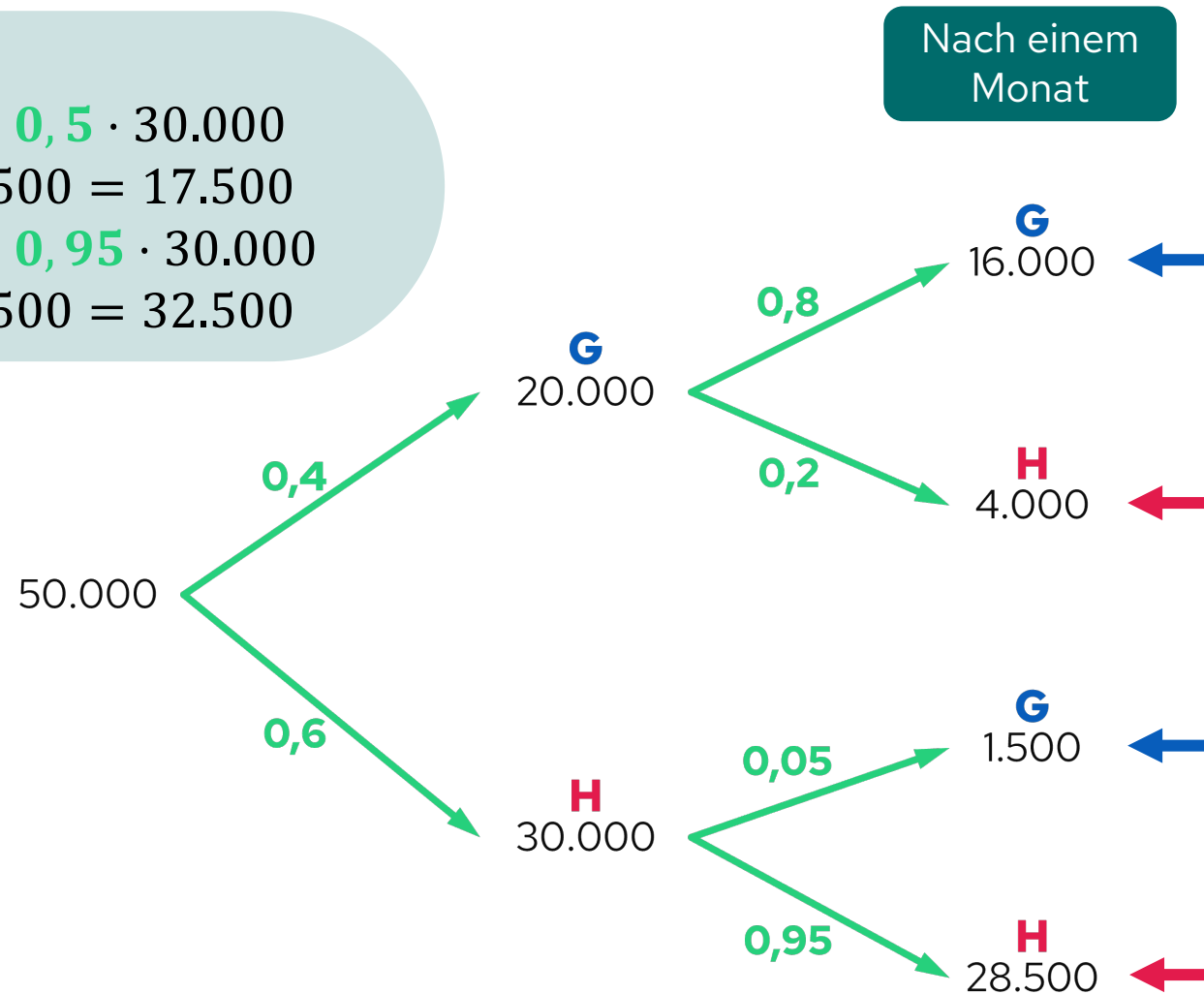


# Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

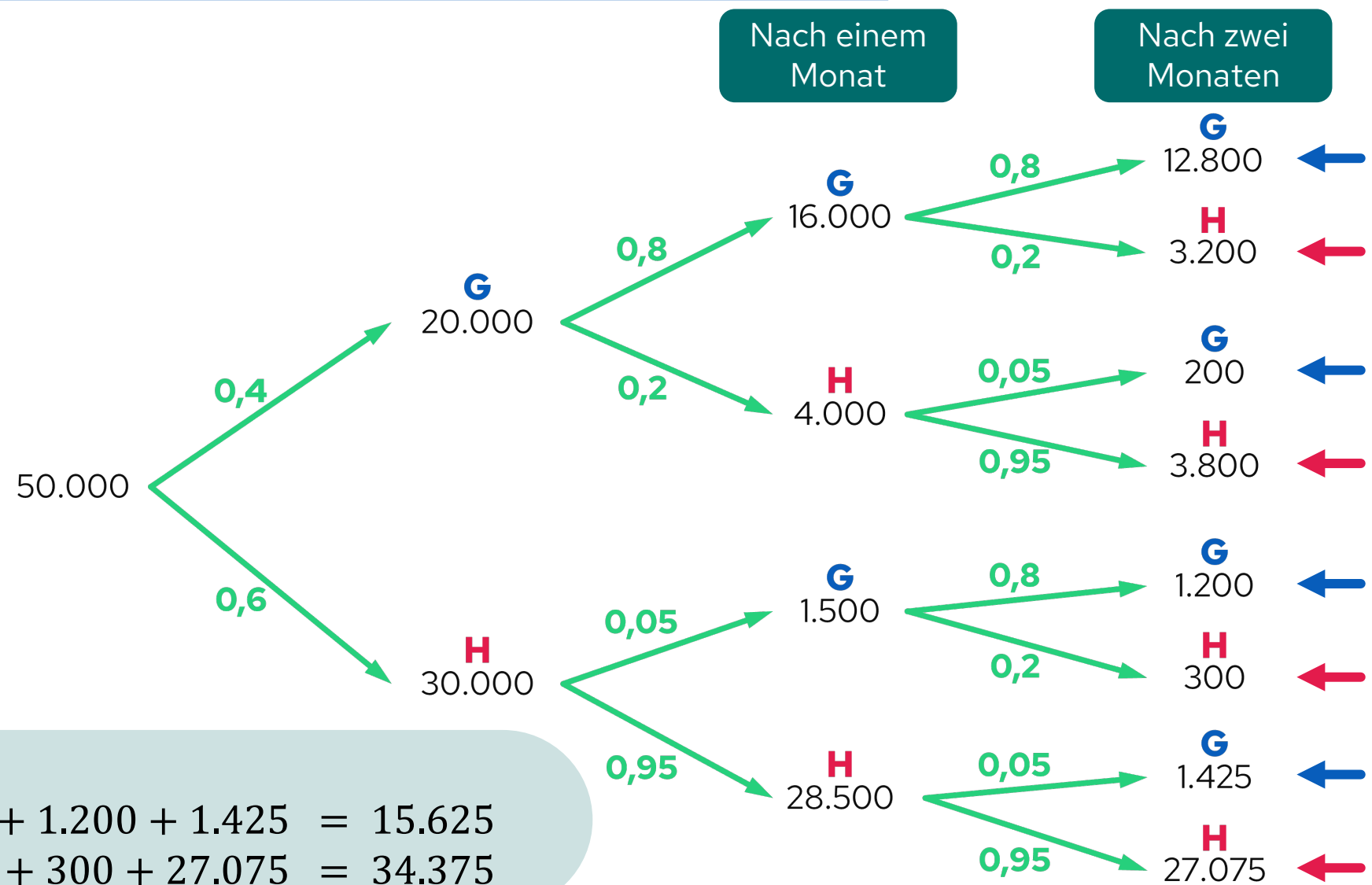
## Nach einem Monat

→ Kunden **G**:  $0,8 \cdot 20.000 + 0,5 \cdot 30.000$   
 $= 16.000 + 1.500 = 17.500$

→ Kunden **H**:  $0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$   
 $= 4.000 + 28.500 = 32.500$



# Entwicklung der Abonnenten-Zahlen



## Nach zwei Monaten

→ Kunden **G**:  $12.800 + 200 + 1.200 + 1.425 = 15.625$

→ Kunden **H**:  $3.200 + 3.800 + 300 + 27.075 = 34.375$



# Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

## Aufgabe

- Untersuchen Sie die Entwicklung der Kunden-Zahlen über einen Zeitraum von ...
  - 10 Monaten.
  - 100 Monaten.
- Ein Tabellenkalkulationsprogramm kann helfen ...

