MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvorstellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Modul 3:

Vektoren und Matrizen

Jürgen Roth & Susanne Digel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

30.08.2024

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Modul 3:
Vektoren & Matrizen

1. Lehrplanalternativen RLP
2. Algebraisieren des Anschauungsraums
3. Skalarprodukt
4. Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

RPTU

1 Lehrplanalternativen RLP

Lehrplanalternativen RLP

Grundkurs
(ca. 44 Stunden)

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

wahlweise

- A1: Matrizen in praktischer Anwendung
- A2: Geraden und Ebenen im Raum

Leistungskurs
(ca. 75 Stunden)

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

wahlweise

- A1: Vektoren und Matrizen
- A2: Geraden und Ebenen im Raum

https://lehrplaene.bildung-rp.de
MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

Lehrplanalternativen RLP: Grundkurs
(ca. 44 Stunden)

Wahlpflichtgebiet A1: Matrizen in praktischen Anwendungen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren

In allen Wahlpflichtgebieten enthalten!

A1:

- In Sachzusammenhängen folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und ausführen:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen
  - Inverse Matrix
- Komplexere Aufgaben aus mindestens zwei Anwendungsfeldern von Matrizen bearbeiten
- Erfahren, dass Matrizen auch zur Beschreibung von geometrischen Abbildungen dienen

A2:

- Begriff "Linearkombination" kennen & anwenden
- Parameterform von Geraden- & Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen bestimmen
- Lage gegebener Geraden & Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden
- Allg. Normalengleichung der Ebene kennen & anwenden
- Wissen und begründen:
  - eine Koordinatengleichung mit drei Variablen beschreibt eine Ebene
  - die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle „eine Lösung", „keine Lösung" oder „unendlich viele Lösungen" geometrisch deuten

https://lehrplaene.bildung-rp.de
MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

Lehrplanalternativen RLP: Leistungskurs
(ca. 75 Stunden)

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

In allen Wahlpflichtgebieten enthalten!

Lineare Gleichungssysteme

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen
- Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren

Matrizen

- Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen, sowie für Abbildungen und in nichtgeometrischen Sachbezügen anwenden:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen, Inverse Matrix

Vektoralgebra

- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren
- Die Begriffe „Linearkombination“ und „linear abhängig/unabhängig“ verstehen & anwenden
- Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen
- Elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen

https://lehrplaene.bildung-rp.de
MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

Lehrplanalternativen RLP: Leistungskurs
(ca. 75 Stunden)

Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

Matrizen (Fortsetzung)

- Eigenschaften der affinen Abbildungen beweisen
- Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen verstehen
- Affine Abbildungen nach ihren Fixelementen untersuchen
- In mindestens einem nichtgeometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Sachaufgaben lösen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

Analytische Geometrie

- Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen
  - bestimmen und die Verfahren begründen
  - durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Allgemeine und Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung herleiten und anwenden
- Winkel und Abstände im Raum berechnen
- Kreis- und Kugelgleichung herleiten und zur Untersuchung von Lagebeziehungen anwenden
- Vektorprodukt:
  Definition & Eigenschaften kennen & anwenden

https://lehrplaene.bildung-rp.de
MBWWK (2014). Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach in der Gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). Juli 2014

2 Algebraisieren des Anschauungsraums

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“
https://roth.tel/anageo

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums

Zurückführen räumlicher Probleme auf ebene Probleme

- Schnittfiguren eines Körpers (einer Fläche) mit einer Ebene
- Projizieren eines Körpers (einer Fläche) in eine Koordinatenebene
- Folge: Einfachere Berechnung unbekannter Größen (Verfahren der ebenen Geometrie nutzbar.)

Koordinatisierung

Geeignetes Koordinatensystem wählen

Parametrisierung

Beschreiben von Bahnkurven durch Parametergleichungen

Vektorisierung

Erfassen von Strecken mit Hilfe von Vektoren

Kollinearität oder Vielfachheit

Vektorielle Beschreibung der Parallelität von Geraden untereinander

Komplanarität

Vektorielle Beschreibung der Parallelität von Geraden zur selben Ebene

Skalarprodukt

Grundlage von Längen-, Abstands- und Winkelberechnungen nach der Vektorisierung

https://www.geogebra.org/m/MzeMBDy7#chapter/105183

https://www.geogebra.org/m/t6kfwy3v

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums

2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren

2.3 Zugänge zum Vektorbegriff

2.4 Geometrische Deutung von Vektoren

2.5 Geraden- und Ebenengleichungen

2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Präsenzaufgabe

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

1. Bitte diese Aufgabe für Schülerinnen und Schüler zunächst selbst bearbeiten.
2. Welche Schwierigkeiten sind ggf. bei der bei der Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler zu erwarten?

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff

Einige typische Schülerschwierigkeiten

- Schwierigkeit mit Pfeilklassen
- Algebraische Auffassung von Vektoren fehlt („Vektor“ → „Schalter wird auf Geometrie gestellt“)
- Deutung von Zahlenpaaren/-tripeln als Pfeile
- Schwierigkeiten mit dem Nullvektor
- Lernen ohne die Entwicklung von (Grund-)Vorstellungen
- Vektorformeln aufstellen
- „Ortsvektor“ als Problemfall

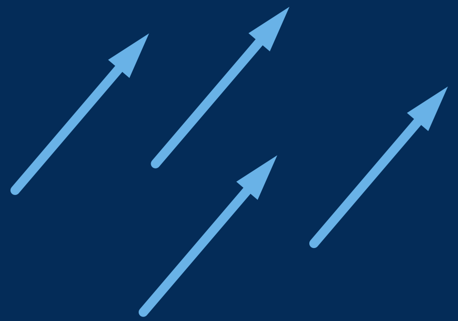
Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16-19

Schwierigkeit: Pfeilklassen

Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Alexandra (A)
Einen Pfeil in einem Raum.

Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile.“
Was sagst du dazu?



A: Stimmt nicht.

I: Warum?

A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.

I: Was ist für dich ein Vektor?

A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.

I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?

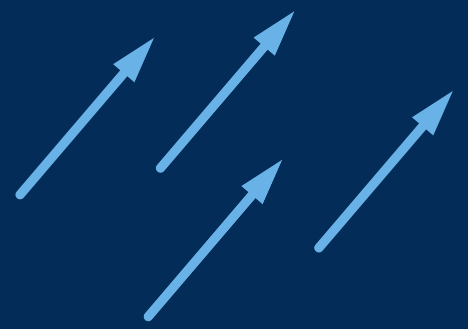
A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Pfeilklassen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

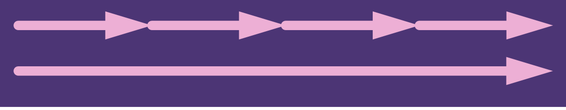
Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile."
Was sagst du dazu?



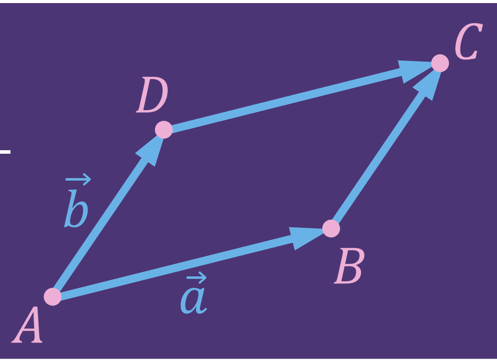
Richard (R)
Diese vier Vektoren kann man aneinanderreihen und kommt dann auf einen Vektor, einen Gesamtvektor.

I: Bitte zeichne das auf.

R: [Fertigt eine Zeichnung an]



Aufgabe: Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A, B und D. Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts C.



A: Ich würde Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ so lange verschieben, bis ich zum Punkt B komme, und dann habe ich den Vektor $\overrightarrow{BC}$ … Das ist eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$, nur von einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.

I: Kann man behaupten: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$?

A: Nein, weil $\overrightarrow{BC}$ geht von einem anderen Punkt als $\vec{b}$ aus.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

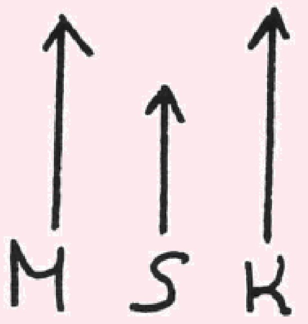
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

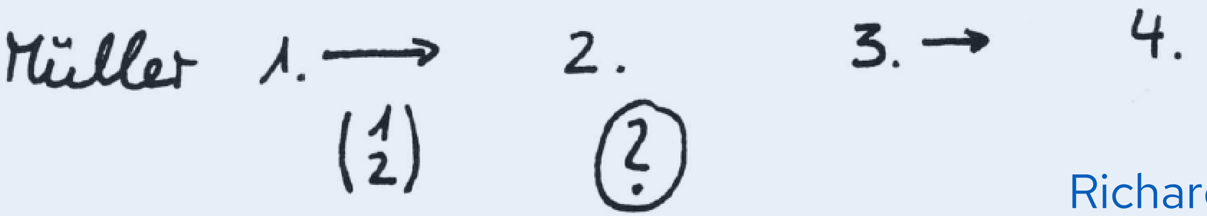
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

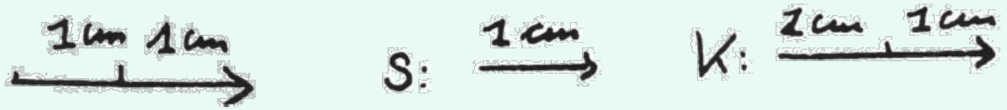
Schülerlösungen

Sandra





Richard



Alexandra

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Algebraische Auffassung von Vektoren

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

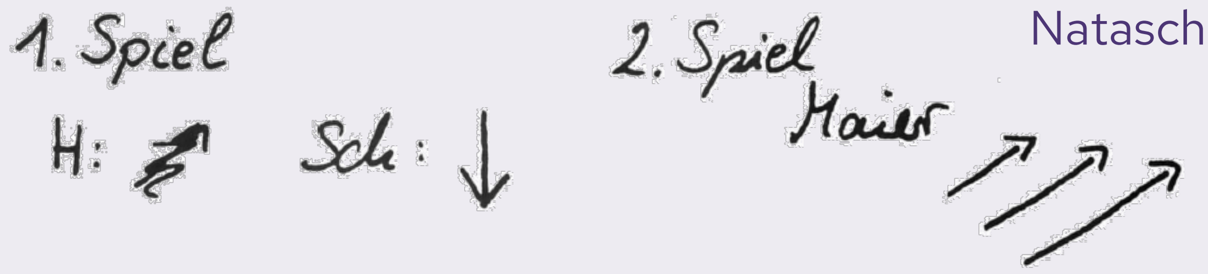
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

4. Spiel: Kaiser (4)

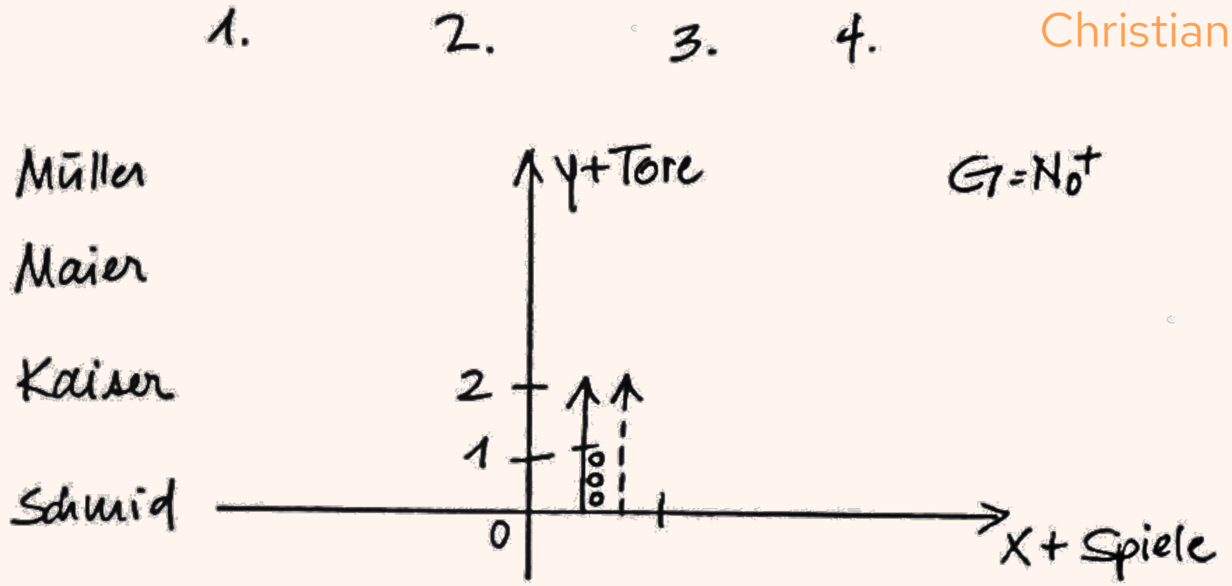
Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Schülerlösungen

Natascha



Christian



 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

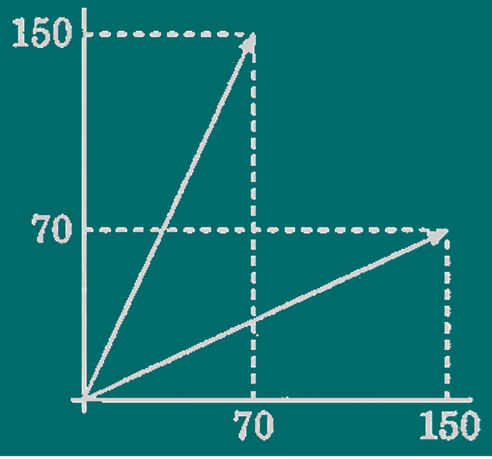
Schwierigkeit:
Algebraische Auffassung von Vektoren

Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Michaela
Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.

I: Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 70 \\ 150 \end{pmatrix}$ gleich oder verschieden?

A: [Fertigt eine Zeichnung an.]



I: Du erkennst die Ungleichheit dieser Vektoren aufgrund einer Zeichnung. Kannst du das auch ohne Zeichnung begründen?

A: Nein!

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Deutung von Zahlenpaaren als Pfeile

Zahlenpaare können …
- in der Regel als Punkte gedeutet werden.
- häufig nicht als Pfeile gedeutet werden.

Interviewer (I)
Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Christian
So wie es da steht mit dieser Spaltenform ist es ein Pfeil. Wenn $(3|4)$ da stehen würde, wäre es ein Punkt.

Interviewer (I)
Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Natascha (N)
(3|4) sind die Koordinaten von einem Punkt im ebenen Koordinatensystem im Zweidimensionalen.

I: Kann dieses Zahlenpaar auch einen Pfeil darstellen?

N: Nein, da bräuchte ich noch ein zweites Koordinatenpaar, um den Pfeil darzustellen. Aber ich habe nur eines gegeben, also kann es nur einen Punkt darstellen.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Nullvektor

- Grenzfall eines Vektors
- Entarteter Pfeil der Länge Null (das ist aber ein Punkt)
- Weil Lernende Vektoren häufig mit Pfeilen identifizieren, ist der Nullvektor für sie kein Vektor.

Kathi (K): [Schreibt] $0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dann ist es ein Punkt.

I: Dann ist es ein Punkt?

K: Ja, der Nullpunkt.

I: Kann es auch ein Pfeil sein?

K: Nein!

I: Warum nicht?

K: Es ist kein Pfeil. Es steckt keine Verbindung drinnen.

I: Das wäre also ein Zahlenpaar, das man nicht als Pfeil interpretieren kann?

K: Ja.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Situation
Es geht um den Vektor $r \cdot \vec{a}$.

Interviewer (I): Und wenn $r = 0$?

Daniel (D): Dann gibt‘s den Vektor nicht.

Christoph (C): Es ist der Nullpunkt.

I: Es ist der Nullpunkt?

C: Ja.

D: … Ja, er muss im Koordinatenursprung liegen. Ah nein, es ist ein Vektor! Richtig. D.h. es ist der Punkt, wo der Vektor $\vec{a}$ weggehen würde, also der Schaft … Ja der kann auch irgendwo anders liegen, aber der Punkt muss da liegen [Er zeichnet ein Achsenkreuz und zeigt auf den Ursprung.]. Aber nein, der kann überall liegen. Denn wenn der Vektor überall liegen kann, kann der Punkt überall liegen.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Fehlende (Grund-)Vorstellungen

Situation
Viele Lernende benutzen Vektoren, ohne zu verstehen, was sie tun.

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?

Florian (F):
Ich glaube, das hat etwas mit diesem großen X zu tun. X ist gleich irgendein Punkt A plus t mal $\overrightarrow{AB}$.
[Er schreibt:] $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

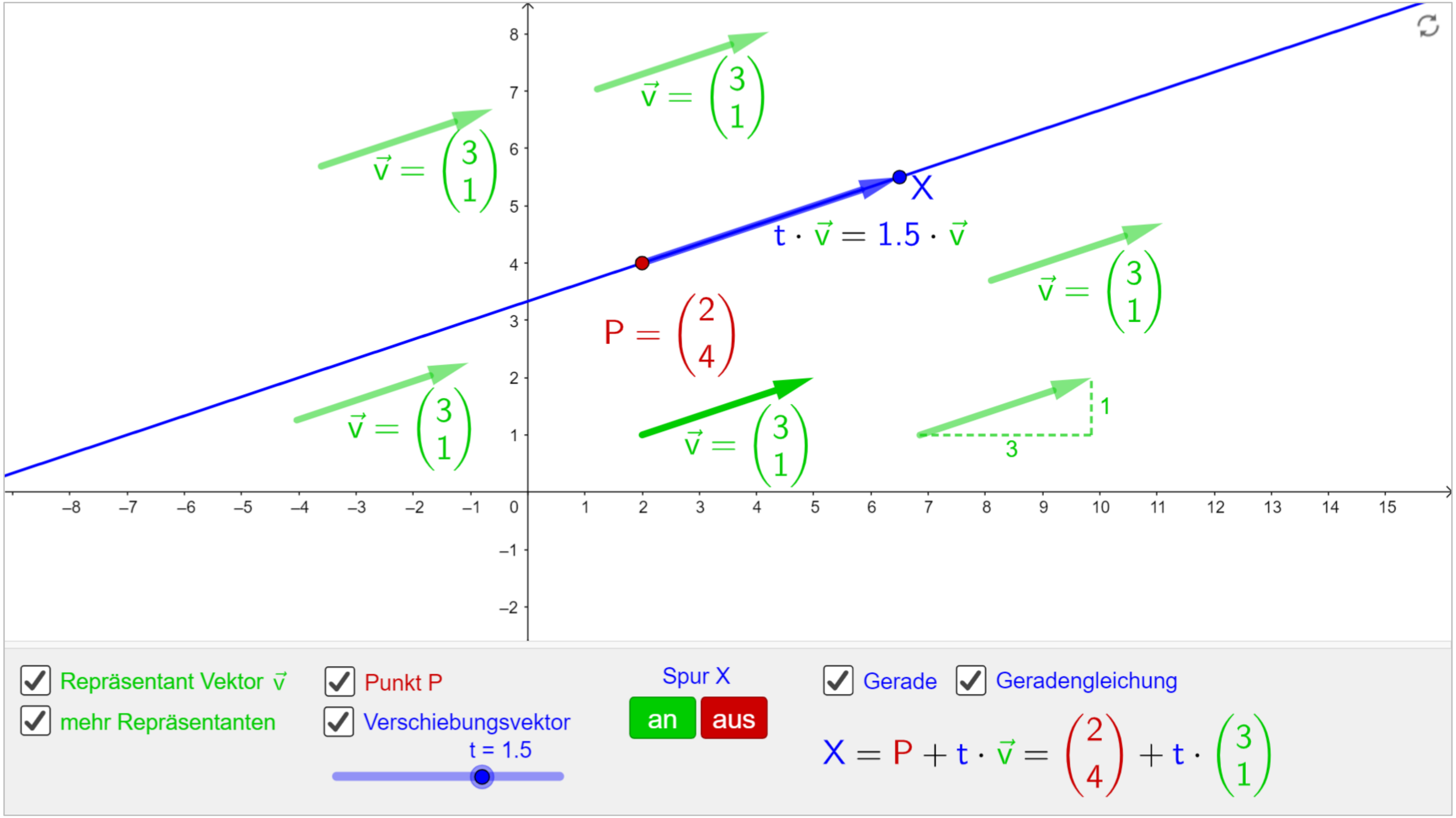
F: Für t kann man auch Lambda schreiben.

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

F: Weiß ich nicht!

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19 https://www.geogebra.org/m/e4rdbbg7

(Grund-)Vorstellungen zu Vektoren und Geraden



 https://www.geogebra.org/m/e4rdbbg7

Schwierigkeit: Vektorformeln aufstellen

Aufgabe
Stelle eine Formel auf, für den Mittelpunkt M einer Strecke AB.

Schülerlösungen
Alle gingen von derselben Skizze aus.

Sie schrieben aber unterschiedliches auf:

Isabella: $M = \frac{A+B}{2}$

Florian: $M = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

Martin: $M = \frac{A+\overrightarrow{AB}}{2}$

Karin: $M = \frac{A-B}{2}$

Probleme

- Im Prinzip wird so gedacht: „Ich gehe von A aus, füge die Hälfte von $\overrightarrow{AB}$ dazu und komme zu M."
- Wie kann der Gedankengang mit Hilfe der Vektorsymbolik notiert werden? $M = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Unverständnis des Vektorbegriffs
- „Typkontrolle" Pfeil ↔ Punkt fehlt.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

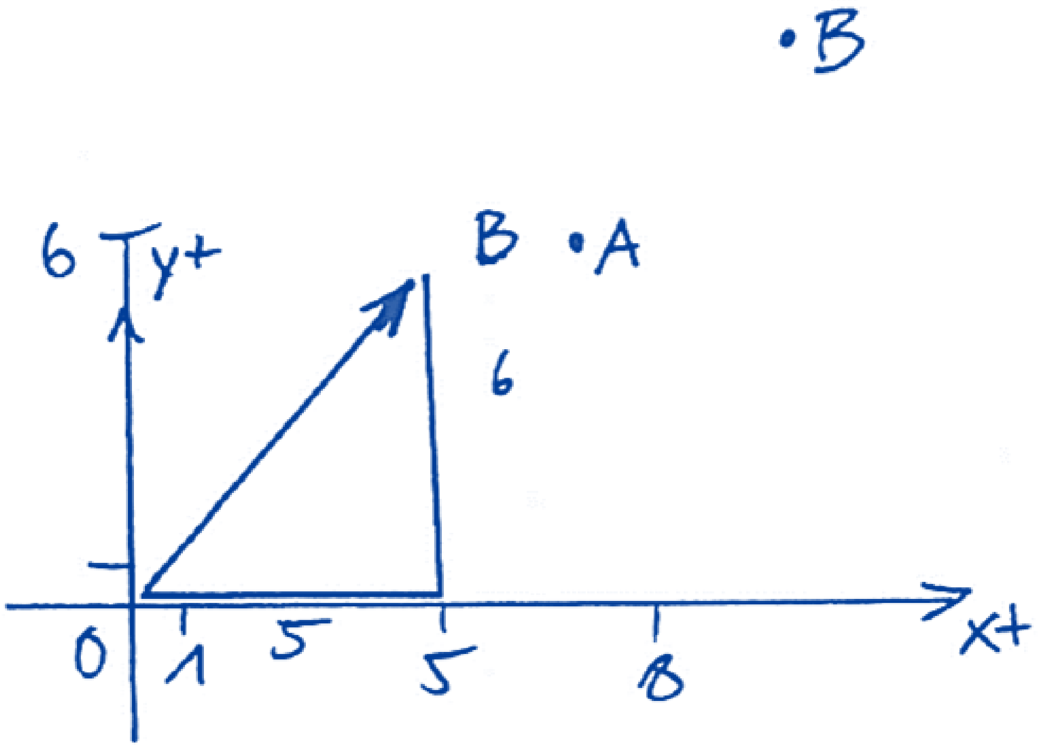
Schwierigkeit: „Ortsvektoren"

Aufgabe

Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und veranschauliche ihn an einer Skizze: $A = (8|6)$, $B = (13|12)$

Schülerlösung

- Christian rechnet richtig:
  $B - A = (5|6)$
- Er zeichnet die Punkte A und B einigermaßen richtig in ein Koordinatensystem ein.
- Anschließend stellt er den Vektor $\overrightarrow{AB}$ aber als Ortspfeil dar.



 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie" https://roth.tel/anageo

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Zugänge zum Vektorbegriff

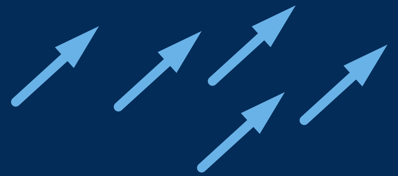
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Was ist ein Vektor?
Es gibt viele Antworten auf diese Frage.

Hochschulmathematik

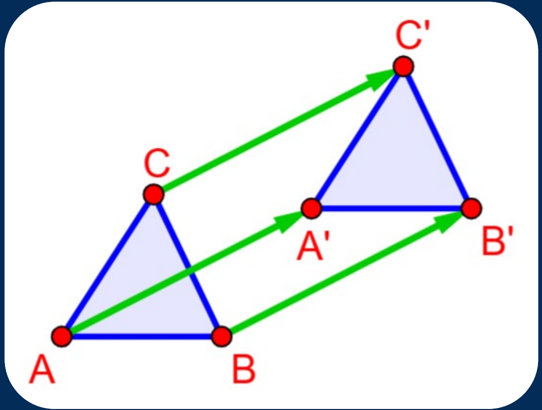
- **Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.**
- Axiomatischer Zugang über die Struktur

Schulmathematik



(1) Ein Vektor ist eine Pfeilklasse.

(2) Ein Vektor ist eine Verschiebung, also eine Änderung der Lage.



(3) Ein Vektor ist ein n-Tupel.

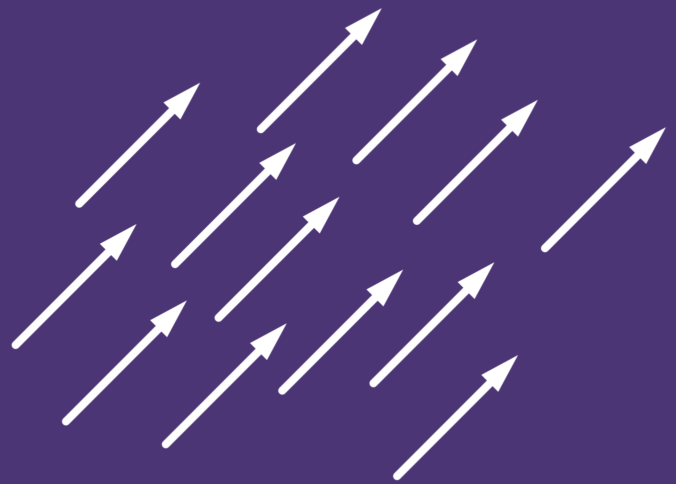
- Ein Vektor $\vec{v}$ ist als n-Tupel ein Element des $\mathbb{R}^n$.
- Er kann je nach Bedarf als Zeilenvektor $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ oder auch als Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ geschrieben werden.

 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



Probleme mit dem Pfeilklassenmodell

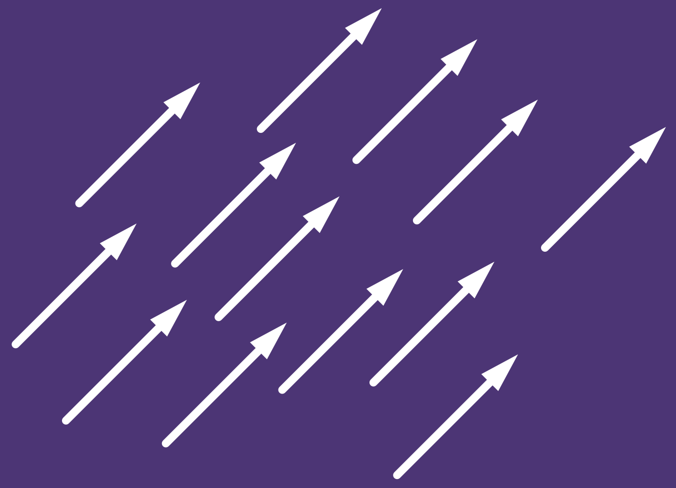
- Erfüllt Vektorraumaxiome, aber Probleme mit der Definition der Rechengesetze über Repräsentanten
- Einführung der Rechenoperationen und Beweise der Rechengesetzte kompliziert
  ⇒ Konsequente und saubere Anwendung des Pfeilklassenmodells findet oft nicht statt.
- Nur in der Schulmathematik etabliert.
- Passt nicht zur Denkweise in
  - Analytischer Geometrie
  - und Physik.

 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

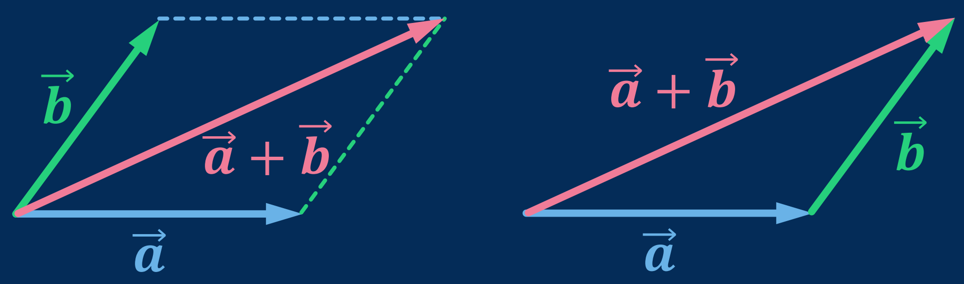
Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



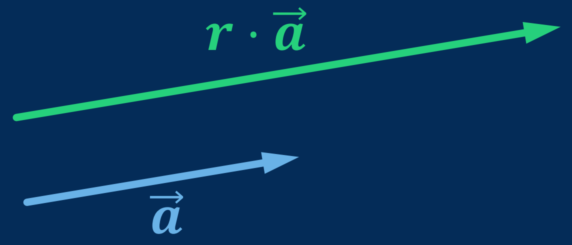
Bei jeder Definition muss die **Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten** gezeigt werden!

Rechenoperationen für Pfeilklassen

- … sind über Repräsentanten definiert.
- Definition der Addition durch Repräsentanten



- Definition der Vervielfachung durch Repräsentanten (für $r > 0$)



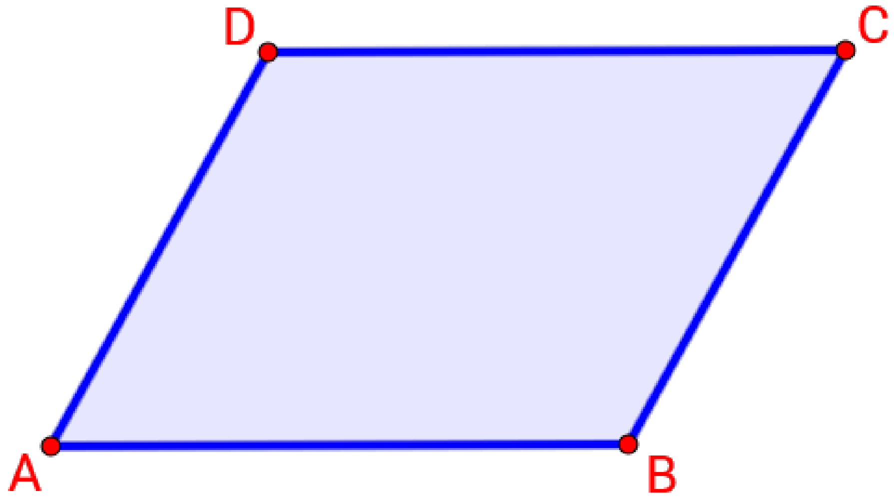
Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14
https://www.geogebra.org/m/p6btdgts

Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Analytischen Geometrie

Aufgabe

Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A, B und D.

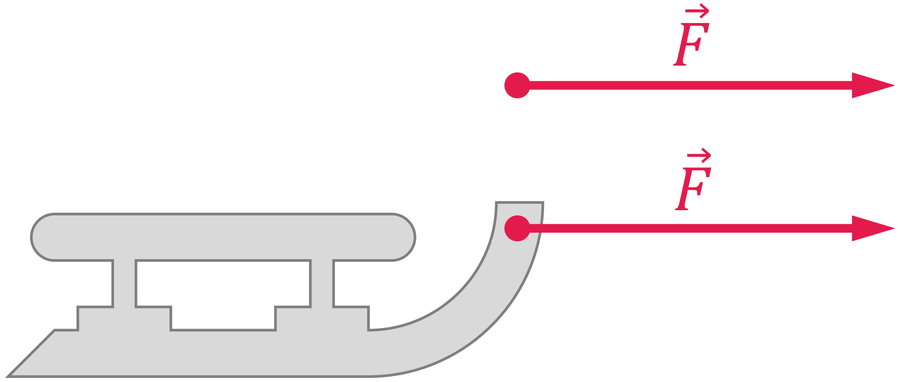
Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts C.

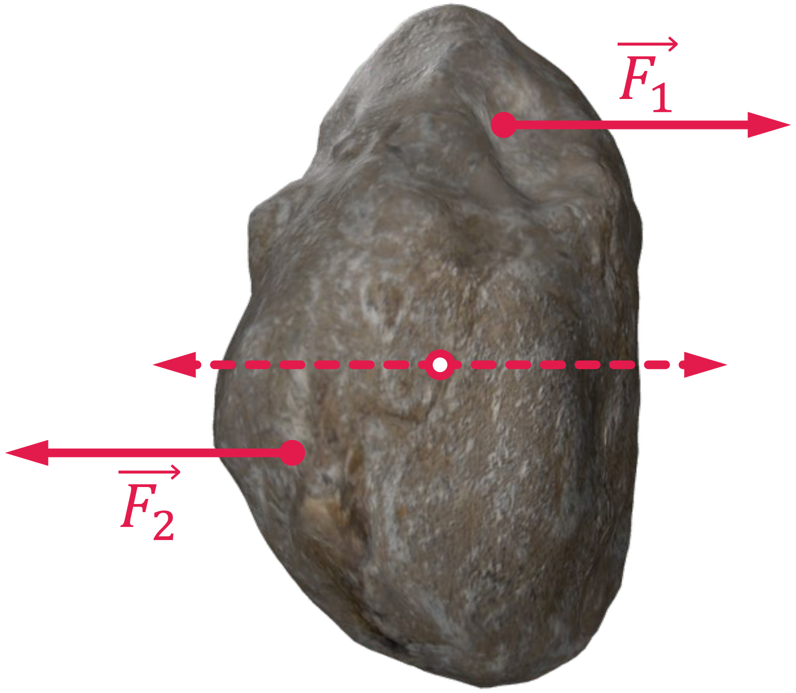


Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. Mathematik lehren, 133, 8-14

Pfeilklassen passen nicht zur Denkweise der Physik

Wo greift die Zugkraft an?





Kraftpfeile dürfen nicht beliebig verschoben werden!

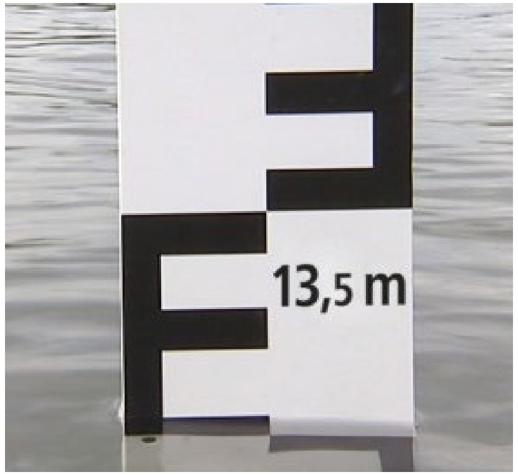
 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Von Koordinaten zu Vektoren

Idee:
Sachverhalte mit Koordinaten und Vektoren darstellen

- **Skalen als Beispiele für eindimensionale Koordinaten**
  Thermometer, Wasserstandsanzeiger, …
- **Beispiele für zweidimensionale Koordinaten**
  Stadtpläne, Schachbrett, Fahrtenschreiber, Festlegung von Geländepunkten, …
- **Beispiele für mehrdimensionale Koordinaten**
  Stückzahlen in einem Lager, Testergebnisse, …

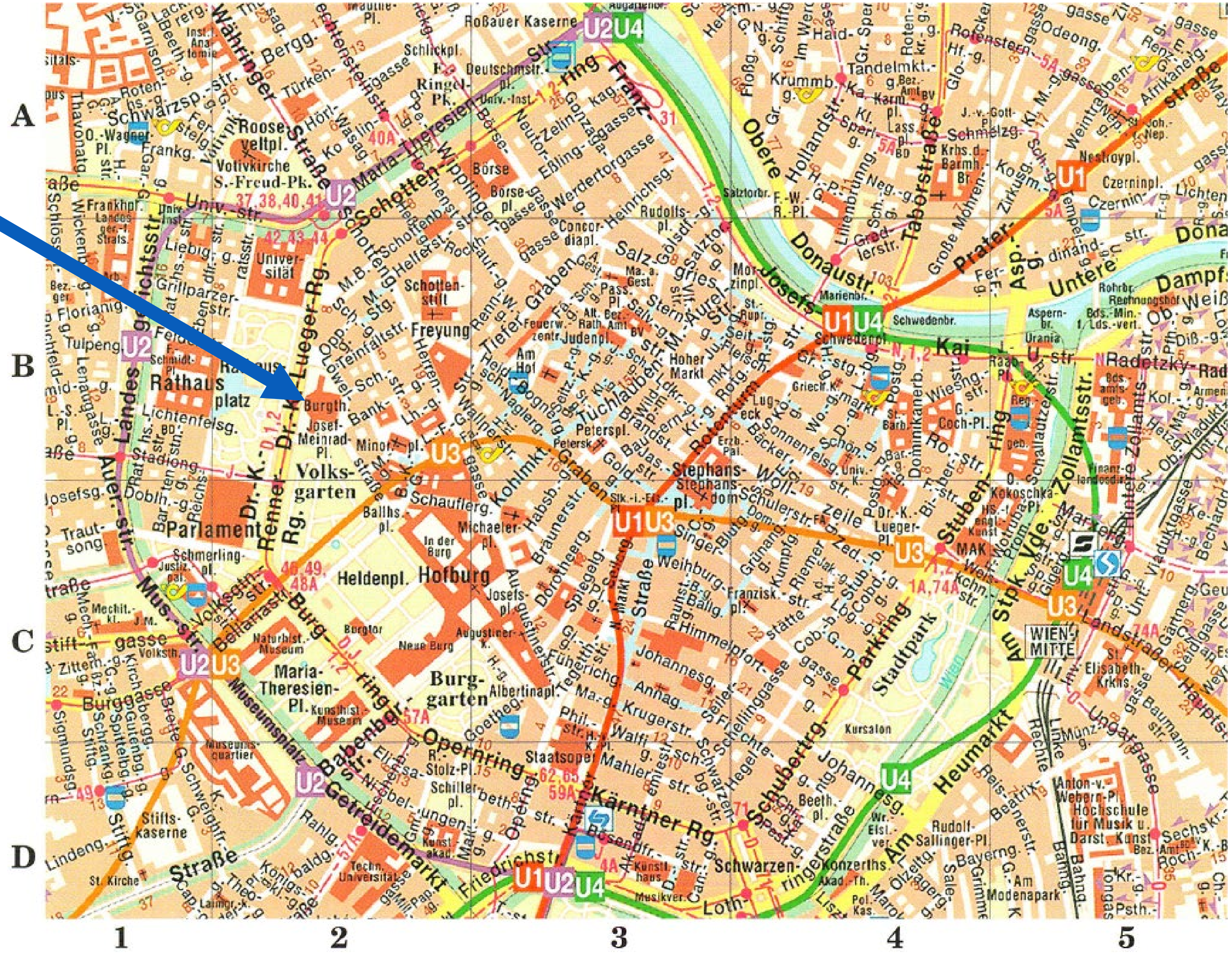
Wichtig: Dieser Zugang zum Vektorbegriff ist bewusst rein arithmetisch.



Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Von Koordinaten zu Vektoren

Das Burgtheater liegt in Planquadrat (B,2).



 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Aufgaben zu Zahlenpaaren und -tripeln

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Tests

Beate und Dora haben zwei Tests absolviert.
Bei jedem Test konnte man 20 Punkte erreichen.
Beate erhielt auf den ersten Test 15 Punkte und auf den zweiten 18 Punkte. Dora erhielt jedes Mal zwei Punkte weniger als Beate.

Gib ein Zahlenpaar an, das ...

- Beates Punktzahlen bei den beiden Tests angibt.
- Doras Punktzahl bei den beiden Tests angibt.
- die Punktzahlen der beiden Mädchen beim ersten Test angibt.
- Die Punktzahlen der beiden Mädchen beim zweiten Test angibt.

$(15|18)$

$(15-2|18-2)$

$(15|15-2)$

$(18|18-2)$

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Aufgaben zu Zahlenpaaren und -tripeln

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Produktionskosten

Eine Firma erzeugt drei Waren. Die Stückpreise der Waren sind 115 €, 135 € und 140 €.

Im Lager befinden sich von diesen Waren 728, 644 bzw. 840 Stück, bestellt wurden 411, 433 bzw. 596 Stück. Es fallen Produktionskosten von 65 €, 70 € bzw. 72 € pro Stück an.

a) **B**eschreibe die Stückpreise, den Lagerbestand, die Bestellzahlen und die Produktionskosten jeweils durch ein Zahlentripel.

b) **D**ie Produktionskosten steigen um 5 € pro Stück. Deshalb erhöht die Firma die Stückpreise ebenfalls um 5 € pro Stück. Dadurch sinken die Bestellungen für die erste Ware um 56 Stück, für die zweite Ware um 112 Stück und für die dritte Ware um 134 Stück. Um weitere Kosten zu sparen, wird der Lagerbestand um ein Viertel gesenkt. Wie lauten jetzt die Zahlentripel?

Stückpreise: $(115€|135€|140€)$

Lagerbestand: $(728|644|840)$

Bestellzahlen: $(411|433|596)$

Produktionskosten: $(65€|70€|72€)$

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Vektorterme & -formeln aufstellen & interpretieren

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Warenlager

Eine Firma verkauft zwei Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. Der Vektor $A = (a_1|a_2)$ gibt die Stückzahlen der beiden Waren im ersten Lager, der Vektor $B = (b_1|b_2)$ die Stückzahlen der beiden Waren im zweiten Lager an. Der Vektor C gebe die Stückzahlen der beiden Waren in beiden Lagern zusammen an.

a) **D**rücke C durch A und B aus.

b) **W**as gibt der Vektor $B - A$ an?

c) **W**as sagt die Gleichung $B = 2 \cdot A$ aus?

d) **D**rücke in diesem Fall C durch A aus.

Rabatte

Die Verkaufspreise (in Euro) von vier Waren werden durch den Vektor $V = (v_1|v_2|v_3|v_a)$ angegeben. Bei Großabnahme erhält man 35 % Rabatt. Es sei V' der Vektor der Preise bei Großabnahme und R der Vektor der Rabatte.

a) **W**elche Beziehung besteht zwischen R und V?

b) **W**elche Beziehung besteht zwischen V' und V?

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel

Vektorterme & -formeln aufstellen & interpretieren

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zimmerpreise

Ein Hotel hat 25 Zimmer. Der Vektor $P \in \mathbb{R}^{25}$ gibt die Zimmerpreise an, der Vektor $B \in \mathbb{R}^{25}$ gibt an, wie oft jedes Zimmer im laufenden Monat belegt war.

a) **D**rücke die Gesamteinnahmen G des Hotels im laufenden Monat durch P und B aus.

b) **I**m nächsten Monat werden die Zimmerpreise um 5% erhöht. Drücke wiederum G durch P und B aus.