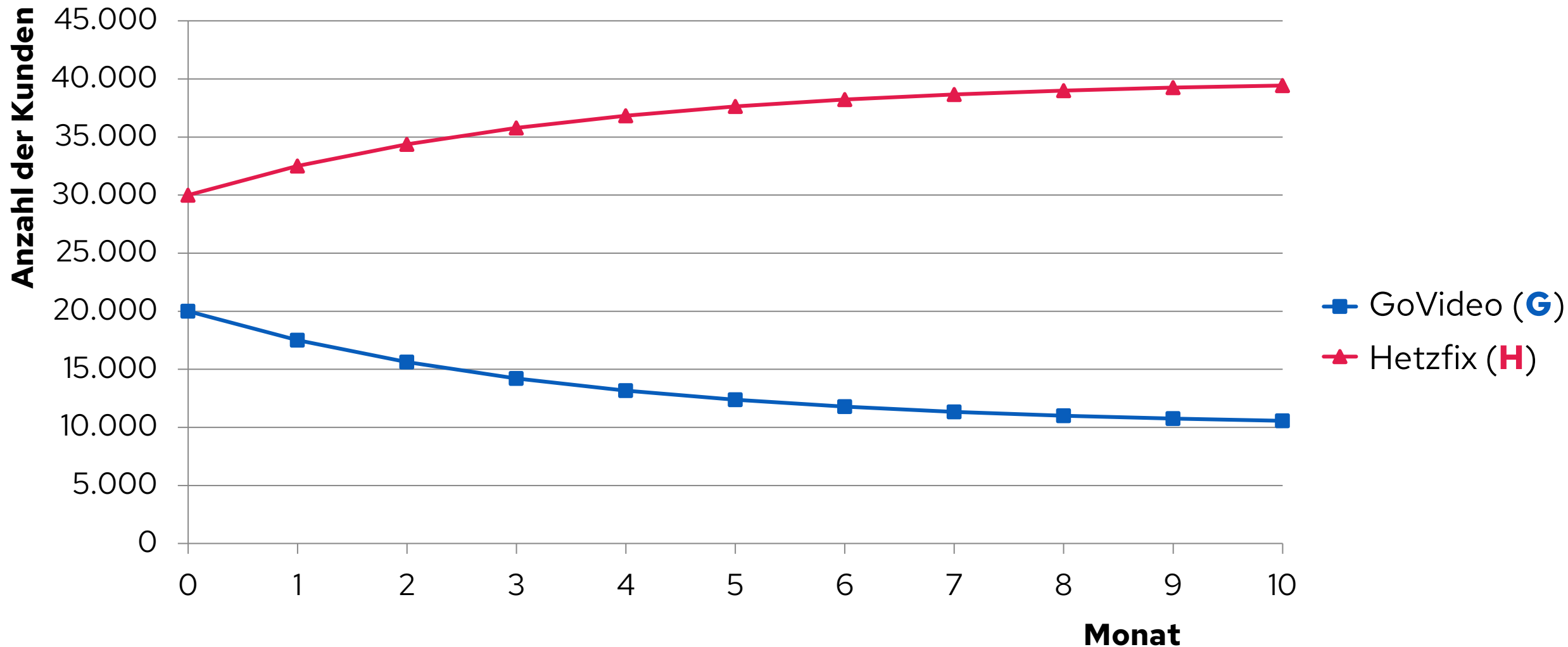
$$= B5 * (1 - \$B\$1) + C5 * \$B\$2$$

$$= B5 * \$B\$1 + C5 * (1 - \$B\$2)$$

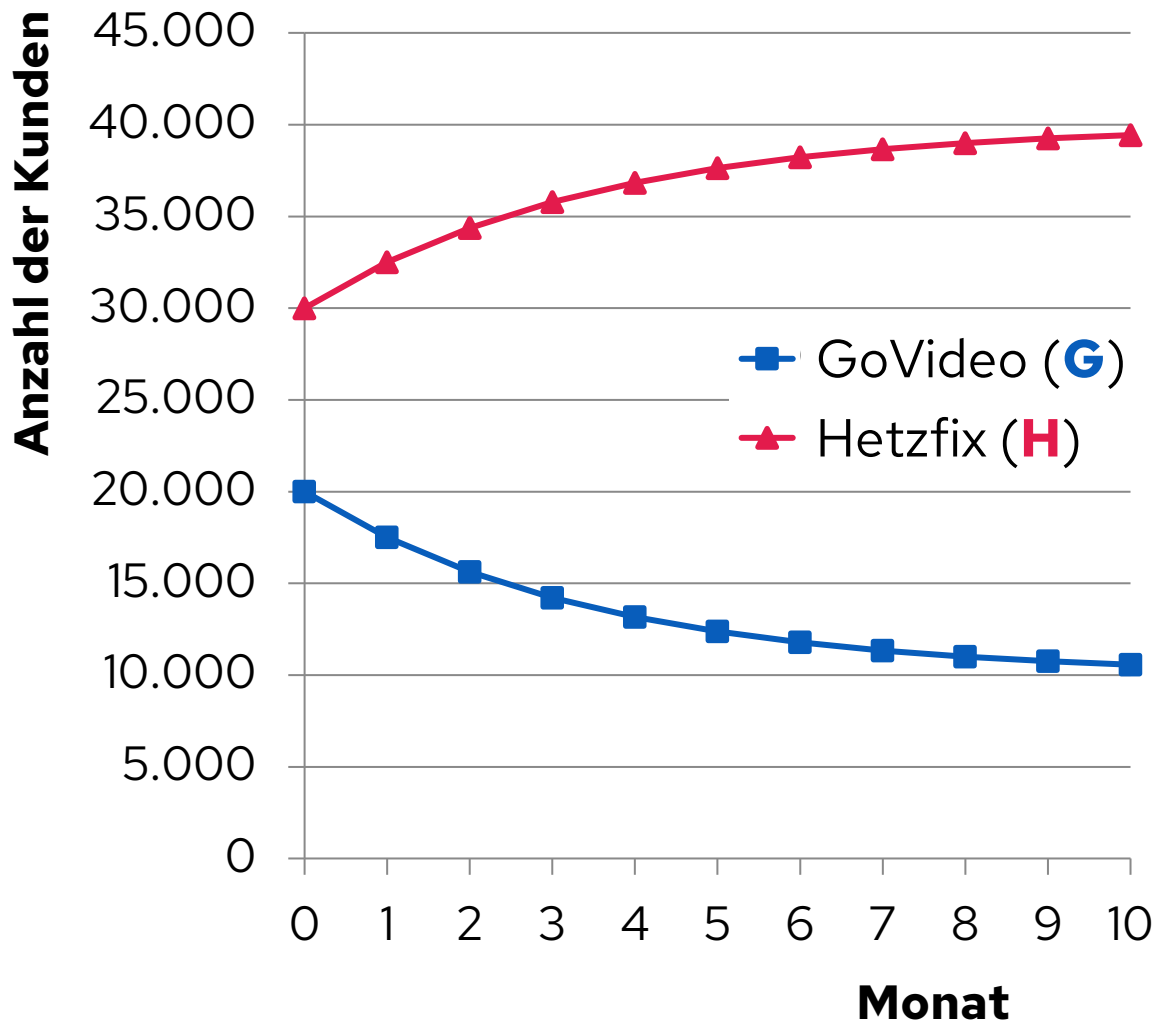
	A	B	C	D
1	G -> H	0.2		
2	H -> G	0.05		
3				
4	Monat	G	H	
5	0	20000	30000	
6	1	17500	32500	
7	2			
8	3			
9	4			
10	5			
11	6			
12	7			
13	8			
14	9			
15	10			

Herunterziehen

# Entwicklung der Kunden-Zahlen



# Entwicklung der Kunden-Zahlen



## Erkenntnis

Die Kunden-Zahlen von GoVideo (G) sinken und die von Hetzfix (H) steigen.

## Fragen

- Halten diese Tendenzen an?
- Hat GoVideo (G) irgendwann keine Kunden mehr?
- Was passiert, wenn GoVideo (G) zu Beginn mehr bzw. noch weniger Kunden hat?

## Vorgehensweisen

- Vorhersagen machen & festhalten lassen.
- Testen! (Schieberegler!)

## Kunden-Zahlen nach einem Monat

$$G_1: 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$$

$$H_1: 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$$

## Übergangstabelle

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

## Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$$

## Kunden-Zahlen nach einem Monat

$$G_1: 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$$

$$H_1: 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$$

## Tabelle der Ausgangswerte

$G_0$	20.000
$H_0$	30.000

## Vektor der Ausgangswerte

$$\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$



## Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

$$G_1: 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$$

$$H_1: 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$$

$$1 \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000 \\ 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000 \\ 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000 \end{pmatrix}$$

$$4 \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000 \\ 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000 \end{pmatrix}$$



## Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

$$G_1: 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000$$

$$H_1: 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$$

5

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}}_{\text{Übergangs-}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}}_{\text{matrix}} = \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000 \\ 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}}_{\text{Kundenvektor}} \\ \text{Ursprünglicher} \quad \text{nach einem Monat}$$



## Definition: $(n \times m)$ -Matrix

Ein rechteckiges Zahlenschema mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten heißt  $(n \times m)$ -Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

## Bemerkungen

Eine  $(n \times 1)$ -Matrix heißt auch **Spaltenvektor**.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Eine  $(1 \times m)$ -Matrix heißt auch **Zeilenvektor**.

$$(a_1 \dots a_m)$$

Matrizen werden mit einem Großbuchstaben abgekürzt, Vektoren mit Kleinbuchstaben & einem Pfeil darüber.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrix  $A$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Vektor  $\vec{a}$



# Schematisierung im Beispiel

**Ursprünglicher  
Kundenvektor:**

$$\vec{k}_0 = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

**Übergangsmatrix:**

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$$

**Kundenvektor  
nach einem Monat:**

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= A \cdot \vec{k}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 20.000 + 0,05 \cdot 30.000 \\ 0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Kundenvektor  
nach zwei Monaten:**

$$\vec{k}_2 = A \cdot \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \vec{k}_1$$