Firmenbestellung

Eine Firma bestellt 100 Waren. Die Stückzahlen der bestellten Waren seien $s_1, s_2, \dots, s_{100}$, die Preise der Waren seien $p_1, p_2, \dots, p_{100}$.

a) **S**chreibe einen Stückzahlvektor S und einen Preisvektor P auf.

b) **W**as bedeutet $S \cdot P$?

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren*, *133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Komponentenweise Erklärung von Rechenoperationen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Addition, Subtraktion, Vervielfachung

- Komponentenweise erklärt
  - $(a_1|a_2) \pm (b_1|b_2) = (a_1 \pm b_1|a_2 \pm b_2)$
  - $r \cdot (a_1|a_2) = (r \cdot a_1|r \cdot a_2)$
- Formeln von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ übertragen
  - $b = 1{,}2 \cdot n$
  - $\vec{b} = 1{,}2 \cdot \vec{n}$

Die Erkenntnis, dass Addition, Subtraktion und Vervielfachung von Vektoren komponenten-weise erklärbar ist, wird anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug erarbeitet.

(Vgl. etwa die Aufgaben auf den Folien 35-38.)

Skalarprodukt

Am Beispiel (Stückpreis, Stückzahl) einführen.

(Vgl. Kapitel 3: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen)

$$(a_1|a_2) \cdot (b_1|b_2) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. JMD 1, 171–187.

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Rechengesetze erarbeiten

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rechengesetze für Zahlenpaare

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — Kommutativität der Vektoraddition
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ — Assoziativität der Vektoraddition
- $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$ — Existenz eines Nullvektors; $\vec{o} = (0|0)$ ist der Nullvektor.
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$ — Existenz eines Gegenvektors zu jedem Vektor; $-\vec{a} = (-a_1|-a_2)$ ist der Gegenvektor zu $\vec{a} = (a_1|a_2)$.
- $(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$ — Assoziativität der Vervielfachung eines Vektors
- $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ — 1. Distributivgesetz
- $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$ — 2. Distributivgesetz
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Rechengesetze werden anhand von Aufgaben mit Anwen-dungsbezug (vgl. etwa die Folien 35-38) erarbeitet.

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“
https://roth.tel/anageo

MaTeGnu

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums

2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren

2.3 Zugänge zum Vektorbegriff

2.4 Geometrische Deutung von Vektoren

2.5 Geraden- und Ebenengleichungen

2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

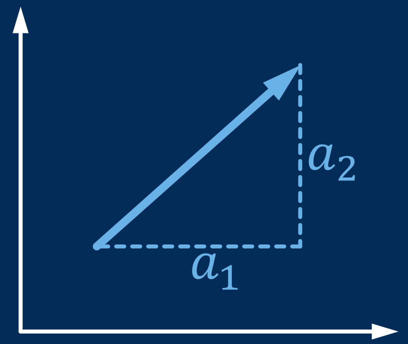
Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, …)

2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

Was ist ein Pfeil?
Ein Pfeil ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

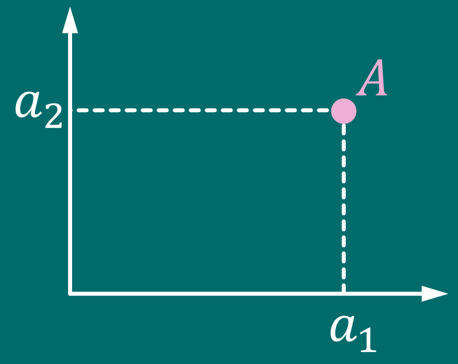
Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entsprechen unendlich viele Pfeile in der Ebene, die alle gleich lang, gleich gerichtet sowie gleich orientiert sind. Die Komponenten können als Änderungen bzw. Verschiebungen in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse gedeutet werden.

Umgekehrt entspricht jedoch jedem Pfeil in der Ebene genau ein Zahlenpaar.



Was ist ein Punkt?
Ein Punkt ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entspricht genau ein Punkt in der Ebene und umgekehrt.

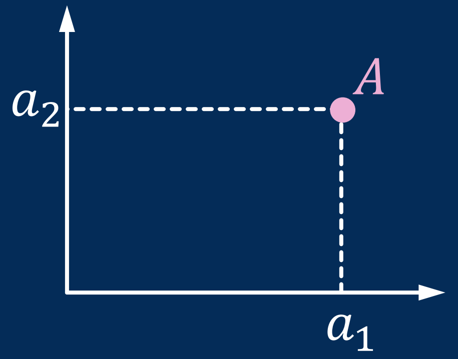


Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980). Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. *JMD, 1*(3), 171–187.

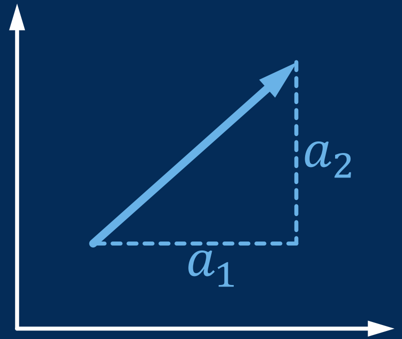
Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, …)

2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

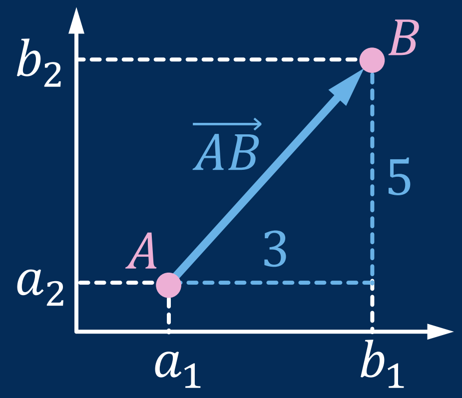
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Zahlenpaar $A = (a_1|a_2)$ als Punkt in der Ebene.



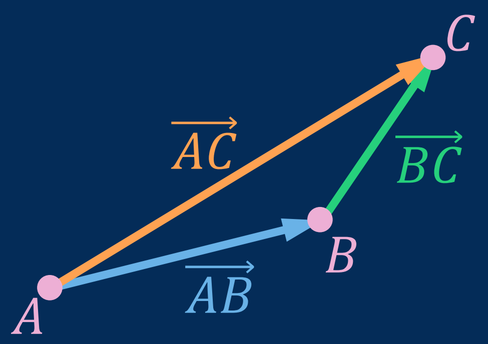
Zahlenpaar $\vec{a} = (a_1|a_2)$ als Pfeil in der Ebene.



Vektor $\overrightarrow{AB}$ gegeben durch Anfangs- und Endpunkt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1|b_2 - a_2)\\ &= (b_1|b_2) - (a_1|a_2)\\ &= B - A\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A + \overrightarrow{AB} = B$$



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\\ &= (B - A) + (C - B)\\ &= C - A\\ &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

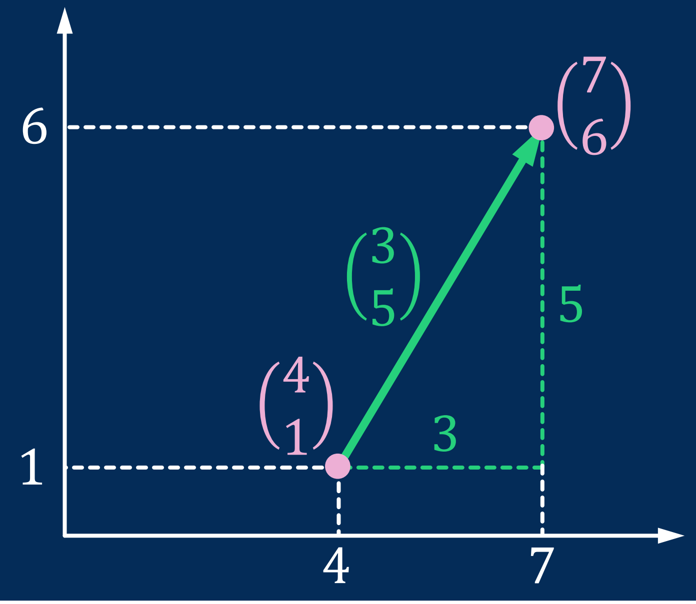
Geometrische Darstellungen der (arithmetischen) Addition

Punkt-Pfeil-Darstellung:

Zustand + Änderung = Zustand

- Reelle Zahlen → Zahlengerade

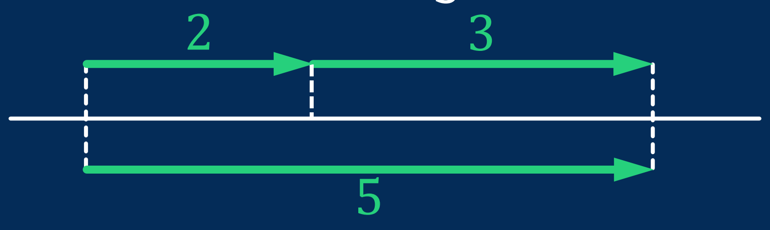
- Vektor (n-Tupel) → Koordinatensystem



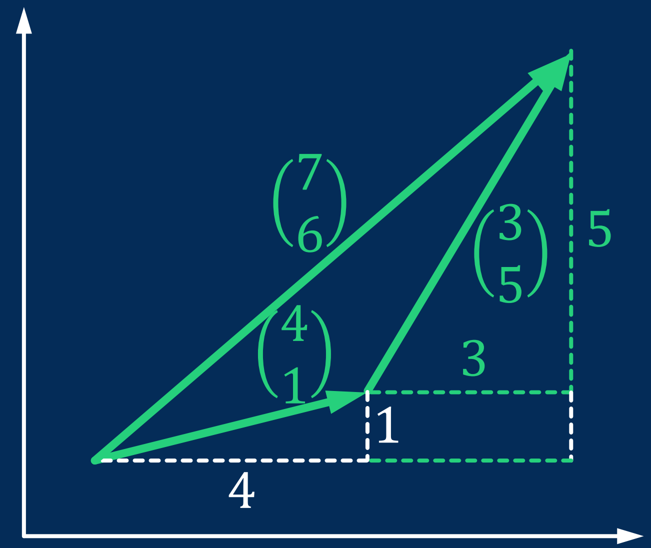
Pfeildarstellung:

Änderung + Änderung = Gesamtänderung

- Reelle Zahlen → Zahlengerade



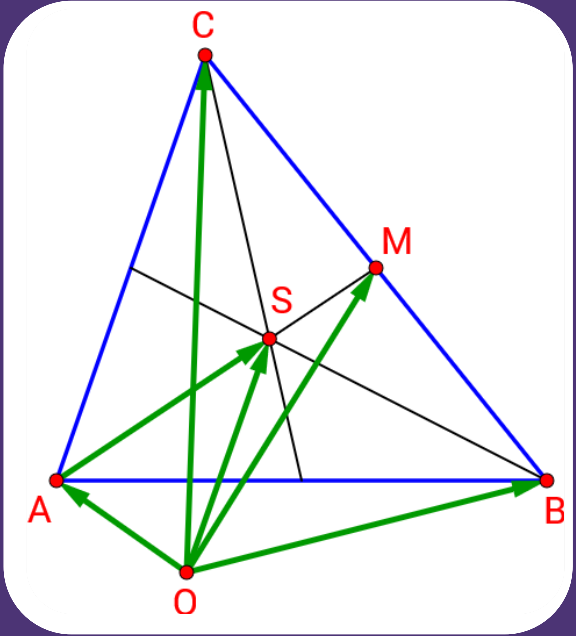
- Vektor (n-Tupel) → Koordinatensystem



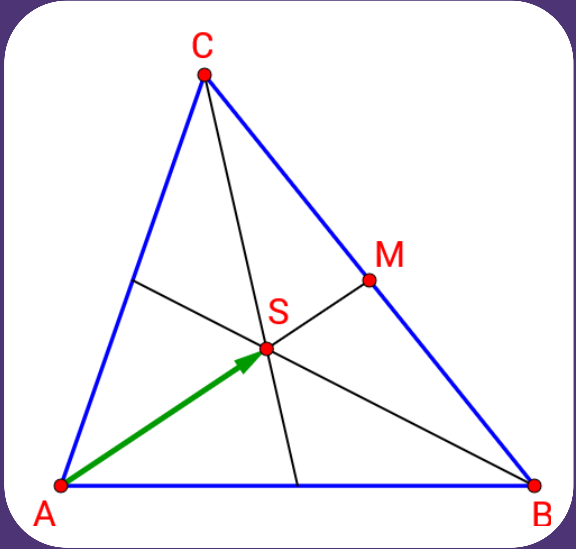
 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14 https://www.geogebra.org/m/kpww4bah

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden

Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



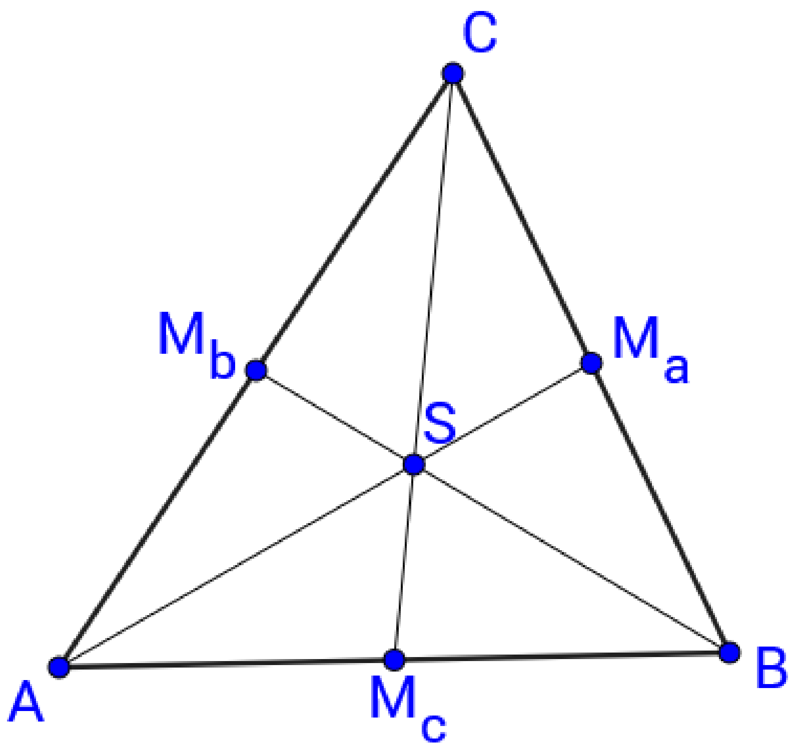
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}$$
$$= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$



$$S = A + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM}$$
$$= A + \tfrac{2}{3} \cdot (M - A)$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot A + \tfrac{2}{3} \cdot M$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot A + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot (B + C)\right)$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot A + \tfrac{1}{3}(B + C)$$
$$= \tfrac{1}{3}(A + B + C)$$

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

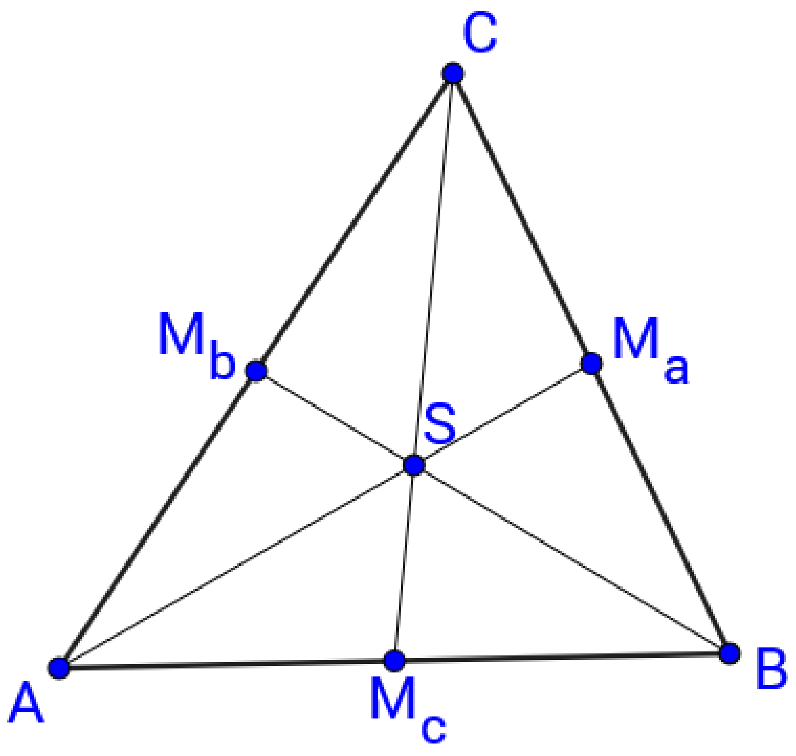


Satz

- In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt S, dem Schwerpunkt.
- Zwischen den Eckpunkten A, B, C und dem Schwerpunkt S besteht die Lagebeziehung $3 \cdot S = A + B + C$.

Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



Beweis

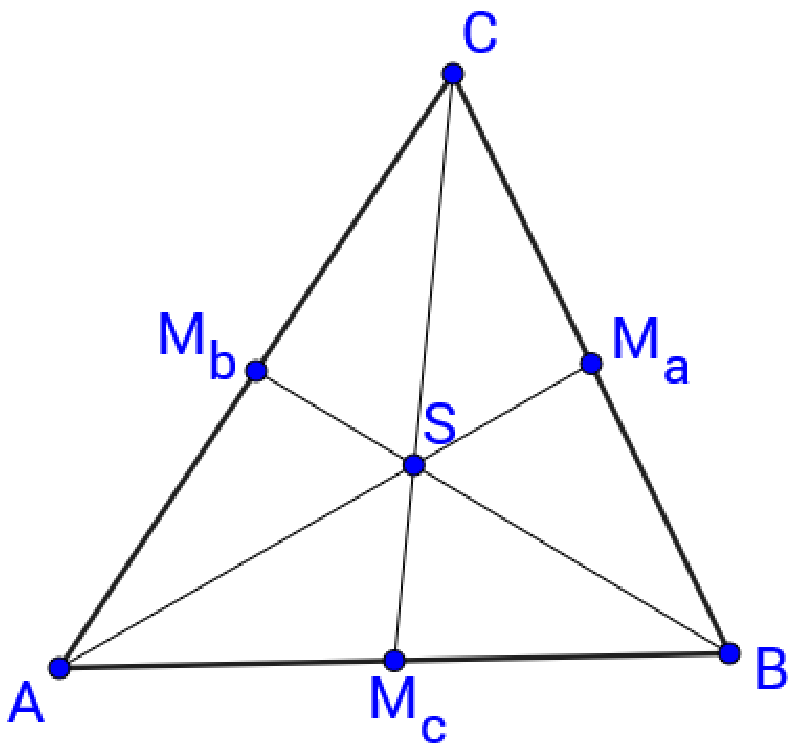
- Die Seitenhalbierenden s_a und s_b sind gegeben durch $s_a\colon X = A + t \cdot \overrightarrow{AM_a}$ und $s_b\colon X = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$.
- Es gibt reelle Zahlen t und u, so dass für den Schnittpunkt S dieser Seitenhalbierenden gilt:
$$A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = S = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$
- Richtungsvektoren $\overrightarrow{AM_a}$ und $\overrightarrow{BM_b}$ als Linearkombinationen von $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BM_b}$ schreiben:

$$\overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM_b} &= \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \left(\tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

 Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

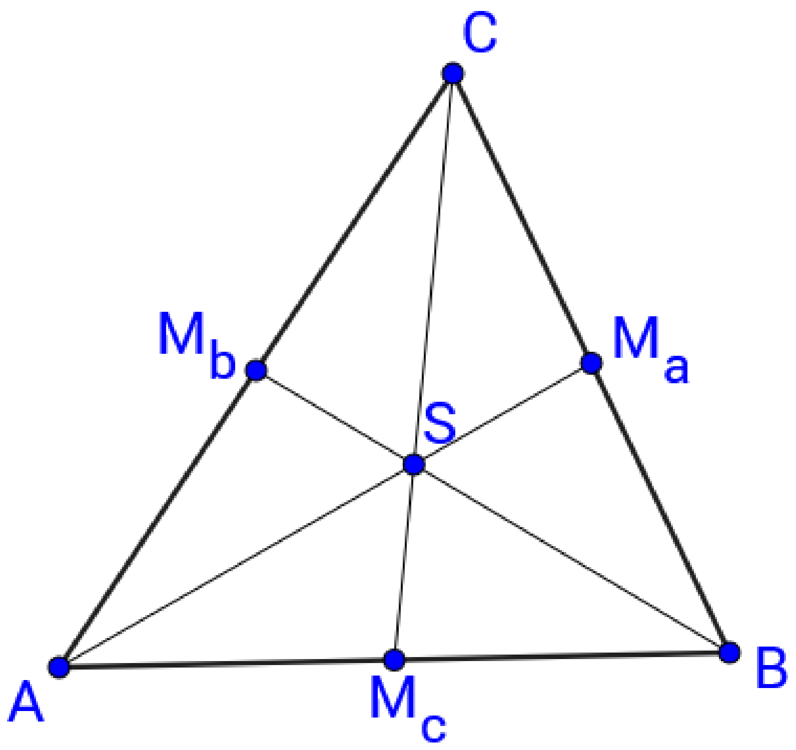


Beweis (Fortsetzung)

- Wir erhalten damit:
$$A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$
$$\Leftrightarrow A + t \cdot \left(-\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = B + u \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$$
$$\Leftrightarrow A - B - t \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{t}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$
$$\Leftrightarrow \left(1 - t - \frac{u}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{u}{2} - \frac{t}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$$
- Weil $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ nicht parallel sind, ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn $1 - t - \frac{u}{2} = 0$ und $\frac{u}{2} - \frac{t}{2} = 0$.
- Lösen dieses Gleichungssystems ergibt: $u = t = \frac{2}{3}$
- Als Schnittpunkt S von s_a und s_b erhält man also:
$$S = A + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_a} = A + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot (B + C) - A\right) = \tfrac{1}{3} \cdot (A + B + C)$$

 Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



Beweis (Fortsetzung)

- Aus $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$ folgt durch nachrechnen:
  $$S = C + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM_c}$$
- Folglich liegt S auch auf der dritten Seitenhalbierenden s_c des Dreiecks.
- Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.
- Der zweite Teil des Satzes folgt direkt aus
  $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$.
  $\Leftrightarrow 3 \cdot S = A + B + C$

■

 Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

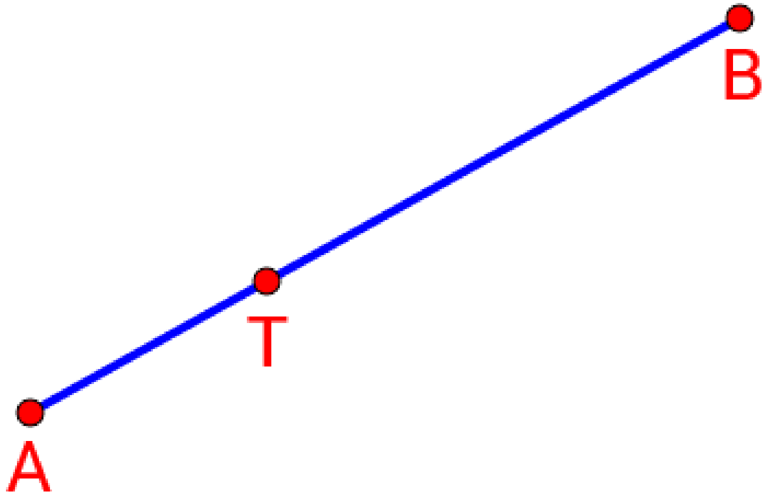
Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Teilung einer Strecke

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

Die Strecke AB wird durch den Punkt T im Verhältnis 1 ∶ 2 geteilt.

Drücke T durch A und B aus.



1. Lösungsmöglichkeit

$$T = A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow T = A + \frac{1}{3} \cdot (B - A)$$
$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{3} \cdot (2A + B)$$

2. Lösungsmöglichkeit

$$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow T - A = \frac{1}{3} \cdot (B - A)$$
$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{3} \cdot (2A + B)$$

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14
Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 44-49

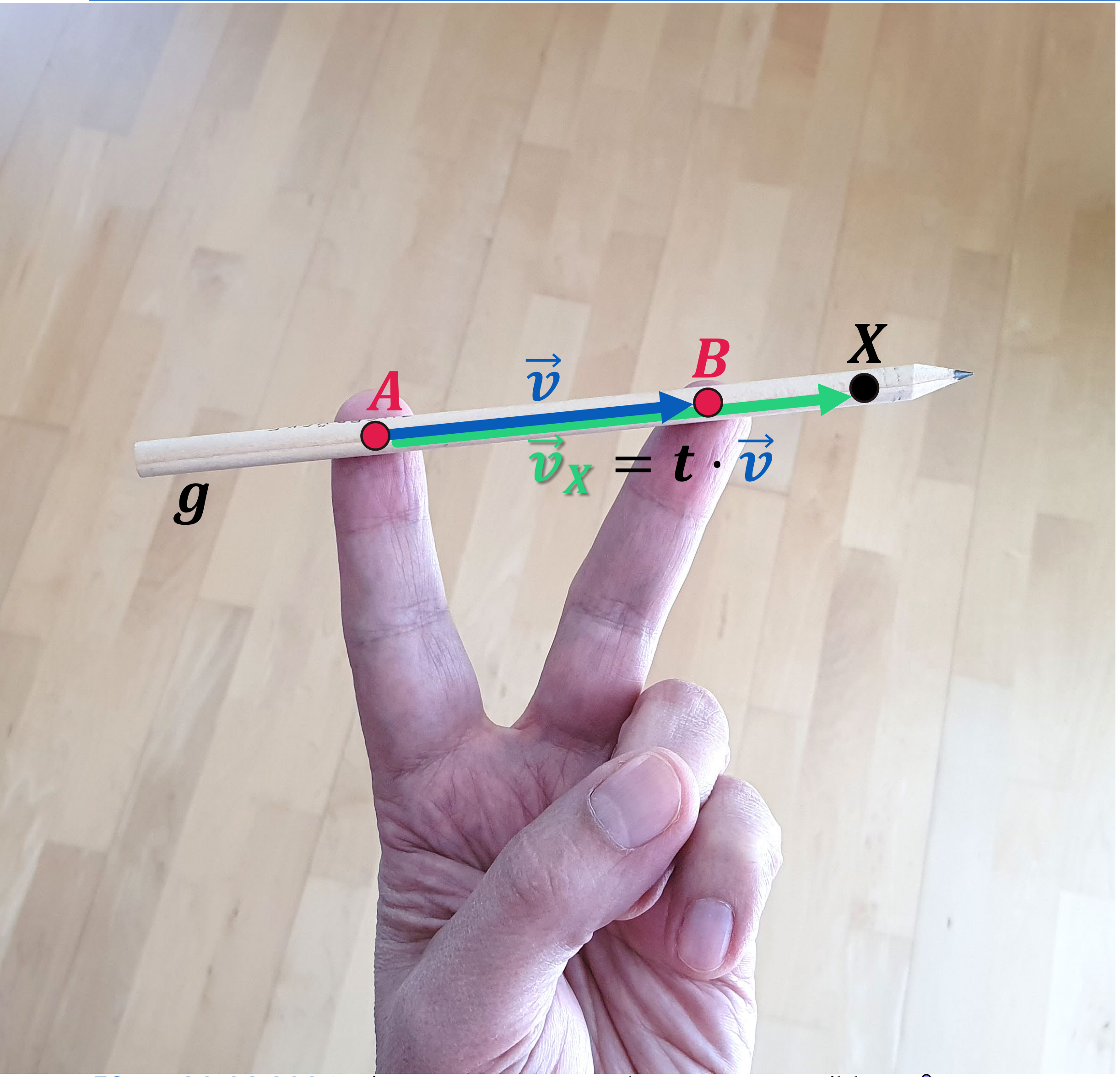
R TU P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

Geradengleichung: Parameterform



Bemerkung

- Eine Gerade g ist eindeutig festgelegt über
  - zwei verschiedene Punkte A, B bzw.
  - einen Anfangspunkt A und einen Richtungsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
- Für jeden Punkt X der Gerade g gibt es eine reelle Zahl t, so dass gilt:

$$X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

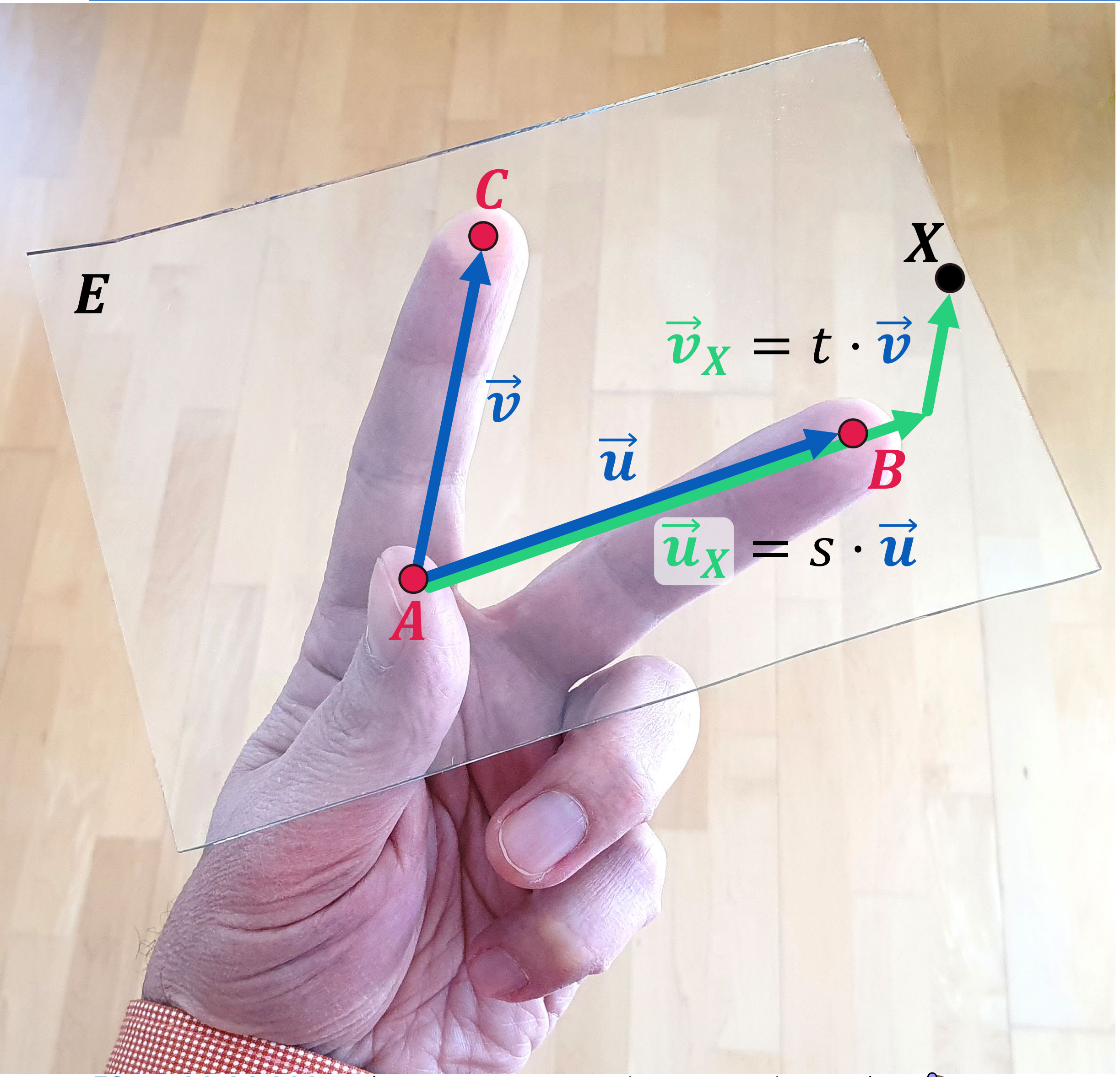
Geradengleichung: Parameterform

Eine Gerade g ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als

$$g = \{X \mid X = A + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz $\quad g\colon X = A + t \cdot \vec{v},\quad t \in \mathbb{R}.$

Ebenengleichung: Parameterform



Bemerkung

- Eine Ebene E ist eindeutig festgelegt über
  - drei nicht kollineare Punkte A, B, C bzw.
  - einen Anfangspunkt A und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
- Für jeden Punkt X der Ebene E gibt es zwei reelle Zahlen s und t, so dass gilt:
  $$X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Ebenengleichung: Parameterform

Eine Ebene E ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als:

$$E = \{X \mid X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ \ s, t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz

$$E: X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Ebenengleichung: Koordinatenform

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Beispiel: $x + 2y + 3z = 6 \quad (*)$

Vermutung: Die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ der Gleichung $x + 2y + 3z = 6$ ist eine Ebene.

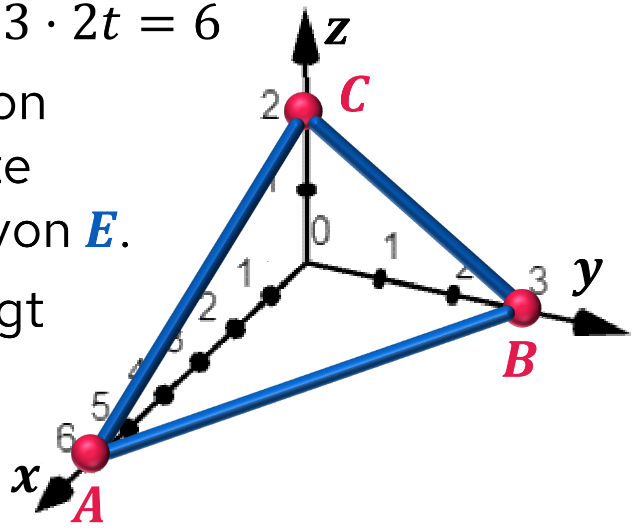
Vorgehen

- Setzt man $y = z = 0$ dann ergibt sich $x = 6$.
- Daraus ergibt sich der Punkt $\boldsymbol{A} = (6|0|0)$, den man als Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der x-Achse deuten kann.
- $x = z = 0$ liefert $y = 3$. $\boldsymbol{B} = (0|3|0)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der y-Achse.
- $x = y = 0$ liefert $z = 2$. $\boldsymbol{C} = (0|0|2)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der z-Achse.
- $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ heißen **Spurpunkte** und man kann vermuten, dass die von ihnen bestimmte Ebene die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ ist.

- Zu zeigen: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist der Punkt $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ Lösung der Gleichung $(*)$.
- Einsetzen der Punktkoordinaten liefert:

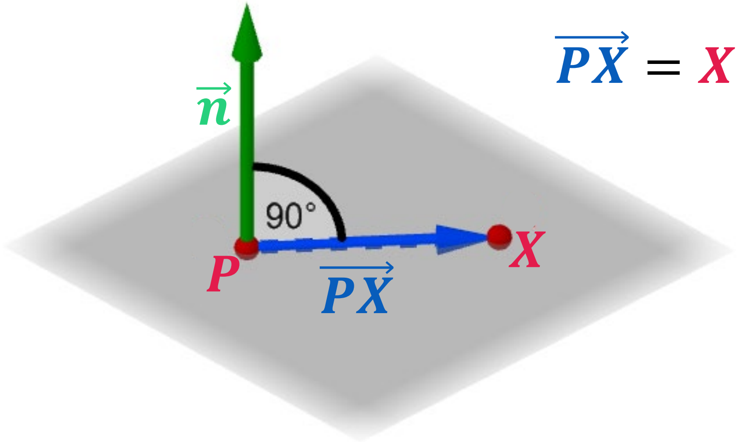
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6s - 6t \\ 3s \\ 2t \end{pmatrix}$$

- Einsetzen in die Gleichung $(*)$ ergibt: $(6 - 6s - 6t) + 2 \cdot 3s + 3 \cdot 2t = 6$
- Also ist $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{E}$ und die von $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ aufgespannte Ebene eine Teilmenge von $\boldsymbol{E}$.
- Durch Nachrechnen zeigt man, dass jede weitere Lösung von $(*)$ wieder in der von den Spurpunkten aufgespannten Ebene liegt.



Ebenengleichung: Normalenform

Ebene mit Normalenvektor beschreiben



$\overrightarrow{PX} = X - P$

- Ein Normalenvektor einer Ebene E ist ein Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, der zu jedem Verbindungsvektor zweier beliebiger Punkte P und X der Ebene E orthogonal ist, für den also gilt: $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$
- Damit folgt für das Skalarprodukt:
$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

Ebenengleichung in Normalenform

Ist P ein Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E, dann kann man alle Punkte X der Ebene schreiben als
$$E = \{X | (X - P) \cdot \vec{n} = 0\}$$
oder kurz:
$$E: (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

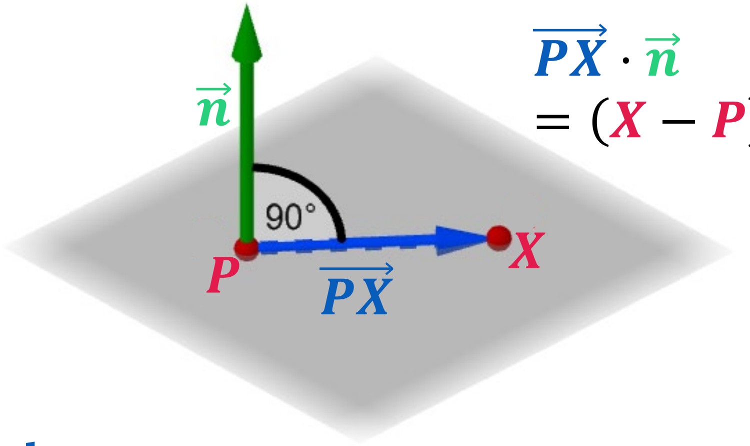
Hesse'sche Normalenform

Ist P ein Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E, dann kann man alle Punkte X der Ebene schreiben als
$$E = \left\{X \middle| (X - P) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0\right\}$$
Oder mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n_0} := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

kurz: $E: (X - P) \cdot \vec{n_0} = 0$

Ebenengleichung: Normalenform

Ebene mit Normalenvektor beschreiben



$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n}$
$= (X - P) \cdot \vec{n} = 0$

Beispiel

Gegeben: Punkt $P = (2,2,1)$
und Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
einer Ebene E.

Für alle Punkte X der Ebene gilt dann
$(X - P) \cdot \vec{n} = 0$, bzw. mit Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$-1 \cdot (x-2) + 3 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-1) = 0$$

$$-1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z$$
$$+\big(-1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1)\big) = 0$$

$$-1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 6$$

Bemerkung

Wie das Beispiel zeigt, lässt sich die Normalenform einer Ebenengleichung in eine Koordinatenform umwandeln, bei der die Koeffizienten die Koordinaten eines Normalenvektors sind.

Satz

Ist $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ eine Gleichung einer Ebene E, dann ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“
https://roth.tel/anageo

MaTeGnu

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

2.1 Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums

2.2 Schülerschwierigkeiten mit Vektoren

2.3 Zugänge zum Vektorbegriff

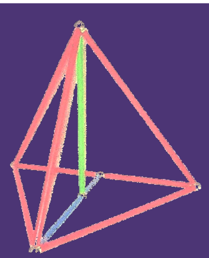
2.4 Geometrische Deutung von Vektoren

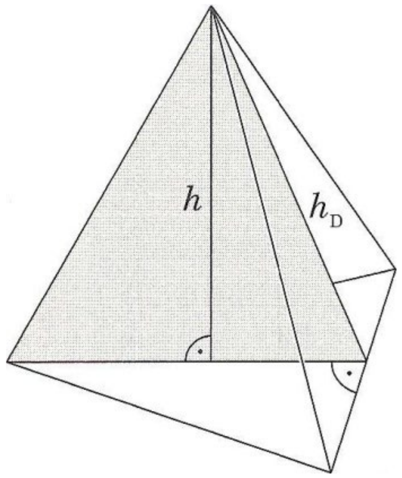
2.5 Geraden- und Ebenengleichungen

2.6 Objektstudien → Aufgabenbeispiele

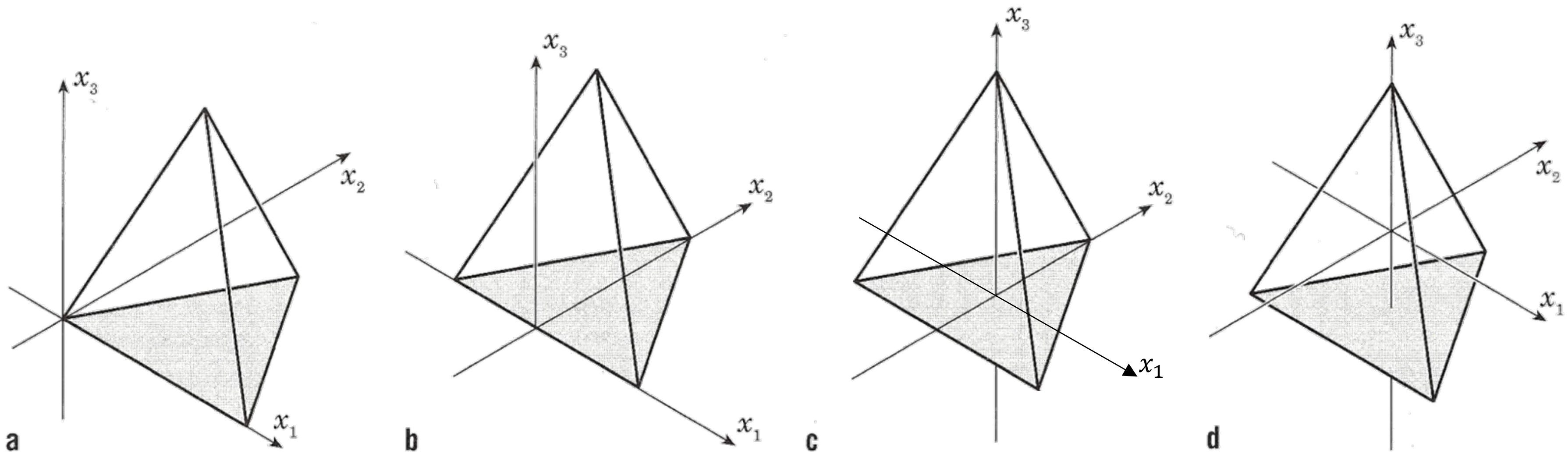
Beispiel: Tetraeder

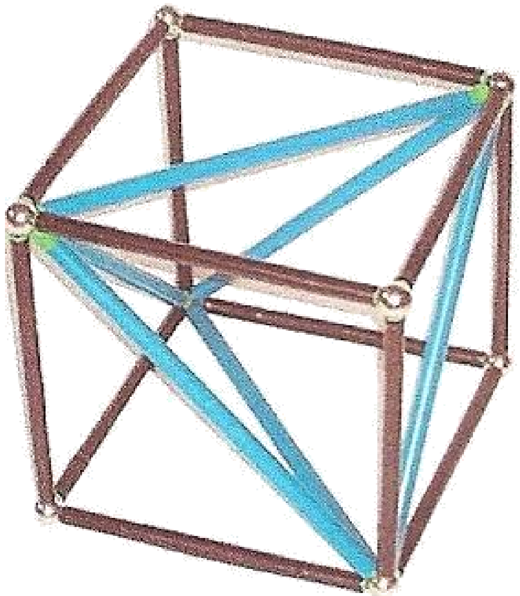
Aufgabe 1
Wie hoch ist ein gleichseitiger Tetraeder.





Aufgabe 2:
Wie können die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders der Kantenlänge a durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben werden?



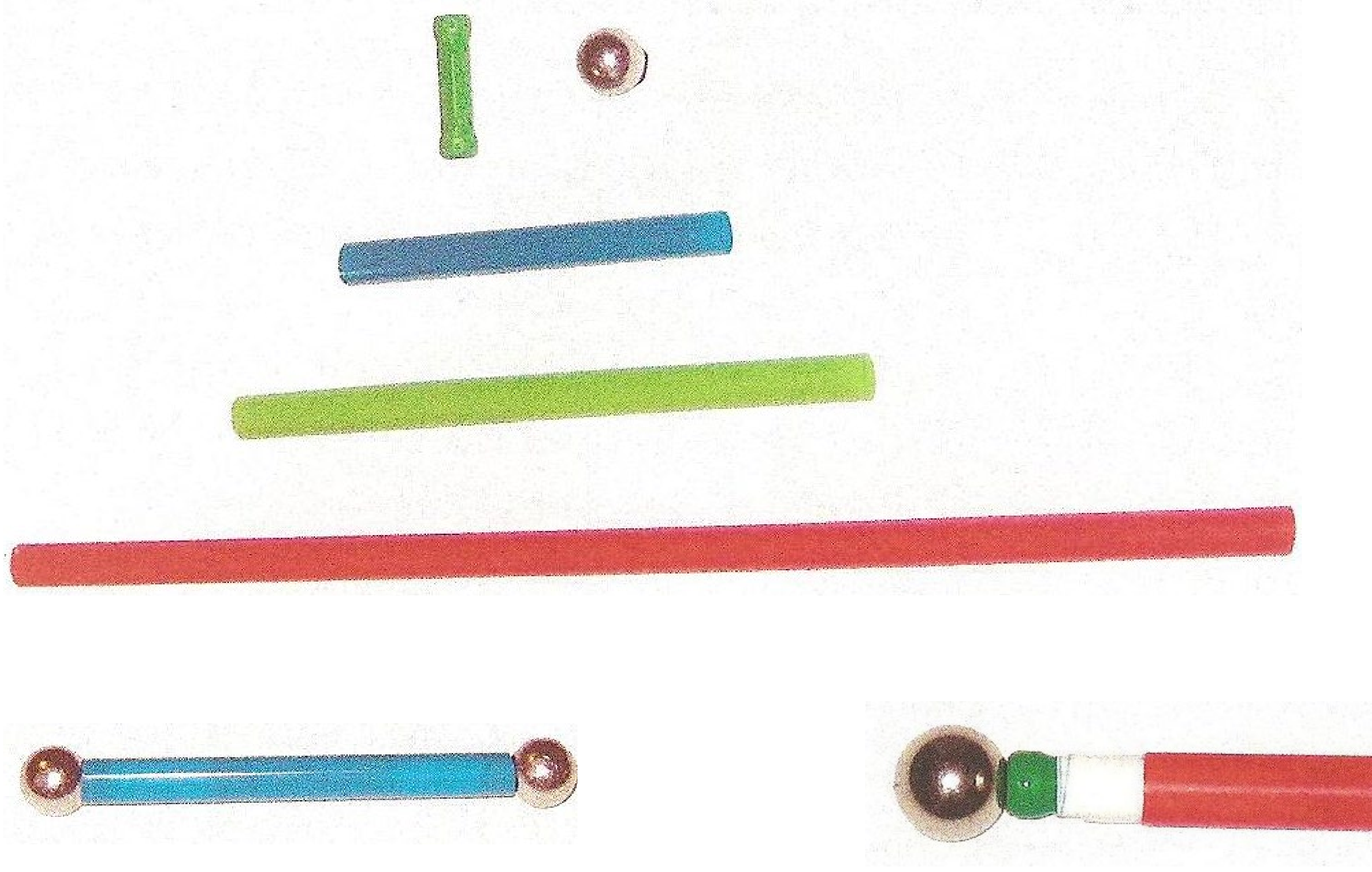


 Wittmann, G. (2003). Zentrale Ideen der Analytischen Geometrie. Mathematik lehren 119, 47-51

Exkurs: Modellbaukasten

Modellbaukasten

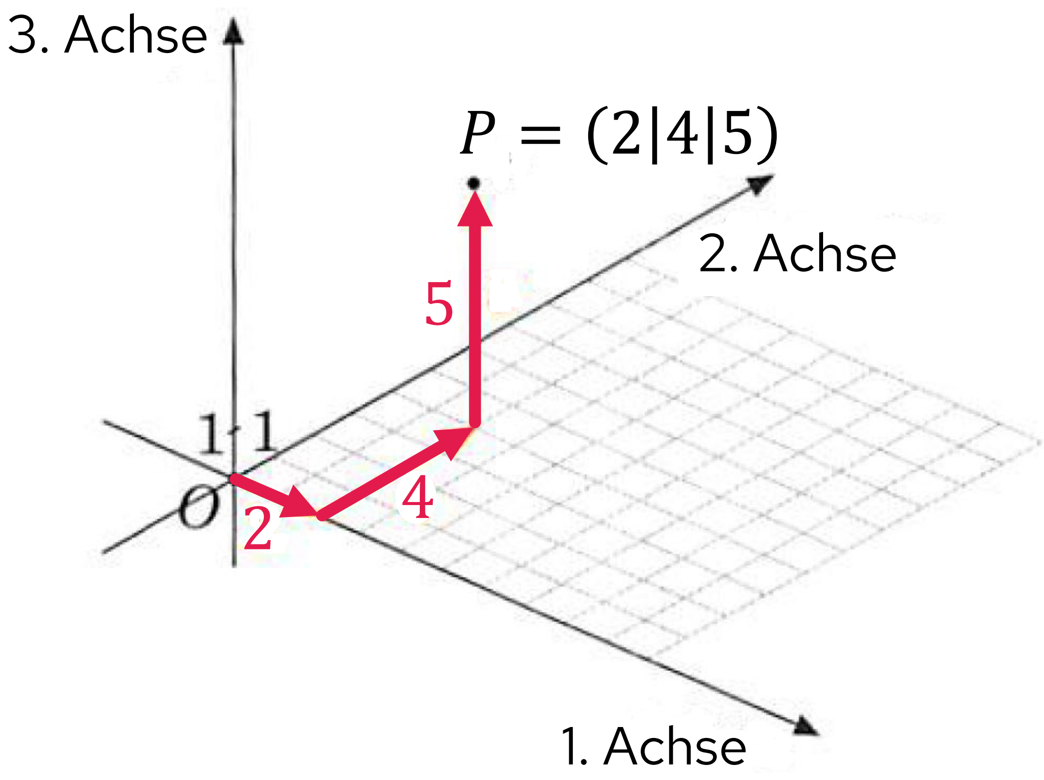
Mit Hilfe bunter Strohhalme und eines Magnetbaukastens lassen sich auf einfach Weise Kanten-modelle herstellen. Die Magnet-stäbchen müssen ggf. mit etwas Papier umwickelt werden, so dass sie nicht so leicht heraus-rutschen. Damit alles zusammen passt, müssen vorher die Kantenlängen berechnet und die Strohhalme entsprechend zugeschnitten werden.

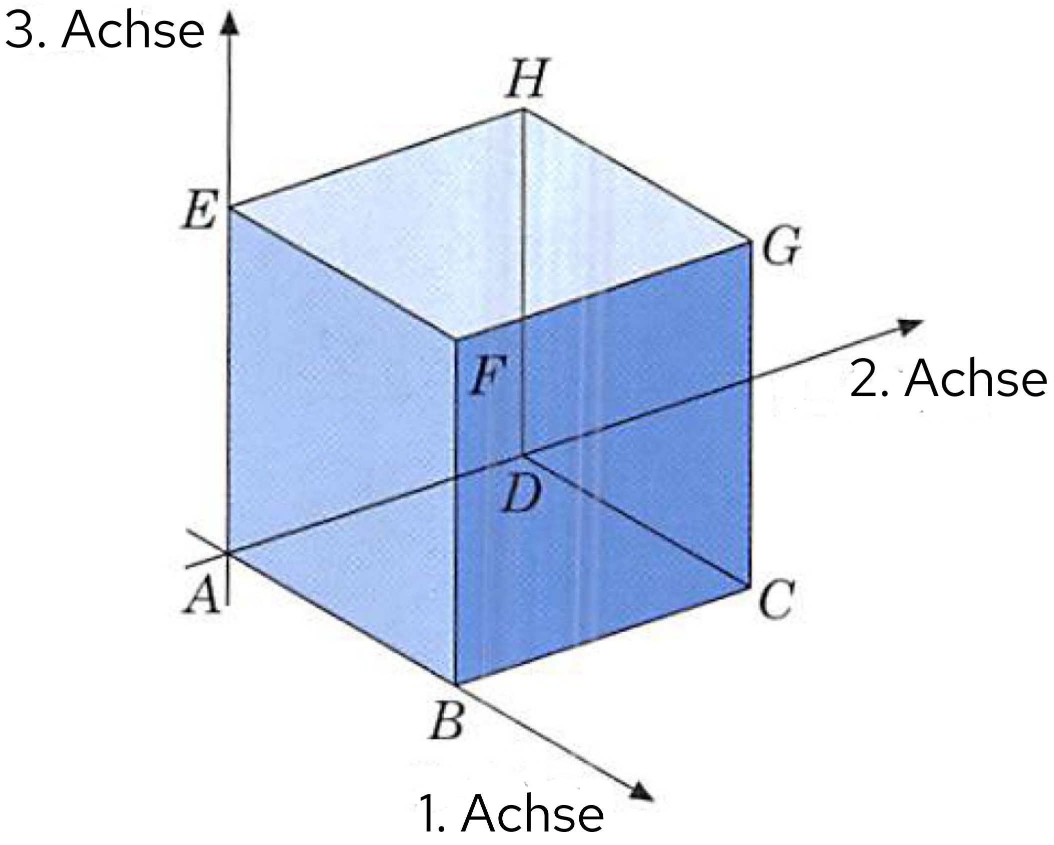


Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Lineare Algebra, Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 2010, 20

Von Koordinaten zu Vektoren

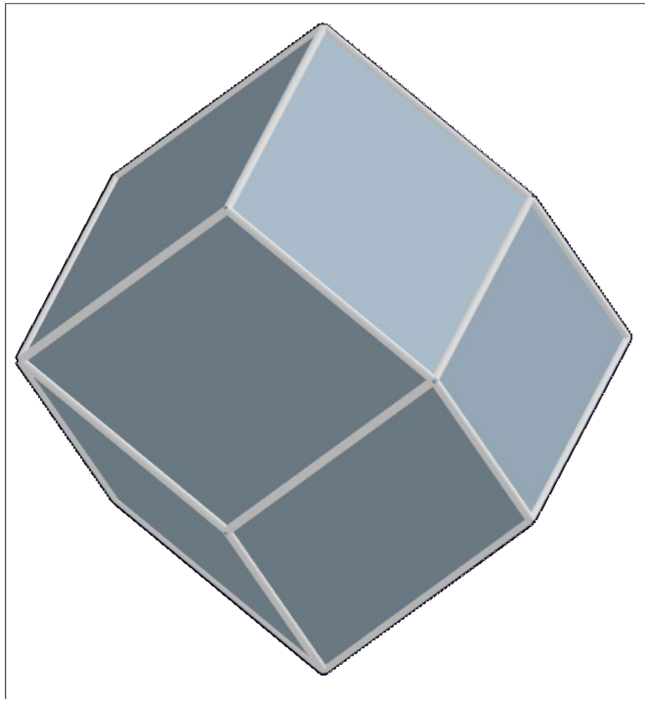
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

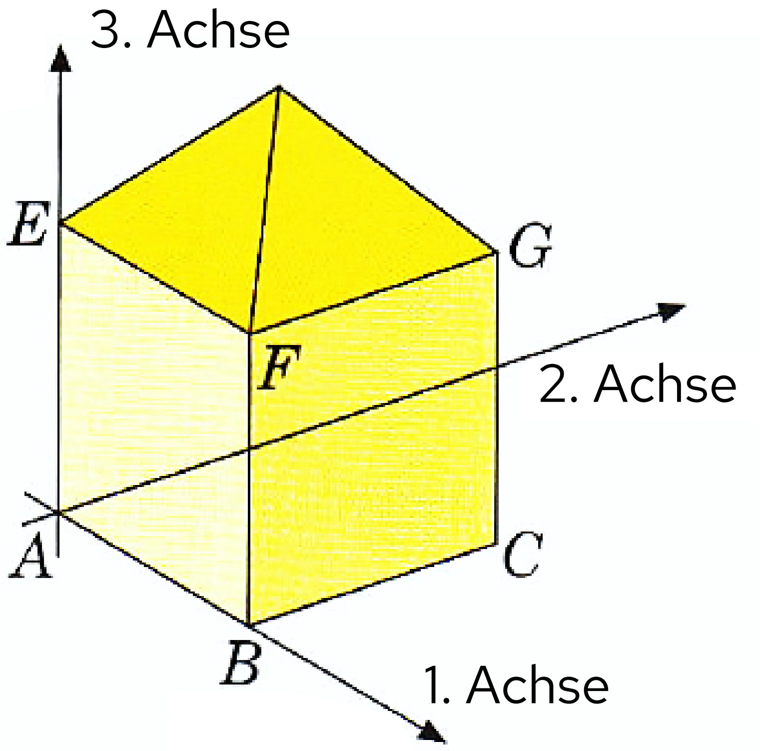




Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 14
Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Rhombendodekaeder



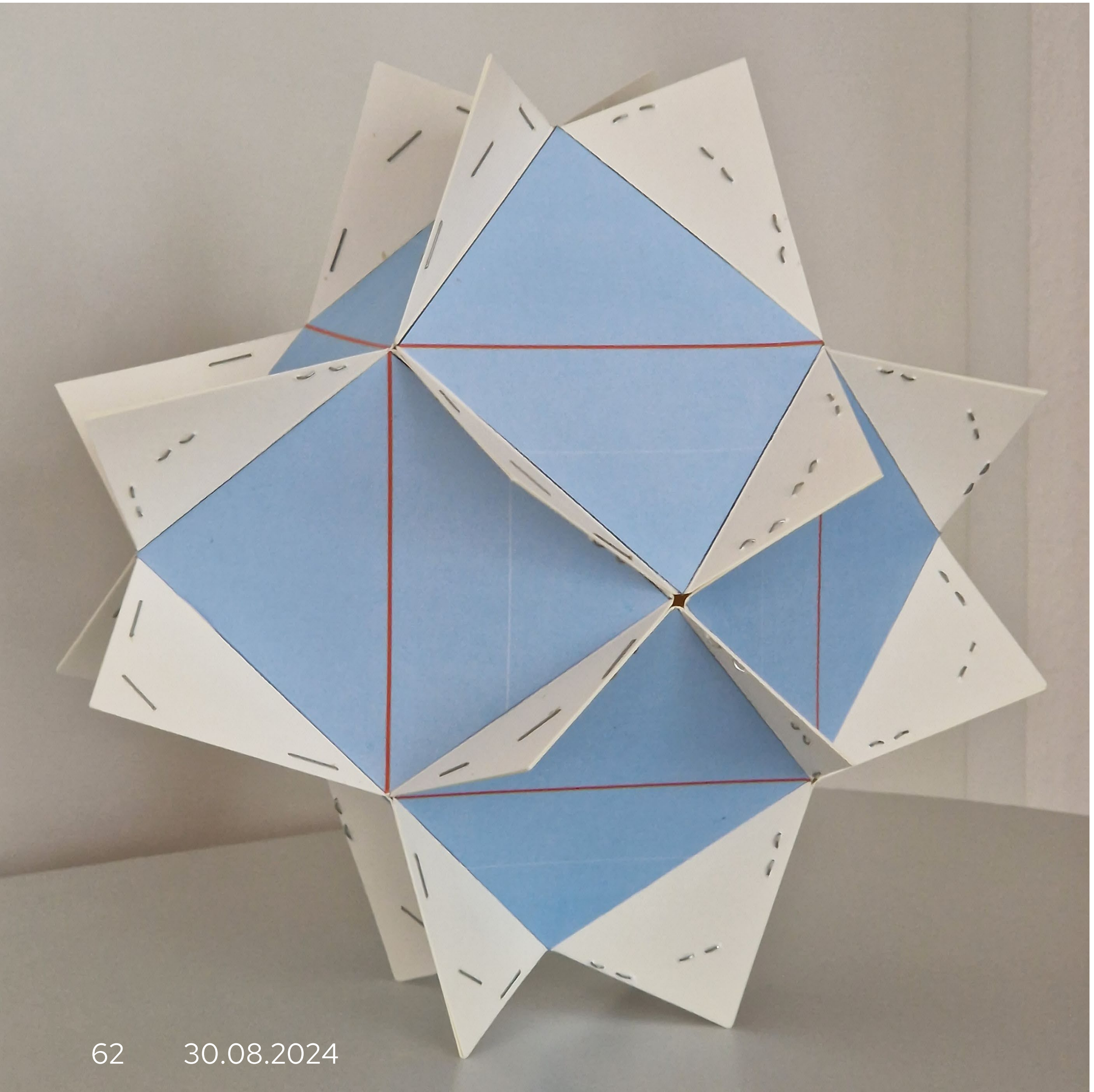


Rhombendodekaeder
Errichtet man über jeder der sechs Flächen eines Würfels eine gerade quadratische Pyramide, mit geeigneter Höhe, so erhält man ein Rhombendodekaeder. Dies ist ein von zwölf zueinander kongruenten Rauten (Rhomben) begrenzter Körper.

Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 15

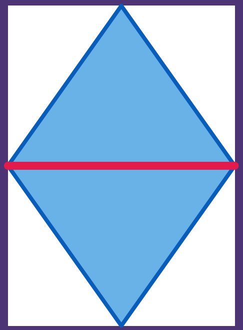
https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Rhombendodekaeder

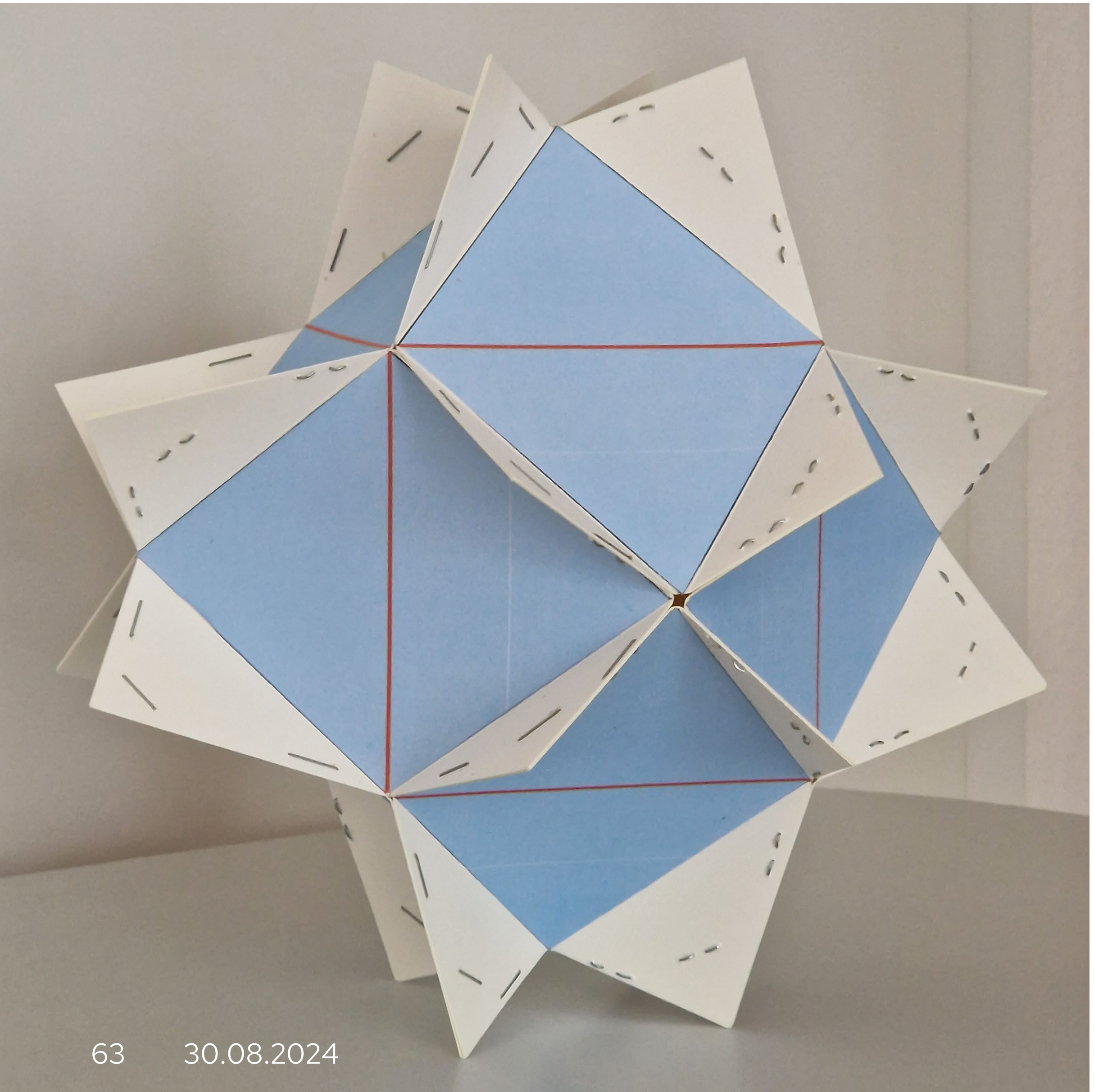


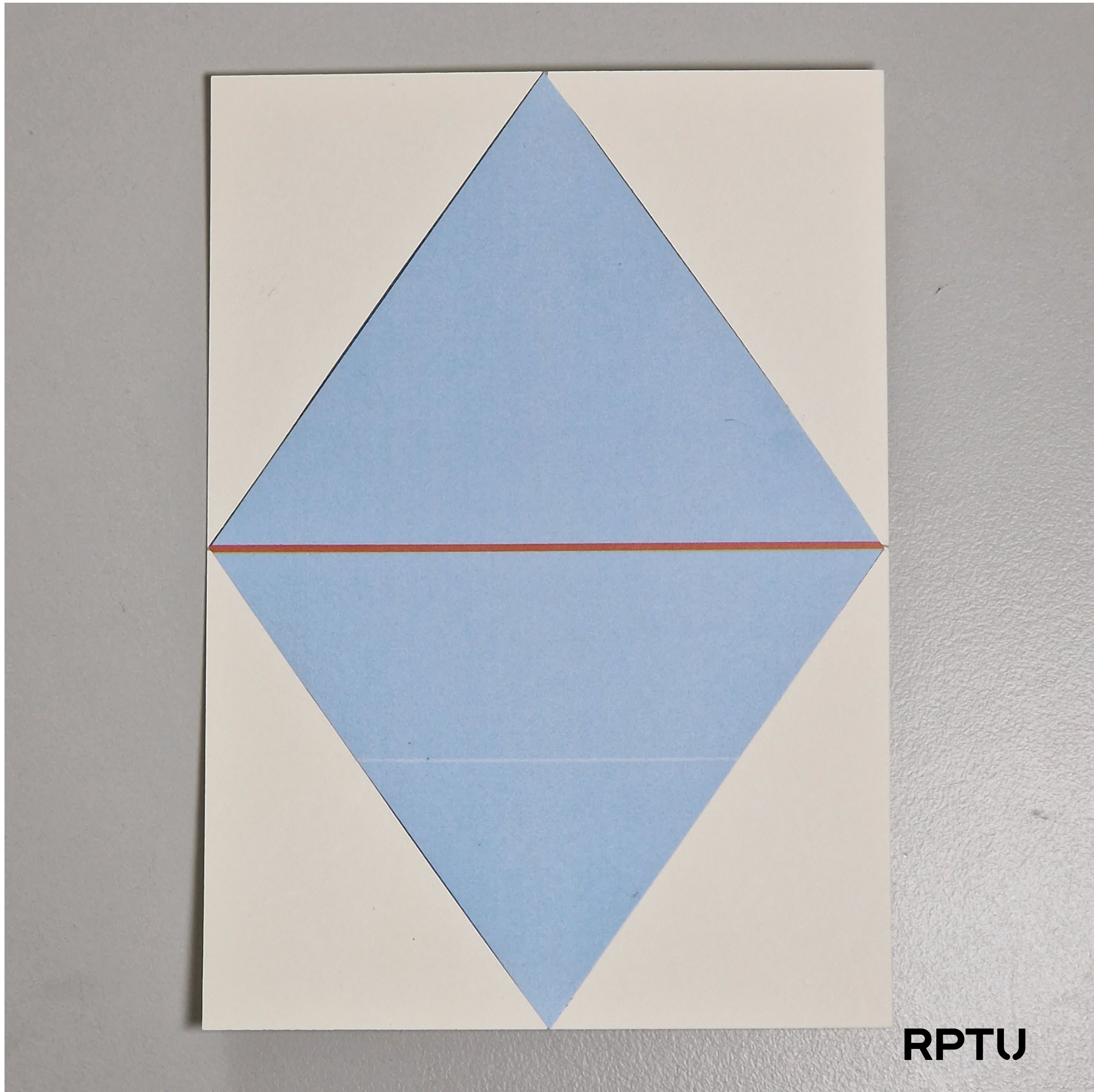
Rhombendodekaeder aus Postkarten

- Mittelpunkte benachbarter Seiten verbinden.
- Ergebnis: Eine Raute (Rhombus) und vier rechtwinklige Dreiecke.
- Kürzere Diagonale in die Raute einzeichnen.
- Rechtwinklige Dreiecke an der Hypotenuse nach oben falten.
- Geeignete Anzahl an Postkarten auf diese Weise vorbereiten . (Wie viele werden benötigt?)
- Je ein rechtwinkliges Dreieck von zwei Postkarten zur Deckung bringen und zusammentackern.

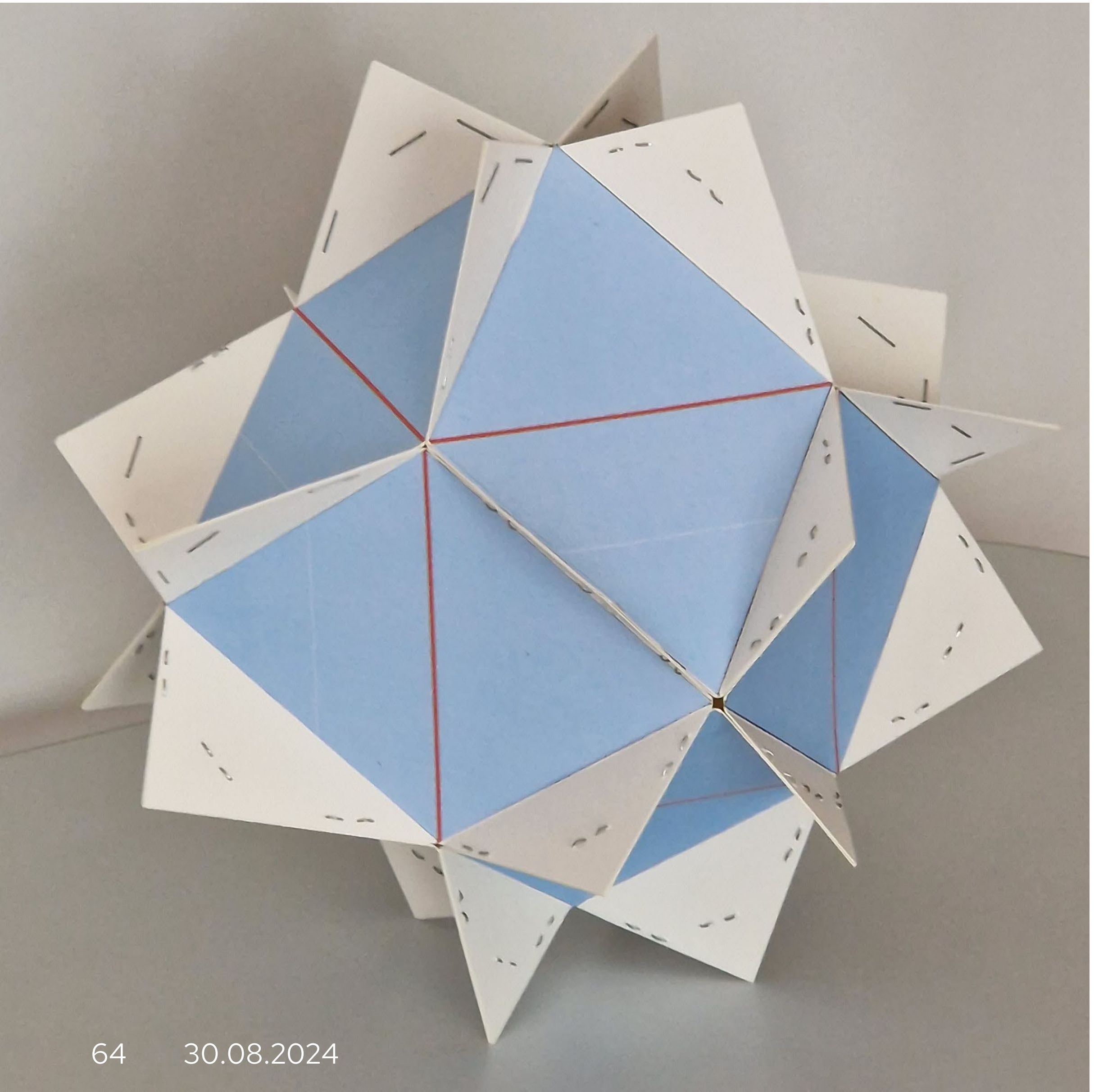


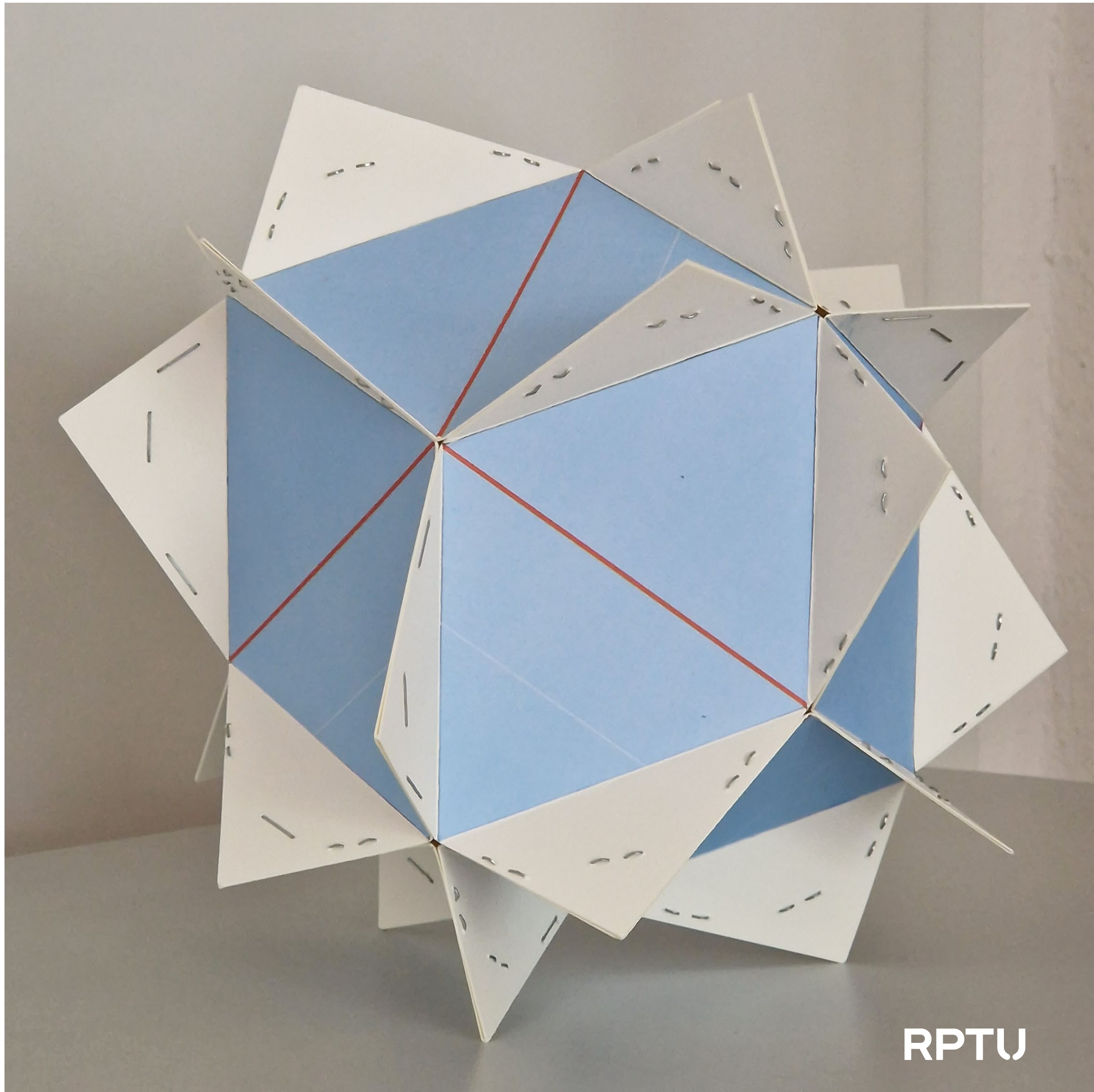
Rhombendodekaeder



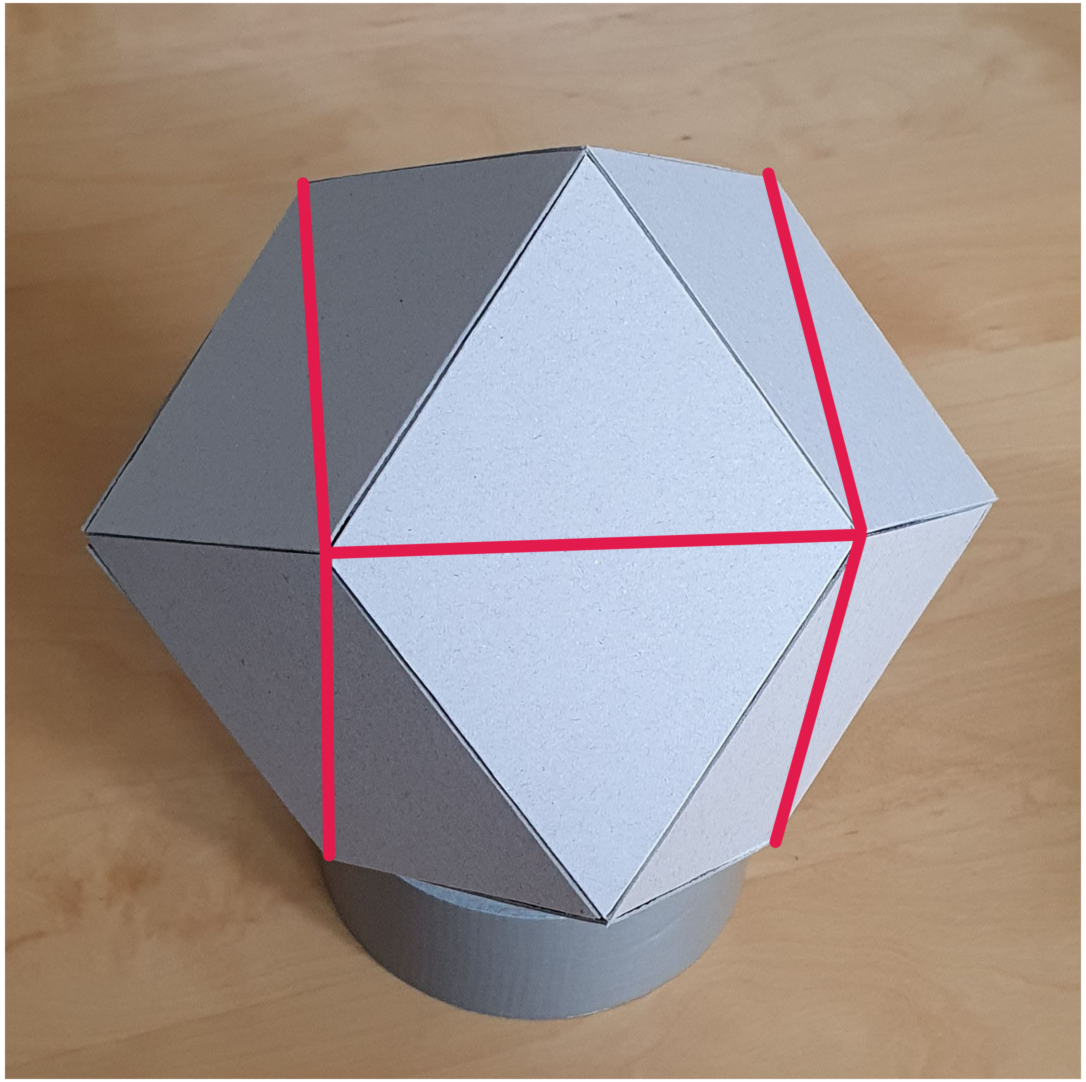


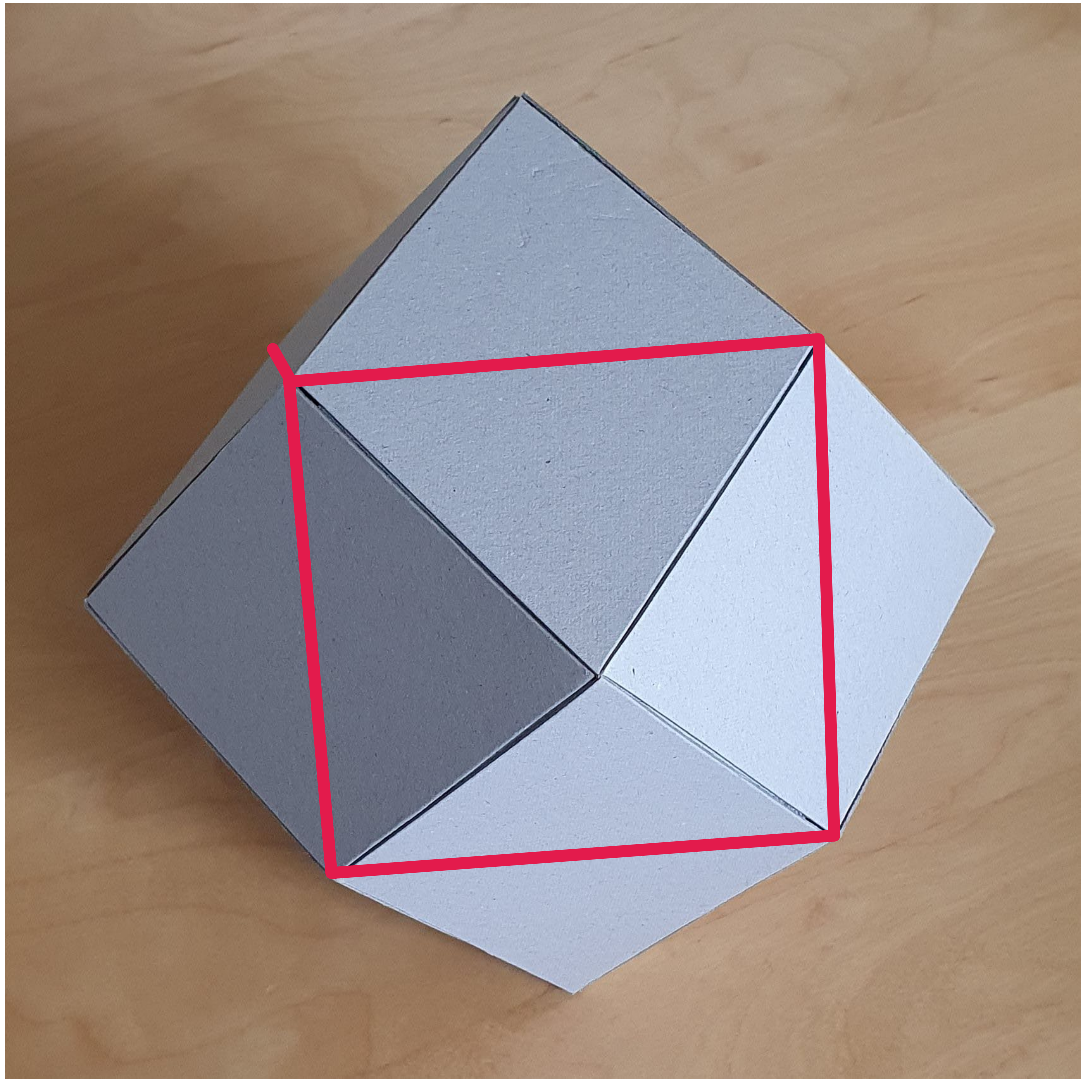
Rhombendodekaeder



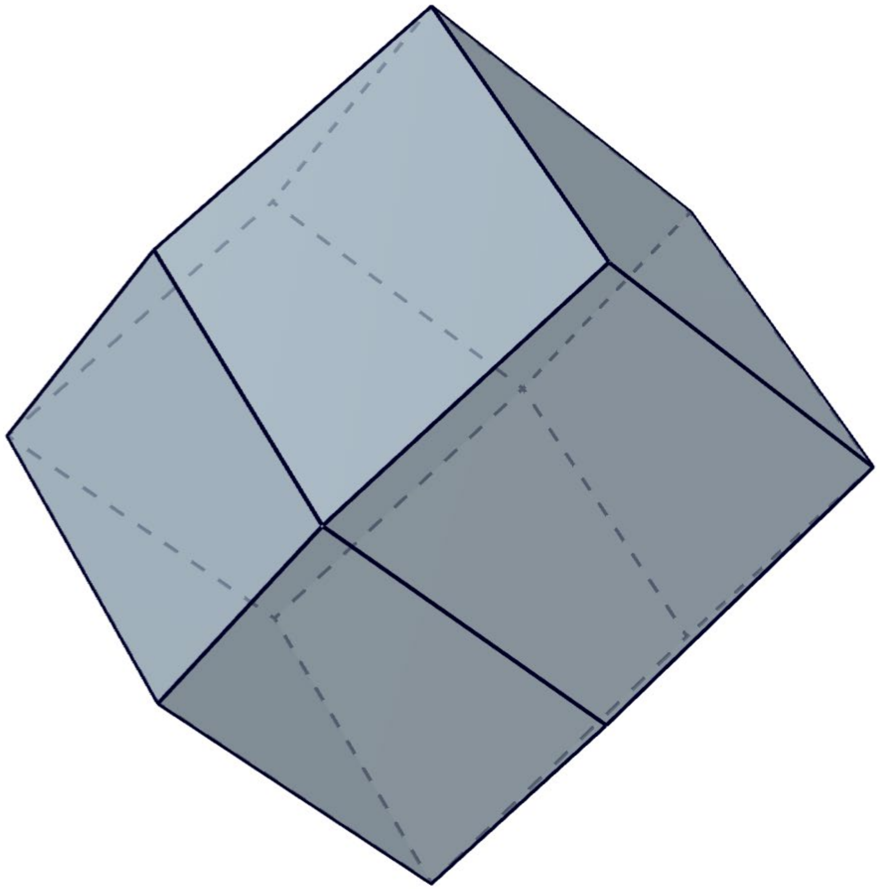


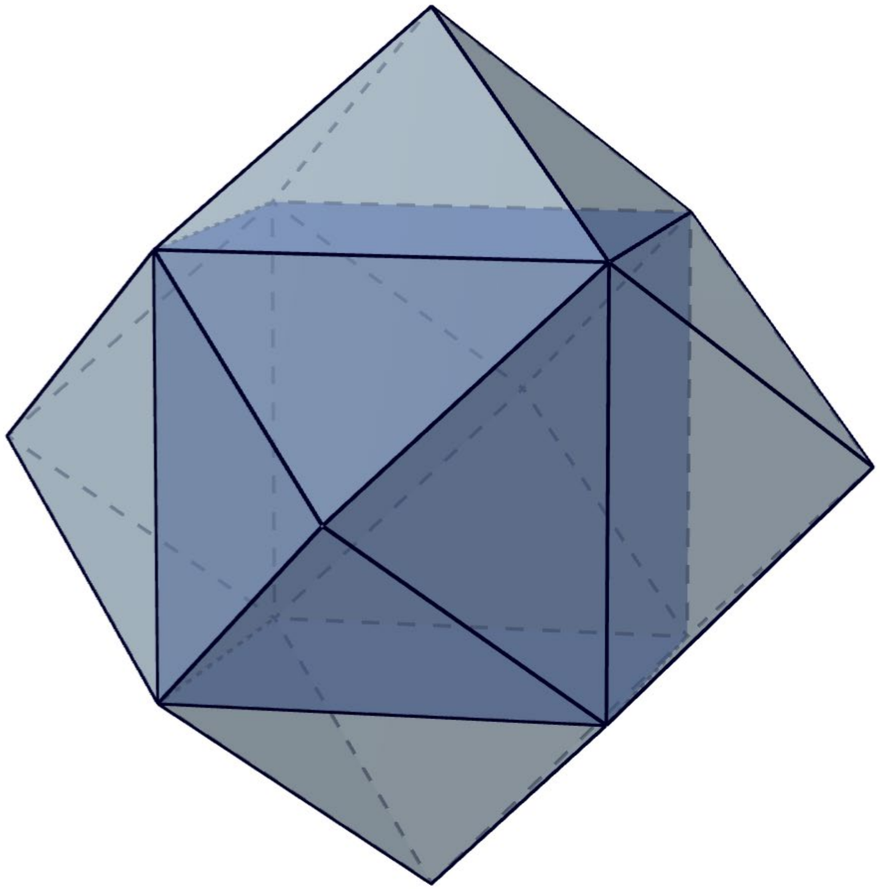
Rhombendodekaeder





Rhombendodekaeder





 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Aufgaben zum Rhombendodekaeder

GeoGebra Classroom: https://www.geogebra.org/classroom/hvaduj4r

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(1) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Seitenflächen des Würfels und die Rauten der Oberfläche des Rhombendodekaeders einschließen.