**Kundenvektor  
nach  $n$  Monaten:**

$$\vec{k}_n = A \cdot \vec{k}_{n-1}$$



## Definition



Das Produkt einer  $(2 \times 2)$ -**Matrix** mit einer  $(2 \times 1)$ -**Matrix** (**Spaltenvektor**) wird definiert durch:

$$A \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_1 + a_{12} \cdot k_2 \\ a_{21} \cdot k_1 + a_{22} \cdot k_2 \end{pmatrix}$$







## Eingabe von Matrizen

Eingabe von  $A := \{\{1,2,3\}, \{-4, -5, -6\}, \{7.1, 8.2, 9.3\}, \{3, 2, 1\}\}$  liefert nach Auswahl von  und ggf. drücken der *Enter*-Taste  :



$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ \frac{7.1}{10} & \frac{4.1}{5} & \frac{9.3}{10} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Hinweis:** In GeoGebra Classic kann eine Matrix auch über die Eingabe in die Zellen einer Tabelle erfolgen. Die Zellen werden anschließend markiert und nach rechtem Mausklick wird im Kontextmenü  $\rightarrow$  Erzeugen und  $\rightarrow$  Matrix ausgewählt.

## Eingabe von Vektoren

Eingabe von  $b := \{\{1\}, \{-2\}, \{3\}\}$  bzw.  $b := (1, -2, 3)$  liefert nach Auswahl von  und ggf. drücken der *Enter*-Taste  :

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7.1 & 8.2 & 9.3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	⋮
	$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	⋮
	$c = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ \frac{9.3}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$	⋮
+	Eingabe...	
x= GeoGebra CAS Rechner		
 		



## Matrizen multiplizieren

Eingabe von

$$A := \{\{9,3,8,2\}, \{5,1,8,1\}\}$$

$$B := \{\{4,2\}, \{5,7\}, \{3,3\}\}$$

$$B * A$$

liefert nach Auswahl von  und ggf. drücken der *Enter*-Taste  das Produkt  $B \cdot A$  der Matrizen.

	$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$	⋮
	$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	⋮
	B A	⋮
+	Eingabe...	
	$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$	⋮
	$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	⋮
	$\begin{pmatrix} 46 & 14 & 48 & 10 \\ 80 & 22 & 96 & 17 \\ 42 & 12 & 48 & 9 \end{pmatrix}$	⋮
+	Eingabe...	

## GeoGebra Classic Zeilenbezüge in der CAS-Ansicht



### ■ Statische Bezüge

Änderungen in der Referenzzeile  
haben keine Auswirkungen.

# kopiert die vorherige Ausgabe

#3 kopiert die Ausgabe von Zeile 3

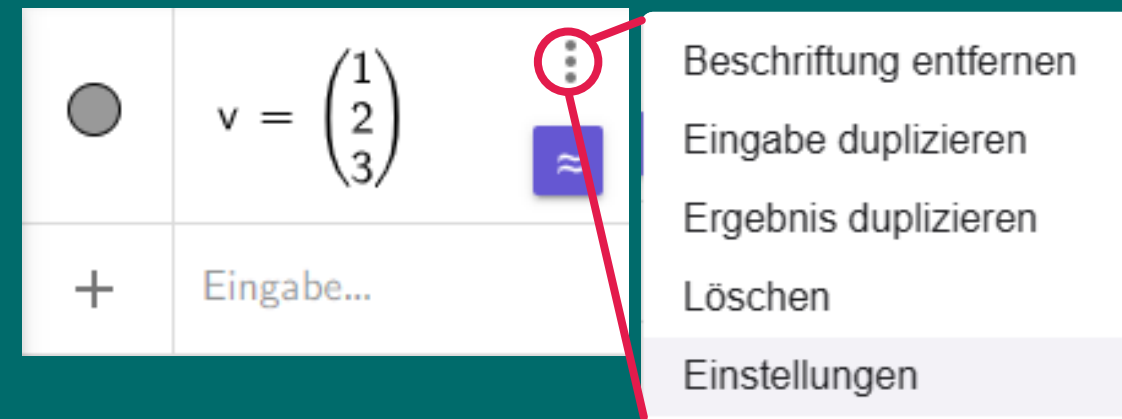
### ■ Dynamische Bezüge

Änderungen in der Referenzzeile werden  
übernommen.