(2) **I**n welchem Verhältnis $\frac{d_{lang}}{d_{kurz}}$ stehen die Längen der Diagonalen der Rauten?

(3) **B**estimmen Sie die Höhe der Pyramiden, die auf die Seiten des Würfels aufgesetzt werden, in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(4) **B**erechnen Sie die Länge der Kanten des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(5) **W**ählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, um möglichst einfache Koordinaten der Eckpunkte des Rhombendodekaeders zu erhalten.

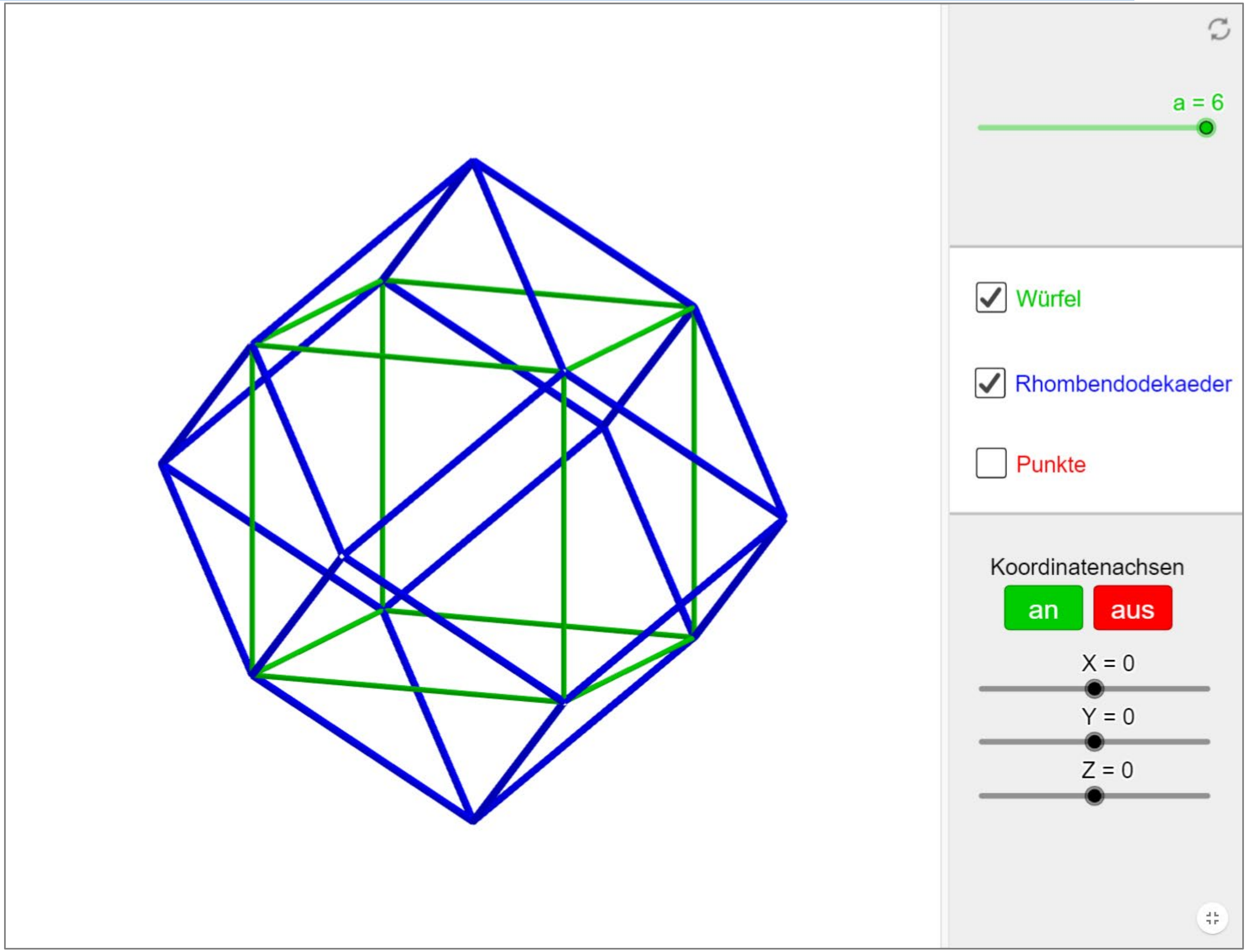
(6) **B**estimmen Sie Koordinaten aller Eckpunkte des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(7) **B**erechnen Sie das Volumen des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(8) **B**erechnen Sie den Abstand der Trägerebenen zweier gegenüberliegender Rauten des Rhombendodekaeders.

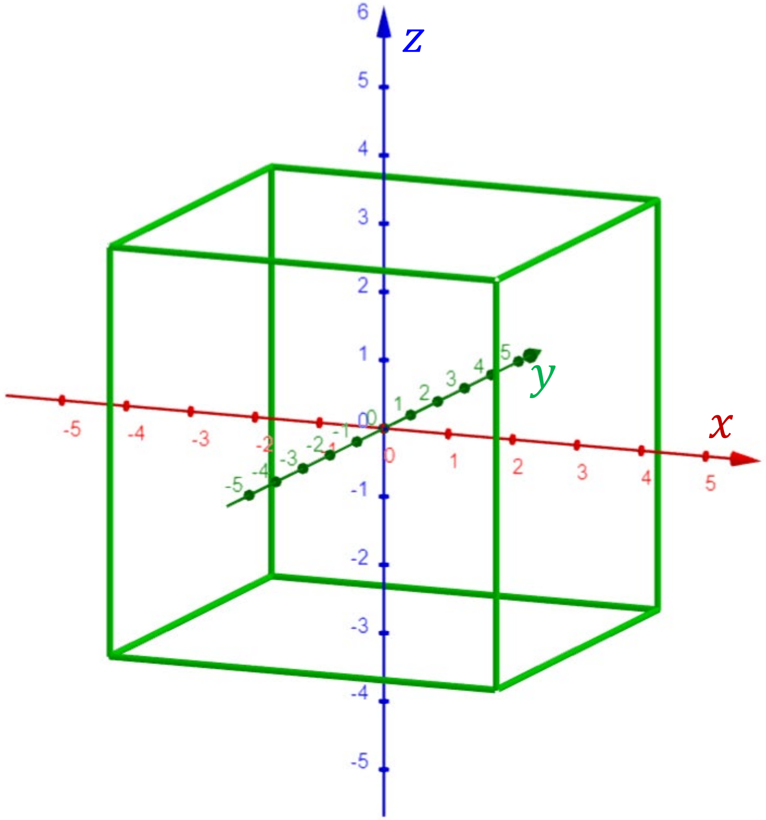
(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

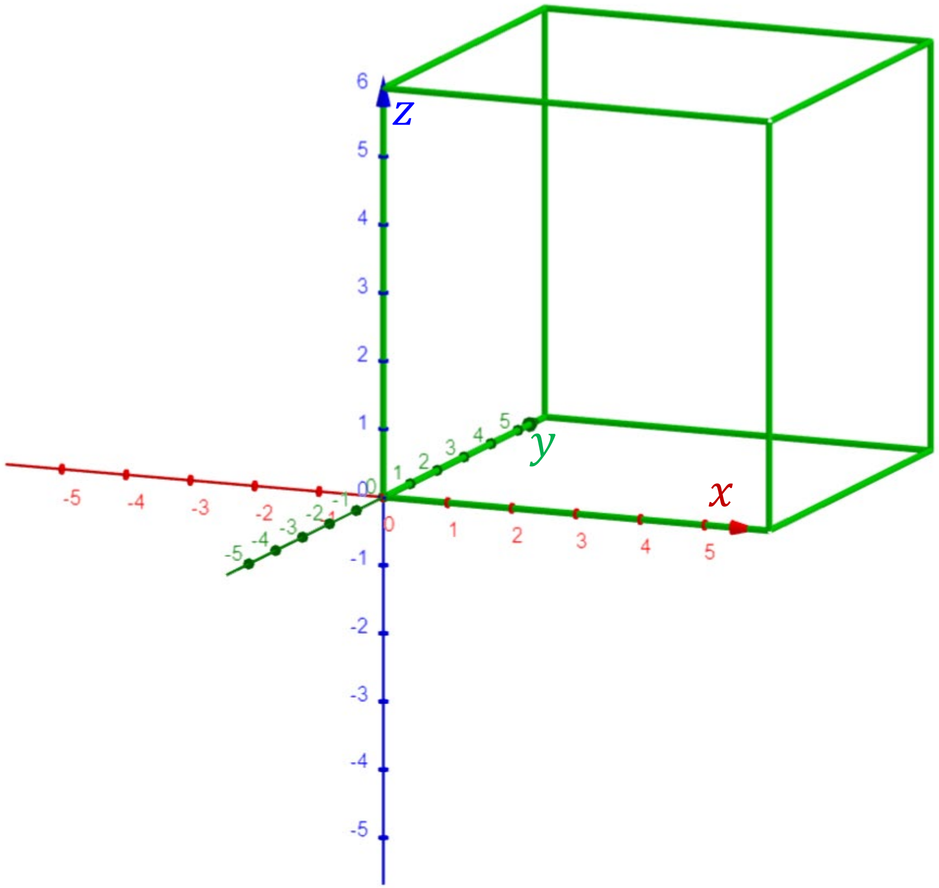
Rhombendodekaeder



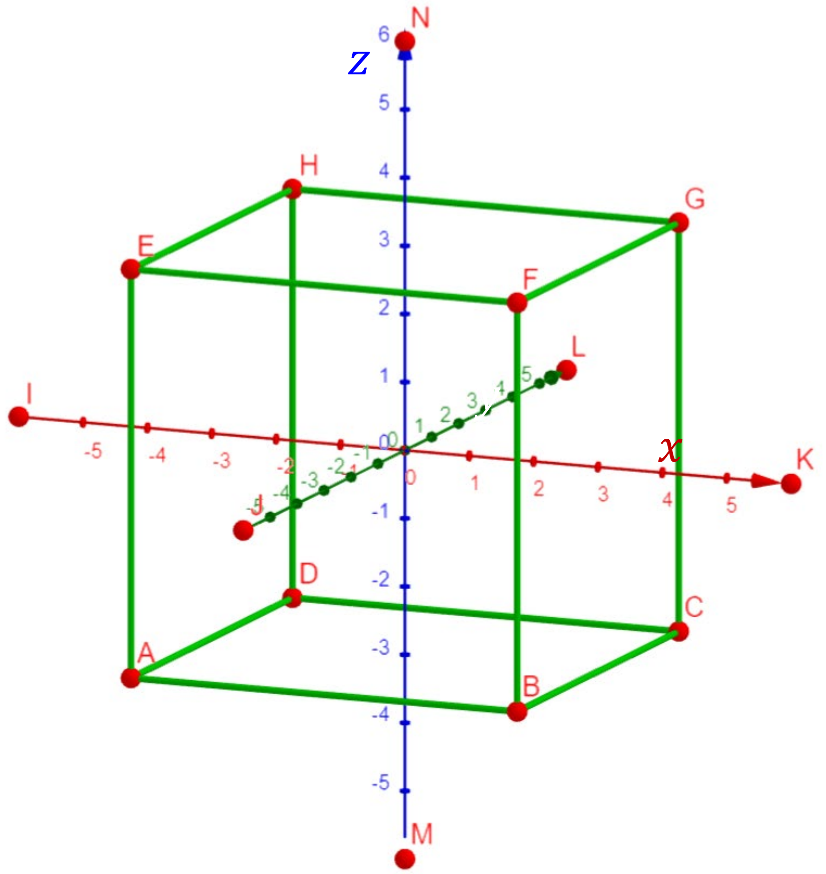
 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Rhombendodekaeder: Koordinatensystem





Rhombendodekaeder:
Koordinaten der Eckpunkte

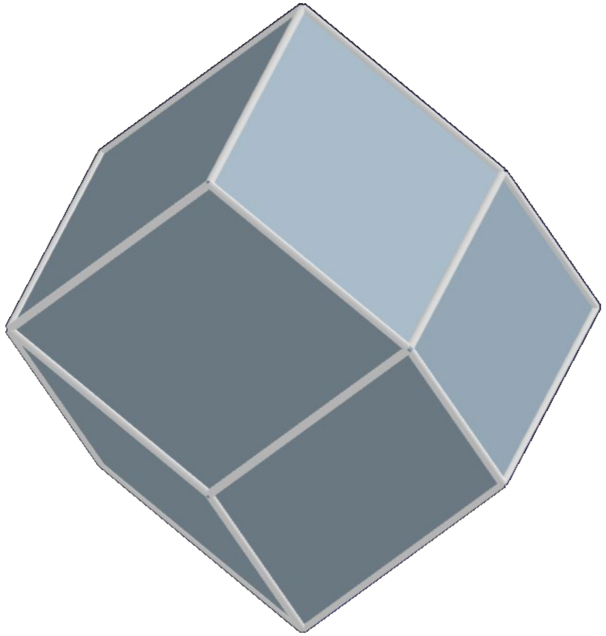


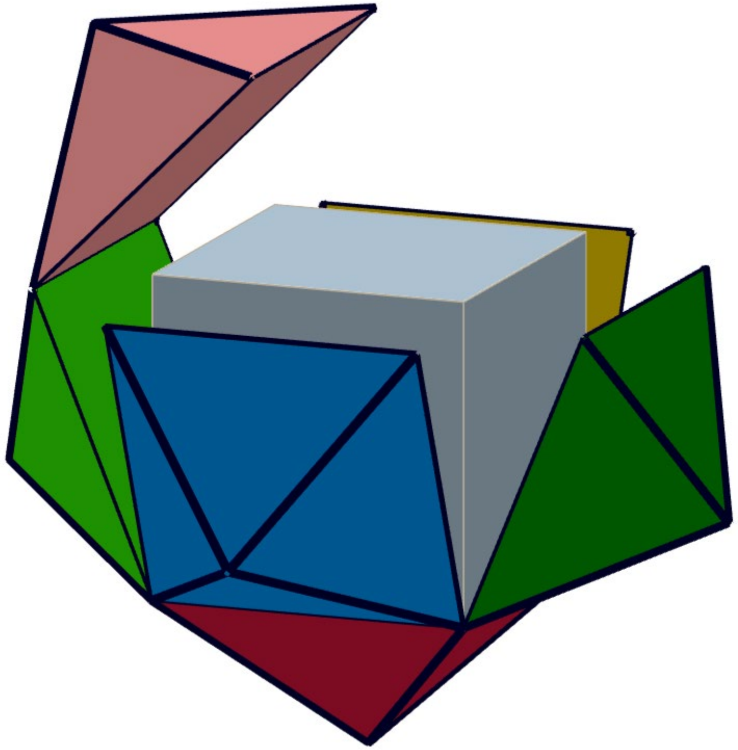
- $A = (\quad | \quad | \quad)$
- $B = (\quad | \quad | \quad)$
- $C = (\quad | \quad | \quad)$
- $D = (\quad | \quad | \quad)$
- $E = (\quad | \quad | \quad)$
- $F = (\quad | \quad | \quad)$
- $G = (\quad | \quad | \quad)$
- $H = (\quad | \quad | \quad)$

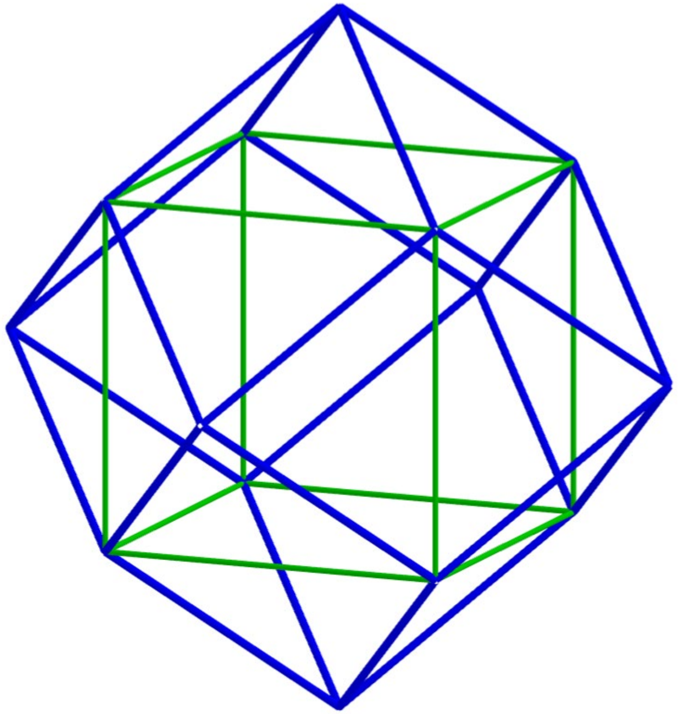
- $I = (\quad | \quad | \quad)$
- $J = (\quad | \quad | \quad)$
- $K = (\quad | \quad | \quad)$
- $L = (\quad | \quad | \quad)$
- $M = (\quad | \quad | \quad)$
- $N = (\quad | \quad | \quad)$

 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Rhombendodekaeder

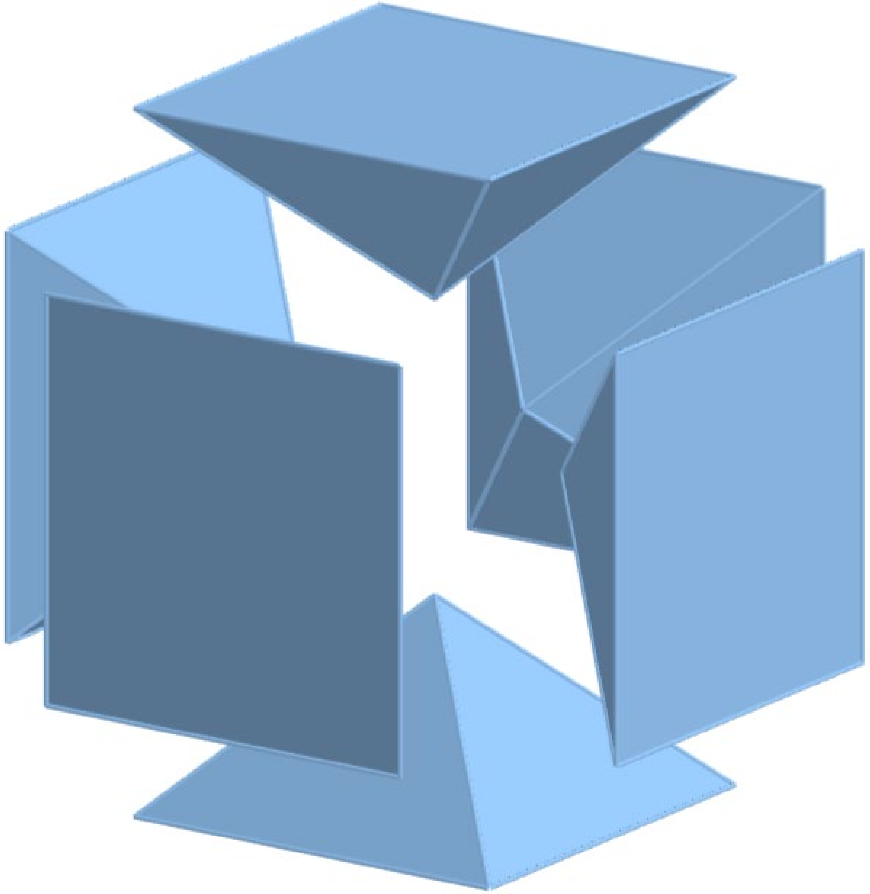


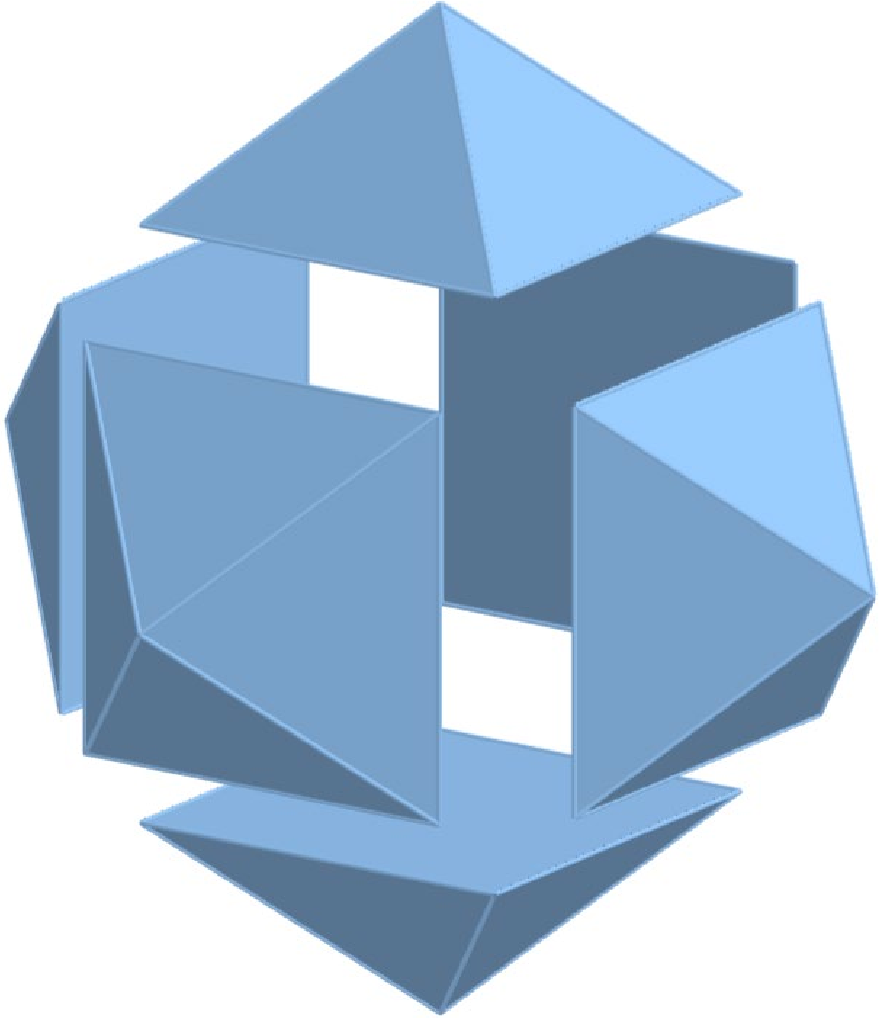




 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

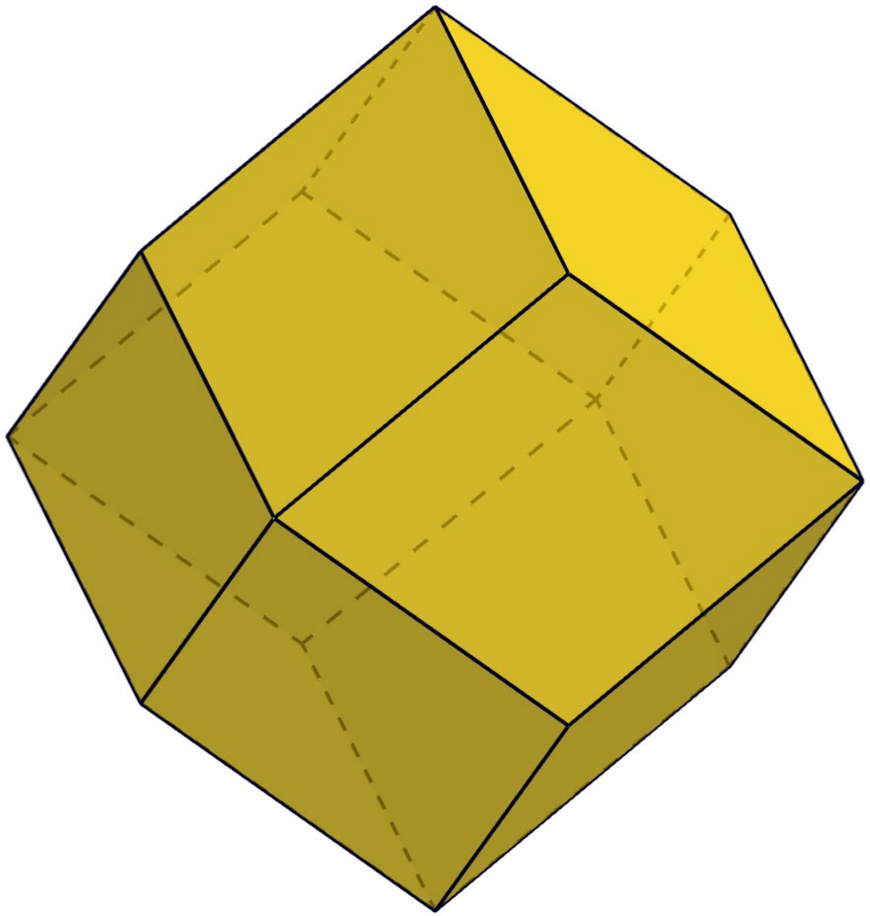
Rhombendodekaeder

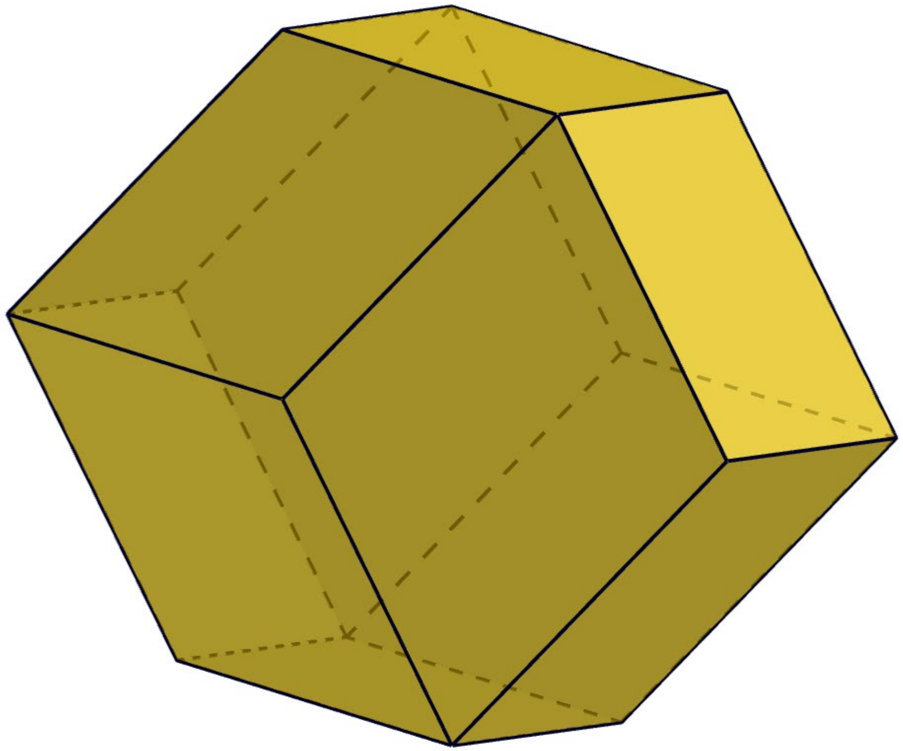




 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Rhombendodekaeder





Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

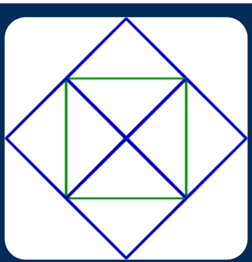
(1) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Seitenflächen des Würfels und die Rauten der Oberfläche des Rhombendodekaeders einschließen.

(2) **I**n welchem Verhältnis $\frac{d_{lang}}{d_{kurz}}$ stehen die Längen der Diagonalen der Rauten?

(3) **B**estimmen Sie die Höhe der Pyramiden, die auf die Seiten des Würfels aufgesetzt werden, in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

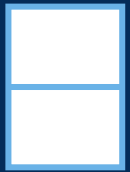
(4) **B**erechnen Sie die Länge der Kanten des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(1)



$$\rho = 45°$$

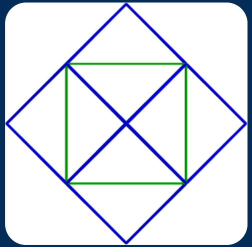
(2)



DIN-Format:

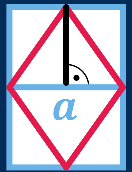
$$\frac{d_{\text{lang}}}{d_{\text{kurz}}} = \frac{d_{kurz}}{\frac{d_{lang}}{2}} \qquad \Rightarrow \frac{d_{\text{lang}}}{d_{\text{kurz}}} = \sqrt{2}$$

(3)



$$\text{h}_{\text{Pyramide}} = \frac{a}{2}$$

(4)

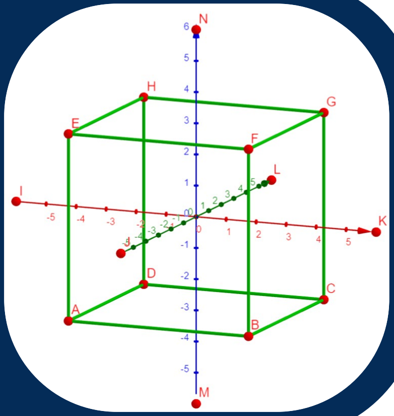


Satz des Pythagoras

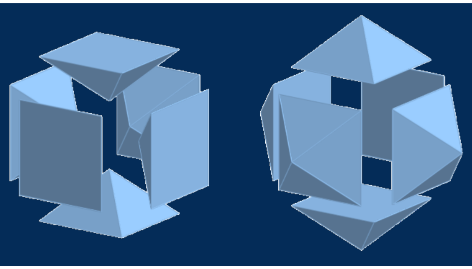
$$s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\cdot a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(5) und **(6)**
Vgl. Folien 68 bis 70

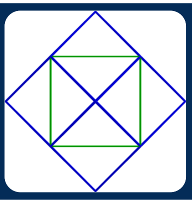


(7)



$V_{\text{Rhombendodekaeder}} = 2 \cdot a^3$

(8)



Vgl. Abschnitt 3.8 Grundvorstellungen zum Abstand

(9)
Idee:
(1) Bestimmen der Normalenvektoren der Trägerebenen der beteiligten Rauten.
(2) Bestimmen des Zwischenwinkels der Normalenvektoren.

(5) **W**ählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, um möglichst einfache Koordinaten der Eckpunkte des Rhombendodekaeders zu erhalten.

(6) **B**estimmen Sie Koordinaten aller Eckpunkte des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(7) **B**erechnen Sie das Volumen des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(8) **B**erechnen Sie den Abstand der Trägerebenen zweier gegenüberliegender Rauten des Rhombendodekaeders.

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

(9) Lösungsidee

(*) Vgl. Kapitel 3: Skalarprodukt

a) **B**estimmen der Normalenvektoren der Trägerebenen der beteiligten Rauten.

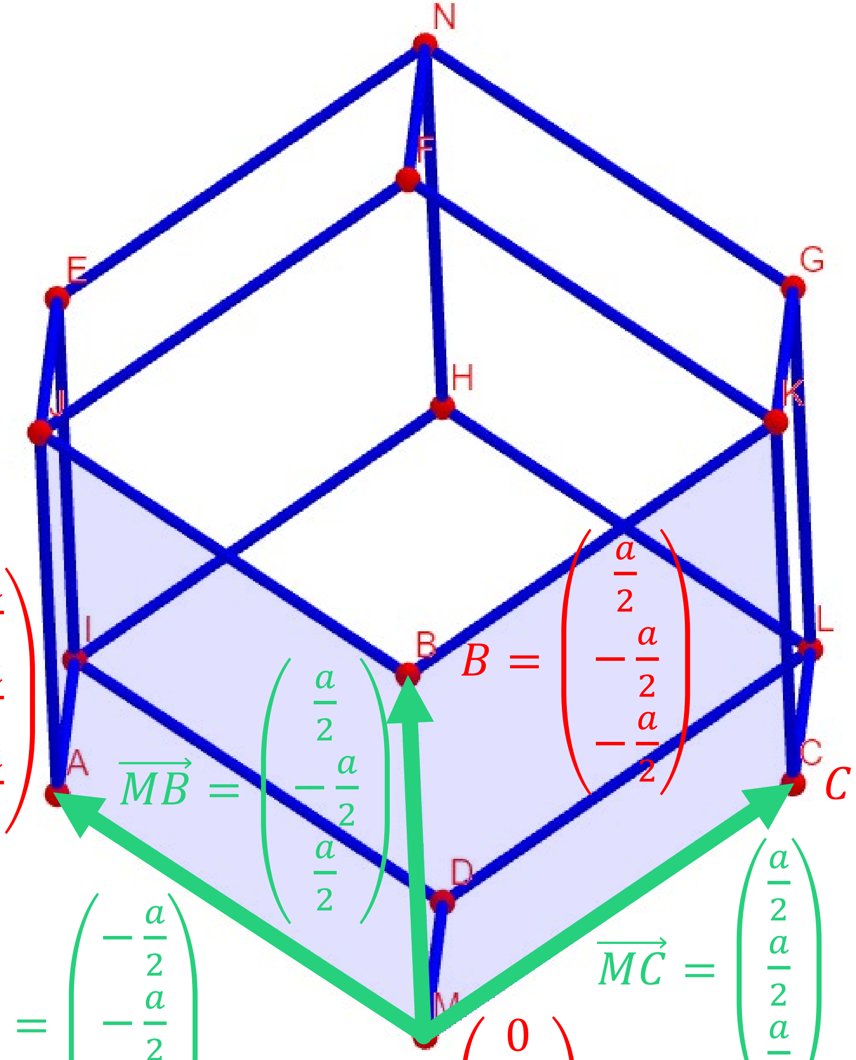
Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Nutzung des Skalarprodukts (*)
- Nutzung des Vektorprodukts

b) **B**estimmen des Zwischenwinkels der Normalenvektoren.

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Nutzung des Skalarprodukts (*)
- Nutzung des Vektorprodukts



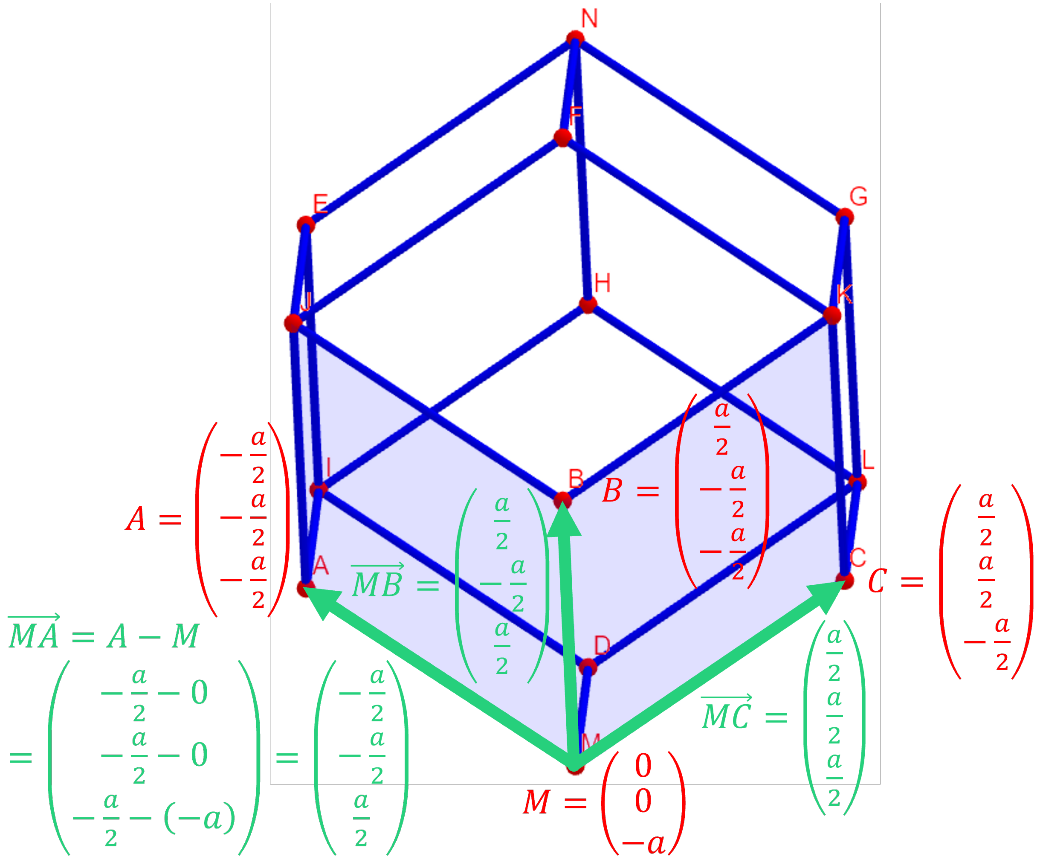
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} = A - M = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - (-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



Normalenvektor $\overrightarrow{n_a}$ zu den Spannvektoren $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MB}$

Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n_a}$ gilt:

$$\text{(I)}\quad 0 = \overrightarrow{n_a} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} n_{a_1} \\ n_{a_2} \\ n_{a_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = -\frac{a}{2} \cdot n_{a_1} - \frac{a}{2} \cdot n_{a_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{a_3}$$

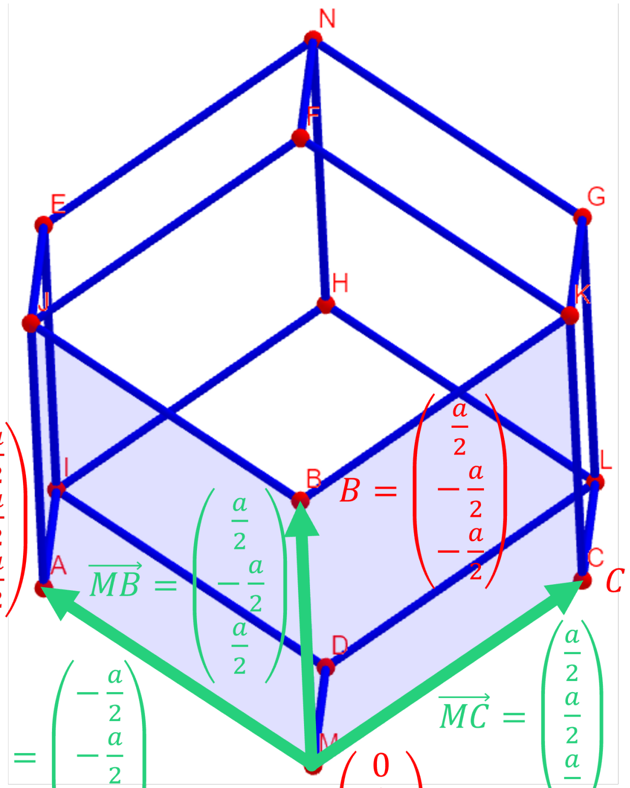
$$\text{(II)}\quad 0 = \overrightarrow{n_a} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} n_{a_1} \\ n_{a_2} \\ n_{a_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{a_1} - \frac{a}{2} \cdot n_{a_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{a_3}$$

(I) + (II) liefert: $a \cdot n_{a_2} = a \cdot n_{a_3} \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{a_2} = n_{a_3}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wähle } n_{a_2} = n_{a_3} = 1. \\[1em] \text{Einsetzen in (II) liefert:} \\[1em] \frac{a}{2} \cdot n_{a_1} = 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{a_1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} n_{a_1} \\ n_{a_2} \\ n_{a_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



$A = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA} = A - M = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - (-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_b}$ zu den Spannvektoren $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$

Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n_b}$ gilt:

$$\text{(I)}\quad 0 = \overrightarrow{n_b} \cdot \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{b_1} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_3}$$

$$\text{(II)}\quad 0 = \overrightarrow{n_b} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{b_1} - \frac{a}{2} \cdot n_{b_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_3}$$

(I) + (II) liefert: $\quad a \cdot n_{b_1} = -a \cdot n_{b_3} \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{b_1} = -n_{b_3}$

Wähle $n_{b_3} = 1. \Rightarrow n_{b_1} = -1.$

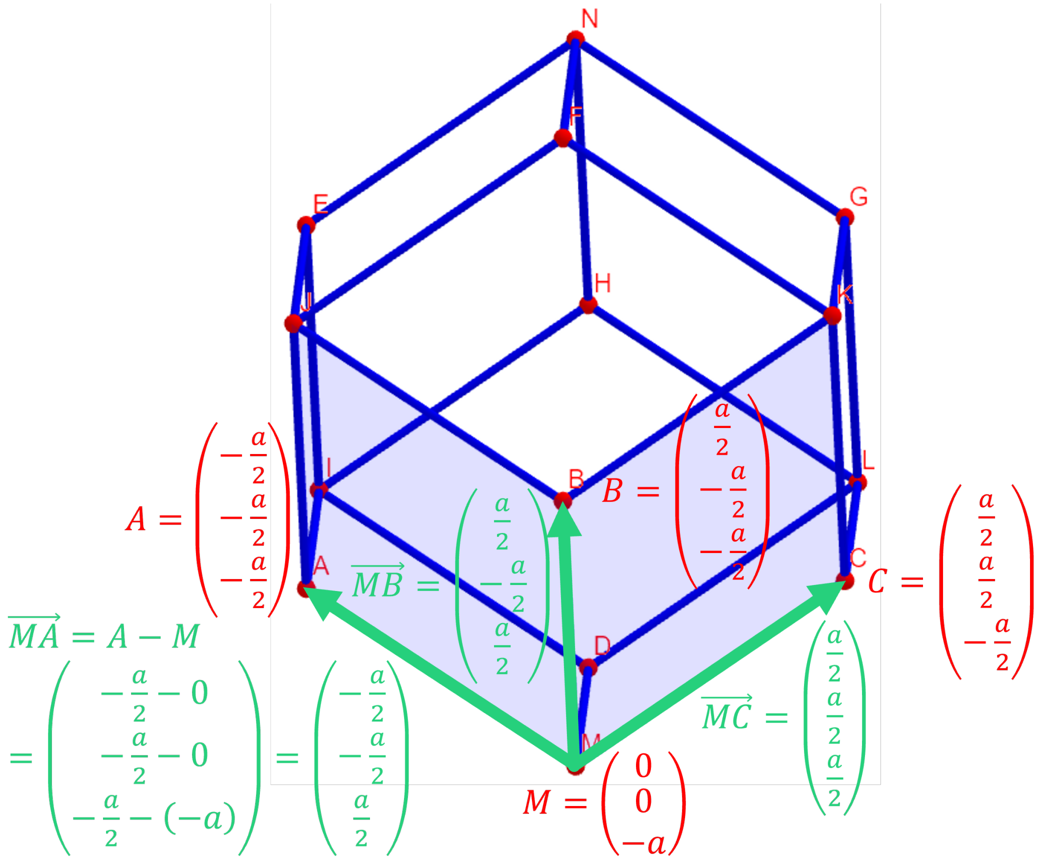
Einsetzen in (I) liefert:

$$\frac{a}{2} \cdot n_{b_2} = 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{b_2} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



Der Winkel zwischen den von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$ sowie von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$ aufgespannten Ebenen entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_a}$ und $\overrightarrow{n_b}$ dieser Ebenen.