\$ fügt die vorherige Ausgabe ein

\$3 fügt die Ausgabe von Zeile 3 ein

## GeoGebra Suite Zeilen kopieren in der CAS-Ansicht



# Entwicklung der Kunden-Zahlen

## Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

Eingabe des ursprünglichen Kundenvektors:  $\vec{k}_0 = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

Eingabe der Übergangsmatrix:  $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$

Berechnung des Kundenvektors nach einem Monat:  $\vec{k}_1 = A \cdot \vec{k}_0$

Berechnung des Kundenvektors nach zwei Monaten:  $\vec{k}_2 = A \cdot \vec{k}_1$

●	$k_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
●	$k_1 = A k_0$ $= \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$
●	$k_2 = A k_1$ $= \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$

# Entwicklung der Kunden-Zahlen

## Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

○	$k_3 = A k_2$ $= \begin{pmatrix} 14218.75 \\ 35781.25 \end{pmatrix}$
○	$k_4 = A k_3$ $= \begin{pmatrix} 13164.06 \\ 36835.94 \end{pmatrix}$
○	$k_5 = A k_4$ $= \begin{pmatrix} 12373.05 \\ 37626.95 \end{pmatrix}$
○	$k_6 = A k_5$ $= \begin{pmatrix} 11779.79 \\ 38220.21 \end{pmatrix}$

○	$k_7 = A k_6$ $= \begin{pmatrix} 11334.84 \\ 38665.16 \end{pmatrix}$
○	$k_8 = A k_7$ $= \begin{pmatrix} 11001.13 \\ 38998.87 \end{pmatrix}$
○	$k_9 = A k_8$ $= \begin{pmatrix} 10750.85 \\ 39249.15 \end{pmatrix}$
○	$k_{10} = A k_9$ $= \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$

○	$k_{11} = A k_{10}$ $= \begin{pmatrix} 10422.35 \\ 39577.65 \end{pmatrix}$
○	$k_{12} = A k_{11}$ $= \begin{pmatrix} 10316.76 \\ 39683.24 \end{pmatrix}$
○	$k_{13} = A k_{12}$ $= \begin{pmatrix} 10237.57 \\ 39762.43 \end{pmatrix}$
○	$k_{14} = A k_{13}$ $= \begin{pmatrix} 10178.18 \\ 39821.82 \end{pmatrix}$



## Iterative Berechnung

- Die Kunden-Zahlen nach zwei Monaten wurden so berechnet:

$$\vec{k}_2 = A \cdot \vec{k}_1 = A \cdot (A \cdot \vec{k}_0)$$

- Will man die Kunden-Zahlen nicht iterativ sondern direkt berechnen, dann müsste das so funktionieren:

$$\vec{k}_2 = A \cdot \vec{k}_1 = A \cdot (A \cdot \vec{k}_0) = A^2 \cdot \vec{k}_0$$

- Dazu muss eine Multiplikation von Matrizen definiert werden.

- Dann könnte man auch  $\vec{k}_n$  direkt berechnen:

$$\vec{k}_n = A^n \cdot \vec{k}_0$$



## Berechnung von $\overrightarrow{k_2}$

$$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{01} + a_{12} \cdot k_{02} \\ a_{21} \cdot k_{01} + a_{22} \cdot k_{02} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{k_2} &= A \cdot A \cdot \overrightarrow{k_0} = A \cdot \overrightarrow{k_1} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{01} + a_{12} \cdot k_{02} \\ a_{21} \cdot k_{01} + a_{22} \cdot k_{02} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} \cdot k_{01} + a_{11}a_{12} \cdot k_{02} + a_{12}a_{21} \cdot k_{01} + a_{12}a_{22} \cdot k_{02} \\ a_{21}a_{11} \cdot k_{01} + a_{21}a_{12} \cdot k_{02} + a_{22}a_{21} \cdot k_{01} + a_{22}a_{22} \cdot k_{02} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}) \cdot k_{01} + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}) \cdot k_{02} \\ (a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}) \cdot k_{01} + (a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}) \cdot k_{02} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}}_{= A \cdot A =: A^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \end{pmatrix}}_{= \overrightarrow{k_0}} \end{aligned}$$



## Definition

Die Multiplikation einer  $(2 \times 2)$ -Matrix  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  mit sich selbst ist definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

## Bemerkungen

- Vorgehensweise bei der Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 2 \quad 4 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

- Diese Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern.
- Damit sie funktioniert, muss die Anzahl der Spalten der linken Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix sein!