Bestimmung des Winkels $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}) = \angle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- Mit Hilfe des Skalarprodukts ergibt sich:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{n_a} \cdot \overrightarrow{n_b}}{|\overrightarrow{n_a}| \cdot |\overrightarrow{n_b}|} = \frac{n_{a_1} \cdot n_{b_1} + n_{a_2} \cdot n_{b_2} + n_{a_3} \cdot n_{b_3}}{\sqrt{n_{a_1}^2 + n_{a_2}^2 + n_{a_3}^2} \cdot \sqrt{n_{b_1}^2 + n_{b_2}^2 + n_{b_3}^2}}$$

$$= \frac{0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

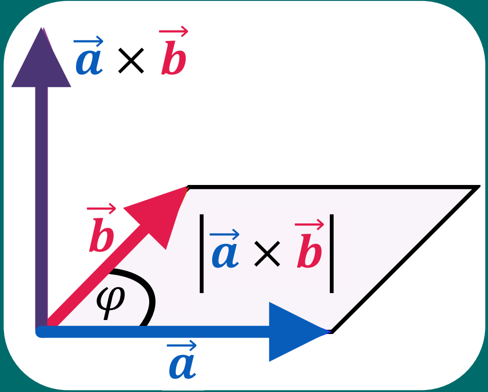
- Daraus folgt für $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b})$ und damit für den Winkel, den die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten des Rhombendodekaeders miteinander einschließen:

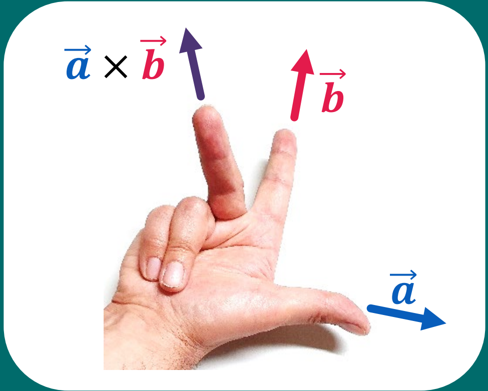
$$\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}) = 60°$$

Exkurs: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet (**Rechte-Hand-Regel**).
- Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.





- Das Vektorprodukt wird wie folgt berechnet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vorgehensweise bei der Berechnung:

1. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2} \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ \boxed{-(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)} \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

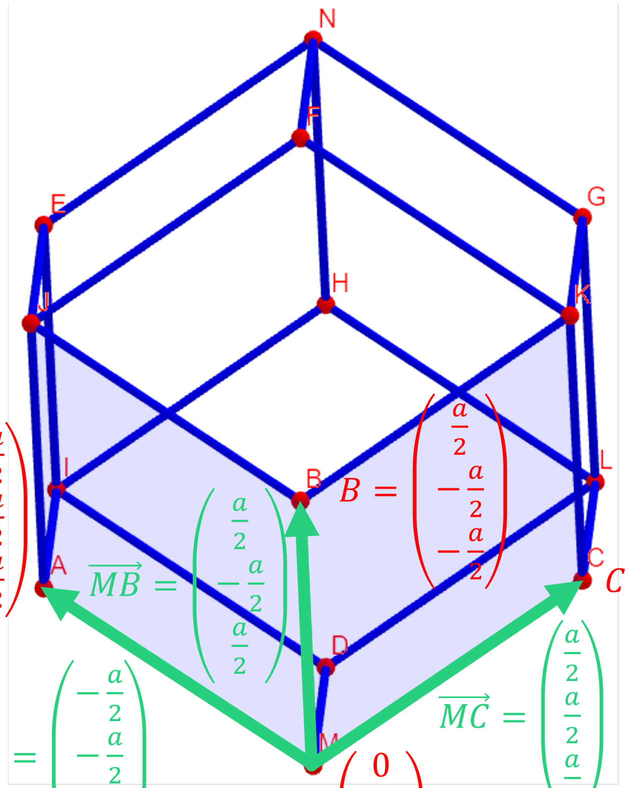
3. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ \boxed{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

Bestimmung der Normalenvektoren $\overrightarrow{n_a}$ und $\overrightarrow{n_b}$ der von $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MB}$ sowie von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$ aufgespannten Ebenen und deren Zwischenwinkel $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b})$ mit dem Vektorprodukt.



$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} = A - M = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - (-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

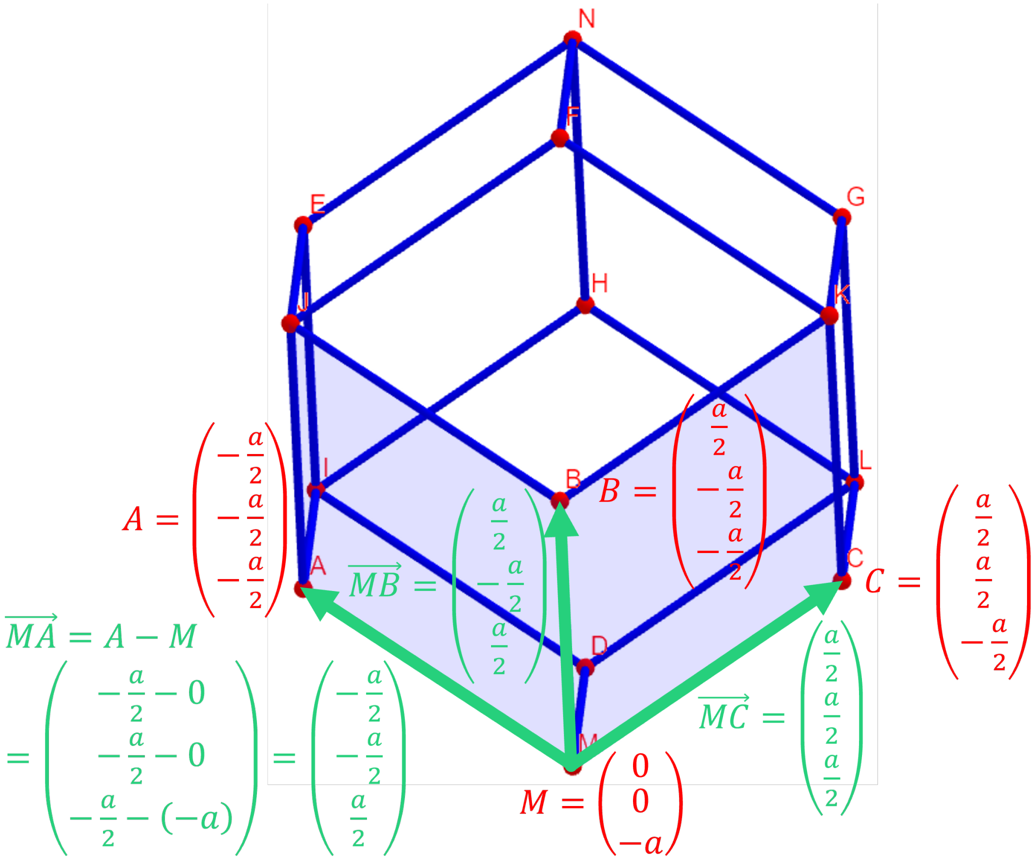
$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

- $$\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \\ -\left(-\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $$\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \\ -\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Damit ergeben sich folgende Normalenvektoren:

$$\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

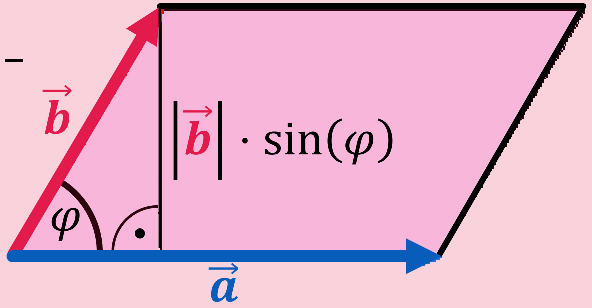
Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



- Der Betrag $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ gibt den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt Parallelogramms an.

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi)$$



- Damit ergibt sich für den Zwischenwinkel φ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

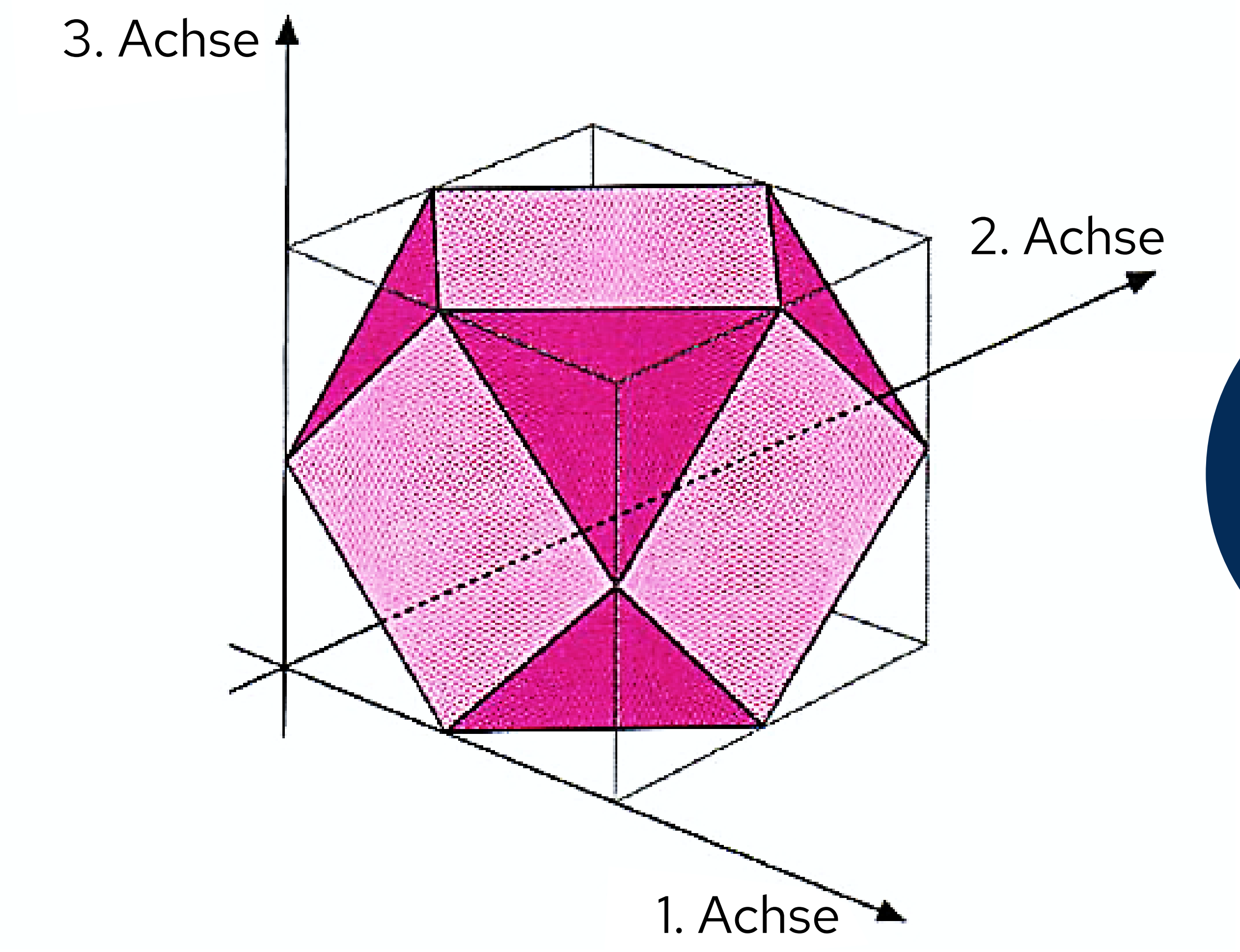
$$\sin(\varphi) = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

- Mit den Werten von $\overrightarrow{n_a}$ und $\overrightarrow{n_b}$ der vorherigen Folie folgt:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_a} \times \overrightarrow{n_b}|}{|\overrightarrow{n_a}| \cdot |\overrightarrow{n_b}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Daraus folgt: $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}) = 60°$

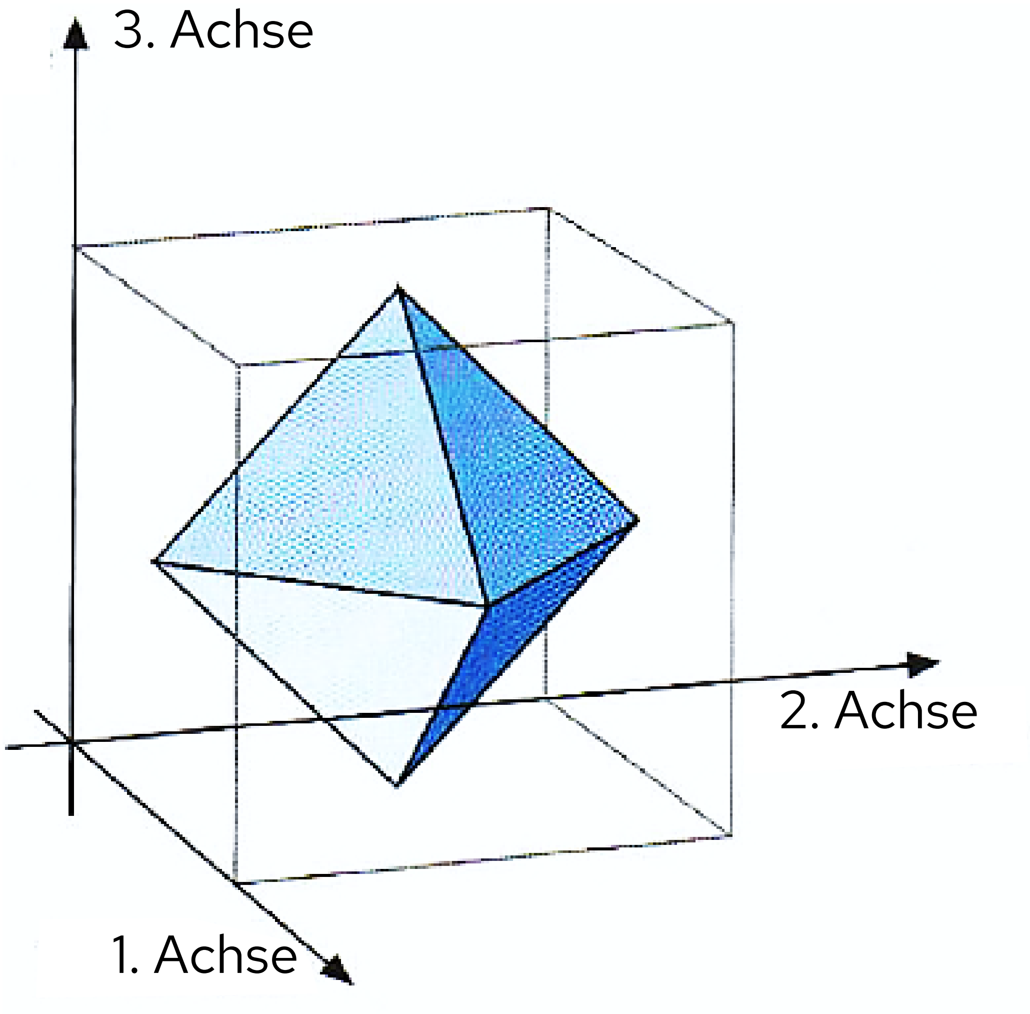
Würfel und Kuboktaeder



Kuboktaeder
Die Mittelpunkte der zwölf Würfelkanten sind die Eckpunkte des Kuboktaeders, eines Körpers, der von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 15

Würfel und Oktaeder



Oktaeder
Die Mittelpunkte der sechs Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte des Oktaeders, einer von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzten Doppelpyramide.

 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 15

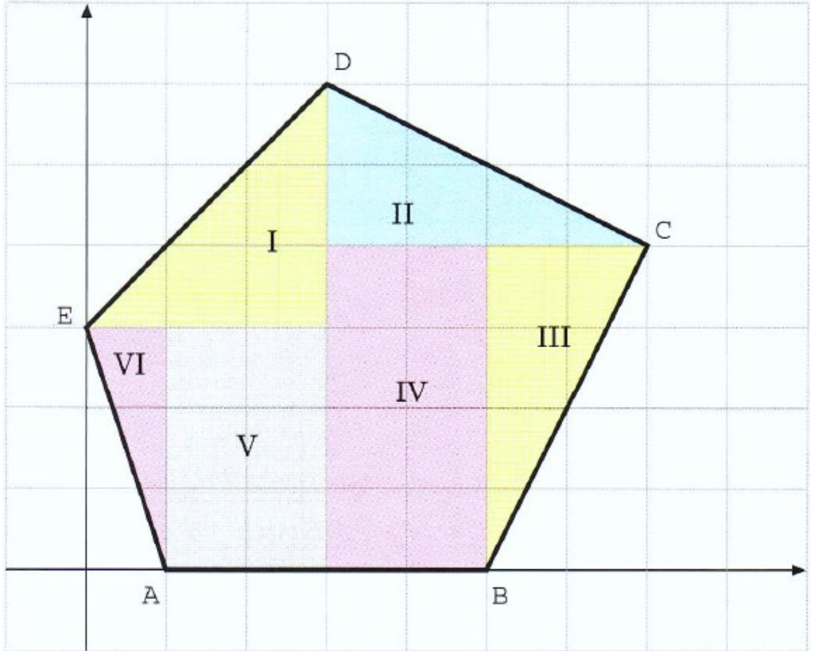
Flächenberechnungen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe: Es soll der Flächeninhalte eines Fünfecks $ABCDE$ bestimmt werden, von dem wir die Koordinaten der Eckpunkte kennen (Rasterquadrate haben die Seitenlänge 1.). Führe beide Lösungsansätze weiter aus.

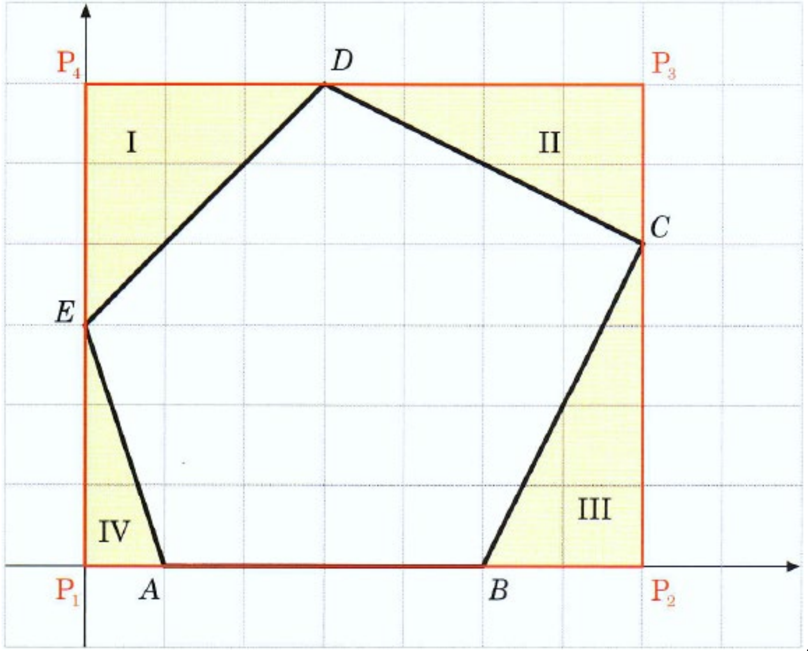
Sandras Lösungsvorschlag

$A_{\text{Fünfeck}} = A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} + A_V + A_{VI}$



Olivers Lösungsvorschlag

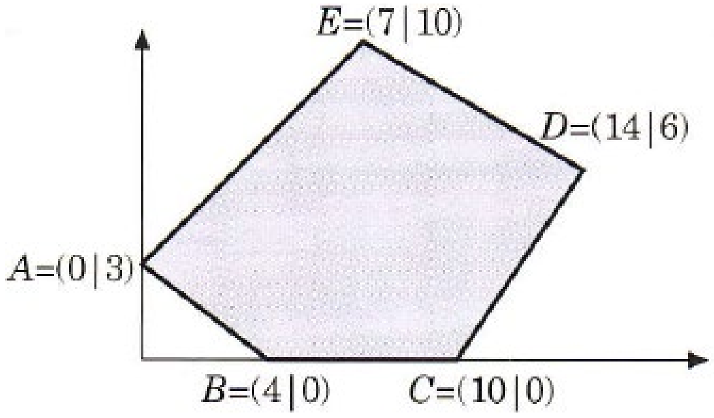
$A_{\text{Fünfeck}} = A_{P_1P_2P_3P_4} - (A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV})$

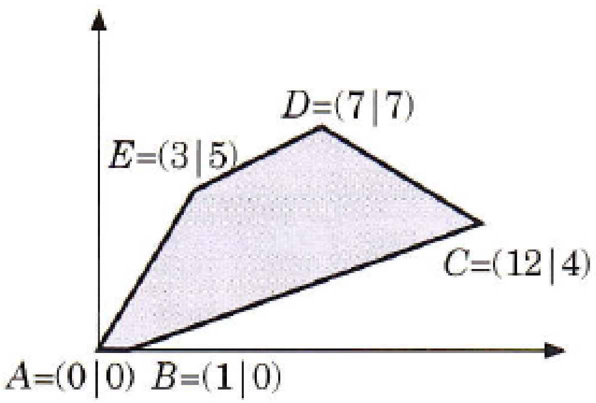


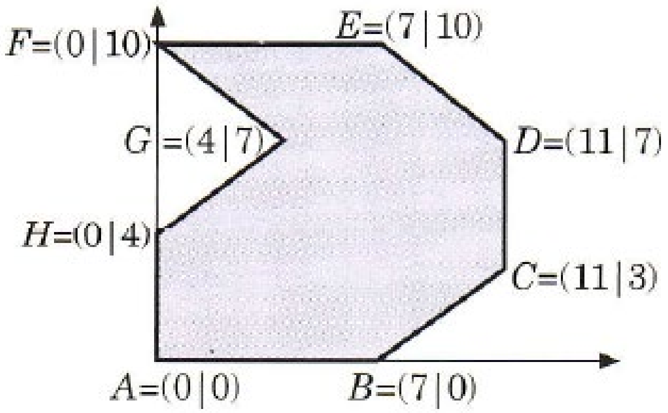
 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 12

Flächenberechnungen

Aufgabe: Berechne die Flächeninhalte der Vierecke.



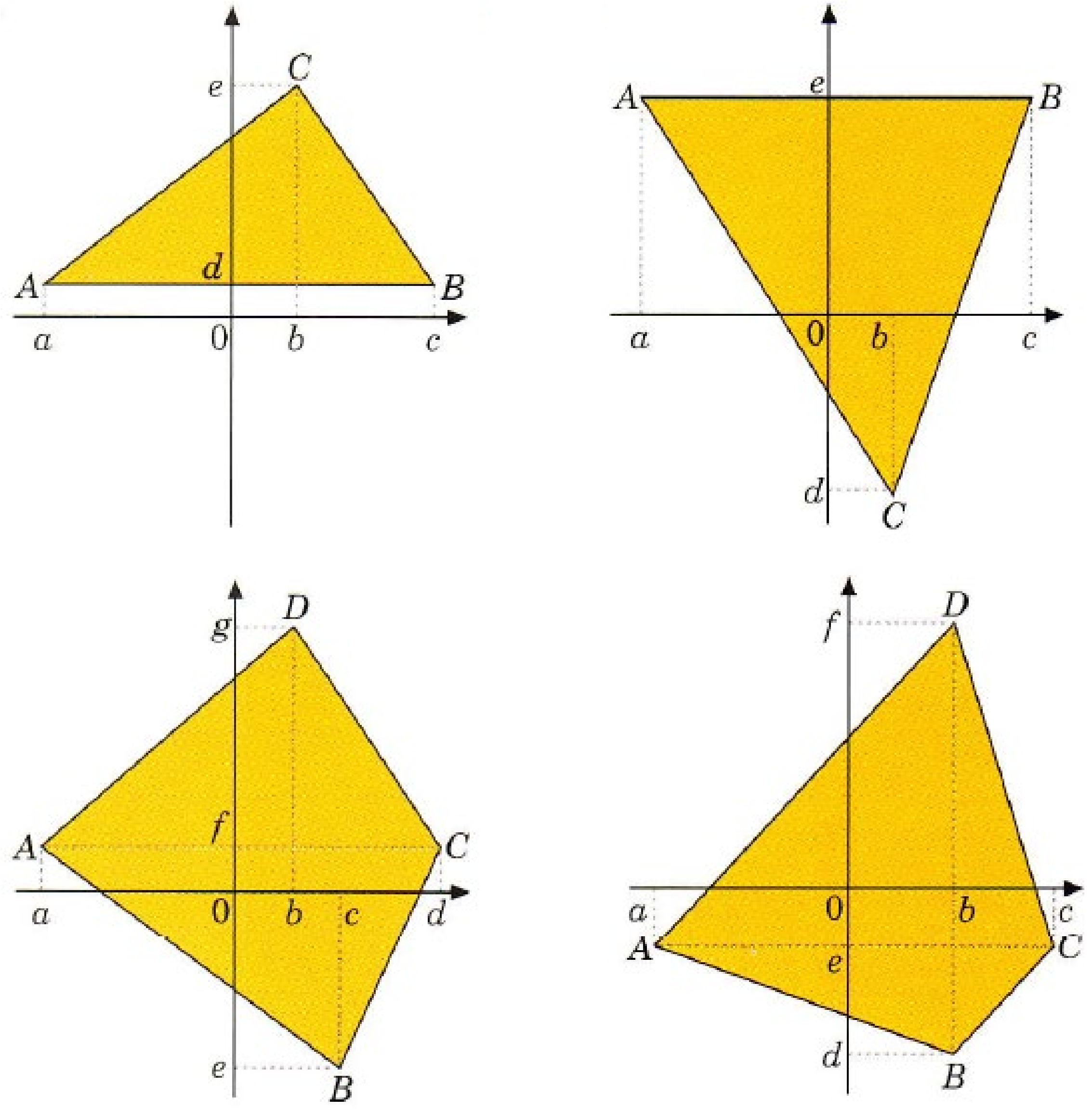




 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 12

Flächenberechnungen

Aufgabe:
Drücke die Koordinaten der Eckpunkte und die Flächeninhalte der Figuren mit den gegebenen Variablen aus.



 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 12

3 Skalarprodukt

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 3:
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“
https://roth.tel/anageo

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

MaTeGnu

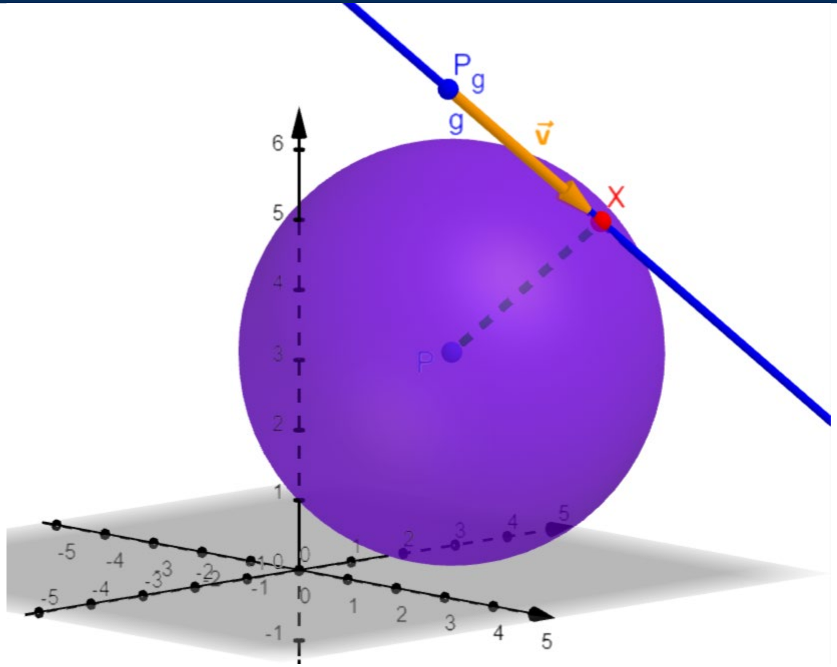
Kapitel 3:
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

Aspekte des Skalarprodukts im MU

Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. *Praxis der Mathematik in der Schule 56(55)*, 32–38

Skalarprodukt

Skalarprodukt:
Weitere Struktur in einem Vektorraum
Um in einem Vektorraum Längen und Winkel messen zu können, muss eine weitere Struktur, das Skalarprodukt, hinzugefügt werde.
⇒ Euklidischer Vektorraum



Anwendungen des Skalarprodukts

- Abstandsbestimmung
  - Punkt ↔ Gerade, Ebene ↔ Gerade
  - parallele Geraden (z. B. zur Flächenberechnung)
  - Windschiefe Geraden
- Berechnung von Schnittwinkeln
  - Gerade ↔ Gerade
  - Ebene ↔ Ebene
  - Gerade ↔ Ebene
- Prüfen auf Orthogonalität
  - Gerade ↔ Gerade
  - Ebene ↔ Ebene
  - Gerade ↔ Ebene
- Bestimmung
  - Normalenvektor einer Ebene
  - Normalengleichung einer Ebene

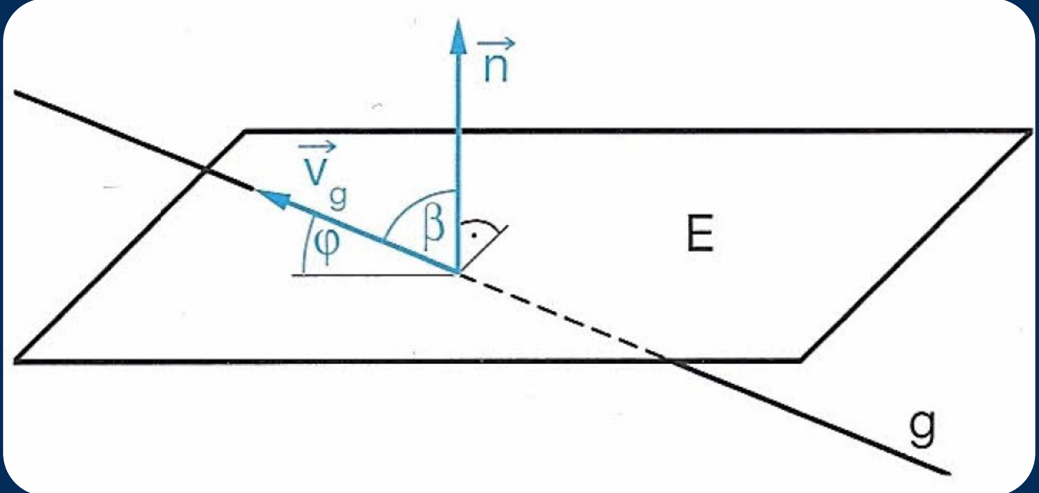
MaTeGnu

Kapitel 3:
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

Skalarprodukt und Messen

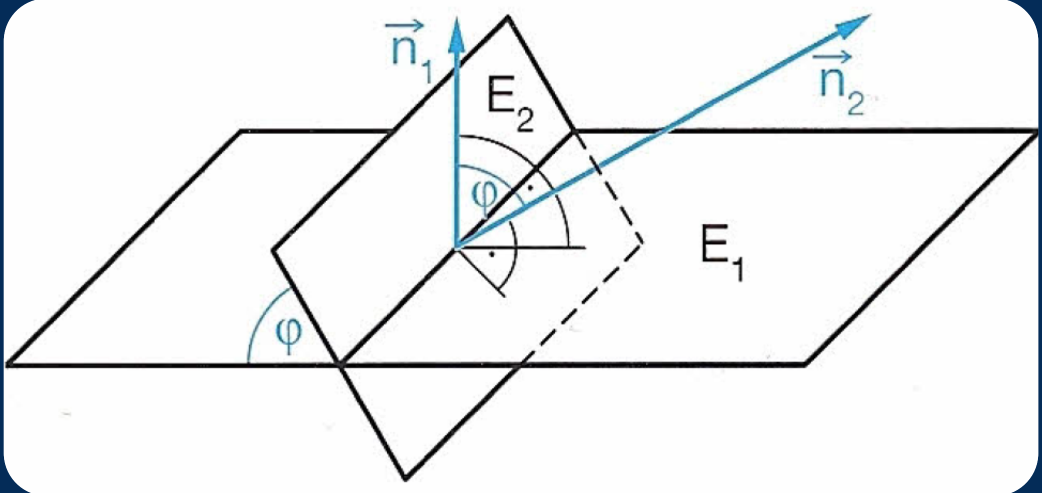
Winkel zwischen Gerade und Ebene

Der Winkel φ zwischen einer Ebene E und einer Gerade g ist der Ergänzungswinkel zum Winkel β zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v_g}$ der Gerade: $\varphi = 90° - \beta$



Winkel zwischen Ebenen

Der Winkel φ zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ der Ebenen.



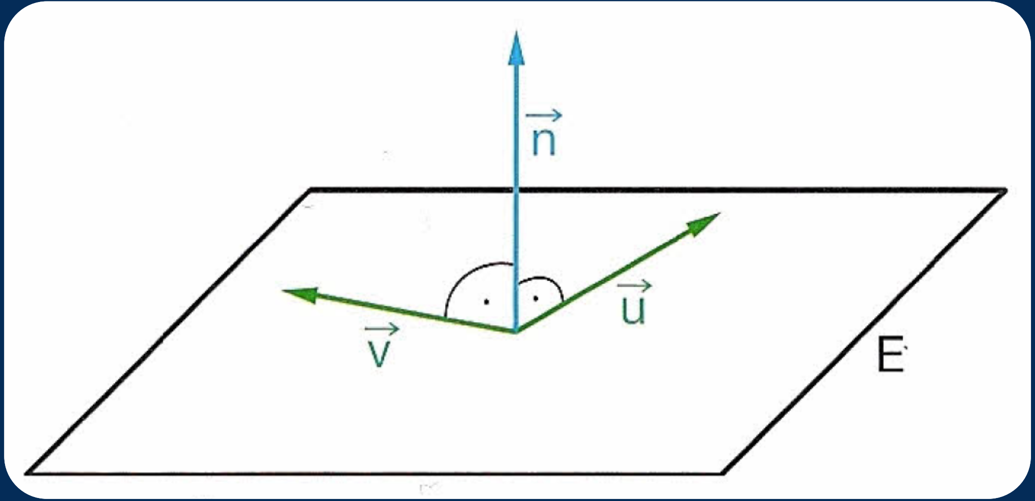
Abbildungen aus:
Schmidt et al. (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien – Lineare Algebra – Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 140-142

Skalarprodukt und Messen

Normalenvektor einer Ebene

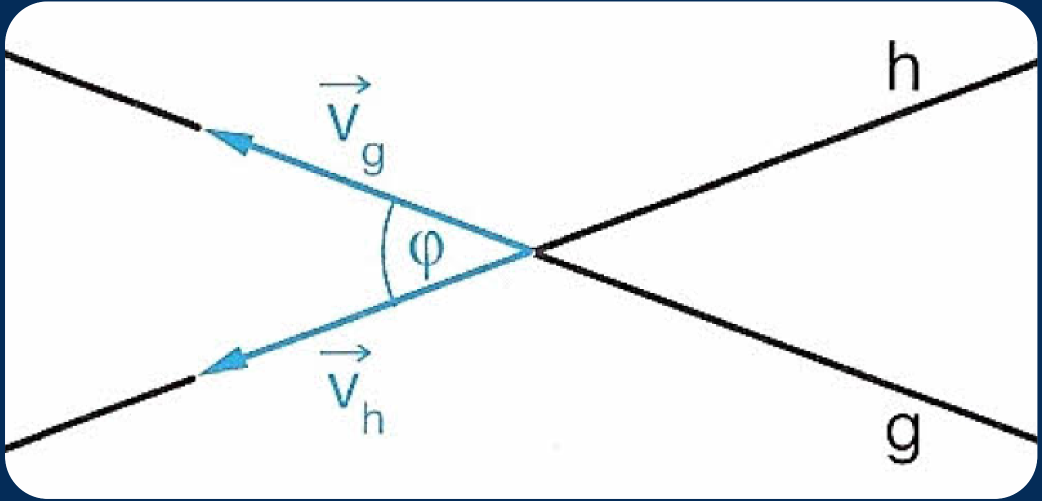
Ein Vektor $\vec{n}$, der orthogonal zu beiden Richtungsvektoren der Ebene ist, heißt Normalenvektor der Ebene.

Es gilt: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \wedge \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$



Winkel zwischen Geraden

Der Winkel φ zwischen zwei Geraden g und h ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\overrightarrow{v_g}$ und $\overrightarrow{v_h}$ der Geraden.



Abbildungen aus:
Schmidt et al. (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien – Lineare Algebra – Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 140-142

Skalarprodukt und Messen

Abstand Punkt $P \leftrightarrow$ Punkt Q

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Abstand Punkt $P \leftrightarrow$ Gerade g

(1) Hilfsebene H bestimmen, die senkrecht zu g ist und P enthält.

(2) Schnittpunkt S von g und H bestimmen.

(3) Abstand der Punkte P und S bestimmen.

Spezialfall: Abstand paralleler Geraden

P ist ein beliebiger Punkt einer der Geraden. Der Abstand von P zur anderen Geraden ist der gesuchte Abstand.

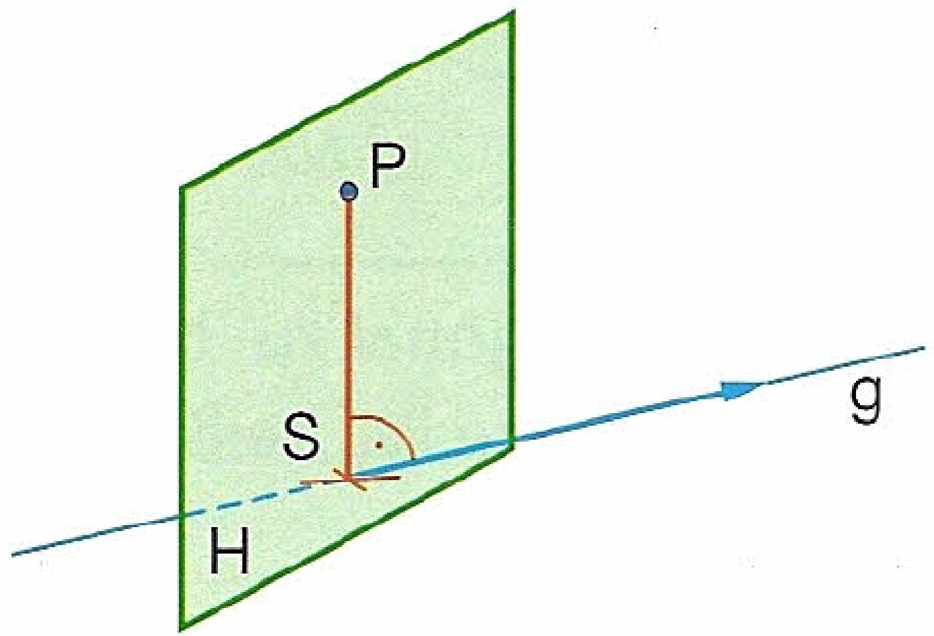


Abbildung aus:
Schmidt et al. (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien – Lineare Algebra – Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 140-142

Skalarprodukt und Messen

Abstand Punkt $P \leftrightarrow$ Ebene E

(1) Hilfsgerade h bestimmen, die senkrecht zu E ist und P enthält.

(2) Schnittpunkt S von h und E bestimmen.

(3) Abstand der Punkte P und S bestimmen.

Spezialfall: Abstand paralleler Ebenen

P ist ein beliebiger Punkt einer der Ebenen. Der Abstand von P zur anderen Ebene ist der gesuchte Abstand.

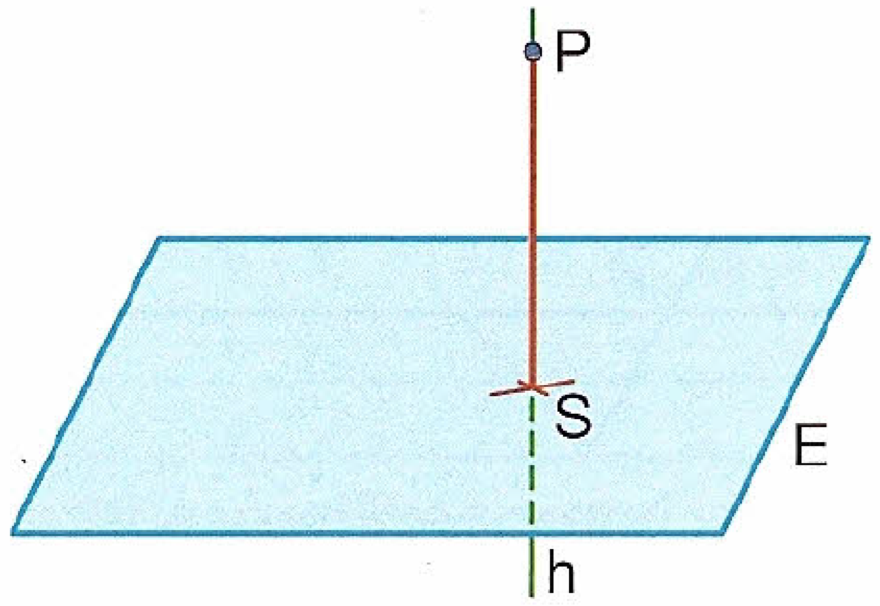


Abbildung aus:
Schmidt et al. (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien – Lineare Algebra – Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 140-142

Skalarprodukt und Messen

Normalenform einer Ebenengleichung

Wenn P ein Punkt der Ebene E ist und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E, dann ist

$$E\colon (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

eine Normalenform der Ebenengleichung.

Spezialfall: Hesse'sche Normalenform

Wenn P ein Punkt der Ebene E ist und $\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ ein normierter Normalenvektor von E, dann ist

$$E\colon (X - P) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$$

eine Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung.

Anwendung der Hesse'schen Normalenform

Berechnung des Abstands $d(Q, E)$ eines Punktes Q zur Ebene E:

$$d(Q, E) = |\overrightarrow{n_0} \cdot (Q - P)|$$

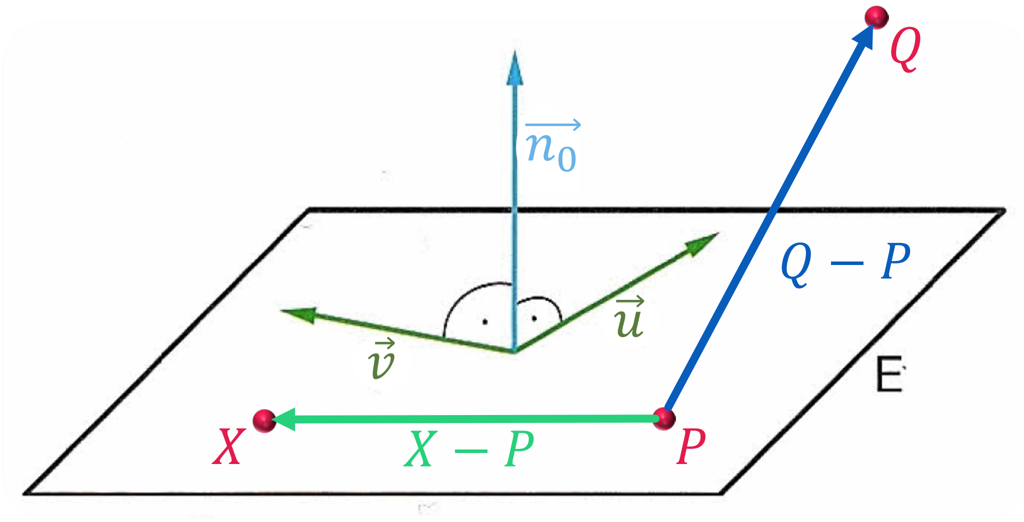


Abbildung aus:
Schmidt et al. (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien – Lineare Algebra – Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 140-142

Skalarprodukt und Messen

Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann orthogonal zueinander $\left(\vec{a} \perp \vec{b}\right)$, wenn gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

In Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

Länge eines Vektors

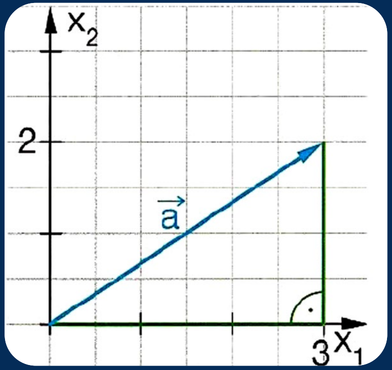
Für die Länge $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a}$ gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiele:

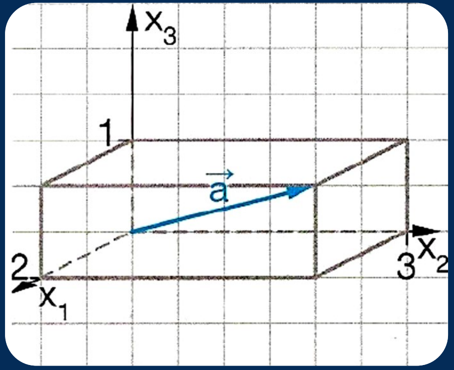
In der Ebene

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



Im Raum

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$



Abbildungen aus:
Schmidt et al. (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien – Lineare Algebra – Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 140-142

MaTeGnu

Kapitel 3:
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

Arithmetischer Zugang
Beispiel Modelleisenbahnbau

Artikel	Stückzahl im Basissortiment	Stückzahl im Ergänzungssortiment 1	Stückzahl im Ergänzungssortiment 2	Preis pro Stück
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	8	15	2,40 €
Gleisstück gebogen (45°)	8	4	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	0	1	6,29 €
Weiche links	0	1	2	17,98 €
Weiche rechts	0	1	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	2	4	12,98 €

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

Arithmetischer Zugang
Beispiel Modelleisenbahnbau

Artikel	**Stückzahl im Basissortiment**	**Stückzahl im Ergänzungssortiment 1**	**Stückzahl im Ergänzungssortiment 2**	**Preis pro Stück**
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	8	15	2,40 €
Gleisstück gebogen (45°)	8	4	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	0	1	6,29 €
Weiche links	0	1	2	17,98 €
Weiche rechts	0	1	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	2	4	12,98 €

Teilevektor

Stückliste Ergänzungssortiment 2:

$$\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Preisvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}40 \\ 2{,}70 \\ 6{,}29 \\ 17{,}98 \\ 17{,}98 \\ 12{,}98 \end{pmatrix}$$

Gesamtpreis eines Sortiments

Summe der Produkte einander entsprechender Komponenten des Teile- und des Preisvektors

$$15 \cdot 2{,}40 + 8 \cdot 2{,}70 + 1 \cdot 6{,}29 + 2 \cdot 17{,}98 + 2 \cdot 17{,}98 + 5 \cdot 12{,}98 = 187{,}73 \text{ (in €)}$$

Skalarprodukt

Die Produktsumme, die den Gesamtpreis ergibt, nennen wir Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{e_2}$ und $\vec{p}$.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

Arithmetischer Zugang
Definition Skalarprodukt

Definition: Skalarprodukt

Als Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

wird die Summe der Produkte einander entsprechender Komponenten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezeichnet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

Definition Skalarprodukt

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Bemerkungen

- Der Name **Skalarprodukt** kommt daher, dass zwei Vektoren ein Skalar, d. h. eine reelle Zahl zugeordnet wird.
- Beim Rechnen mit Vektoren treten damit nun drei Arten von Produkten auf, für die jeweils das Zeichen „·“ verwendet wird:
  - das Produkt zweier reeller Zahlen,
  - das Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl,
  - das Skalarprodukt zweier Vektoren.
- Was das Zeichen „·“ jeweils bedeutet, ergibt sich aus der Art von Objekten (Vektoren oder reelle Zahlen), zwischen denen es steht.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 100

MaTeGnu

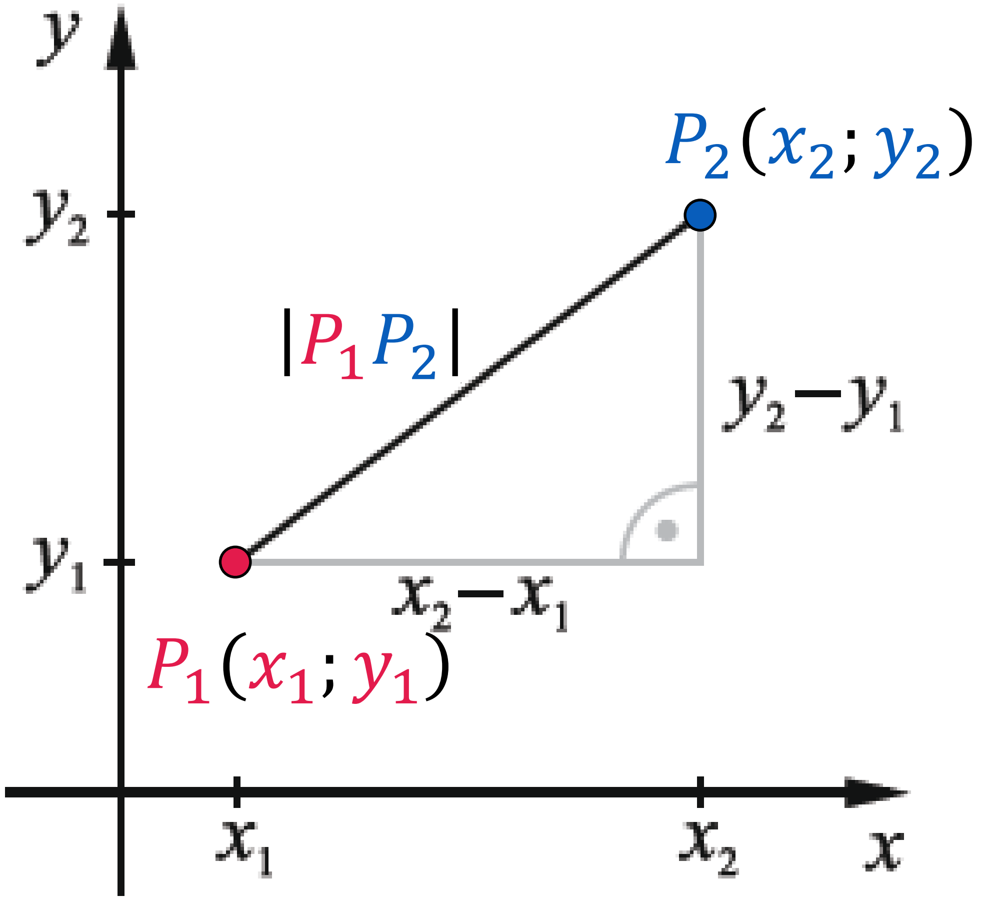
Kapitel 3:
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

Skalarprodukt: Geometrische Deutung

Abstand zweier Punkte der Ebene

Für den Abstand zweier Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ der Ebene ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



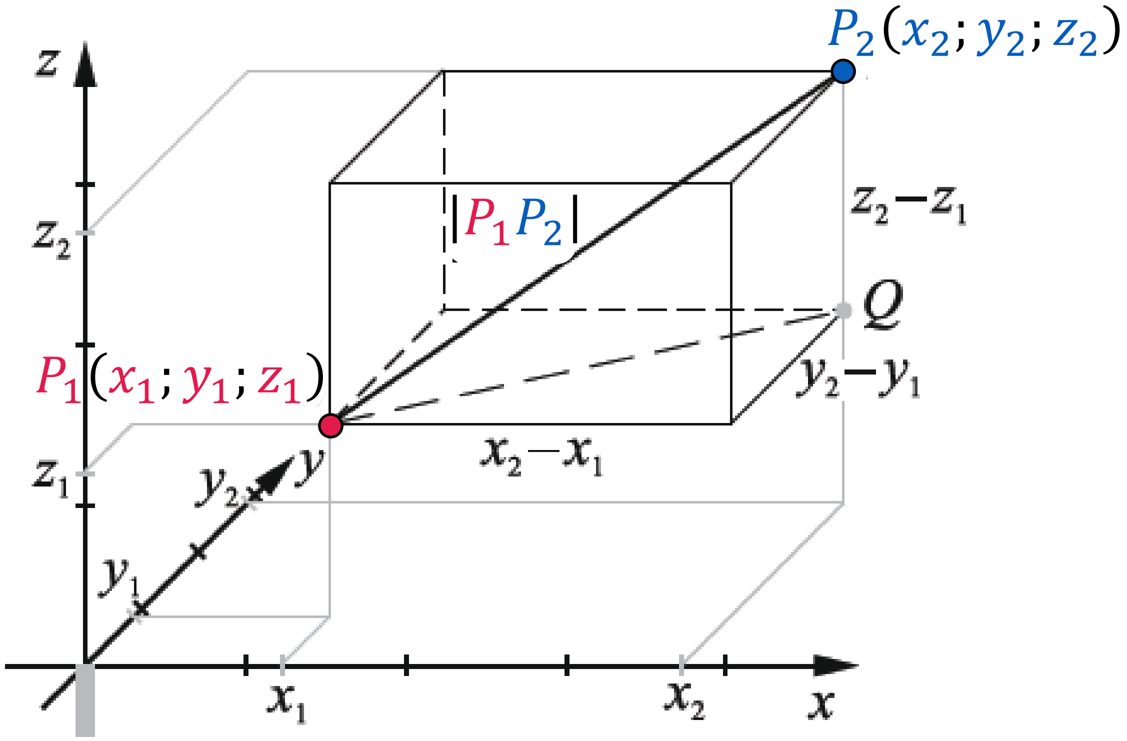
Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 55

Skalarprodukt: Geometrische Deutung

Abstand zweier Punkte des Raums

Für den Abstand zweier Punkte $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ des Raums ergibt sich (zweimaliges Anwenden des Satzes des Pythagoras):

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



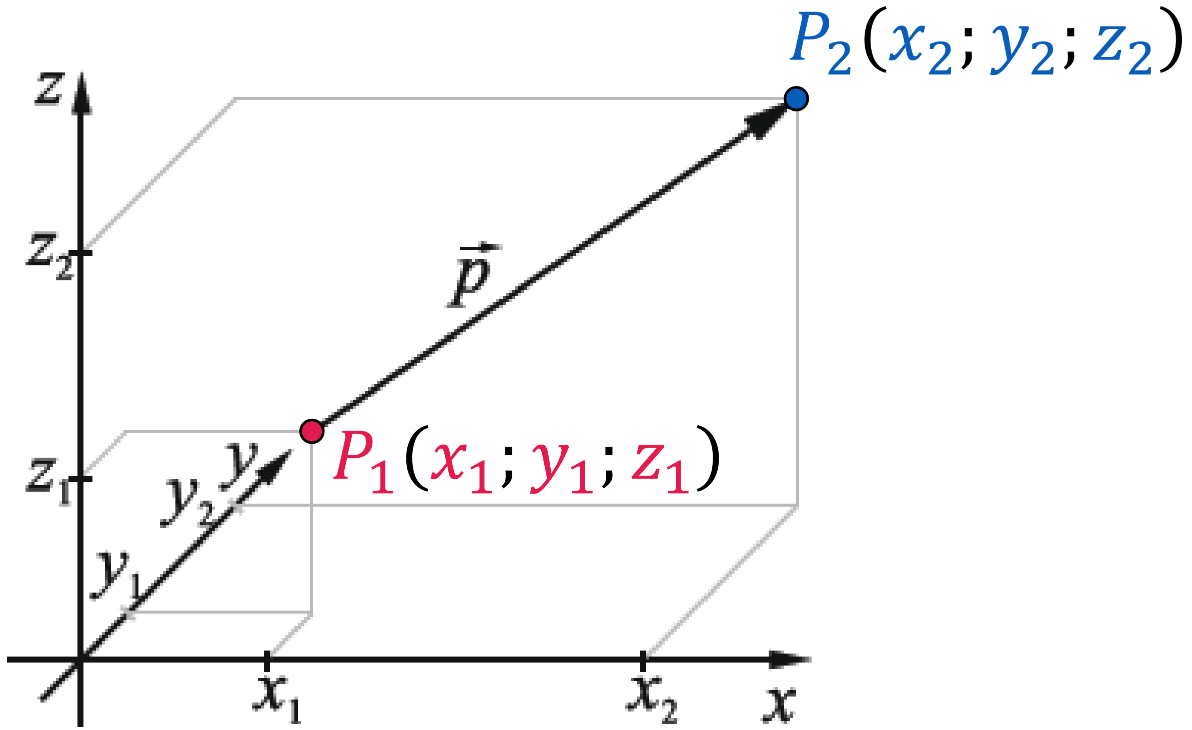
 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 55

Skalarprodukt: Geometrische Deutung

Darstellung von Vektoren

- Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ des Raums entspricht der Länge des Pfeils $\overrightarrow{P_1P_2}$.
- Wird ein Vektor $\vec{p}$ durch den Pfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ repräsentiert, dann kann man diesen Vektor auch so darstellen:

$$\vec{p} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$



 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 55

Skalarprodukt: Geometrische Deutung

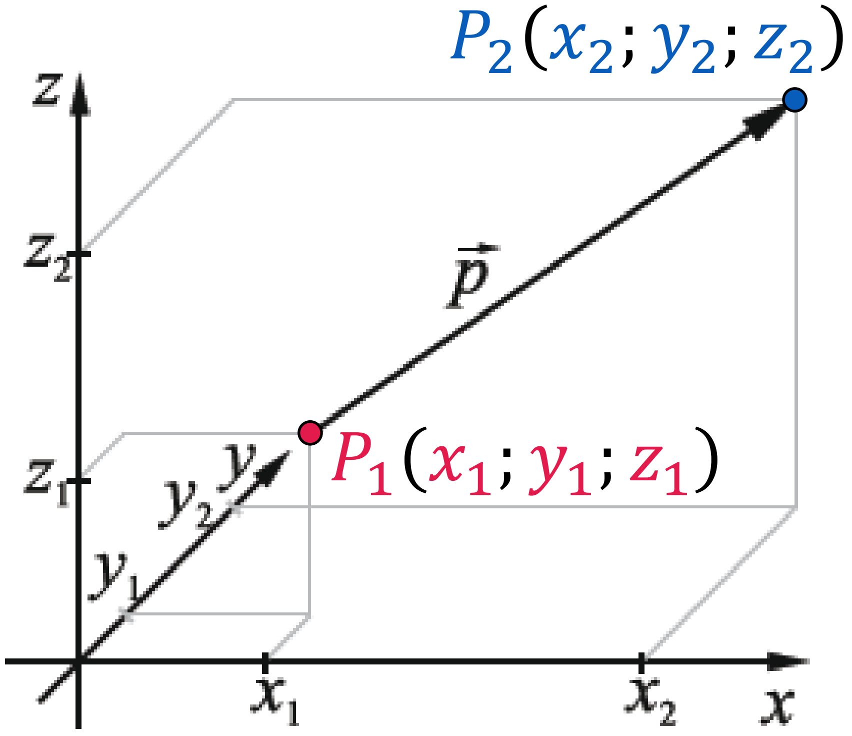
Betrag (Länge) eines Vektors

Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors

$$\vec{p} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

mit sich selbst, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p} &= x_p \cdot x_p + y_p \cdot y_p + z_p \cdot z_p \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right)^2 = |P_1P_2|^2 \end{aligned}$$



Definition: Betrag eines Vektors

Als Betrag $|\vec{v}|$ eines Vektors $\vec{v}$ bezeichnet man die Wurzel aus dem Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst: $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 55

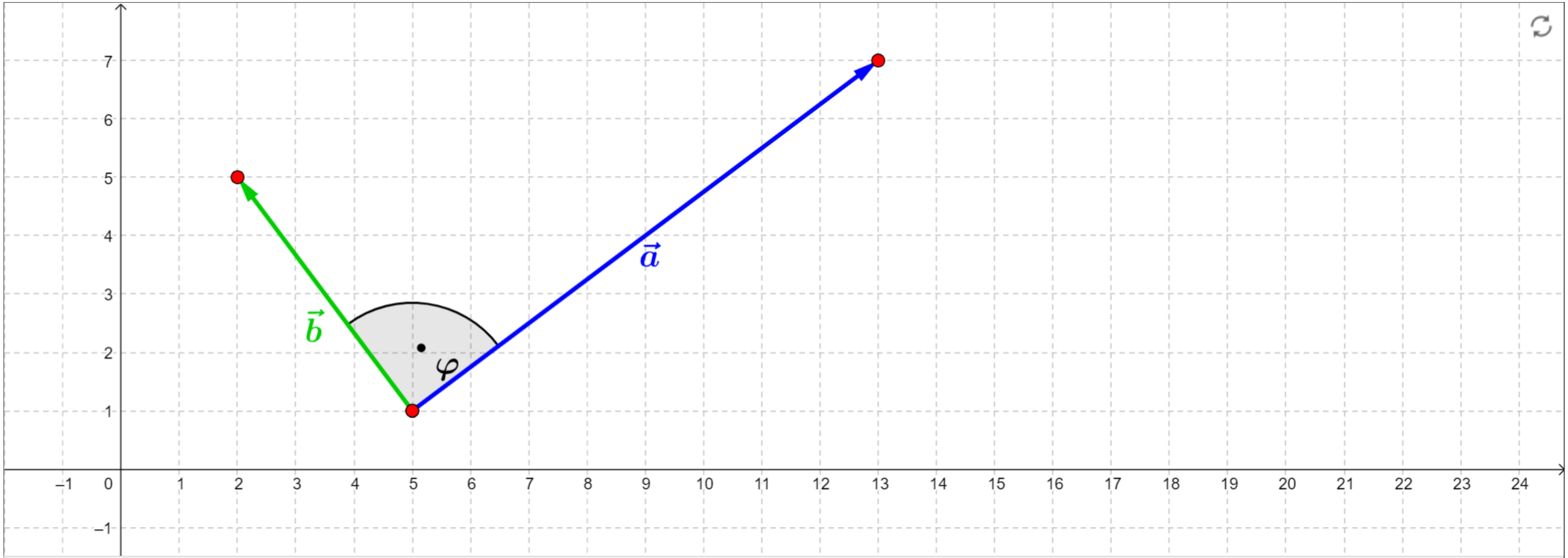
RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 3:
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

Skalarprodukt erkunden



Erkundungsaufträge

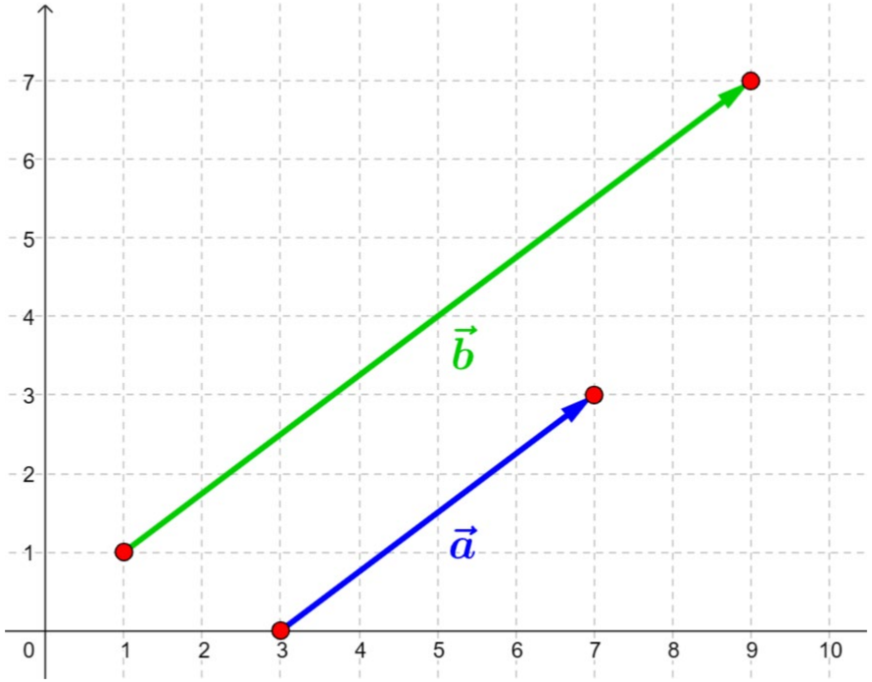
- Was fällt auf?
- Was passiert, wenn die Vektoren parallel zueinander sind?
- Wann ist das Skalarprodukt positiv, wann negativ?
- Wie kann man einen der beiden Vektoren ändern, ohne dass sich das Skalarprodukt ändert?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = 10 \qquad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ |\vec{b}| = 5 \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

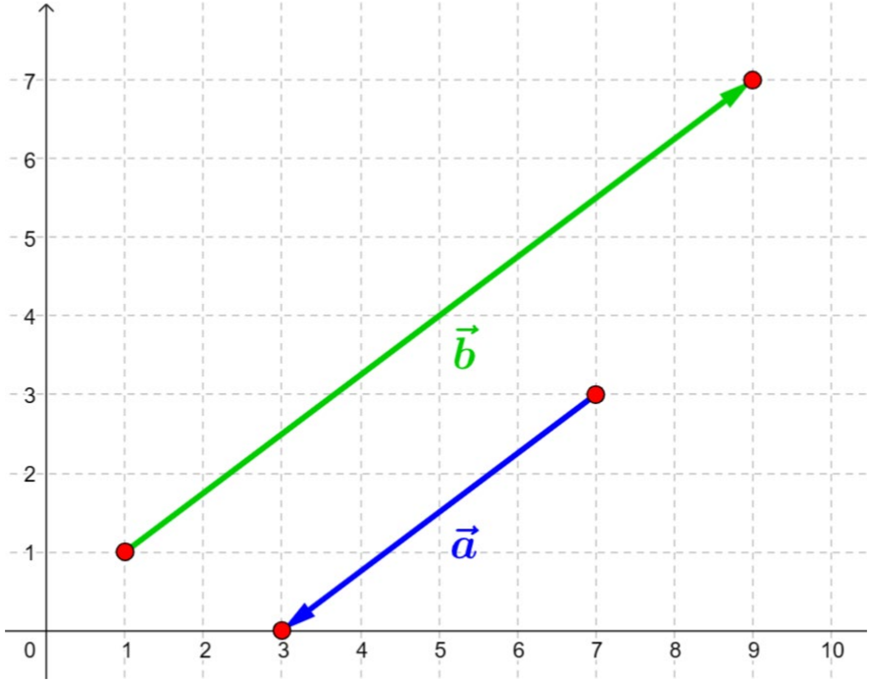
Skalarprodukt erkunden

Aufgabe: Was passiert, wenn die beiden Vektoren parallel zueinander sind?



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 10$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 50$



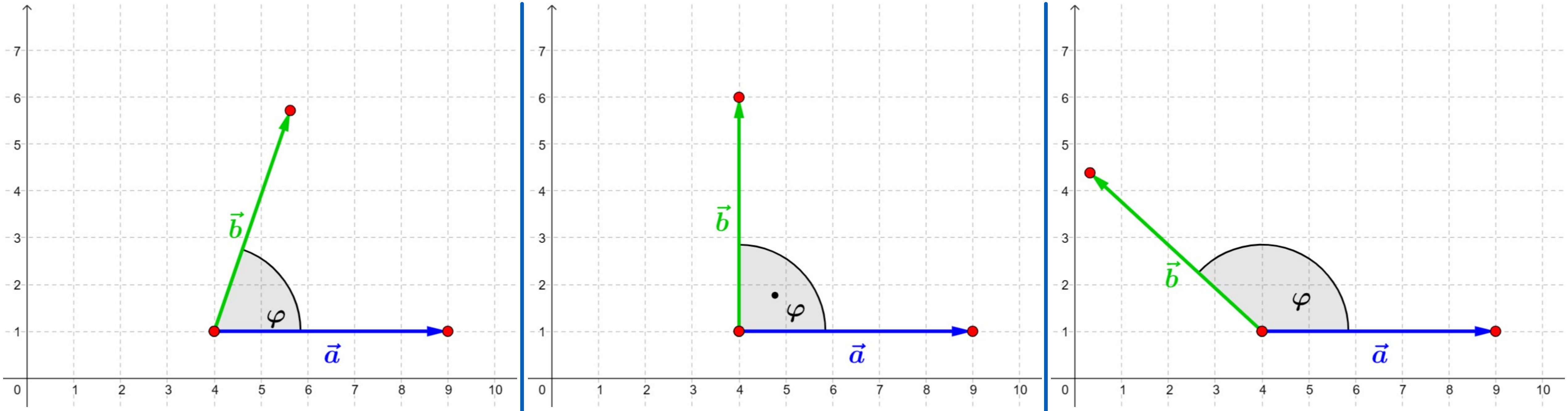
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $|\vec{b}| = 10$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -50$

 https://www.geogebra.org/m/vxfndvh7

Skalarprodukt erkunden

Aufgabe: Wann ist das Skalarprodukt positiv, wann ist es negativ?

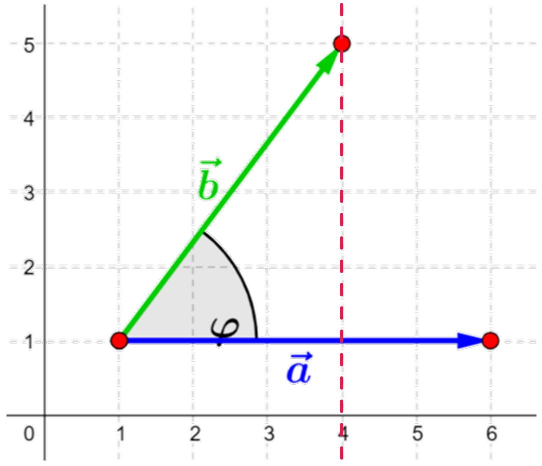


$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix},\ \lvert\vec{a}\rvert=5$	$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix},\ \lvert\vec{a}\rvert=5$	$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix},\ \lvert\vec{a}\rvert=5$
$\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})=71^\circ$	$\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$	$\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})=137.4^\circ$
$\vec{b}=\begin{pmatrix}1.6\\4.7\end{pmatrix},\ \lvert\vec{b}\rvert=5$	$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix},\ \lvert\vec{b}\rvert=5$	$\vec{b}=\begin{pmatrix}-3.7\\3.4\end{pmatrix},\ \lvert\vec{b}\rvert=5$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=8.1$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=-18.4$

Skalarprodukt erkunden

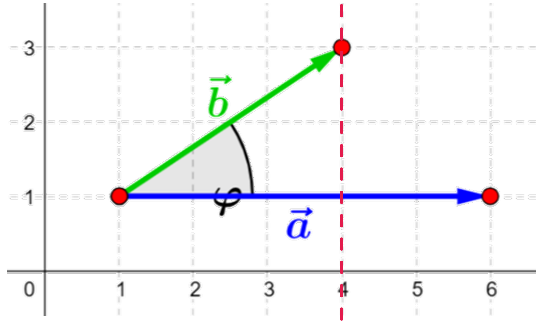
Aufgabe

Wie kann man einen der beiden Vektoren ändern, ohne dass sich das Skalarprodukt ändert?



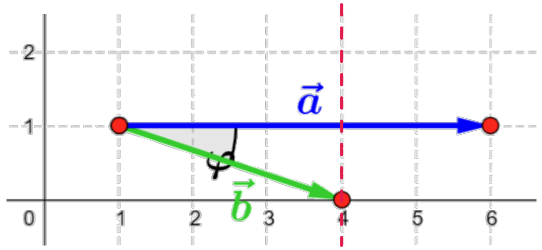
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = 5$ $\qquad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 53.1°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ |\vec{b}| = 5$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 15$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = 5$ $\qquad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 33.7°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ |\vec{b}| = 3.6$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 15$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = 5$ $\qquad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 18.4°$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ |\vec{b}| = 3.2$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 15$

Produktive Übungen: Systematische Variation nutzen

Aufgabe

a) Zeichne zunächst jeweils die beiden Vektoren des Produktes in ein Koordinatenkreuz. Bearbeite mithilfe eines CAS die Aufgaben.

b) Man nennt diese multiplikative Verknüpfung Skalarprodukt. Beschreibe deine Beobachtungen über die Funktionsweise des Skalarprodukts vor dem Hintergrund deiner Ergebnisse und der jeweiligen Vektoren.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}=$$

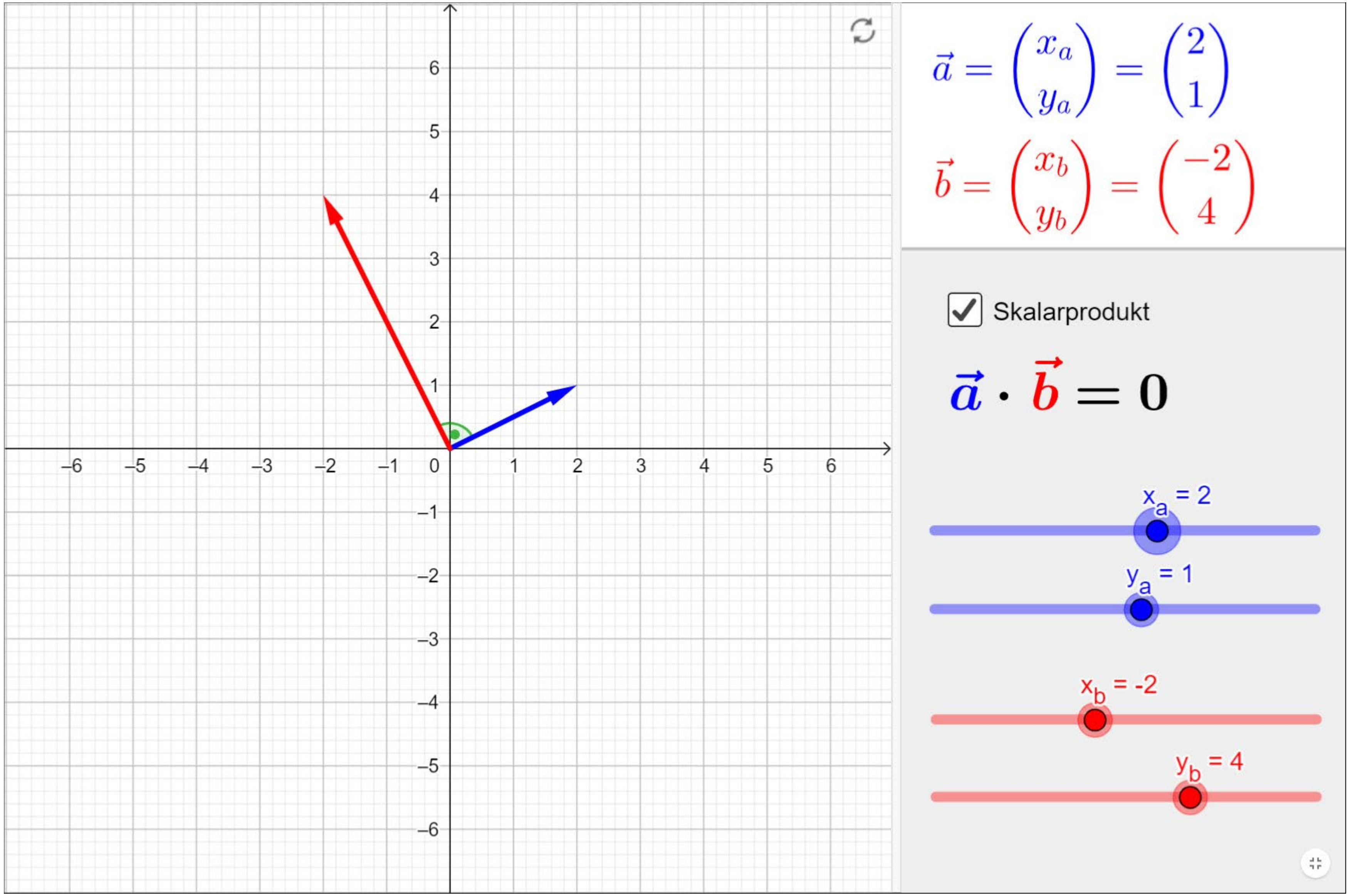
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}= \qquad \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$$

Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 55, 56. Jahrgang, 32-38

https://www.geogebra.org/m/twm4mpbr

Produktive Übungen:
Systematische Variation nutzen



https://www.geogebra.org/m/twm4mpbr

Produktive Übungen:
Systematische Variation nutzen

Aufgabe

a) **F**inde zunächst jeweils die Vektoren in der Abbildung und berechne dann die angegebenen Skalar-produkte.

b) **B**eschreibe deine Beo-bachtungen und formuliere Hypothesen zur Funktions-weise des Skalarprodukts vor dem Hintergrund der Ergebnisse und der jeweils zugrunde liegenden Vektoren.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

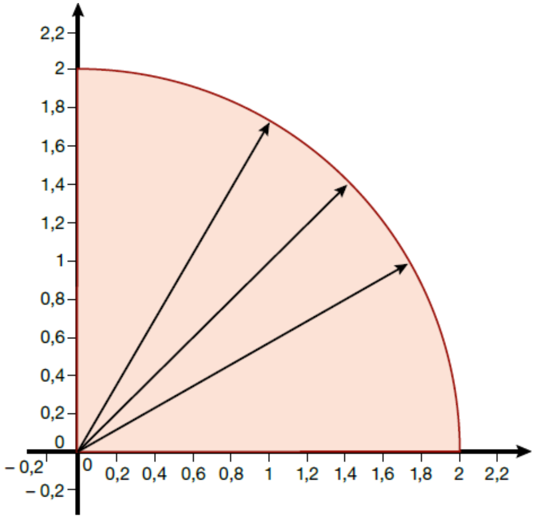
$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

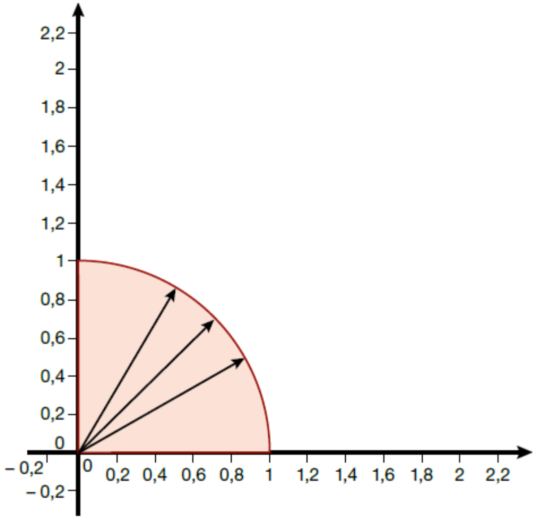
$$\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$



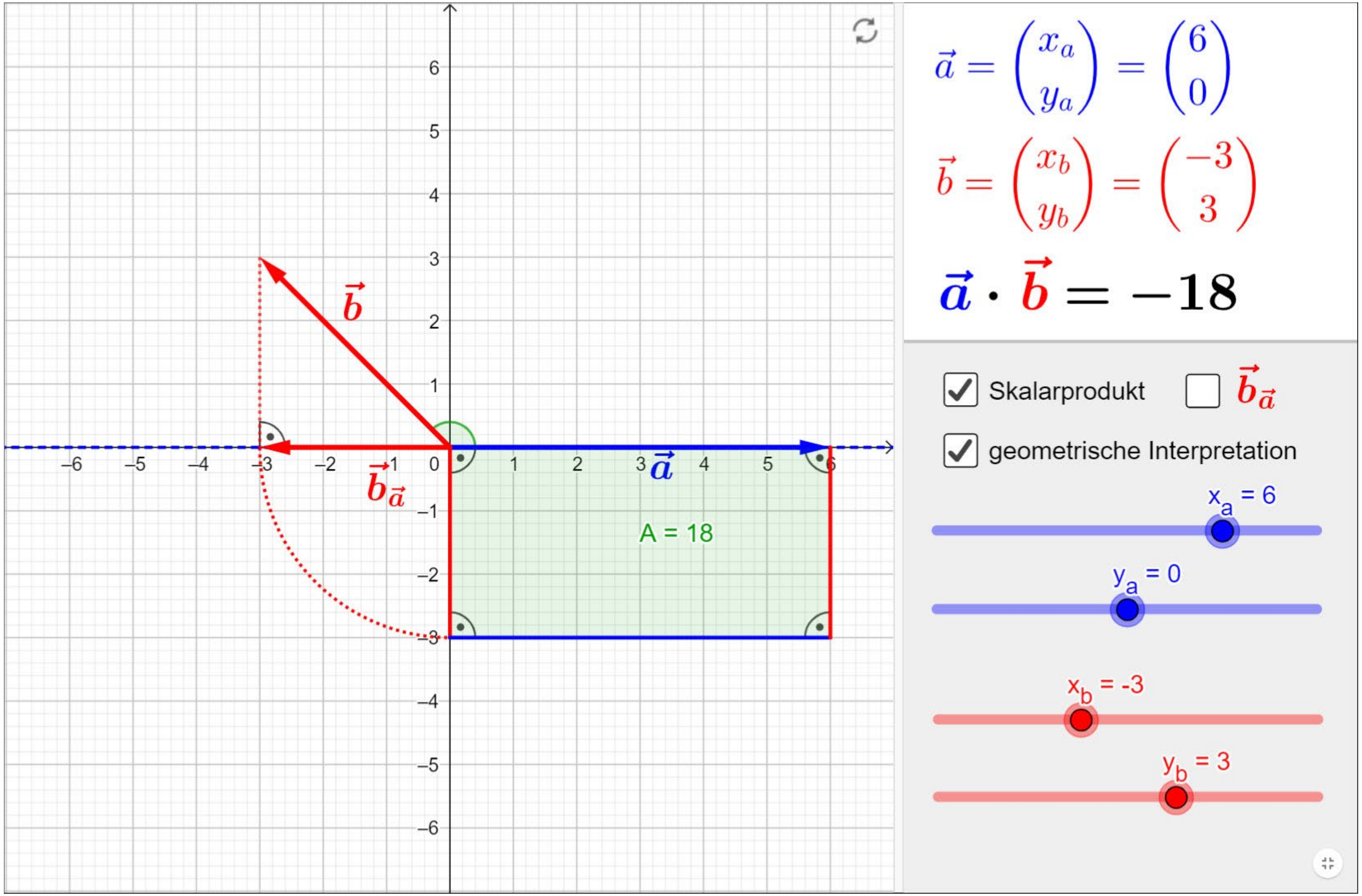


Schacht, F. (2014). Ganz schön verMESSEN! – Das Skalarprodukt aus der Perspektive des Messens. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 55, 56. Jahrgang, 32-38

https://www.geogebra.org/m/twm4mpbr

Produktive Übungen: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



https://www.geogebra.org/m/rbt5pgfp

RPTU

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

MaTeGnu

Kapitel 3:
Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

Selbst-
studium

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“
https://roth.tel/anageo

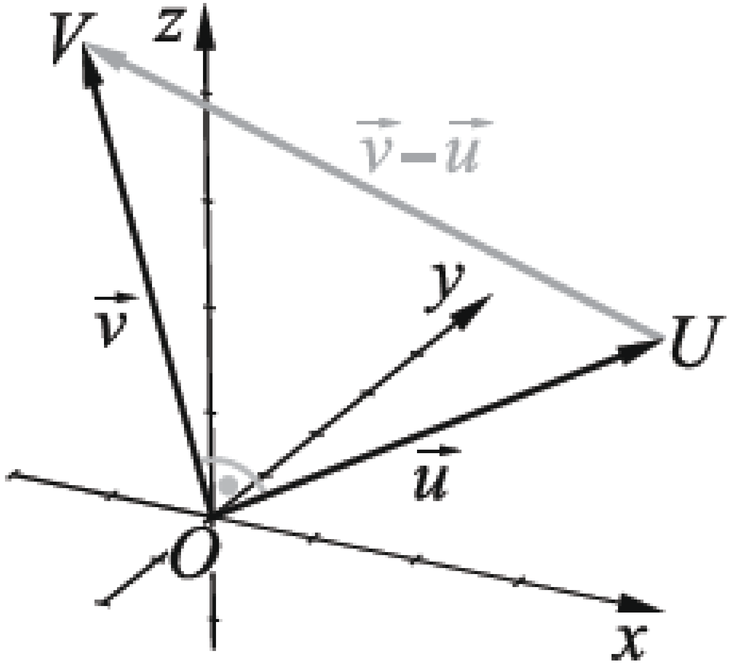
dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

Satz: Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ gilt.



Beweis

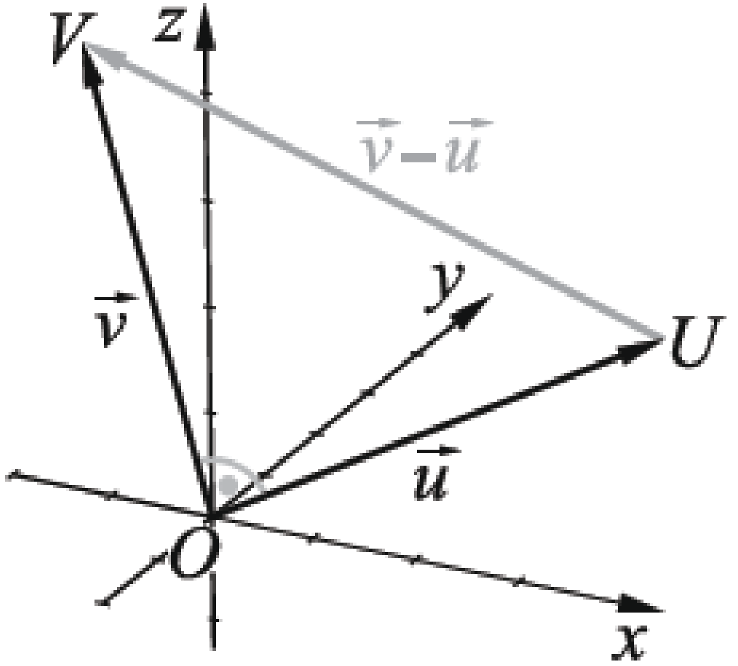
- Von zwei Vektoren
  $$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \text{ ist keiner der Nullvektor.}$$
  (Wenn $\vec{u} = \vec{o}$ oder $\vec{v} = \vec{o}$, dann folgt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ direkt aus der Definition des Skalarprodukts.)
- Betrachte die Pfeile $\overrightarrow{OU}$ und $\overrightarrow{OV}$ die Repräsentanten von $\vec{u}$ bzw. $\vec{v}$ sind und deren Anfangspunkt der Koordinatenursprung O ist.
- Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann orthogonal, wenn das Dreieck ΔUVO bei O rechtwinklig ist.
- Nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung ist das genau dann der Fall, wenn $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$ gilt.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 126f

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

Satz: Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ gilt.