# Entwicklung der Kunden-Zahlen

## Prognose ist nun ohne Iteration möglich

$$\vec{k}_0 = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_1 = A \cdot \vec{k}_0$$

$$\vec{k}_2 = A^2 \cdot \vec{k}_0$$

$$\vec{k}_{10} = A^{10} \cdot \vec{k}_0$$

○	$k_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
○	$k_1 = A k_0$ $= \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$
○	$k_2 = A^2 k_0$ $= \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$
○	$k_{10} = A^{10} k_0$ $= \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$

○	$k_{20} = A^{20} k_0$ $= \begin{pmatrix} 10031.71 \\ 39968.29 \end{pmatrix}$
○	$k_{30} = A^{30} k_0$ $= \begin{pmatrix} 10001.79 \\ 39998.21 \end{pmatrix}$
○	$k_{40} = A^{40} k_0$ $= \begin{pmatrix} 10000.1 \\ 39999.9 \end{pmatrix}$
○	$k_{100} = A^{100} k_0$ $= \begin{pmatrix} 10000 \\ 40000 \end{pmatrix}$

$$\vec{k}_{30} = A^{20} \cdot \vec{k}_0$$

$$\vec{k}_{30} = A^{30} \cdot \vec{k}_0$$

$$\vec{k}_{40} = A^{40} \cdot \vec{k}_0$$

$$\vec{k}_{100} = A^{100} \cdot \vec{k}_0$$

## Stabiler Kundenvektor

- Es gibt offensichtlich nach einer bestimmten Anzahl von Monaten einen stabilen Kundenvektor  $\vec{k}_s = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$ .
- Obwohl weiterhin in jedem Monat Kunden den Streaming-Dienst wechseln, bleiben die Kundenzahlen der beiden Streaming-Dienste konstant.
- Man sagt, es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein.
- Für diesen stabilen Kundenvektor  $\vec{k}_s$  muss gelten:
$$A \cdot \vec{k}_s = \vec{k}_s$$
- Aus dieser Gleichung kann man  $\vec{k}_s$  auch direkt berechnen.





# Entwicklung der Kunden-Zahlen

## Berechnung von $\vec{k}_s$

Aus

$$A \cdot \vec{k}_s = \vec{k}_s$$

ergibt sich mit

$$\vec{k}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$$

die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Als lineares Gleichungssystem geschrieben folgt:

$$\begin{aligned} 0,8 \cdot x + 0,05 \cdot y &= x \\ 0,2 \cdot x + 0,95 \cdot y &= y \end{aligned}$$

Zusammenfassen gleichartiger Terme liefert:

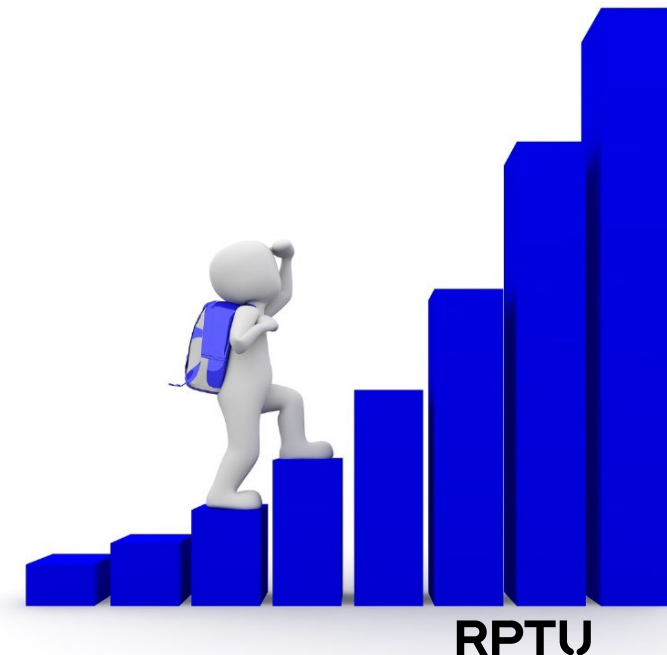
$$\begin{aligned} -0,2 \cdot x + 0,05 \cdot y &= 0 \\ 0,2 \cdot x - 0,05 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Dieses „Gleichungssystem“ ist nicht eindeutig lösbar.

$$0,2 \cdot x - 0,05 \cdot y = 0$$

Es gilt aber zusätzlich:

$$x + y = 50.000$$



# Entwicklung der Kunden-Zahlen

## Berechnung von $\vec{k}_s$ (Fortsetzung)

Dieses Gleichungssystem  
ist eindeutig lösbar.

$$\begin{aligned} 0,2 \cdot x - 0,05 \cdot y &= 0 \\ x + y &= 50.000 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung  
ergibt sich:

$$x = 0,25 \cdot y$$

Einsetzen in die zweite  
Gleichung liefert:

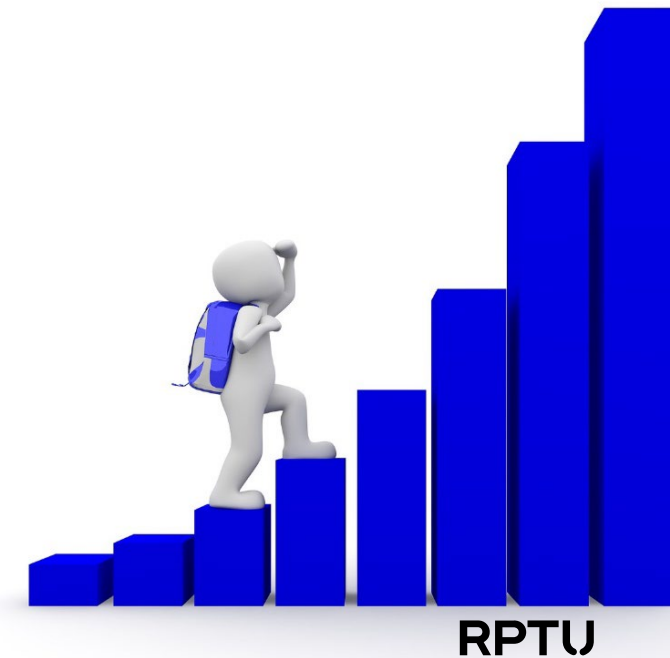
$$1,25 \cdot y = 50.000$$

Es ergibt sich folgende  
eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} y &= 40.000 \\ x &= 10.000 \end{aligned}$$

Stabiler Kundenvektor:

$$\vec{k}_s = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$$



# Entwicklung der Kunden-Zahlen

## Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$ mit (GeoGebra-)CAS


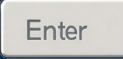
### Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

- Mit einem Computer-Algebra-System (CAS) wie in GeoGebra kann das Gleichungssystem auch direkt gelöst werden.

$$\begin{aligned} 0,2 \cdot x - 0,05 \cdot y &= 0 \\ x + y &= 50.000 \end{aligned}$$

- Eingabe von

Löse( $\{0.2 * x - 0.05 * y = 0, x + y = 50000\}, \{x, y\}$ )

liefert nach Auswahl von  und ggf. drücken der *Enter*-Taste  :

$\{\{x = 10000, y = 40000\}\}$

Löse( $\{0.2 x - 0.05 y = 0, x + y = 50000\}, \{x, y\}$ )  
=  $\{\{x = 10000, y = 40000\}\}$



## Ergebnis

- Die Kundenverteilung stabilisiert sich so, dass – trotz der dynamischen Entwicklung – der Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) dauerhaft 40.000 und der Streaming-Dienst GoVideo (**G**) durchgängig 10.000 Käufer hat.
- Der stabile Kundenvektor lässt sich mit Hilfe der Gleichung  $A \cdot \vec{k}_s = \vec{k}_s$  und der konstanten Kundensumme berechnen.
- Insbesondere ist das lineare Gleichungssystem nicht von einer speziellen Anfangsverteilung der Kunden abhängig.
- Folglich ist auch der stabile Kundenvektor  $\vec{k}_s$  unabhängig von der Anfangsverteilung der Kunden!



## Entwicklung der Übergangsmatrix

- Wie verändert sich bei diesem Prozess die Übergangsmatrix  $A$ ?
- Untersuchen Sie das mit Hilfe des CAS in GeoGebra.

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$$

## Ergebnisse

- Offensichtlich ergibt sich eine **Grenzmatrix**  $A_G$ :

$$A_G := \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- Wird die Grenzmatrix  $A_G$  auf den Ausgangskundenvektor  $\vec{k}_0$  angewandt, dann ergibt sich direkt der stabile Kundenvektor  $\vec{k}_s$ :

$$A_G \cdot \vec{k}_0 = \vec{k}_s$$





## Ergebnisse (Fortsetzung)

- Grenzmatrix  $A_G$  und stabiler Kundenvektor  $\vec{k}_s$  sind unabhängig von der Anfangsverteilung.
- Statt 50.000 Kunden kann man auch 100% bzw. 1 nutzen.
- Der Anfangsvektor lässt sich dann als  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  schreiben.
- Multiplikation mit der Grenzmatrix  $A_G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  liefert die erste bzw. zweite Spalte dieser Matrix:  
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \vec{k}_s \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \vec{k}_s$$
- Daraus folgt:  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \vec{k}_s$
- In den Spalten der Grenzmatrix  $A_G$  steht jeweils der stabile Kundenvektor  $\vec{k}_s$ .



---

# Kontakt

---

**Prof. Dr. Jürgen Roth & Dr. Susanne Digel**

**RPTU**

Rheinland-Pfälzische Technische Universität  
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)  
Fortstraße 7, 76829 Landau

[j.roth@rptu.de](mailto:j.roth@rptu.de); [s.digel@rptu.de](mailto:s.digel@rptu.de)

[juergen-roth.de](http://juergen-roth.de)

[dms.nuw.rptu.de/mategnu](http://dms.nuw.rptu.de/mategnu)



**RPTU**