Beweis (Fortsetzung)

- Zu zeigen: $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$
- $|OU|^2 = |\vec{u}|^2$
- $|OV|^2 = |\vec{v}|^2$
- $|UV|^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 = (x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2$
$$= x_v^2 - 2x_u x_v + x_u^2 + y_v^2 - 2y_u y_v + y_u^2 + z_v^2 - 2z_u z_v + z_u^2$$
$$= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - 2 \cdot (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = |OU|^2 + |OV|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$
- Damit gilt $|OU|^2 + |OV|^2 = |UV|^2$ genau dann, wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Genau in diesem Fall sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal. ■

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 126f

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:

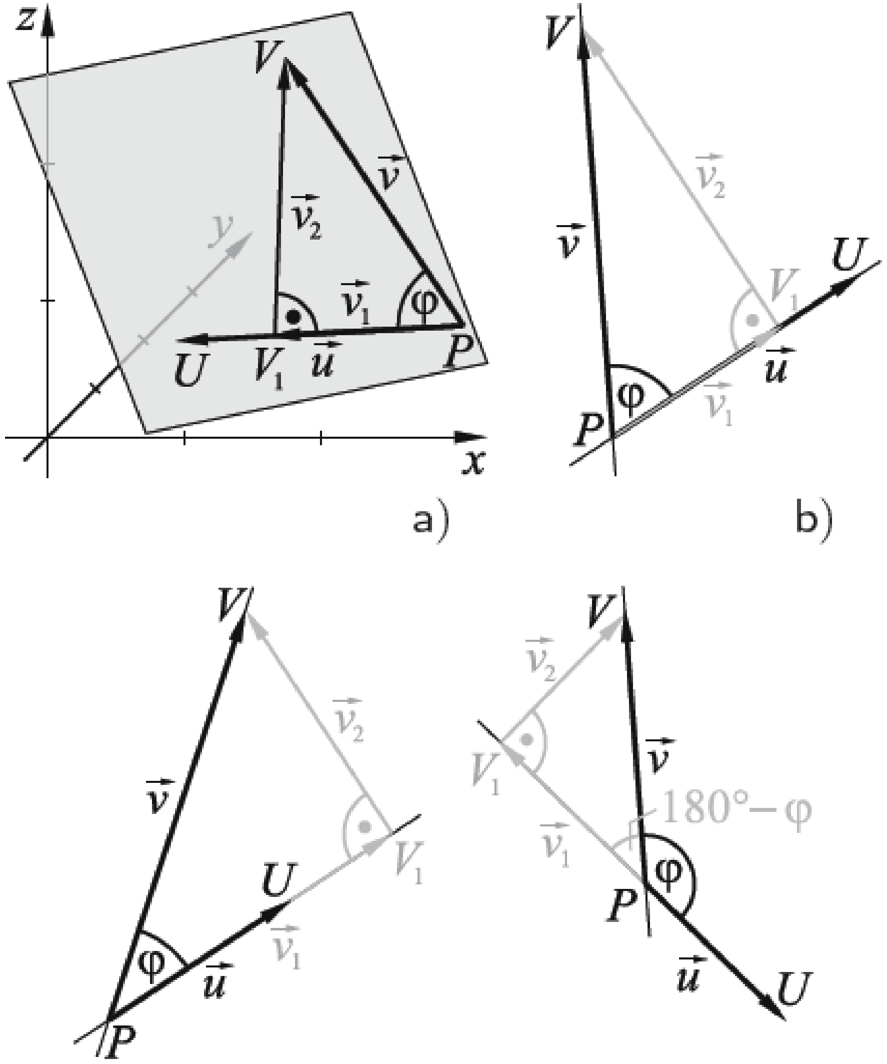
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Satz:
Skalarprodukt kollinearer Vektoren

- Für zwei kollineare und gleichorientierte Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:
  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$
- Für zwei kollineare und entgegengesetzt orientierte Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:
  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 124ff

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

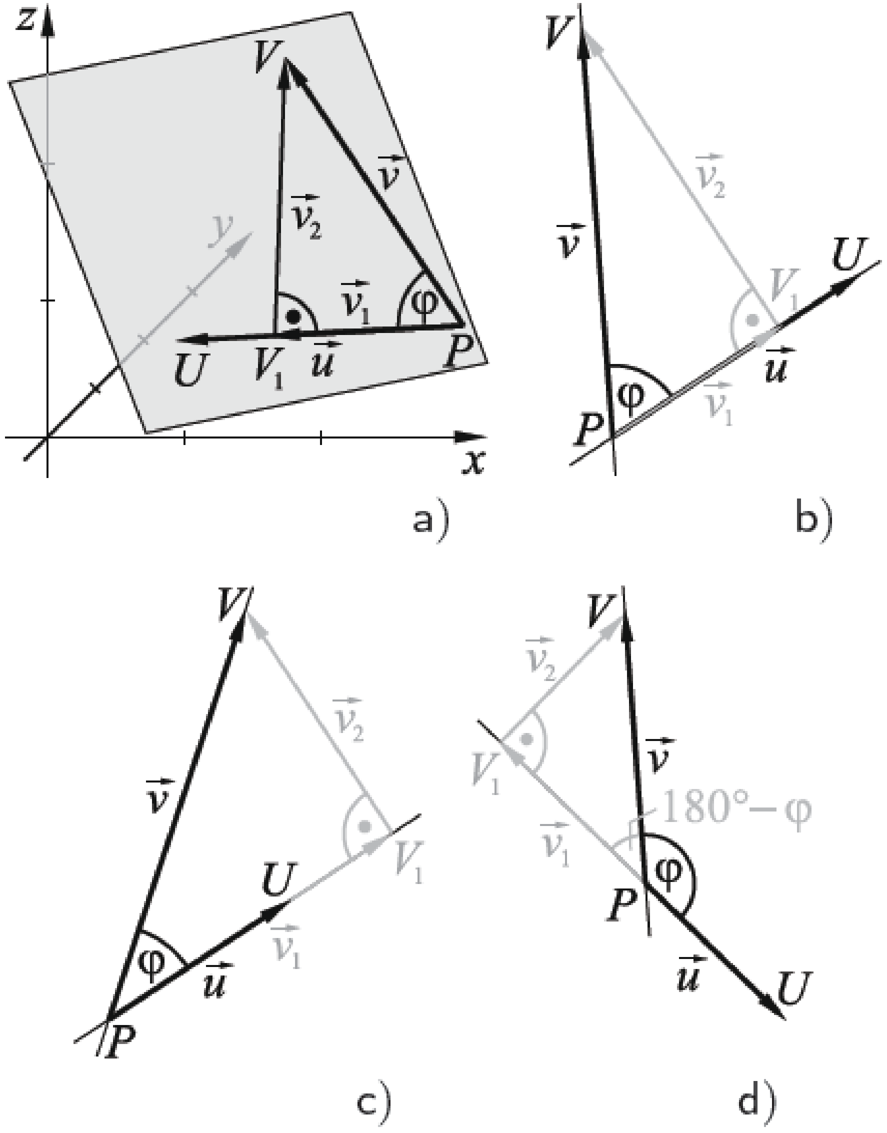


Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

- Der Betrag des Skalarprodukts zweier Vektoren ist also
  - maximal, wenn die Vektoren kollinear und
  - minimal (nämlich Null), wenn die Vektoren orthogonal sind.
- Damit liegt nahe, dass das Skalarprodukt von den Beträgen und dem Zwischenwinkel der Vektoren anhängt.
- Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist der Winkel zwischen zwei repräsentierenden Pfeilen $\overrightarrow{PU}$ und $\overrightarrow{PV}$ mit demselben Anfangspunkt P.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften

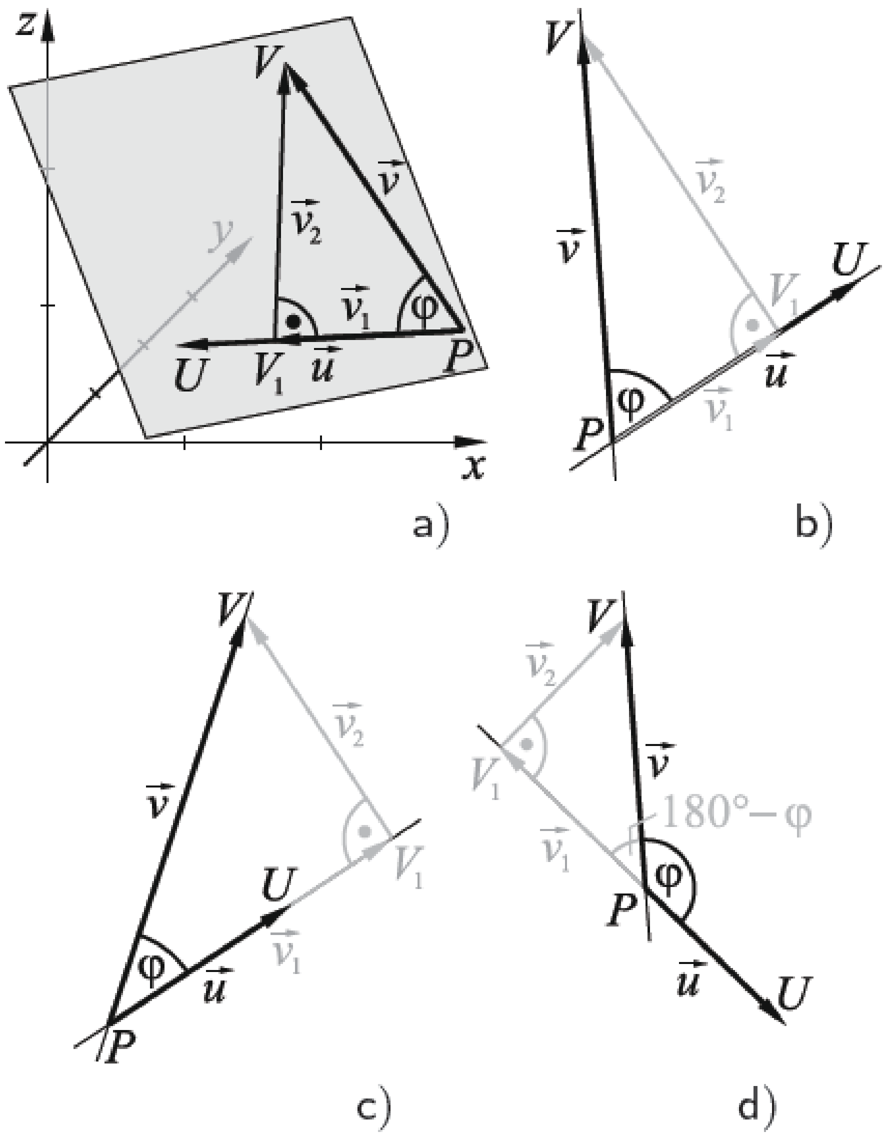


Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

- Lot von V auf die Gerade UP fällen.
  V_1 ist der Lotfußpunkt.
  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (vgl. Abbildungen)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_2}_{\substack{=0 \\ \text{wegen } \vec{u} \perp \vec{v}_2}} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \quad (\#)$
- $\vec{u}$ und $\vec{v}_1$ können abhängig vom Zwischenwinkel φ von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ (mit $0 \leq \varphi \leq 180°$)
  - gleich orientiert ($\varphi < 90°$) oder
  - entgegengesetzt orientiert ($90° < \varphi < 180°$) sein.

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften



Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

- Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}_1$ gleichorientiert, dann gilt nach dem Satz über das Skalarprodukt gleichorientierter, kollinearer Vektoren:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \quad (*)$$

- Im rechtwinkligen Dreieck ΔPV_1V gilt

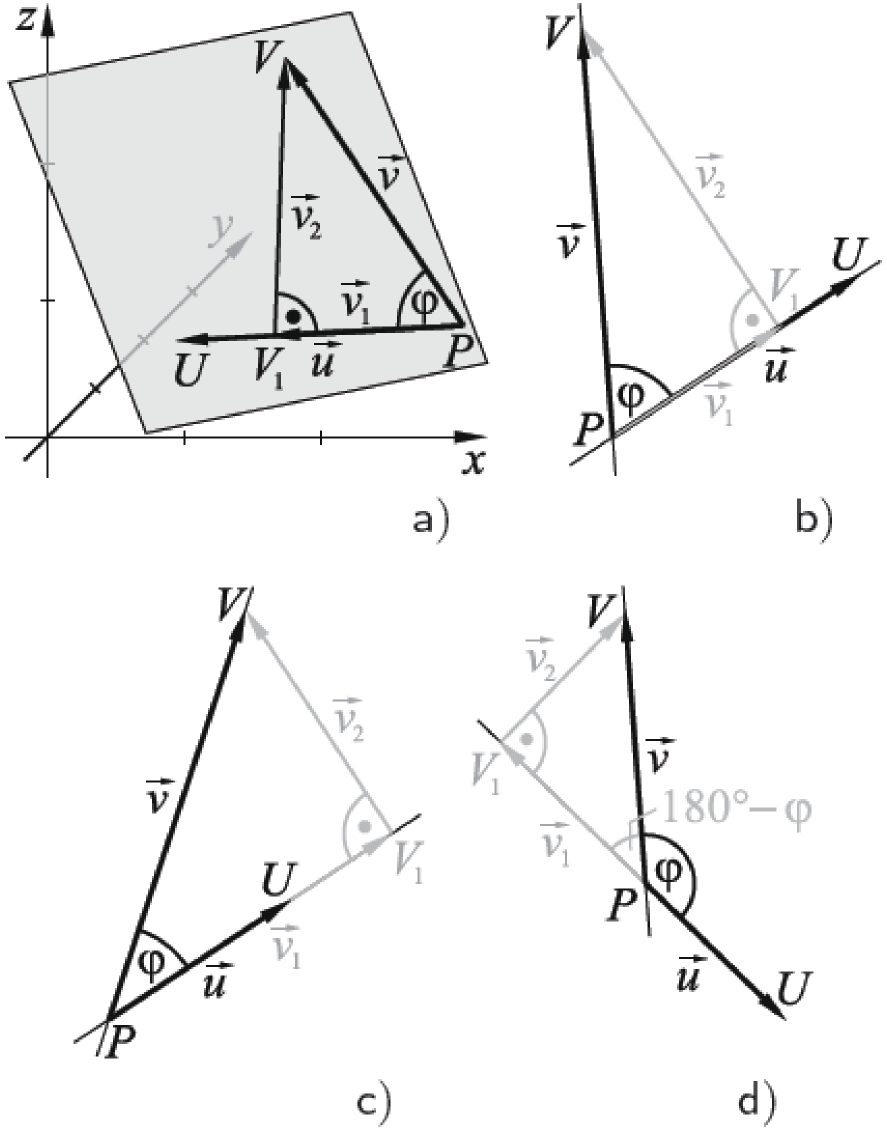
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}|} \text{ bzw. } |\vec{v}_1| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi) \quad (**)$$

- Damit folgt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \overset{(\#)}{\triangleq} \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \overset{(*)}{\triangleq} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \overset{(**)}{\triangleq} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128f

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften



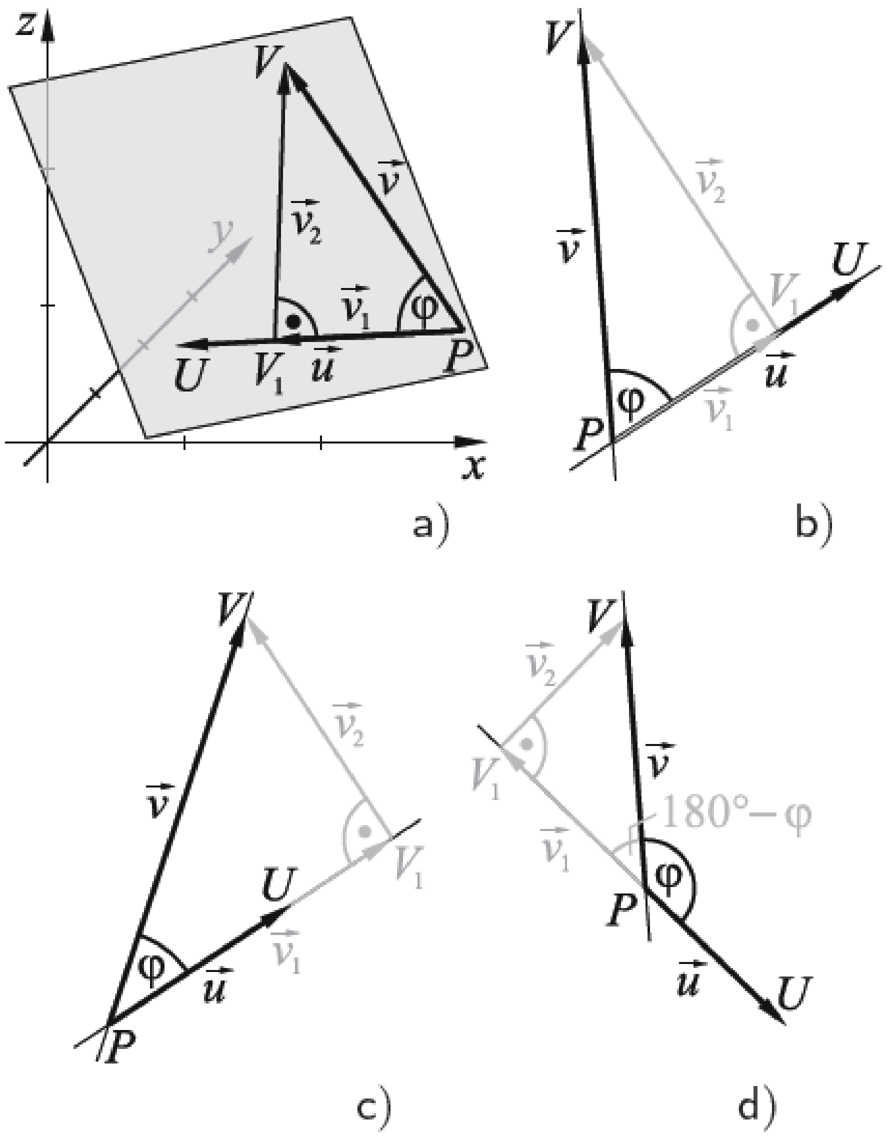
Satz

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, ihre Beträge $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ und den Winkel $\varphi = \angle(\vec{u},\vec{v})$ gilt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

 Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

Skalarprodukt: Geometrische Eigenschaften



Winkel zwischen zwei Vektoren

Wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ zwei Vektoren des Raumes sind, dann ergibt sich:

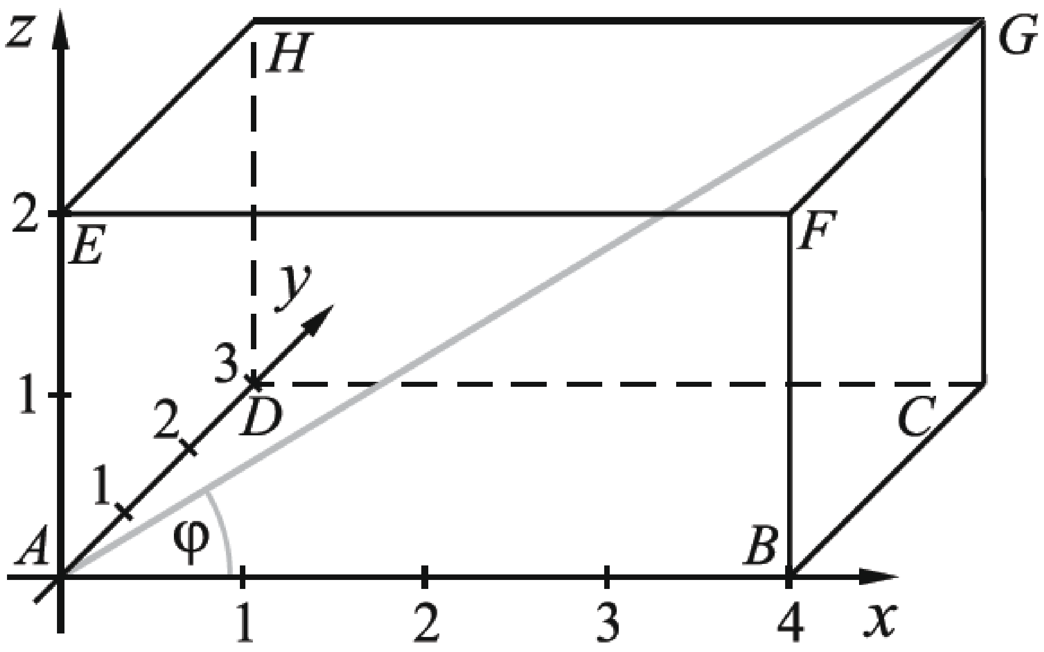
$$\cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{x_u\cdot x_v + y_u\cdot y_v + z_u\cdot z_v}{\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}\cdot\sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}}$$

Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 128

Präsenzübung

Aufgabe

Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Seite $[AB]$ und der Raumdiagonalen $[AG]$ im Quader $ABCDEFGH$.



Lösungshinweis

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right)\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AG}\right|} = \frac{4 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{16}{4 \cdot \sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right) \approx 42°$$

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

MaTeGnu

Kapitel 2:

Skalarprodukt – Längen und Winkel messen

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Abstand Punkt ↔ Gerade
Strategie gesucht

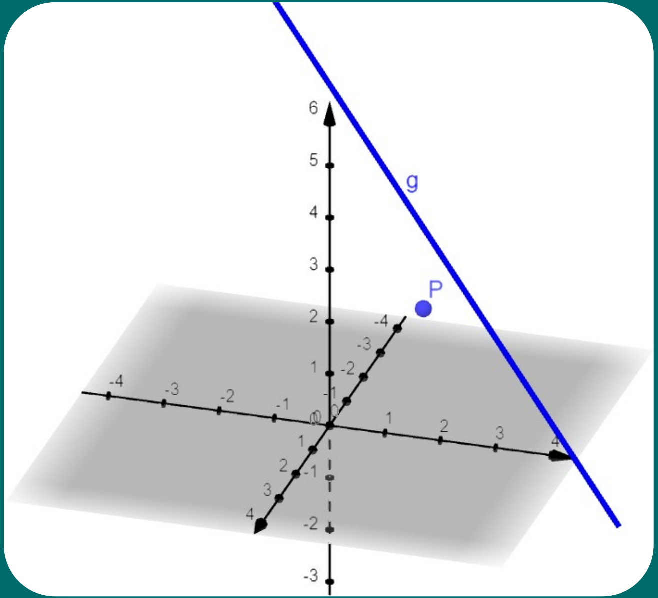
RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Ausgangssituation

Gegeben sind ein Punkt P und eine Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem.

Problem

Wie kann man vorgehen, um den Abstand des Punktes P zur Geraden g zu bestimmen?



Aufgaben

a) **S**ammeln Sie möglichst viele verschiedene Lösungsideen zur Abstandsbestimmung.

Hinweis: Welche geometrischen Objekte (z. B. Punkt, Vektor, Gerade, Ebene, Dreieck, Viereck, Kugel) können dabei helfen?

b) **E**ntwickeln Sie für eine Idee ein konkretes Vorgehen und beschreiben Sie dieses mit allen notwendigen Schritten.

c) **B**erechnen Sie mit diesem Vorgehen den Abstand des Punktes $P(1|2|3)$ zur Geraden g.

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk

Hilfestellungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Idee: Normalenvektor

- Die Ebene, die $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{g}$ enthält, hat einen Normalenvektor.
- Ein Verbindungsvektor von $\boldsymbol{P}$ zu $\boldsymbol{g}$, soll senkrecht zum Normalenvektor und zu $\boldsymbol{g}$ sein!
- Das Skalarprodukt kann helfen!

Idee: Senkrechte Verbindung

- Wähle einen allgemeinen Punkt $\boldsymbol{Q}$ auf $\boldsymbol{g}$! Er hängt noch von $\boldsymbol{t}$ ab.
- Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$ soll senkrecht zu $\boldsymbol{g}$ sein!
- Das Skalarprodukt kann helfen!

Idee: Hilfsebene

- Finde die Ebene, die $\boldsymbol{P}$ enthält und senkrecht zu $\boldsymbol{g}$ verläuft!
- In dieser Ebene kann ein weiterer Punkt bei der Abstandsbestimmung helfen!

Idee: Berührkugel

- Finde eine Kugel mit Mittelpunkt $\boldsymbol{P}$, die $\boldsymbol{g}$ berührt.
- Der Radius $\boldsymbol{r}$ dieser Kugel muss so gewählt werden, dass es nur einen Schnittpunkt mit $\boldsymbol{g}$ gibt.
- Wissen über quadratische Gleichungen kann helfen!

Idee: Kürzeste Verbindung

- Wähle einen allgemeinen Punkt $\boldsymbol{Q}$ auf $\boldsymbol{g}$! Er hängt noch von $\boldsymbol{t}$ ab.
- Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$ soll möglichst kurz sein!
- Eine quadratische Funktion kann helfen!

Idee: Geradenschar

- Es gibt eine Schar von unendlich vielen Geraden durch $\boldsymbol{P}$, die senkrecht zum Richtungsvektor von $\boldsymbol{g}$ verlaufen.
- Diejenige Gerade der Schar, die $\boldsymbol{g}$ schneidet, kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

Hilfestellungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Idee: Orthogonalisierung

- Ein Verbindungsvektor $\vec{v}$ von $\boldsymbol{P}$ zu $\boldsymbol{g}$ kann in einem zu $\boldsymbol{g}$ parallelen und einen zu $\boldsymbol{g}$ orthogonalen Anteil zerlegt werden:
$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$
- Ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von $\boldsymbol{g}$, so gilt:
$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$$
- Der Vektor $\vec{v}_{\perp}$ kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

Idee: Höhe im Parallelogramm

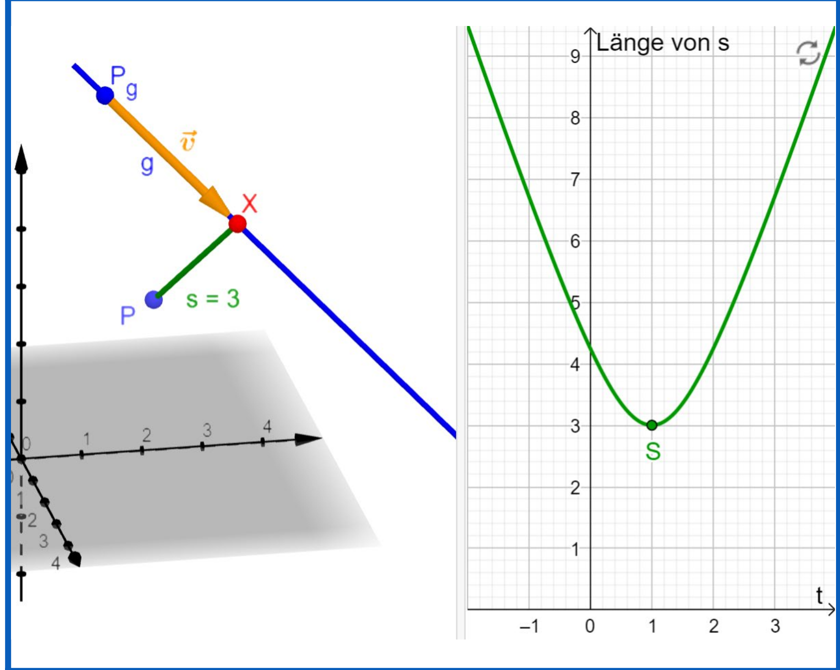
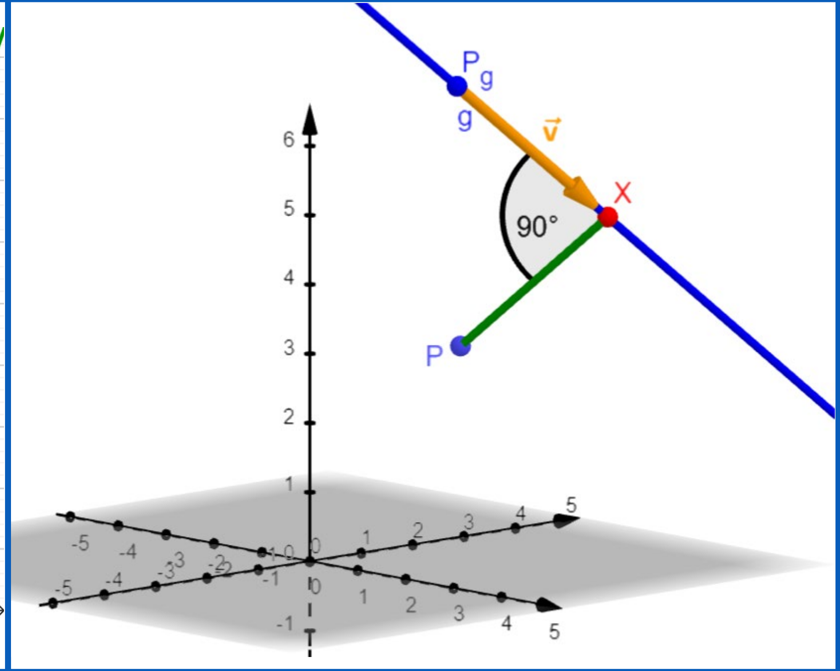
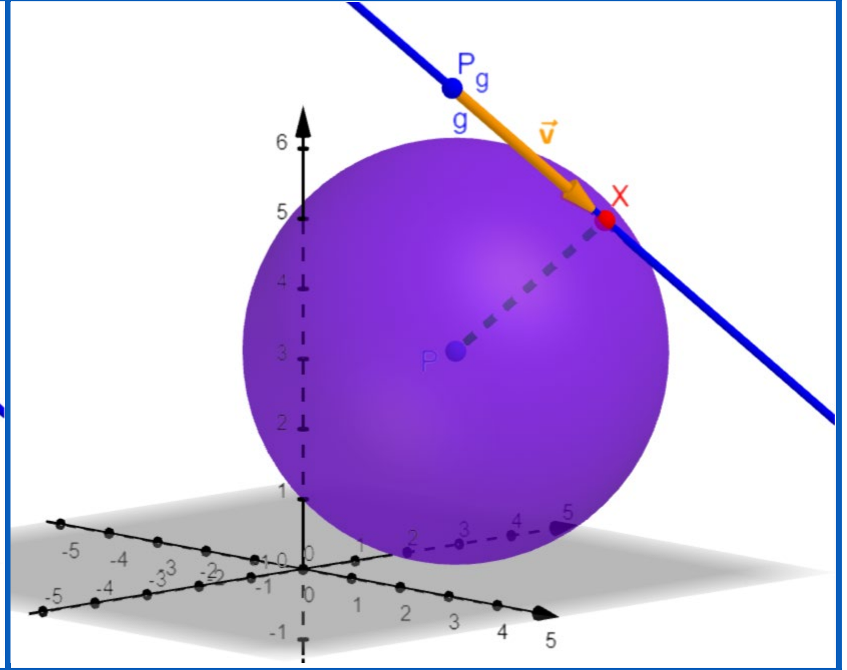
- Ein Verbindungsvektor von $\boldsymbol{P}$ zu $\boldsymbol{g}$ spannt mit einem Richtungsvektor von $\boldsymbol{g}$ ein Parallelogramm auf.
- Hat man den Flächeninhalt und eine Seitenlänge, so kann man die Höhe im Parallelogramm bestimmen!
- Das Vektorprodukt kann helfen!

Idee: Kugelschnittpunkte

- Finde eine Kugel mit Mittelpunkt $\boldsymbol{P}$, die von $\boldsymbol{g}$ in zwei Punkten A und B getroffen wird!
- Der Mittelpunkt der Punkte A und B kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

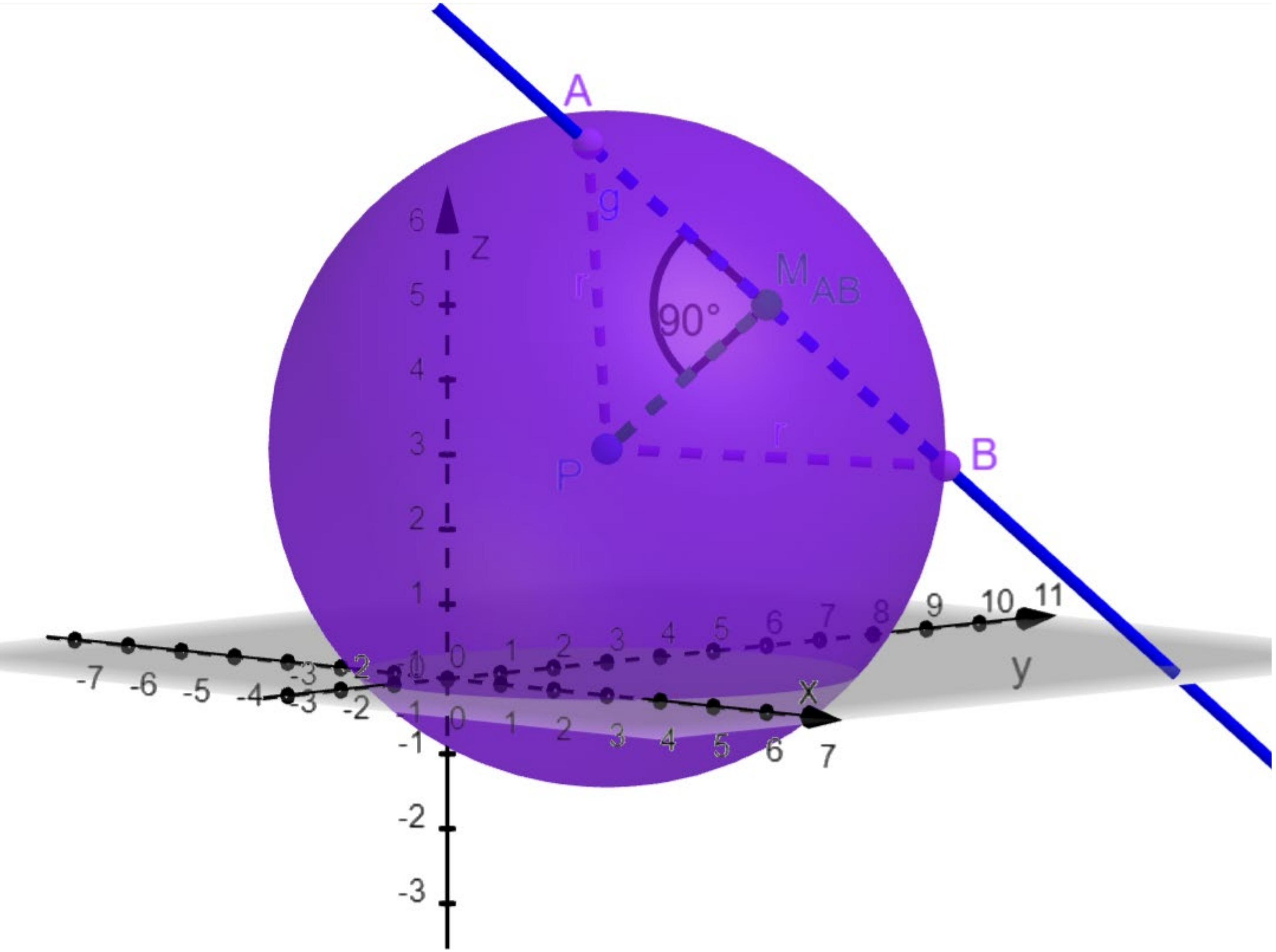
Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

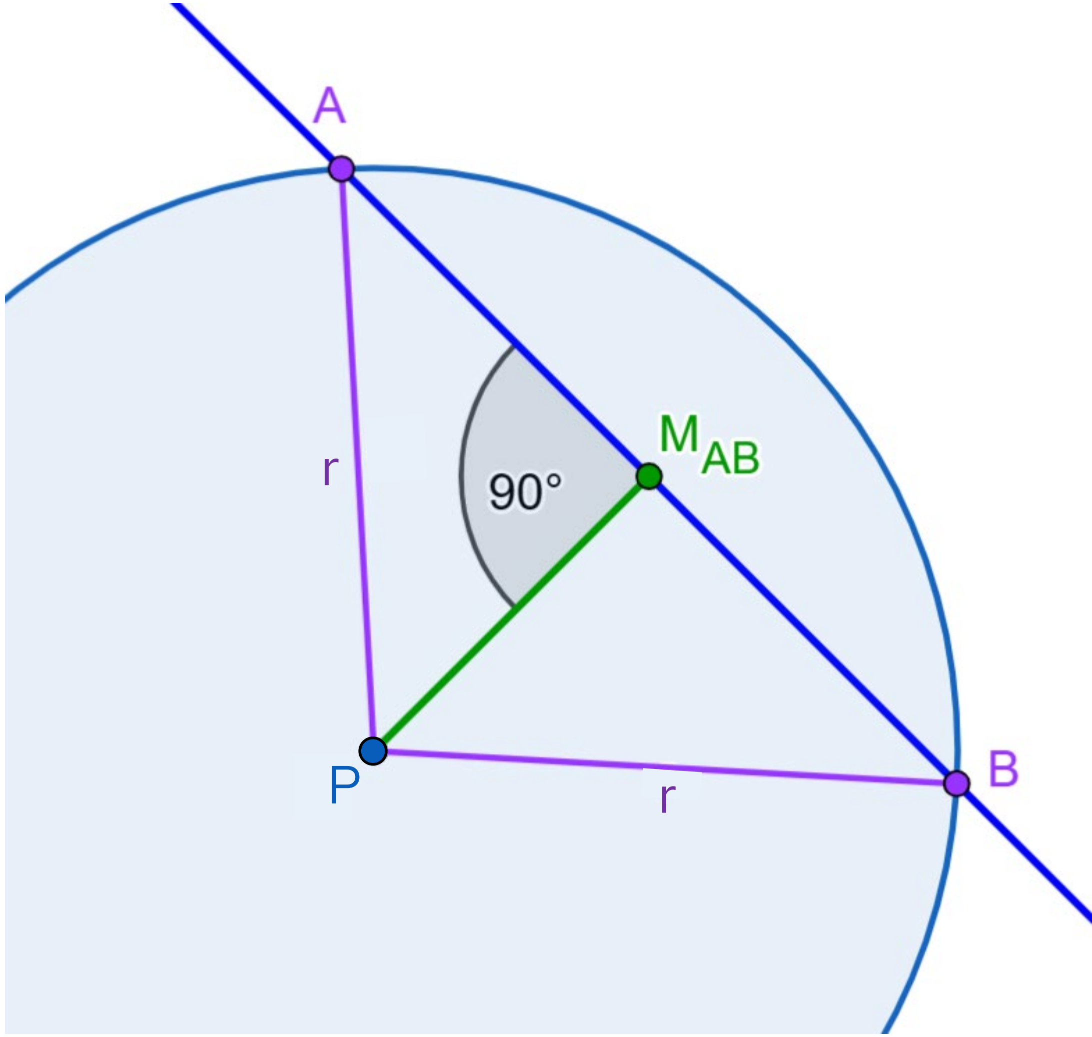
Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

Abstand als kürzeste Verbindung	Abstand als orthogonale Verbindung	Abstand als Radius einer Berührkugel (3D) bzw. eines Berührkreises (2D)
		
https://www.geogebra.org/m/r2tjbnrj	https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk	https://www.geogebra.org/m/cbkyebyk

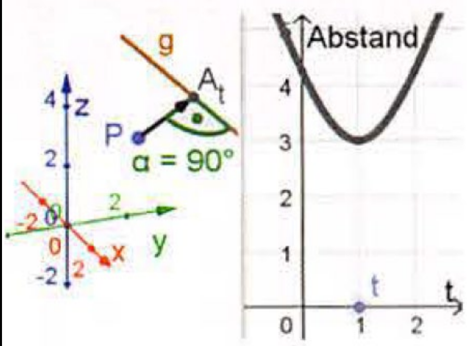
 Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 223*, 32–36

Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff
Spezialfall: Kugel, die die Gerade schneidet

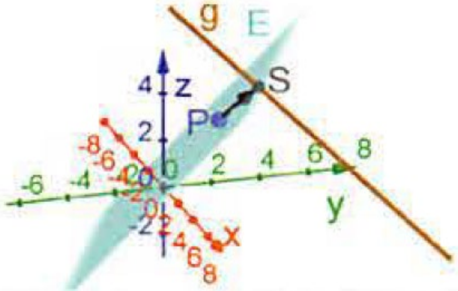
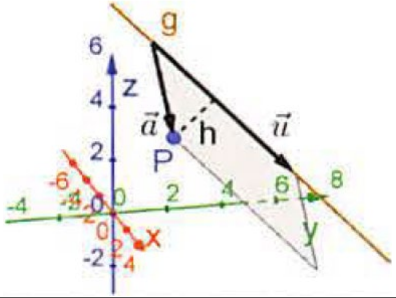




Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

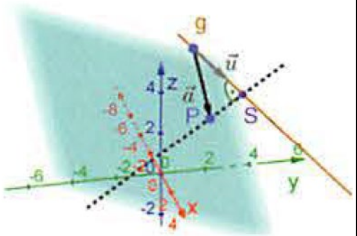
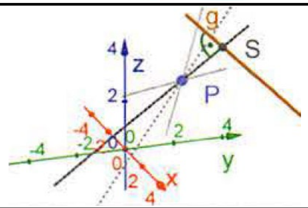
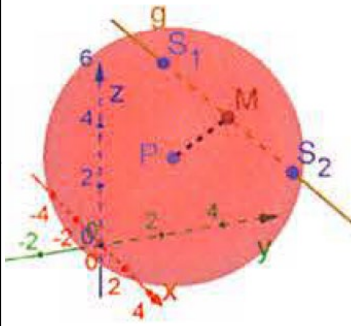
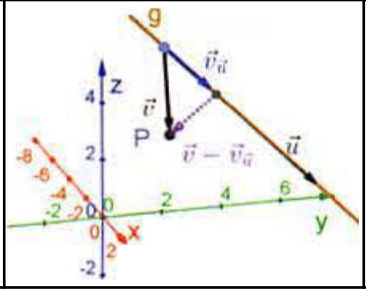
<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Idee</th><th>Abbildung</th><th>GV zum Abstand</th><th>Bezüge zu weiteren Begriffen und Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Länge des Verbindungsvektors, der orthogonal zur Geraden verläuft</td><td rowspan="2">
</td><td>orthogonale Verbindung</td><td rowspan="2">Gerade als Punktmenge:
Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt.
Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung & Orientierung

Skalarprodukt:
Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren

Funktionaler Zusammenhang: Jedem Parameterwert wird die Länge des Verbindungsvektors zugeordnet.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Länge des kürzesten Verbindungsvektors</td><td>Kürzeste Verbindung</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Normalebene zur Geraden durch den Punkt, Schnittpunkt mit der Geraden</td><td>
</td><td>orthogonale Verbindung</td><td>Gerade als Punktmenge:
Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt
Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung & Orientierung
Normalenform einer Ebene:
Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Höhe eines Parallelogramms, das durch einen Richtungs- und einen Verbindungsvektor aufgespannt wird</td><td>
</td><td>orthogonale Verbindung</td><td>Richtungsvektor einer Geraden und Verbindungsvektor zweier Punkte als Pfeile mit Länge, Richtung und Orientierung
Vektorprodukt:
Betrag gibt Flächeninhalt des Parallelogramms an
Flächeninhalt Parallelogramm: Produkt von Seitenlänge & Höhe</td></tr>
</table>

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. Mathematik lehren, 223, 32–36

Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

Nr.	Idee	Abbildung	GV zum Abstand	Bezüge zu weiteren Begriffen und Grundvorstellungen
5	Lotgerade sowohl orthogonal zur Geraden als auch zum Normalenvektor derjenigen Ebene, die Punkt und Gerade enthält		orthogonale Verbindung	**Normalenform einer Ebene:** Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor Skalar-/Vektorprodukt zur Bestimmung des Normalenvektors Richtungsvektor einer Geraden als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung
6	Geradenschar durch den Punkt, die orthogonal zur gegebenen Gerade sind; nur eine Gerade der Schar schneidet diese		orthogonale Verbindung	**Gerade als Punktmenge:** Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung **Skalarprodukt:** Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren
7	Berührpunkt an die Gerade von einer passend großen Kugel um den Punkt		Radius einer Berührkugel	**Gerade als Punktmenge:** Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt **Kugel als Ortsfläche:** Kugel als Menge von Punkten gleichen Abstands zum Mittelpunkt
8	Mittelpunkt der Schnittpunkte von der Geraden mit einer genügend großen Kugel um den Punkt		orthogonale Verbindung	
9	Beliebiger Verbindungsvektor ist Summe von parallelem und orthogonalen Anteil; Berechnung des parallelen und damit dann des orthogonalen Anteils (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)		orthogonale Verbindung	**Skalarprodukt:** Projektionsvorstellung $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}}$ **Skalare Multiplikation:** $\vec{u}$ wird zu $\vec{v}_{\vec{u}}$ gestaucht/streckt: $\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \cdot \vec{u}$ **Vektoraddition:** orthogonaler Verbindungsvektor ist $\vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}$

Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. Mathematik lehren, 223, 32–36

MaTeGnu

4 Matrizen – Modellieren und angewandte Mathematik

Warum Modellieren und Angewandte Mathematik?

Zielrichtungen

- Die Frage nach dem „Warum?“ wird von Anfang an thematisiert.
- Begriffe, Verfahren und Strukturen
  - an konkreten Beispielen erarbeiten,
  - als Grundlage von Problemlösungen nutzen und
  - in vielfältigen Anwendungsbereichen einsetzen.

Beispiel: Marktforschung

Streaming-Dienste

- Ein Marktforschungsinstitut wird beauftragt, das Verhalten der Abo-Kunden von Streaming-Diensten zu untersuchen.
- **Ziel:** Argumente für Marketingentscheidungen liefern.

Modellannahmen

- Es gibt zwei Streaming-Dienste: GoVideo (**G**) und Hetzfix (**H**)
- Die Gesamtzahl der Kunden bleibt konstant.
- Der Marktmechanismus ändert sich nicht.

Beispiel: Marktforschung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Daten über Umfragen

- Streaming-Dienst GoVideo (**G**) hat 20.000 Kunden.
- Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) hat 30.000 Kunden.
- Pro Monat wechseln 20% der **G**-Kunden zu **H**.
- Pro Monat wechseln 5% der **H**-Kunden zu **G**.

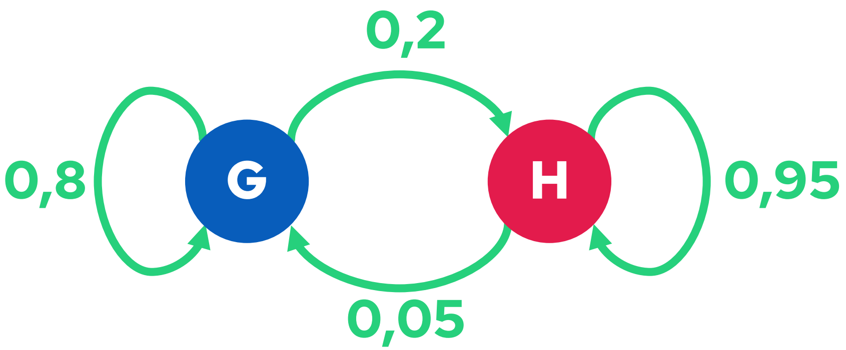
Wie entwickeln sich die Kundenzahlen?

- Abonnieren irgendwann alle den Streaming-Dienst Hetzfix (**H**)?
- Oszillieren die Kundenzahlen?
- Stellt sich ein Gleichgewicht ein?

Übergangstabelle

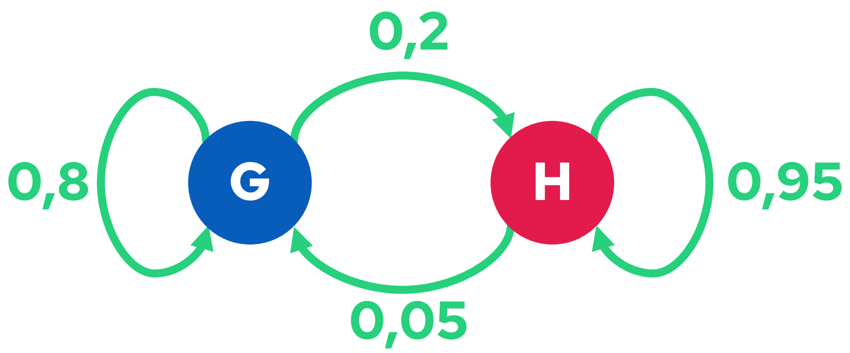
	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

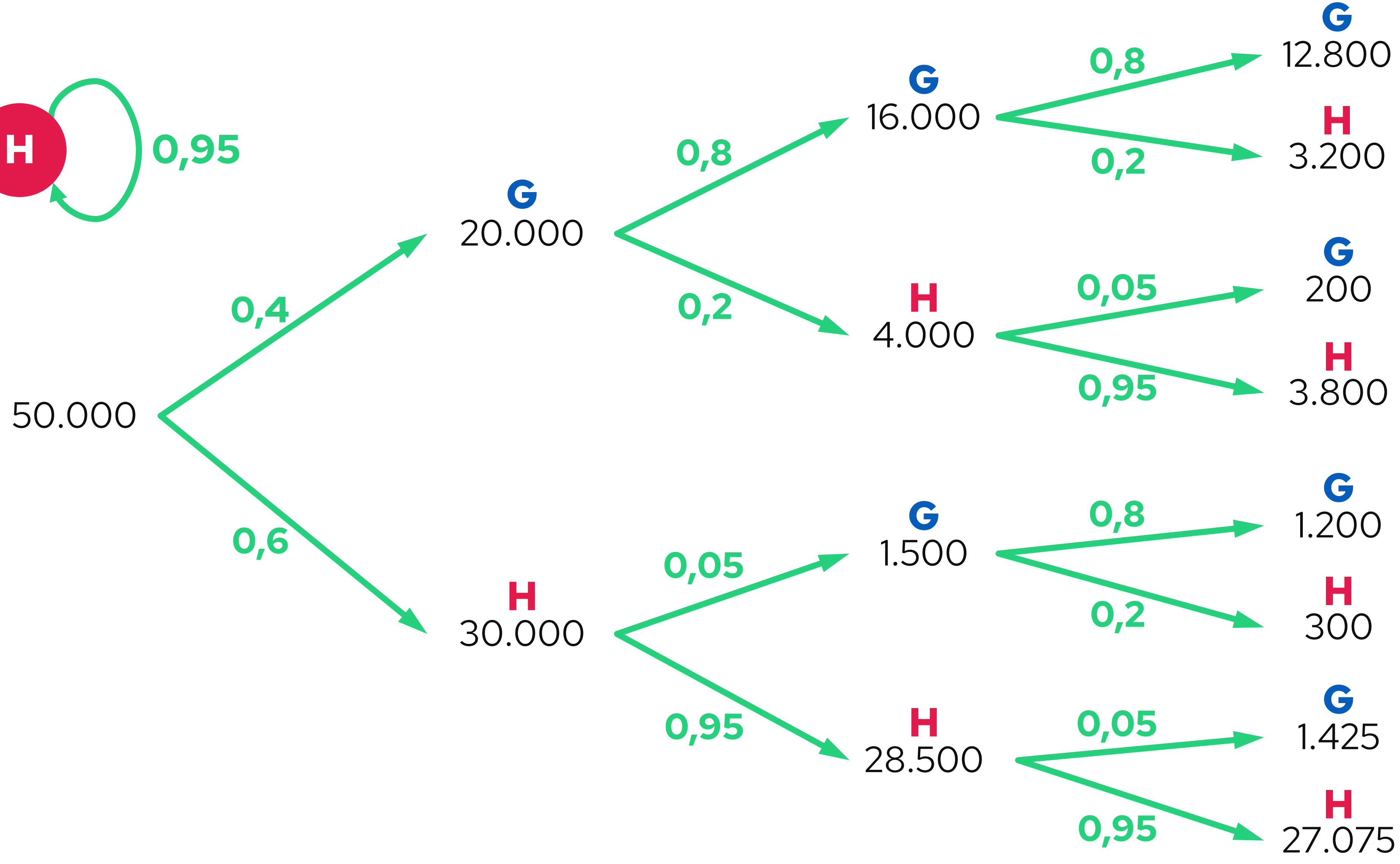
Übergangsgraph



RPTU

Baumdiagramm



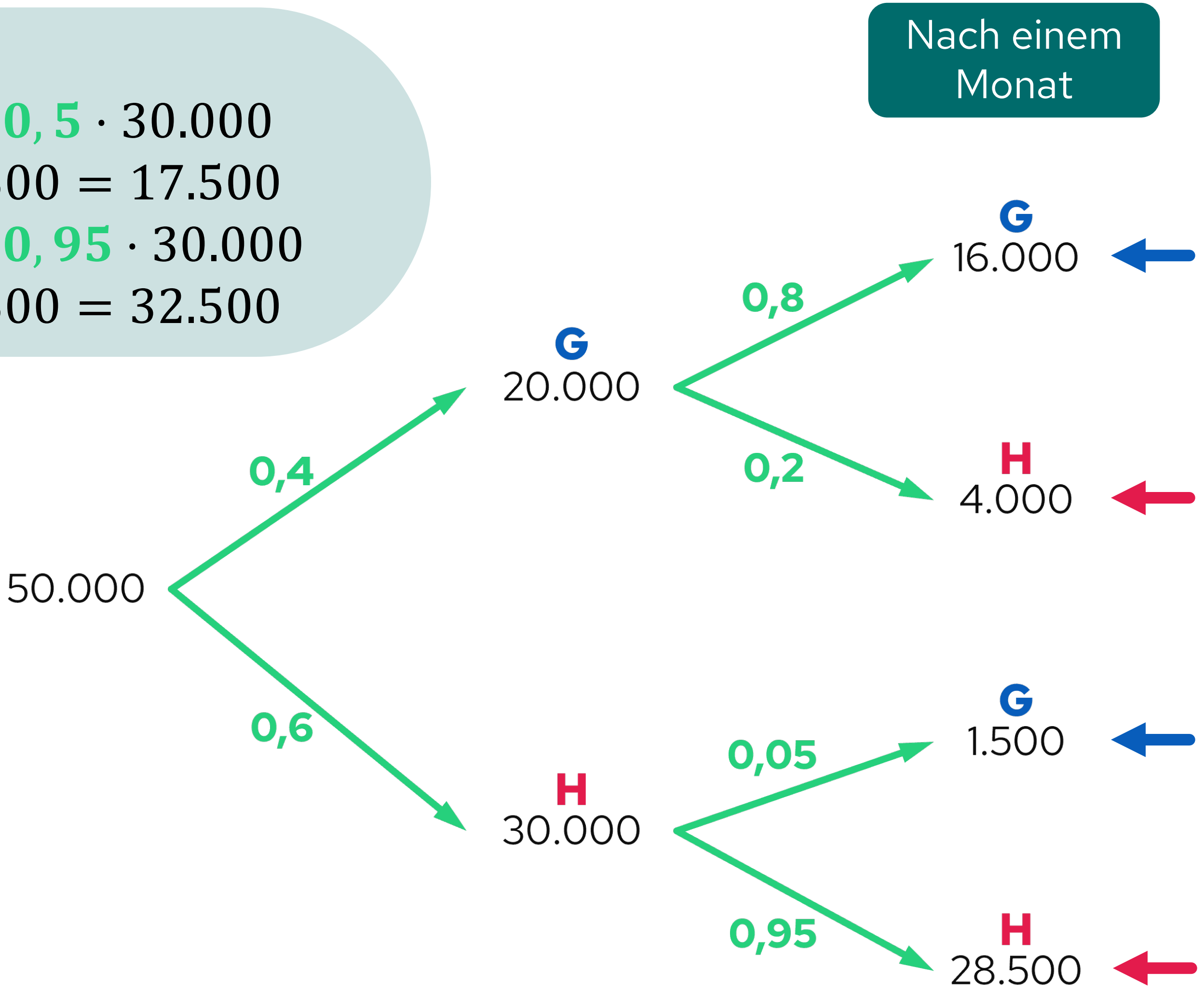


Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

Nach einem Monat

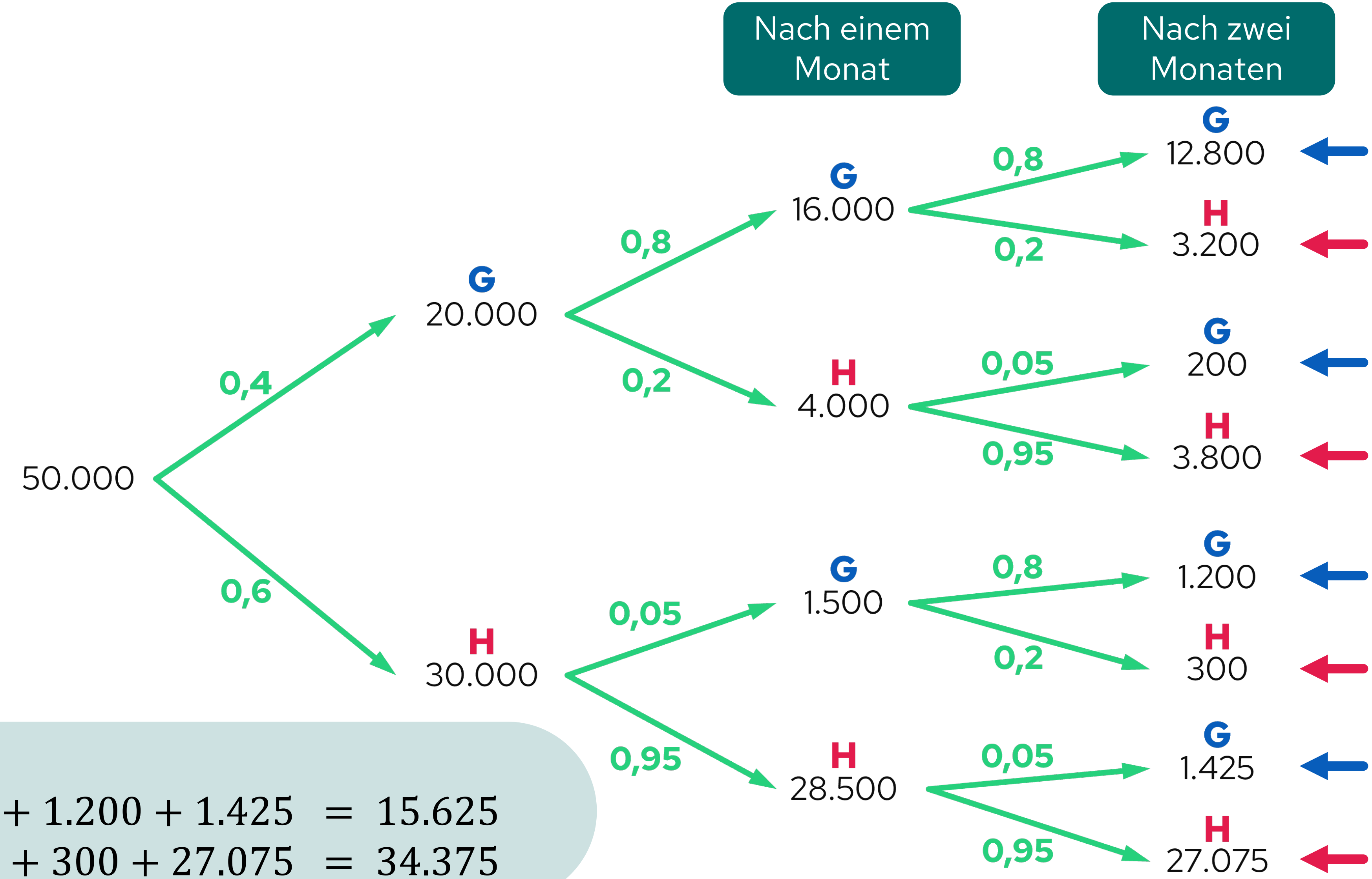
→ Kunden **G**: $0,8 \cdot 20.000 + 0,5 \cdot 30.000$
$= 16.000 + 1.500 = 17.500$

→ Kunden **H**: $0,2 \cdot 20.000 + 0,95 \cdot 30.000$
$= 4.000 + 28.500 = 32.500$



Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Nach zwei Monaten

Kunden **G**: $12.800 + 200 + 1.200 + 1.425 = 15.625$

Kunden **H**: $3.200 + 3.800 + 300 + 27.075 = 34.375$

Entwicklung der Abonnenten-Zahlen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

- Untersuchen Sie die Entwicklung der Kunden-Zahlen über einen Zeitraum von …
  - 10 Monaten.
  - 100 Monaten.
- Ein Tabellenkalkulationsprogramm kann helfen …

	A	B	C	D
1	G -> H	0.2		
2	H -> G	0.05		
3				
4	Monat	G	H	
5	0	20000	30000	
6	1	17500	32500	
7	2			
8	3			
9	4			
10	5			
11	6			
12	7			
13	8			
14	9			
15	10			
16				

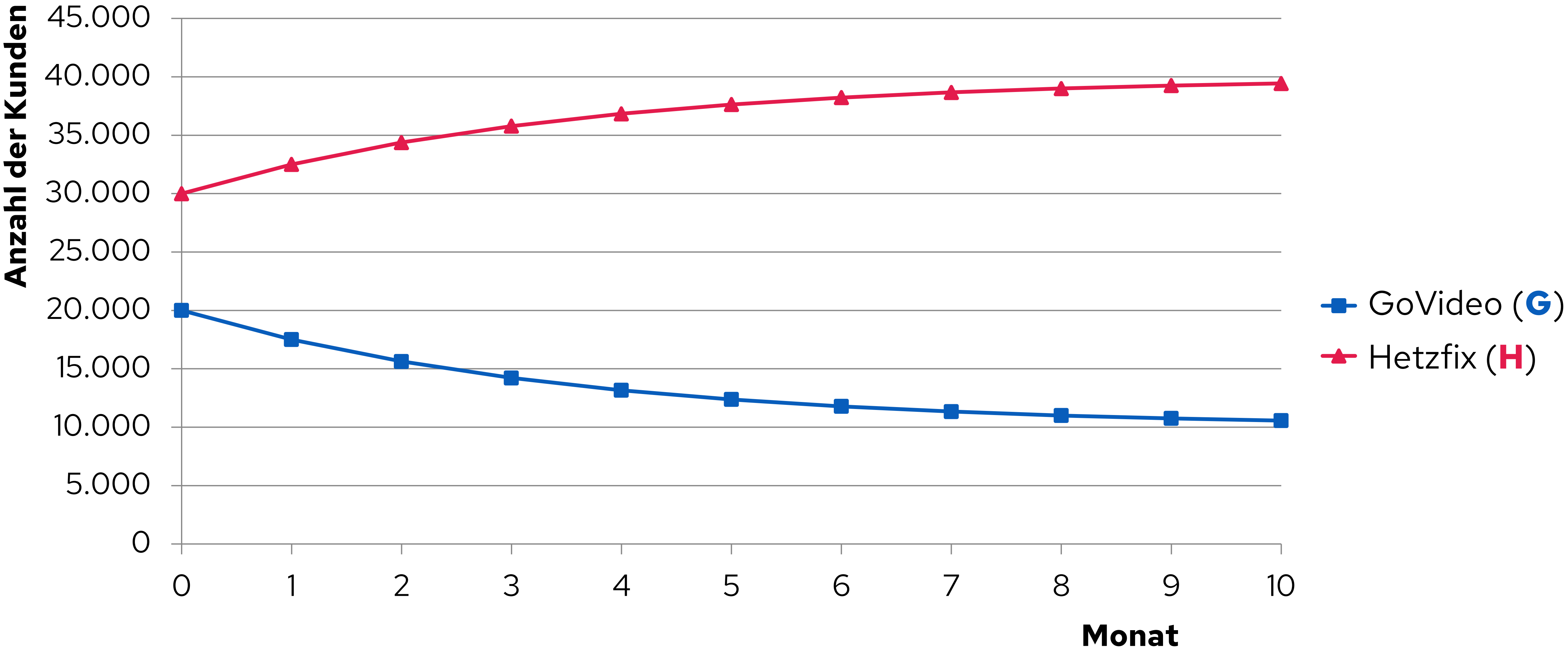
= B5 * (1 - B1) + C5 * B2

= B5 * B1 + C5 * (1 - B2)

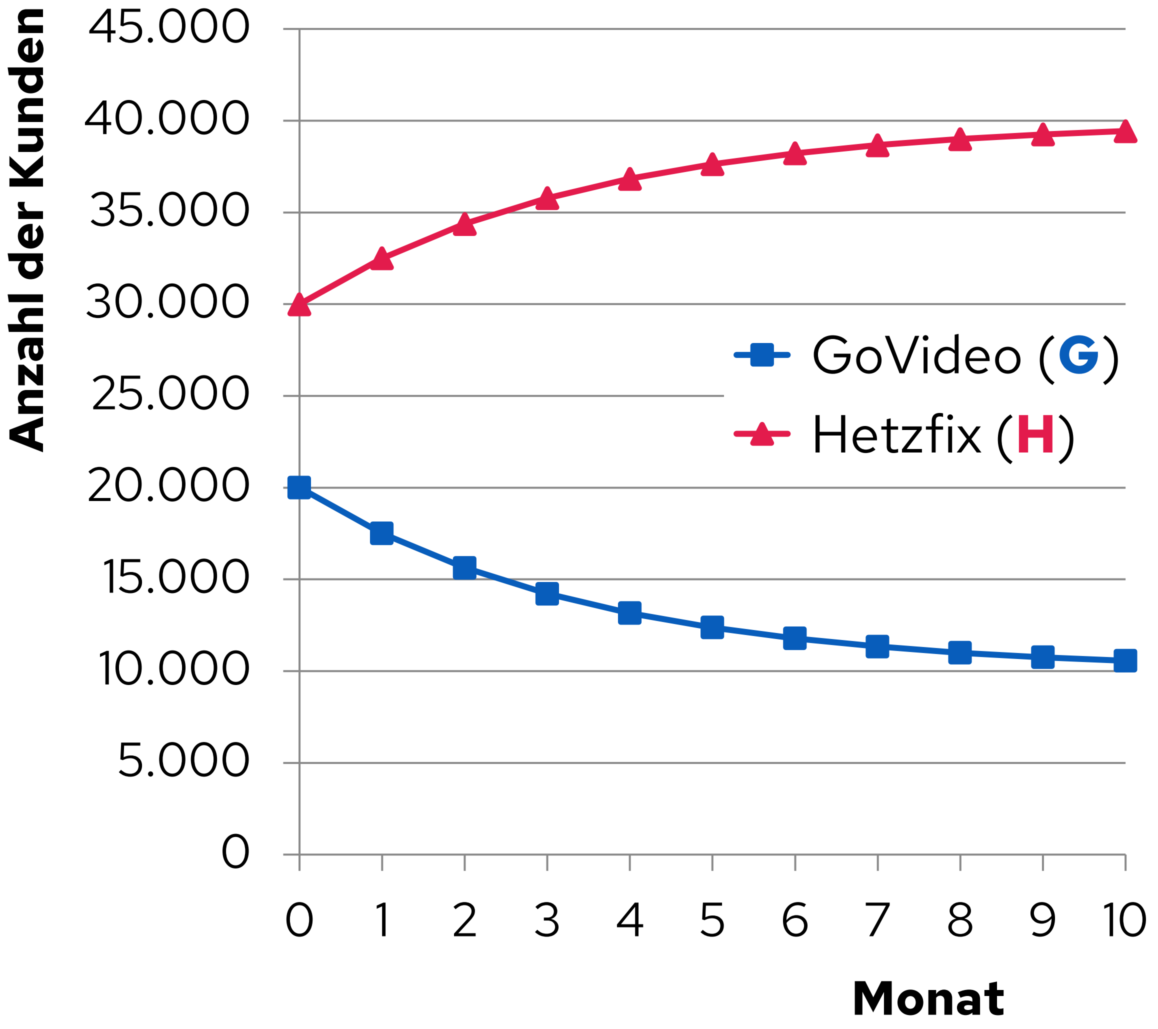
Herunter-ziehen

Entwicklung der Kunden-Zahlen

RPTU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Entwicklung der Kunden-Zahlen



Erkenntnis

Die Kunden-Zahlen von GoVideo (**G**) sinken und die von Hetzfix (**H**) steigen.

Fragen

- Halten diese Tendenzen an?
- Hat GoVideo (**G**) irgendwann keine Kunden mehr?
- Was passiert, wenn GoVideo (**G**) zu Beginn mehr bzw. noch weniger Kunden hat?

Vorgehensweisen

- Vorhersagen machen & festhalten lassen.
- Testen! (Schieberegler!)

 https://www.geogebra.org/m/rwmqpq5f

Schematisierung

Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

Übergangstabelle

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

Tabelle der Ausgangswerte

G_0	20.000
H_0	30.000

Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Vektor der Ausgangswerte

$$\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

Schematisierung

Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$

H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

1. $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix}$$

Schematisierung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Berechnung der Kunden-Zahlen nach einem Monat

G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$

H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

5

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}}_{\text{Übergangs-matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}}_{\text{Ursprünglicher Kundenvektor}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}}_{\text{Kundenvektor nach einem Monat}}$$

RPTU

Schematisierung

Definition: $(n \times m)$-Matrix
Ein rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und m Spalten heißt **$(n \times m)$-Matrix**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

Eine $(n \times 1)$-Matrix heißt auch **Spaltenvektor**.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Eine $(1 \times m)$-Matrix heißt auch **Zeilenvektor**.

$$(a_1 \ldots a_m)$$

Matrizen werden mit einem Großbuchstaben abgekürzt, Vektoren mit Kleinbuchstaben & einem Pfeil darüber.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Matrix A Vektor $\vec{a}$

Schematisierung im Beispiel

Ursprünglicher Kundenvektor: $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

Kundenvektor nach einem Monat:

$$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}$$

Kundenvektor nach zwei Monaten: $\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{k_1}$

Kundenvektor nach n Monaten: $\overrightarrow{k_n} = A \cdot \overrightarrow{k_{n-1}}$

Schematisierung

Definition

Das Produkt einer (2×2)**-Matrix** mit einer (2×1)**-Matrix** (**Spaltenvektor**) wird definiert durch:

$$A \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_1 + a_{12} \cdot k_2 \\ a_{21} \cdot k_1 + a_{22} \cdot k_2 \end{pmatrix}$$

Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

Eingabe von Matrizen

Eingabe von $A := \{\{1,2,3\},\{-4,-5,-6\},\{7.1,8.2,9.3\},\{3,2,1\}\}$ liefert nach Auswahl von = und ggf. drücken der *Enter*-Taste Enter :

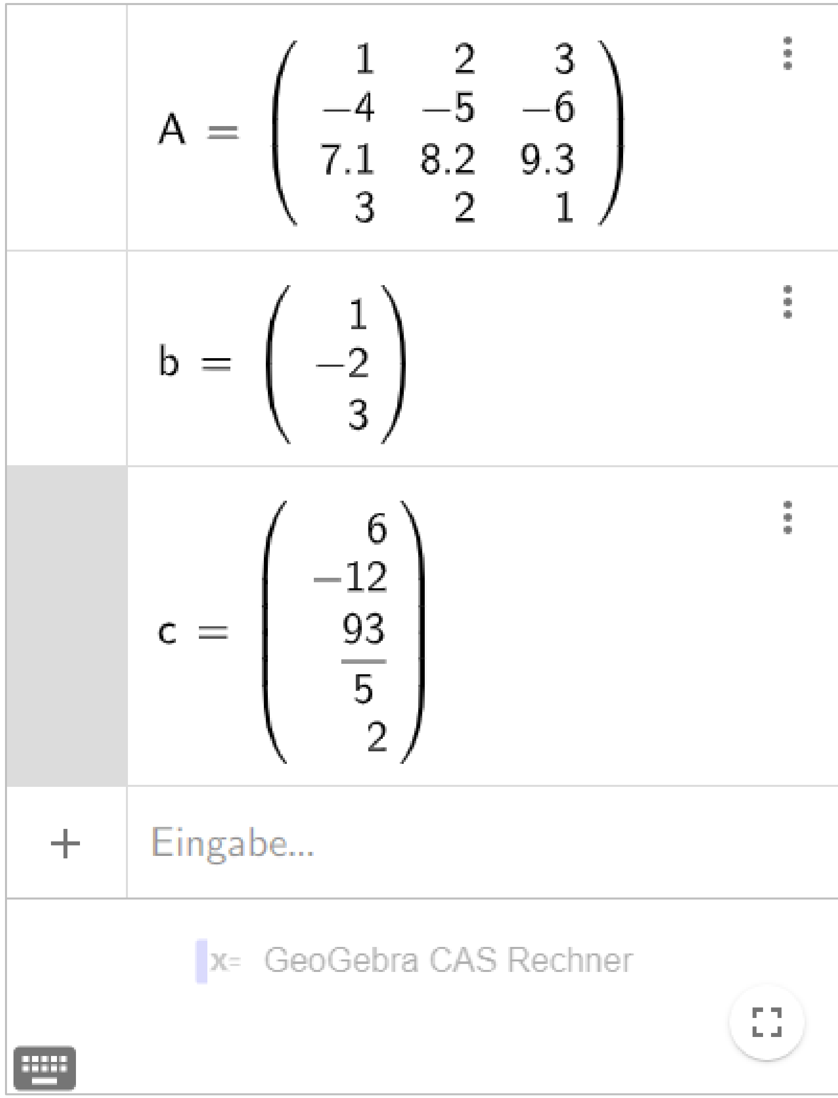
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ \frac{71}{10} & \frac{41}{5} & \frac{93}{10} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: In GeoGebra Classic kann eine Matrix auch über die Eingabe in die Zellen einer Tabelle erfolgen. Die Zellen werden anschließend markiert und nach rechtem Mausklick wird im Kontextmenü → Erzeugen und → Matrix ausgewählt.

Eingabe von Vektoren

Eingabe von $b := \{\{1\},\{-2\},\{3\}\}$ bzw. $b := (1,-2,3)$ liefert nach Auswahl von = und ggf. drücken der *Enter*-Taste Enter :

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

Matrizen multiplizieren

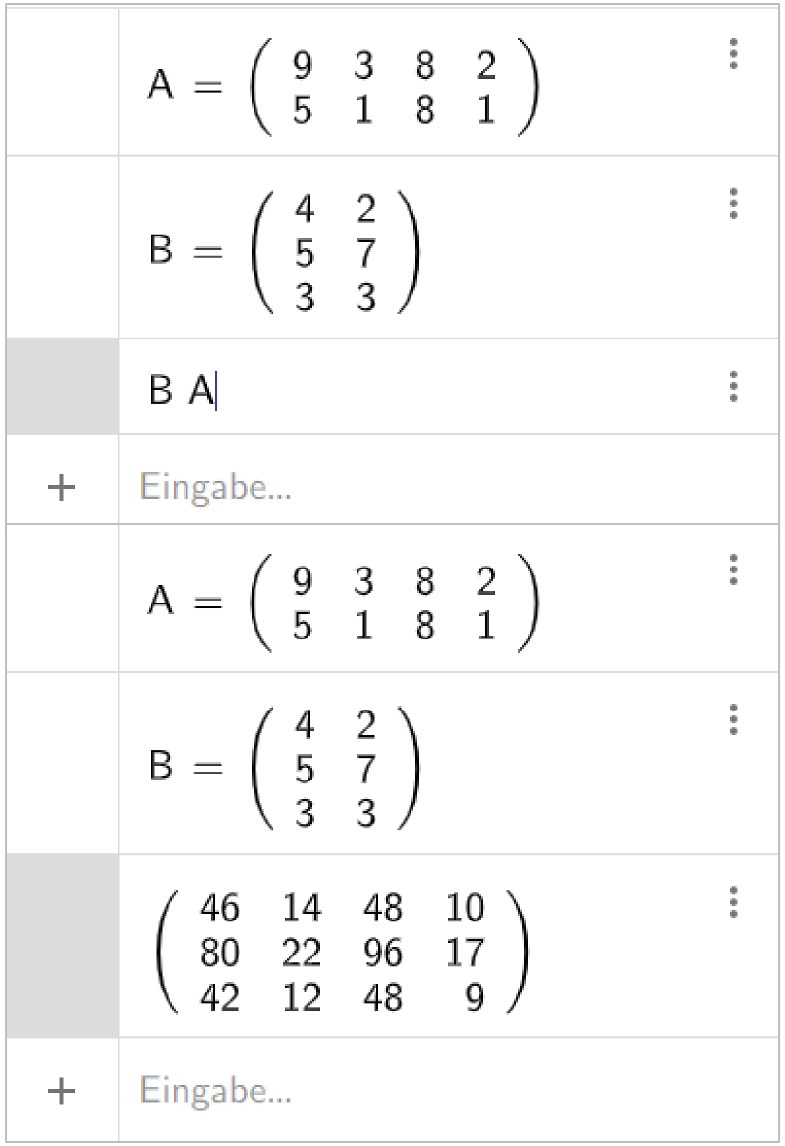
Eingabe von

$A := \{\{9,3,8,2\},\{5,1,8,1\}\}$

$B := \{\{4,2\},\{5,7\},\{3,3\}\}$

$B * A$

liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ und ggf. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$ das Produkt $B \cdot A$ der Matrizen.



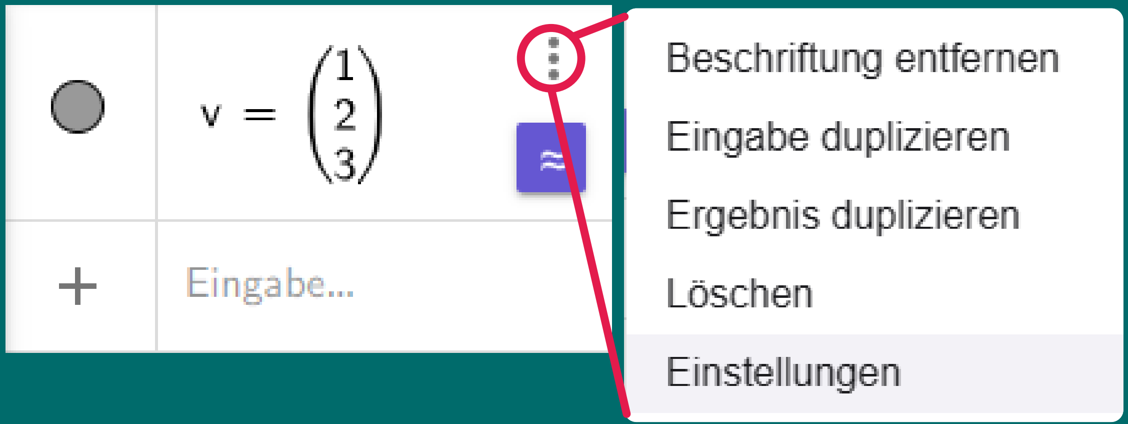
Exkurs: GeoGebra CAS

GeoGebra Classic
Zeilenbezüge in der CAS-Ansicht

- **Statische Bezüge**
  Änderungen in der Referenzzeile haben keine Auswirkungen.
  # kopiert die vorherige Ausgabe
  #3 kopiert die Ausgabe von Zeile 3

- **Dynamische Bezüge**
  Änderungen in der Referenzzeile werden übernommen.
  $ fügt die vorherige Ausgabe ein
  $3 fügt die Ausgabe von Zeile 3 ein

GeoGebra Suite
Zeilen kopieren in der CAS-Ansicht



Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

Eingabe des ursprünglichen Kundenvektors: $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

Eingabe der Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$

Berechnung des Kundenvektors nach einem Monat: $\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0}$

Berechnung des Kundenvektors nach zwei Monaten: $\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1}$

●	$k_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
●	$k_1 = A\, k_0$ $= \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$
●	$k_2 = A\, k_1$ $= \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Kunden-Zahlen
Berechnung der Kunden-Zahlen mit GeoGebra

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

○	$k_3 = A\,k_2 = \begin{pmatrix} 14218.75 \\ 35781.25 \end{pmatrix}$	○	$k_7 = A\,k_6 = \begin{pmatrix} 11334.84 \\ 38665.16 \end{pmatrix}$	○	$k_{11} = A\,k_{10} = \begin{pmatrix} 10422.35 \\ 39577.65 \end{pmatrix}$
○	$k_4 = A\,k_3 = \begin{pmatrix} 13164.06 \\ 36835.94 \end{pmatrix}$	○	$k_8 = A\,k_7 = \begin{pmatrix} 11001.13 \\ 38998.87 \end{pmatrix}$	○	$k_{12} = A\,k_{11} = \begin{pmatrix} 10316.76 \\ 39683.24 \end{pmatrix}$
○	$k_5 = A\,k_4 = \begin{pmatrix} 12373.05 \\ 37626.95 \end{pmatrix}$	○	$k_9 = A\,k_8 = \begin{pmatrix} 10750.85 \\ 39249.15 \end{pmatrix}$	○	$k_{13} = A\,k_{12} = \begin{pmatrix} 10237.57 \\ 39762.43 \end{pmatrix}$
○	$k_6 = A\,k_5 = \begin{pmatrix} 11779.79 \\ 38220.21 \end{pmatrix}$	○	$k_{10} = A\,k_9 = \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$	○	$k_{14} = A\,k_{13} = \begin{pmatrix} 10178.18 \\ 39821.82 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Iterative Berechnung

- Die Kunden-Zahlen nach zwei Monaten wurden so berechnet:

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right)$$

- Will man die Kunden-Zahlen nicht iterativ sondern direkt berechnen, dann müsste das so funktionieren:

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right) = A^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$$

- Dazu muss eine Multiplikation von Matrizen definiert werden.

- Dann könnte man auch $\overrightarrow{k_n}$ direkt berechnen:

$$\overrightarrow{k_n} = A^n \cdot \overrightarrow{k_0}$$

Berechnung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_2}$

$$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{0_1} \\ k_{0_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{12} \cdot k_{0_2} \\ a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{k_2} = A \cdot A \cdot \overrightarrow{k_0} = A \cdot \overrightarrow{k_1}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{12} \cdot k_{0_2} \\ a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{11}a_{12} \cdot k_{0_2} + a_{12}a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{12}a_{22} \cdot k_{0_2} \\ a_{21}a_{11} \cdot k_{0_1} + a_{21}a_{12} \cdot k_{0_2} + a_{22}a_{21} \cdot k_{0_1} + a_{22}a_{22} \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}) \cdot k_{0_1} + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}) \cdot k_{0_2} \\ (a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}) \cdot k_{0_1} + (a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}) \cdot k_{0_2} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}}_{= A \cdot A =: A^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k_{0_1} \\ k_{0_2} \end{pmatrix}}_{= \overrightarrow{k_0}}$$

Matrizenmultiplikation

Definition

Die Multiplikation einer (2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit sich selbst ist definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

- Vorgehensweise bei der Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} 1\ 3 & 2\ 4 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \end{array} := \begin{pmatrix} \overset{1}{\boxed{a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}}} & \overset{2}{\boxed{a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}}} \\ \underset{3}{\boxed{a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}}} & \underset{4}{\boxed{a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}}} \end{pmatrix}$$

- Diese Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern.
- Damit sie funktioniert, muss die Anzahl der Spalten der linken Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix sein!

Entwicklung der Kunden-Zahlen
Prognose ist nun ohne Iteration möglich

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_2} = A^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{10}} = A^{10} \cdot \overrightarrow{k_0}$

○	$k_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
○	$k_1 = A\, k_0 = \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$
○	$k_2 = A^2\, k_0 = \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$
○	$k_{10} = A^{10}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$

○	$k_{20} = A^{20}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10031.71 \\ 39968.29 \end{pmatrix}$
○	$k_{30} = A^{30}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10001.79 \\ 39998.21 \end{pmatrix}$
○	$k_{40} = A^{40}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10000.1 \\ 39999.9 \end{pmatrix}$
○	$k_{100} = A^{100}\, k_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 40000 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{k_{30}} = A^{20} \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{30}} = A^{30} \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{40}} = A^{40} \cdot \overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{k_{100}} = A^{100} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Stabiler Kundenvektor

- Es gibt offensichtlich nach einer bestimmten Anzahl von Monaten einen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$.
- Obwohl weiterhin in jedem Monat Kunden den Streaming-Dienst wechseln, bleiben die Kundenzahlen der beiden Streaming-Dienste konstant.
- Man sagt, es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein.
- Für diesen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ muss gelten:

$$A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$$

- Aus dieser Gleichung kann man $\overrightarrow{k_s}$ auch direkt berechnen.

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

Aus	$A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$
ergibt sich mit	$\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$
die Matrixgleichung	$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$
Als lineares Gleichungs-system geschrieben folgt:	$0{,}8 \cdot x + 0{,}05 \cdot y = x$ $0{,}2 \cdot x + 0{,}95 \cdot y = y$
Zusammenfassen gleich-artiger Terme liefert:	$-0{,}2 \cdot x + 0{,}05 \cdot y = 0$ $0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y = 0$
Dieses „Gleichungssystem“ ist nicht eindeutig lösbar.	$0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y = 0$
Es gilt aber zusätzlich:	$x + y = 50.000$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$ (Fortsetzung)

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \quad\quad y &= 50.000 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$x = 0{,}25 \cdot y$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:

$$1{,}25 \cdot y = 50.000$$

Es ergibt sich folgende eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} y &= 40.000 \\ x &= 10.000 \end{aligned}$$

Stabiler Kundenvektor:

$$\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$ mit (GeoGebra-)CAS

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

- Mit einem Computer-Algebra-System (CAS) wie in GeoGebra kann das Gleichungssystem auch direkt gelöst werden.

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \phantom{0{,}05 \cdot{}} y &= 50.000 \end{aligned}$$

- Eingabe von

$$\text{Löse}(\{0.2 * x - 0.05 * y = 0, x + y = 50000\}, \{x, y\})$$

liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$ und ggf. drücken der *Enter*-Taste $\boxed{\text{Enter}}$:

$$\{\{x = 10000, y = 40000\}\}$$

Löse({0.2 x − 0.05 y = 0, x + y = 50000}, {x, y})

= {{x = 10000, y = 40000}}

Entwicklung der Kunden-Zahlen

Ergebnis

- Die Kundenverteilung stabilisiert sich so, dass – trotz der dynamischen Entwicklung – der Streaming-Dienst Hetzfix (**H**) dauerhaft 40.000 und der Streaming-Dienst GoVideo (**G**) durchgängig 10.000 Käufer hat.
- Der stabile Kundenvektor lässt sich mit Hilfe der Gleichung $A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$ und der konstanten Kundensumme berechnen.
- Insbesondere ist das lineare Gleichungssystem nicht von einer speziellen Anfangsverteilung der Kunden abhängig.
- Folglich ist auch der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ unabhängig von der Anfangsverteilung der Kunden!

Entwicklung der Übergangsmatrix

Entwicklung der Übergangsmatrix

- Wie verändert sich bei diesem Prozess die Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$?
- Untersuchen Sie das mit Hilfe des CAS in GeoGebra.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse

- Offensichtlich ergibt sich eine **Grenzmatrix** A_G:

$$A_G := \lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

- Wird die Grenzmatrix $\boldsymbol{A_G}$ auf den Ausgangskundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_0}}$ angewandt, dann ergibt sich direkt der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$:

$$\boldsymbol{A_G} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k_0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_s}}$$

Entwicklung der Übergangsmatrix

Ergebnisse (Fortsetzung)

- Grenzmatrix A_G und stabiler Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ sind unabhängig von der Anfangsverteilung.
- Statt 50.000 Kunden kann man auch 100% bzw. 1 nutzen.
- Der Anfangsvektor lässt sich dann als $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ schreiben.
- Multiplikation mit der Grenzmatrix $A_G = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ liefert die erste bzw. zweite Spalte dieser Matrix:

  $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \overrightarrow{k_s}$ bzw. $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \overrightarrow{k_s}$
- Daraus folgt: $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \overrightarrow{k_s}$
- In den Spalten der Grenzmatrix A_G steht jeweils der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$.

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth & Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de; s.digel@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU