Bruchrechnung & Gleichungen

grundvorstellungsbasiert unterrichten

Online-Fortbildungsreihe für
Mathematiklehrkräfte in Südtirol

Jürgen Roth

26.02.2024 juergen-roth.de

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Bruchrechnung & Gleichungen

grundvorstellungsbasiert unterrichten

1. Grundvorstellungen zu Bruchzahlen
2. Probleme beim Verständnis von Bruchzahlen
3. Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen
4. Grundvorstellungen zu Variablen, Termen und Gleichungen
5. Methoden zur Lösung von Gleichungen

juergen-roth.de

RPTU

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

1

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

1.1

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Grundvorstellungen?!

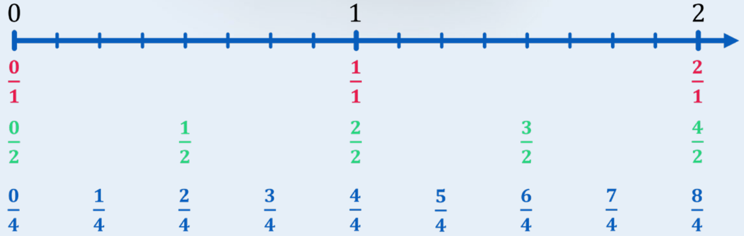
Grundvorstellungen

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen** haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen** werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert



Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, S. 2-9

Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen oder Handlungsvorstellungen anknüpfen.

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen.

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Die Struktur in Sachzusammenhängen erkennen.
- Phänomene mit Hilfe der mathematischen Struktur modellieren.

Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren 118*, 4-8

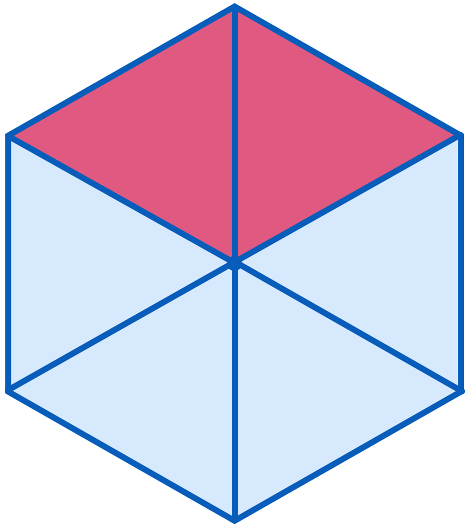
Verständnisanker

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle wesentlichen Strukturelemente zum Verständnis des mathematischen Sachverhalts in dieser Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel

Ein Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Brüchen und dem Bruch-Rechnen können WABIs sein.



Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *ml*, *236*, 6-9

1.2

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Bruchzahlen verstehen mit Grundvorstellungen

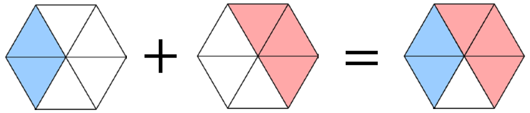
Bruchzahlbegriff: Stufen des Begriffsverständnisses

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Stufe 4: Formales Begriffsverständnis

- Begriff als Objekt zum operieren
- Begriffe als Objekte die verknüpft werden können.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$



Stufe 3: Integriertes Begriffsverständnis

- Der Begriff als Teil eines Begriffsnetzes
- Beziehungen von Eigenschaften untereinander und Beziehungen zu anderen Begriffen kennen.

$$2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$$

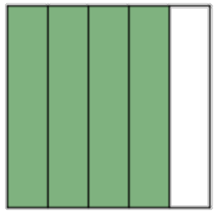
Stufe 2: Inhaltliches Begriffsverständnis

- Der Begriff als Träger von Eigenschaften.
- Eigenschaften kennen.

80%

Nachfolger?

$$\frac{4}{5}$$



Stufe 1: Intuitives Begriffsverständnis

- Der Begriff als Phänomen.
- Beispiele (er)kennen.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 160-162

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

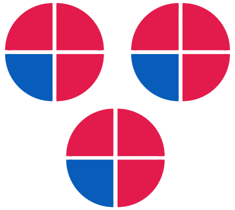
Eine Dreiviertel-torte

Teil eines Ganzen

$\frac{3}{4}$ (von 1)

Resultat einer Division

$\frac{3}{4} = 3 : 4$



Vgl. Teil mehrerer Ganzer (Padberg)

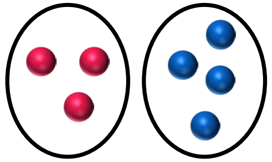
$\frac{3}{4}$

Relativer Anteil

$\frac{3}{4}$ von ...

Verhältnis

$\frac{3}{4} = 3 : 4$ (3 zu 4)



Vergleichsoperator

$\frac{3}{4}$ mal so viel wie ...

Quasikardinalzahl

$\frac{3}{4} = 3$ Viertel

2 Viertel + 3 Viertel
= 5 Viertel

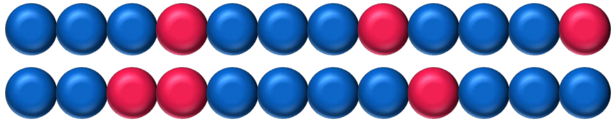
Absoluter Anteil

$\frac{3}{4}$ ... ... drei von vier

Nur wenn nicht gerechnet wird!

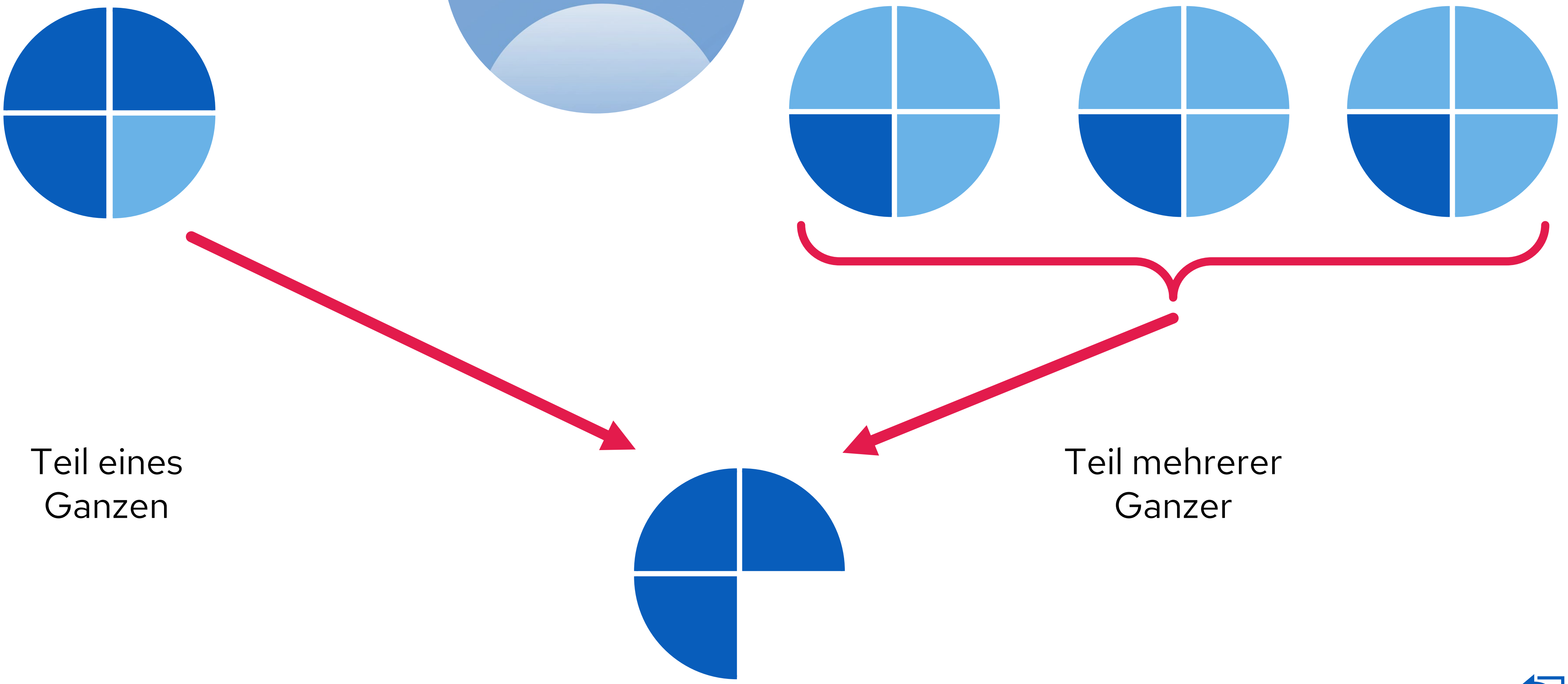
Quasiordinalzahl

$\frac{1}{4}$ ... ... jeder vierte



Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 123*, 4-8

Teil vom Ganzen

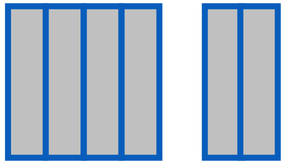


Teil eines Ganzen

Teil mehrerer Ganzer

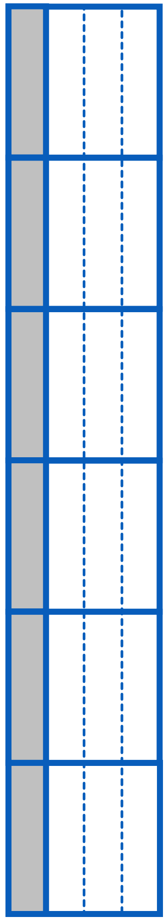
Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 41-50

Ausweitung des Standpunkts
„Teil“ ⇔ „Ganzes“



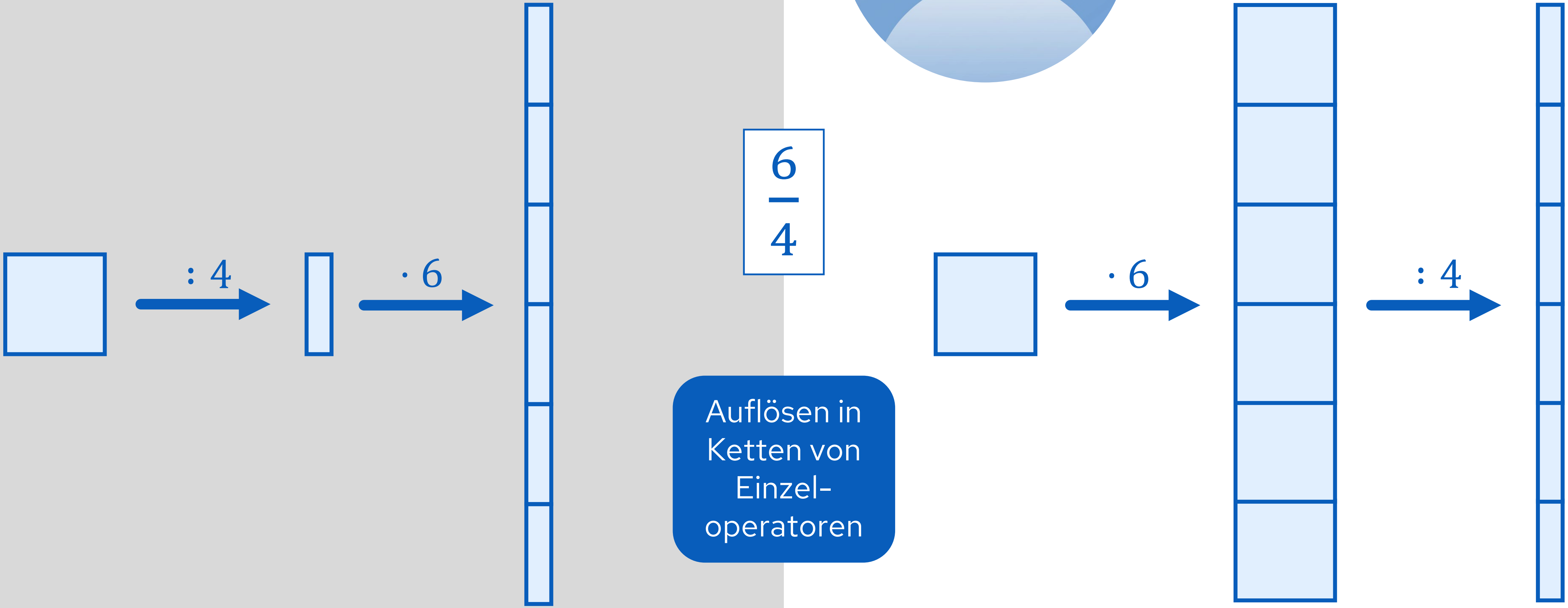
$$\frac{6}{4}$$

Darstellen



Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren, 78*, 20-16

Ausweitung des Standpunkts
„Teil“ ⇔ „Ganzes“



$$\frac{6}{4}$$

Auflösen in Ketten von Einzel-operatoren

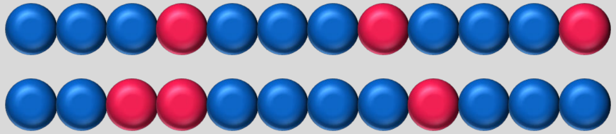
Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren*, *78*, 20-16

Bruchzahlaspekte

1. Bruch als Anteil
2. Bruch als Maßzahl $\left(\frac{1}{2}h, \frac{3}{4}kg, \frac{1}{4}km\right)$
3. Bruch als Operator
4. Brüche und Verhältnisse
   („inneres bzw. äußeres Teilverhältnis)
5. Brüche und Quotienten
6. Brüche als Lösung linearer Gleichungen
   $n \cdot x = m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
7. Brüche als Skalenwerte
8. Quasikardinalität

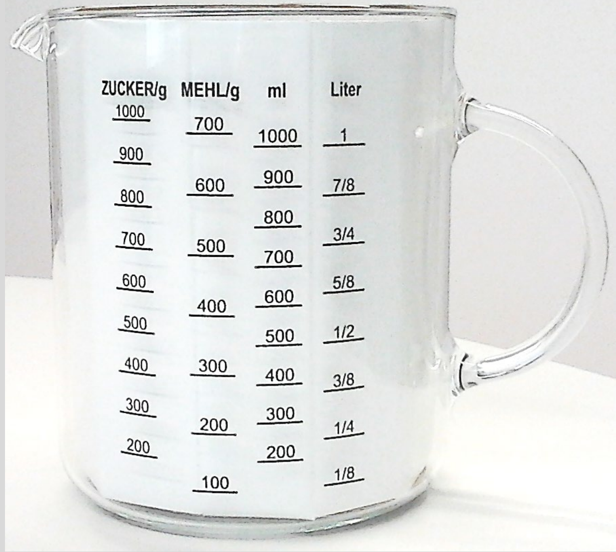
Inneres Teilverhältnis

Die roten Perlen verhalten sich zu den blauen Perlen wie 1 : 3.



Äußeres Teilverhältnis

Je eine von vier Perlen ist rot, je drei von vier Perlen sind blau.



Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer Spektrum, 19-21

Brüche vergleichen

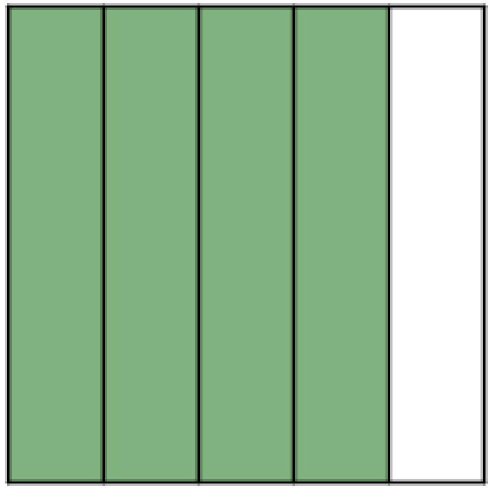
$\frac{5}{8}$ $\frac{5}{10}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{4}$

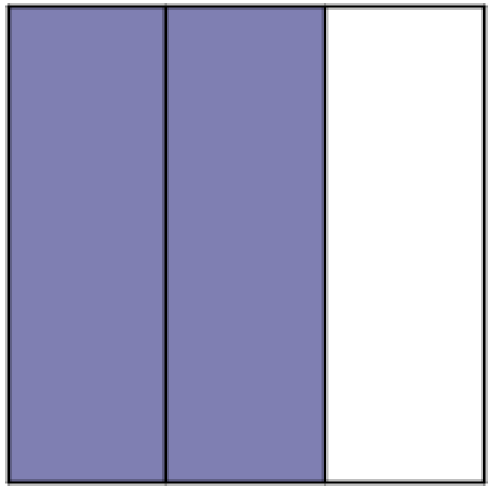
$\frac{8}{9}$ $\frac{7}{6}$

$\frac{3}{7}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{4}{5}$

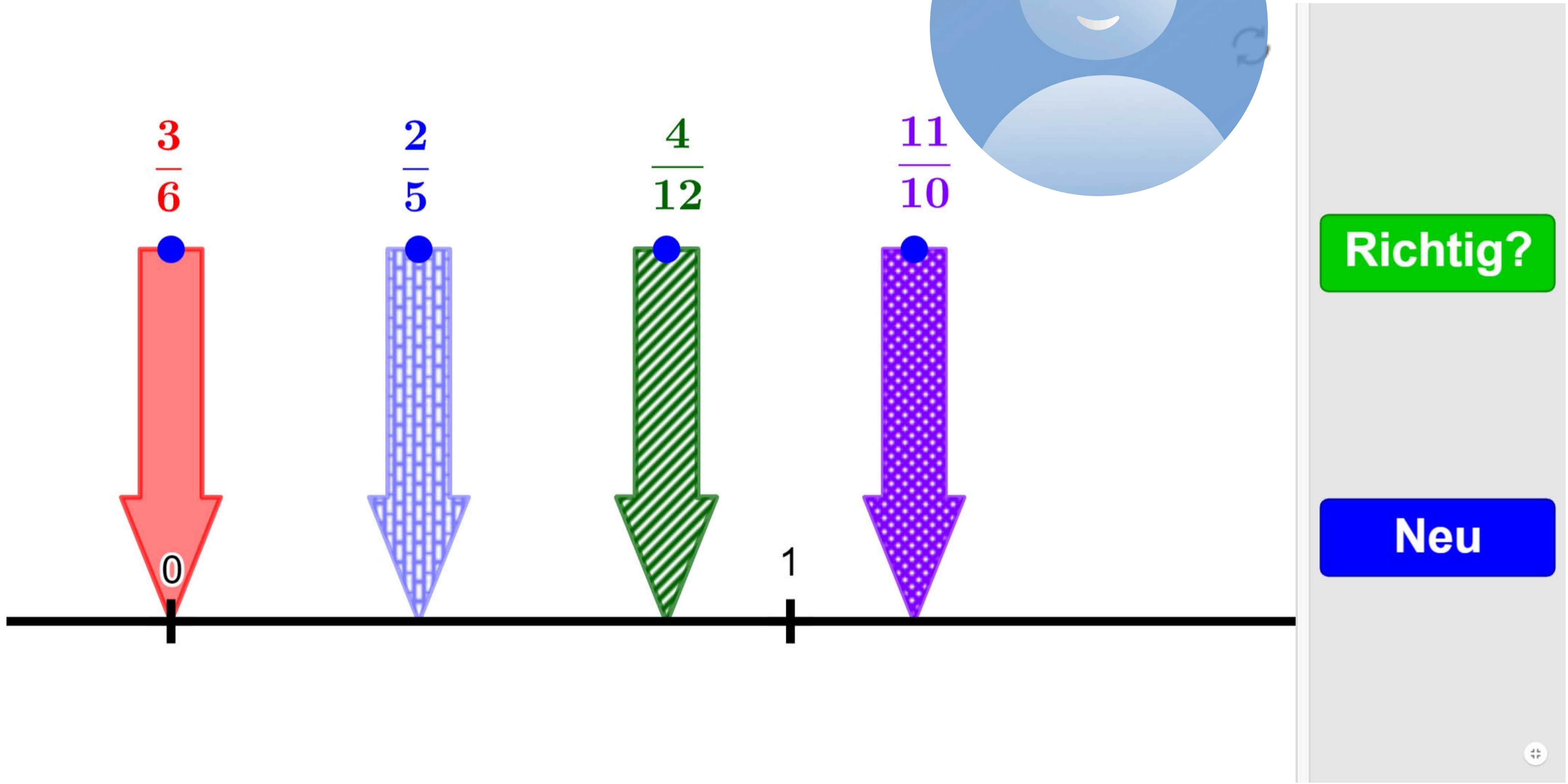


$\frac{2}{3}$



- zählergleiche Brüche
  → Größe der Teile
- nennergleiche Brüche
  → Anzahl der gleichen Teile
- mit 1 vergleichen
- mit $\frac{1}{2}$ vergleichen
- gemeinsame Einteilung herstellen

Zahlengerade: Brüche platzieren



https://www.geogebra.org/m/tmkzzukq

1.3

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

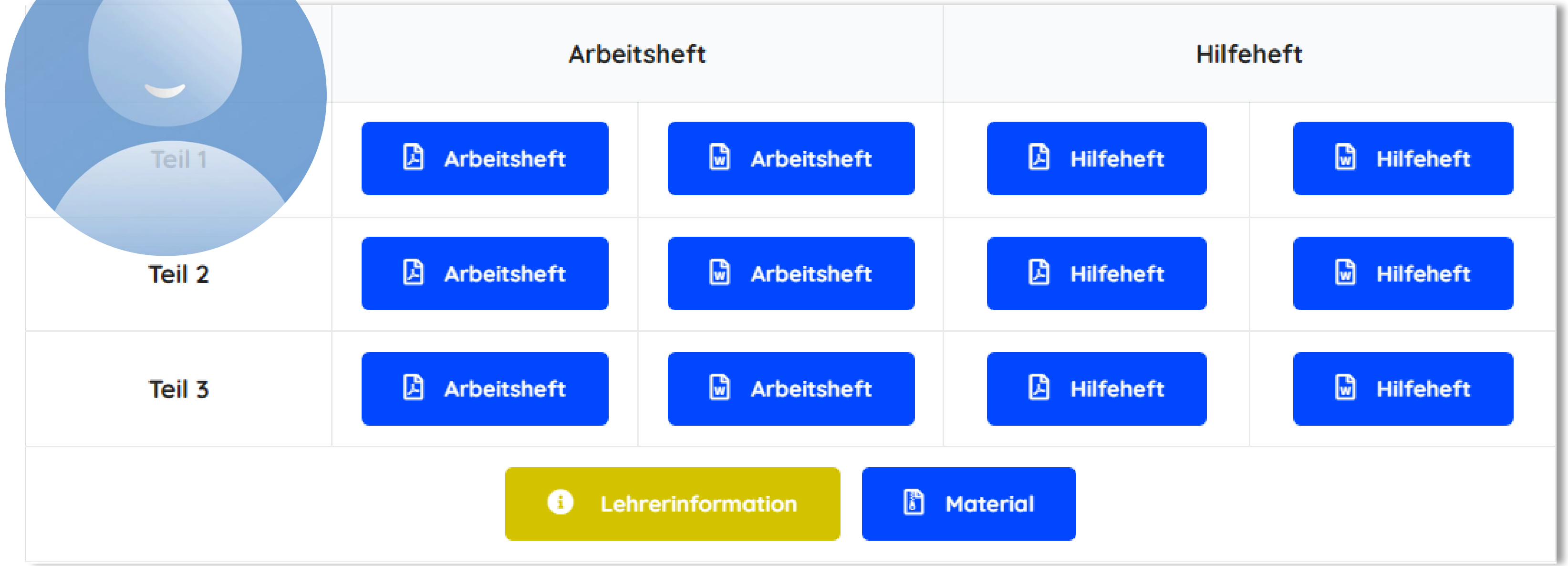
Grundvorstellungen mit Material erarbeiten: WABIs

WABI-Stationen des Mathematik-Labors

RPTU
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Mathematik-Labor
„Mathe ist mehr“

https://mathe-labor.de



	Arbeitsheft		Hilfeheft	
Teil 1	Arbeitsheft	Arbeitsheft	Hilfeheft	Hilfeheft
Teil 2	Arbeitsheft	Arbeitsheft	Hilfeheft	Hilfeheft
Teil 3	Arbeitsheft	Arbeitsheft	Hilfeheft	Hilfeheft

Lehrerinformation Material

WABI 1: Grundvorstellungen zu Brüchen
Bruchzahlen
Ansehen

WABI 1: Grundvorstellungen zu Brüchen
Bruchzahlen
Ansehen

WABI 2: Brüche addieren und subtrahieren
Bruchzahlen
Ansehen

WABI 2: Brüche addieren und subtrahieren
Bruchzahlen
Ansehen

WABI 3: Multiplikation & Division von Bruchzahlen
Bruchzahlen
Ansehen

WABI 3: Multiplikation & Division von Bruchzahlen
Bruchzahlen
Ansehen

MatheWelt

Das Schülerarbeitsheft

Bestell-Nr. 1849067

5.–6. Klasse

Anteile bilden und Brüche verstehen mit WABIs

Sechsecke unterteilen in WABIs

Anteile legen und erkennen

Anteile vergleichen

FRIEDRICH

Zum Nachbestellen im Klassensatz

MatheWelt 236
Schülerarbeitsheft

Berres, C., Bolz, L., Burckgard, K., Kempf, F.,
Engelhardt, A., Ossadnik, H. & Roth, J. (2023).
Anteile bilden und Brüche verstehen mit WABIs.
Mathe-Welt, 236.

https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2023/WABIs/MatheWelt_WABIs.pdf

Erläuternder Text und grundlegende Aufgaben zu WABIs (EXIs)

Annemarie Fritz
Siegbert Schmidt (Hrsg.)

Mit Zusatzmaterialien zum Download

PÄDAGOGIK

Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I

Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden

BELTZ

Roth, J. (2009).
Eine geometrische Lernumgebung – Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen.
In A. Fritz-Stratmann & S. Schmidt (Hrsg.), Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (S. 186-200). Weinheim: Beltz Verlag. ISBN: 978-3-407-62630-1

Roth, J. (2009).
Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „WABIs“: Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks.
Ein Bastelbogen für WABIs ist enthalten.

https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2009/Roth_2009_Geometrische_Lernumgebung_Bruchzahlen.pdf

Arbeit mit Materialien

Material

Situationen mit Material erkunden und „begreifen“

Konzepte am Material erarbeiten

Skizze

Strukturen in Skizzen festhalten

Komplexere Zusammenhänge an Skizzen erarbeiten

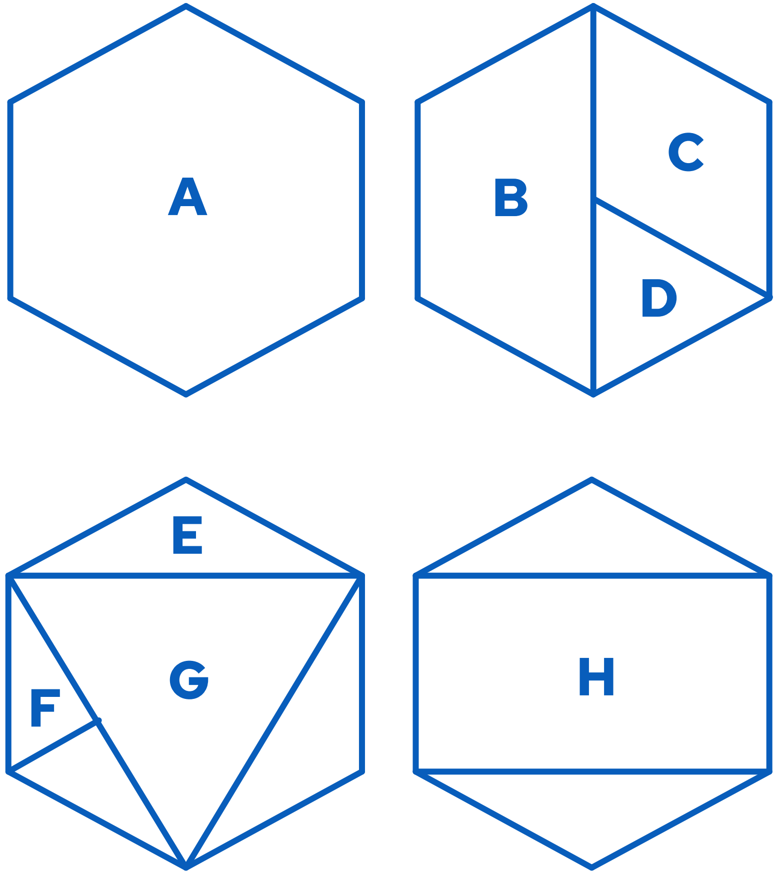
Denk-Modell

Aufbau mentaler Repräsentationen – auch durch Abgleich mit Skizzen/Material

Ablösen von Material und Skizzen

Mentales Operieren

WABIs?!



WABIs

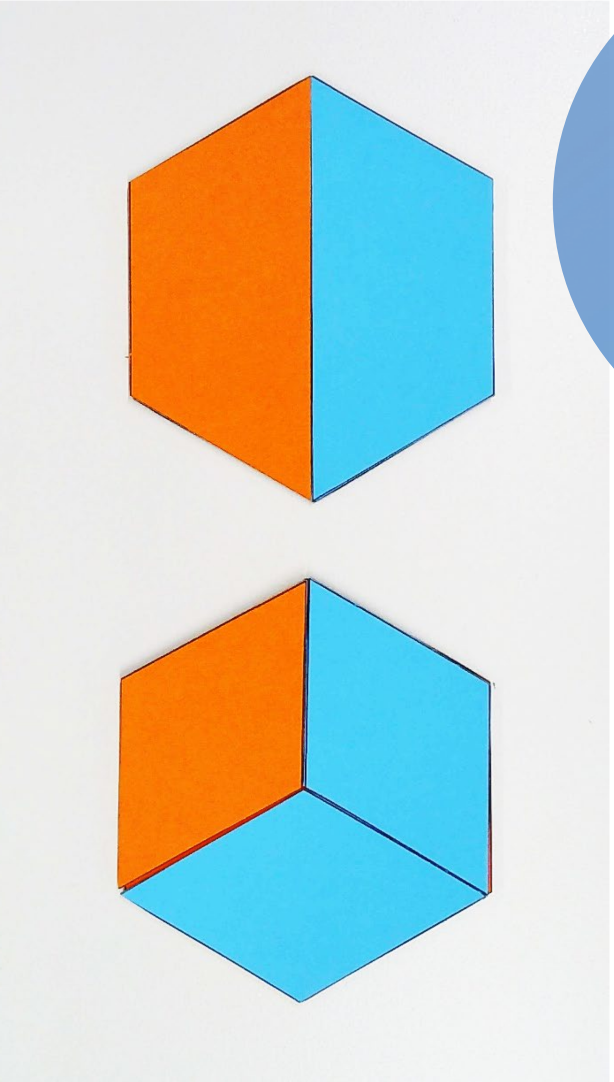
- (Regelmäßiges) Sechseck **A**
- (gleichschenkliges) Trapez **B**
- Raute **C**
- mittleres (gleichseitiges) Dreieck **D**
- langes (stumpfwinklig-gleichschenkliges) Dreieck **E**
- kleines (rechtwinkliges) Dreieck **F**
- großes (gleichseitiges) Dreieck **G**
- Rechteck **H**

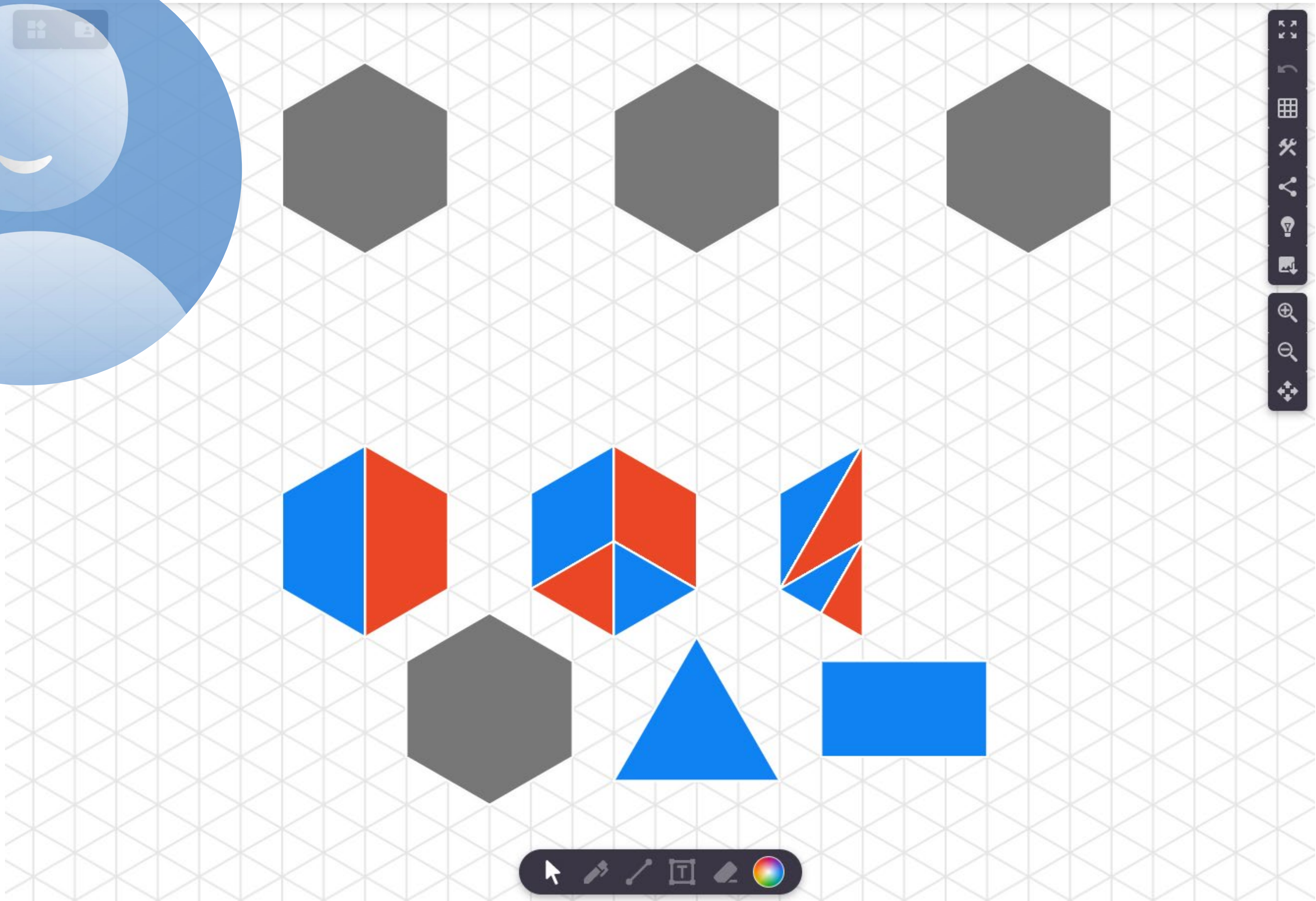
Roth, J. (2009). Eine geometrische Lernumgebung – Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen. In: Fritz-Stratmann, A.; Schmidt, S. (Hrsg.) (2009). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 186-200). Weinheim: Beltz Verlag.

Roth, J. (2009). *Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „WABIs“: Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks.*
Ein Bastelbogen für WABIs ist enthalten

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

WABIs – Analog und digital



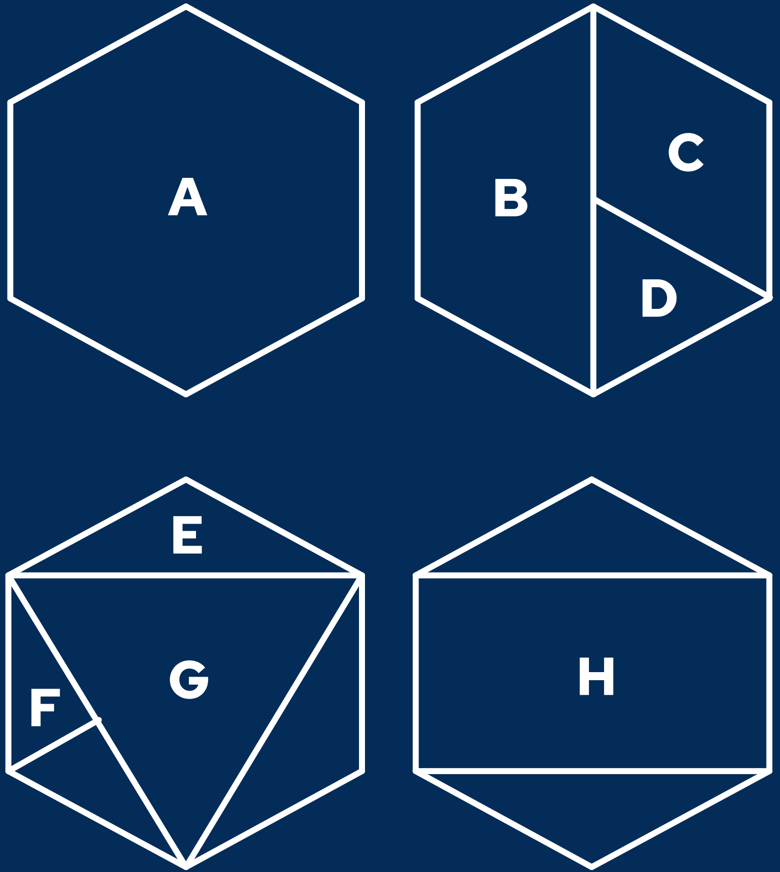


Roth, J. (2009). WABI-Bastelbogen

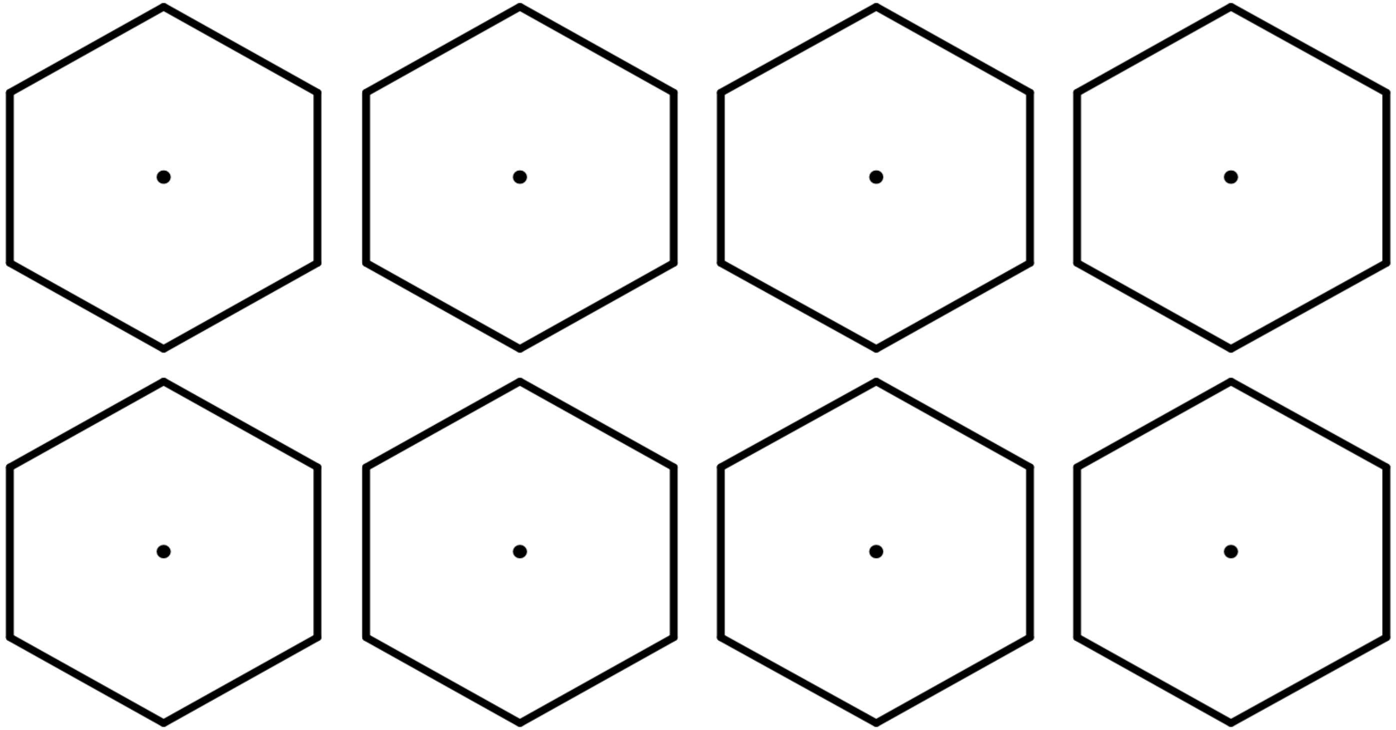
https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Filz-WABIs: https://rittel-verlag.de

Teil eines Ganzen

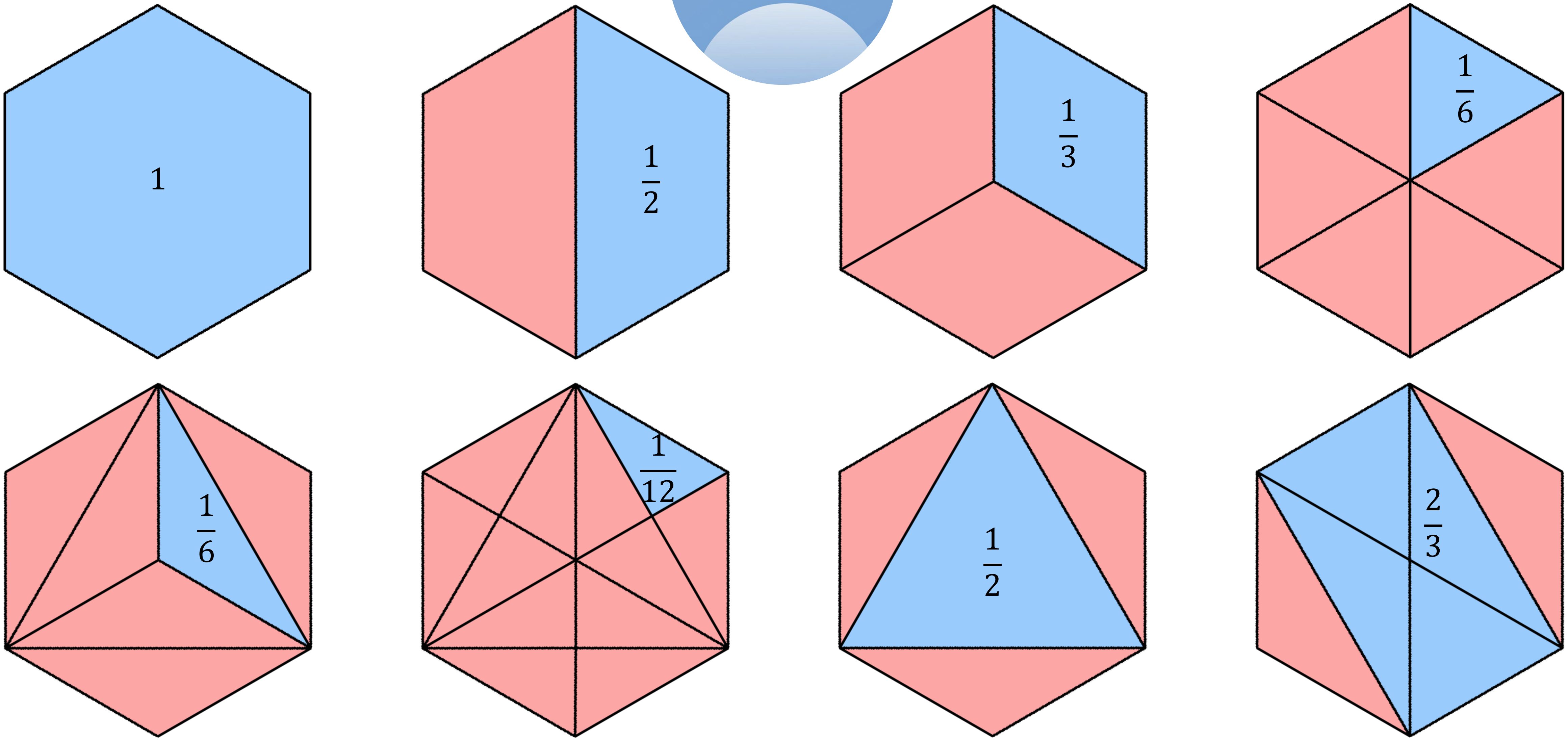


WABI-Typ	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Anzahl der zum Auslegen des Sechsecks benötigten Teile							–	–
Bruchteil von **A**								



https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Teil eines Ganzen



2

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Probleme beim Verständnis von Bruchzahlen

2.1

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Brüche bei den Brüchen

„Brüche bei den Brüchen“

Kardination

- Eine Zahl und eine Rechenaufgabe beantworten immer eine Frage nach „wie viele?“.

Eineindeutigkeit zwischen Zahl und Zahlzeichen

- Jede Zahl hat genau eine Zahlbezeichnung.
  - □ Visuell: Folge von Ziffern
  - □ Auditiv: Folge von Grundzahlwörtern (mit Stellenwertangabe)

Diskrete Ordnung

- Jede Zahl hat einen Nachfolger und – außer der kleinsten Zahl – einen Vorgänger.
- Die Menge der Zahlen ist wie eine Kette mit Anfang, aber ohne Ende.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren 123*, 10-13
Winter, H. (1999). Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im MU, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung

„Brüche bei den Brüchen“

Rechnen

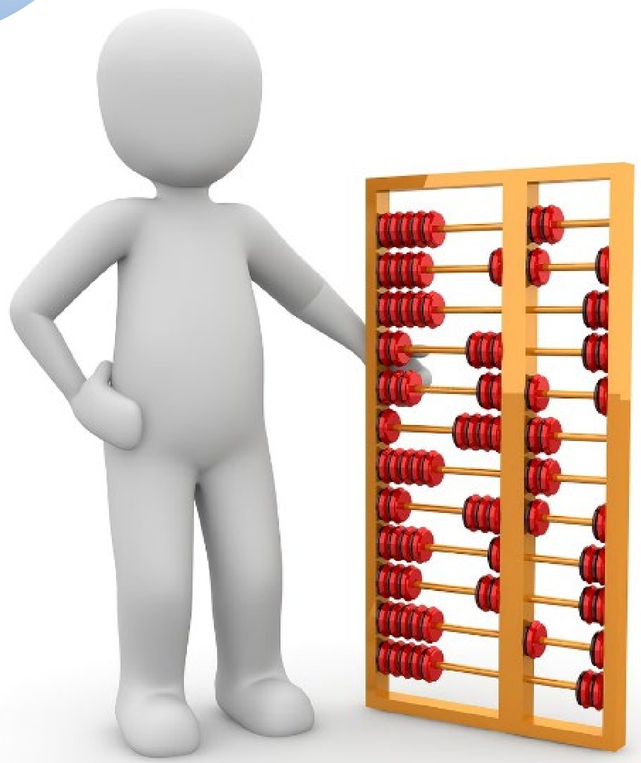
- Jede Elementaroperation $a + b$, $a - b$ (wenn $a \geq b$), $a \cdot b$ und $a : b$ (wenn b Teiler von a) ist, bei in der Ziffernsprache gegebenen a und b, unmittelbar durchführbar und liefert wieder eine Zahl in der üblichen Ziffernsprache.

Einschränkung der Division

- Die Division $a : b$ ist nicht immer restlos möglich.
- Wenn sie möglich und der Teiler ungleich 1 ist,
  dann ist das Ergebnis kleiner als die geteilte Zahl.

Multiplikation und Ordnung

- Multiplizieren als „starkes“ Vermehren
- Multipliziert man zwei Zahlen, die ungleich 0 oder 1 sind,
  so ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen.



Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren 123*, 10-13
Winter, H. (1999). Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im MU, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung

Multiplikative Anteilsbildung

Lilly nimmt sich die Hälfte der dargestellten Tafel Schokolade.

Davon isst sie $\frac{3}{5}$ auf.

Wie viele Stücke hat sie gegessen?

Welche Grundvorstellungen nutzen Sie zur Lösung?

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren, 128*, 10-16

Multiplikative Anteilsbildung

Moritz:	Also da muss man erst ausrechnen, wie viel die Hälfte ist. Das sind dann zehn solche viereckigen Dinger. Und dann muss man noch drei Fünftel von zehn irgendwie ausrechnen. Also wie viel drei Fünftel von zehn solchen Dingern ist.
Interviewer:	Du kannst dir das jetzt gern alles aufschreiben, was du so im Einzelnen rechnest. (Moritz schreibt und überlegt.) Welchen Teil willst du …, oder überlegst du gerade?
Moritz:	Wie ich das jetzt, … drei Fünftel von zehn solchen Dingern wissen soll. Weil es ist ja die Hälfte, ah, da kann man ja ein Halb schreiben. Nein. (Moritz überlegt)
Interviewer:	Was heißt denn für dich das drei Fünftel von zehn Stück?
Moritz:	Ich weiß nicht. Ich kann mir da nix drunter vorstellen.
Interviewer:	Du versuchst das jetzt rechnerisch zu lösen …
Moritz:	Ja.
Interviewer:	Kannst du das vielleicht mit dieser dargestellten Tafel Schokolade irgendwie graphisch lösen, zum Beispiel durch Wegstreichen …
Moritz:	Ich müsste halt wissen, wie viel ungefähr drei Fünftel ist …

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren, 128*, 10-16

Multiplikative Anteilsbildung

Sophia: … ein Fünftel ist ja jetzt 0,2. Dann sind zwei Fünftel 0,4 und drei Fünftel, ehm, 0,6. Und die Hälfte, also ein Halb, sind dann …

(überlegt)

Also weil das ja das Ganze ist, ist es dann zwei Zweitel. Also ist es gleich eins. Und, ehm, … das ist 0,5, also die Hälfte. Und dann noch 3,5 …

(meint offensichtlich den Bruch drei Fünftel)

… das ist also 0,6 glaub ich. Und da muss man dann also, zehn …

(überlegt)

… mmm.

10 : 0,6

Interviewer: Wieso jetzt geteilt durch null Komma sechs? Und nicht mal oder plus oder minus?

Sophia: Ja weil, dann wär's ja mehr und das muss ja immer weniger werden, weil sie isst ja nicht mehr, als Tafel da ist.

$10 : 0{,}6$

$100 : 6 = 16{,}\overline{666}$
-6
40
-36
40
-36
40

$1{,}\overline{6666}$

2

$20 : 2 = 10$

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren, 128*, 10-16

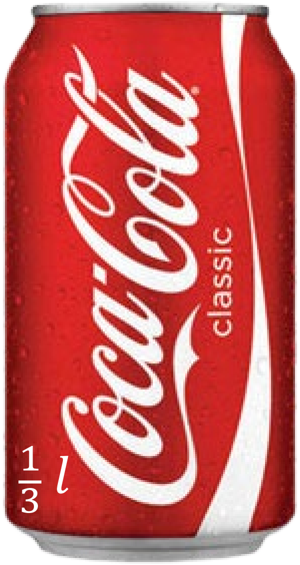
Ordnung und Dichte von Bruchzahlen

Bruch

- Gibt es einen Bruch, der größer als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist?

Getränkepackung

- Eine Firma stellt Einwegverpackungen für Erfrischungsgetränke in zwei verschiedenen Größen her.
- Um das Angebot abzurunden, soll eine weitere Verpackung angeboten werden.
- Das Volumen der neuen Packung soll größer sein als das der Dose und kleiner als das der Flasche.



Multiplikative Anteilsbildung

Kilian: Ich würd' erst mal nach einer Zwischenzahl suchen.

Interviewer: OK.

Kilian: Ein Eintel kann es nicht sein, weil das kleiner ist als $\frac{1}{2}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Er muss größer als $\frac{1}{3}$ sein und kleiner als $\frac{1}{2}$.

Interviewer: Ob es überhaupt einen gibt ist da ja die Frage.

Kilian: Ach so … Nee.

Interviewer: Nicht. Warum nicht?

Kilian: Ich schau einfach unten auf die beiden Zahlen, 3 und 2 und dazwischen kenn' ich keine Zahl.

Florian: Nee, ich glaub nicht.

Interviewer: Warum nicht? Kannst du versuchen das zu erklären?

Florian: Ja. $\frac{1}{3}$ ist ja schon größer als $\frac{1}{2}$.

Interviewer: Was bedeutet der Bruch $\frac{1}{3}$?
Oder warum ist $\frac{1}{3}$ größer als $\frac{1}{2}$?

Florian: Nee, eigentlich ist es genauso groß.

Interviewer: Da wäre die Frage trotzdem, warum ist das genauso groß? Kannst du das irgendwie erklären?
Was stellst du dir da drunter vor?

Florian: Das hier sind 3 Teile und das hier sind 2, aber es ist halt insgesamt gleichgroß.

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren, 128*, 10-16

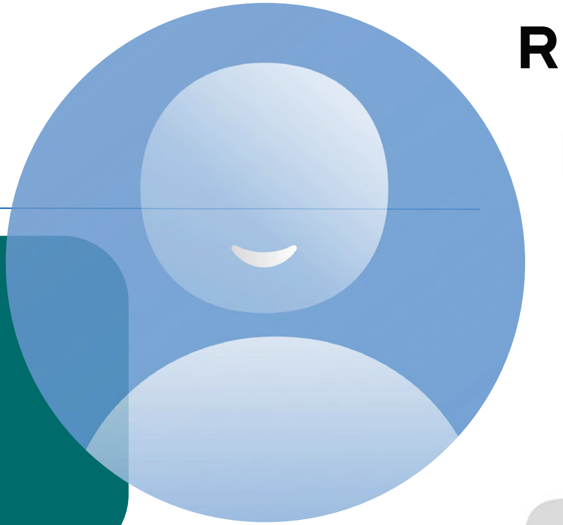
Häufige Grundvorstellungsdefizite

Grundvorstellungsdefizite

- Fehlende oder nur in Ansätzen vorhandene Vorstellungen zum Bruchzahlbegriff
- Keine inhaltliche Vorstellung zur Addition von ungleichnamigen Brüchen
- Nicht entwickelte Vorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen
- Unreflektierte Übertragung von intuitiven Annahmen aus den natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen
- Falsche Orientierung an Nenner oder Zähler beim Ordnen und Vergleichen von Brüchen

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren 123*, 10-13
Winter, H. (1999). Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im MU, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung

Gegenmaßnamen



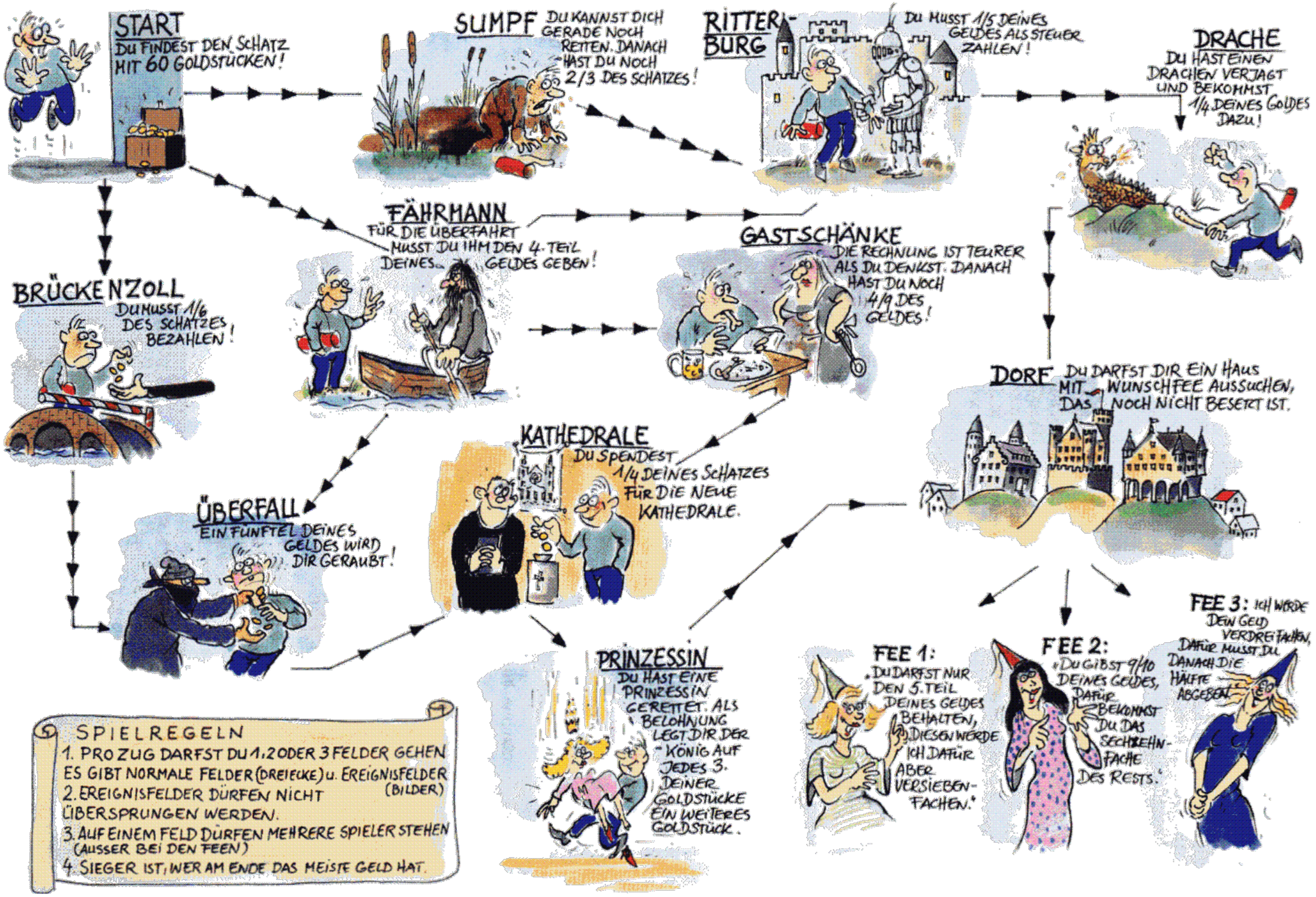
Kontexte und Grundvorstellungen
Einführung neuer Begriffe mit Kontexten verbinden, in denen die wichtigen Grundvorstellungen zum Tragen kommen.

Produktive Übungsphasen
Übersetzungsprozesse zwischen Grundvorstellungen fordern und fördern. → Grundvorstellungen können sich ausbilden und stabilisieren.

Bedeutungsänderungen
Bedeutungsänderungen bewusst machen bzw. von der Notwendigkeit einer Neubewertung alter Vorstellungen überzeugen (z. B. durch Aufgaben, die zum Nachdenken anregen; Kognitiver Konflikt).

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren 123*, 10-13
Winter, H. (1999). Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im MU, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung

Spiel zu Grundvorstellungen



SPIELREGELN

1. PRO ZUG DARFST DU 1, 2 ODER 3 FELDER GEHEN
ES GIBT NORMALE FELDER (DREIECKE) u. EREIGNISFELDER (BILDER)
2. EREIGNISFELDER DÜRFEN NICHT ÜBERSPRUNGEN WERDEN.
3. AUF EINEM FELD DÜRFEN MEHRERE SPIELER STEHEN (AUSSER BEI DEN FEEN)
4. SIEGER IST, WER AM ENDE DAS MEISTE GELD HAT.

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). *Mathematik lehren, 128*, S. 16

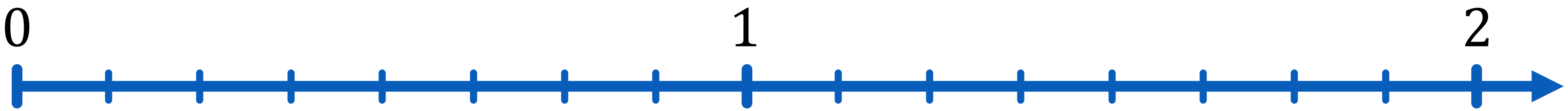
2.2

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Aufgabenformate zum Adressieren von Problemen

Brüche ↔ Bruchzahl

Verfeinern
↔
Vergröbern



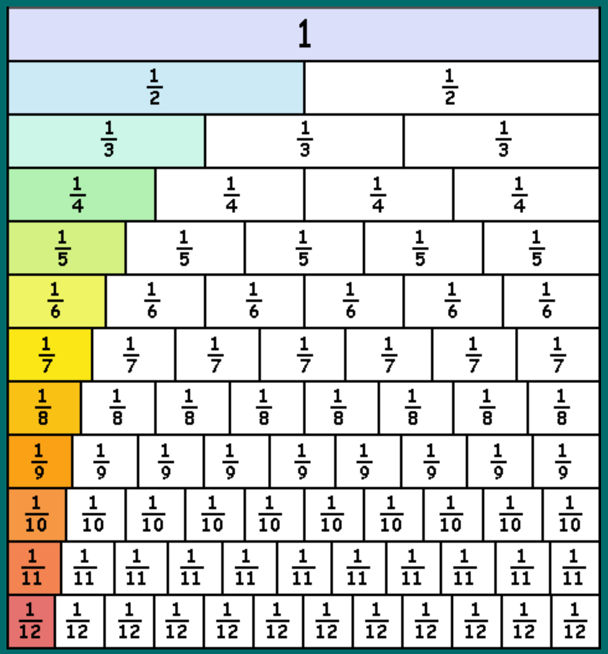
$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$

$\frac{0}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{2}$

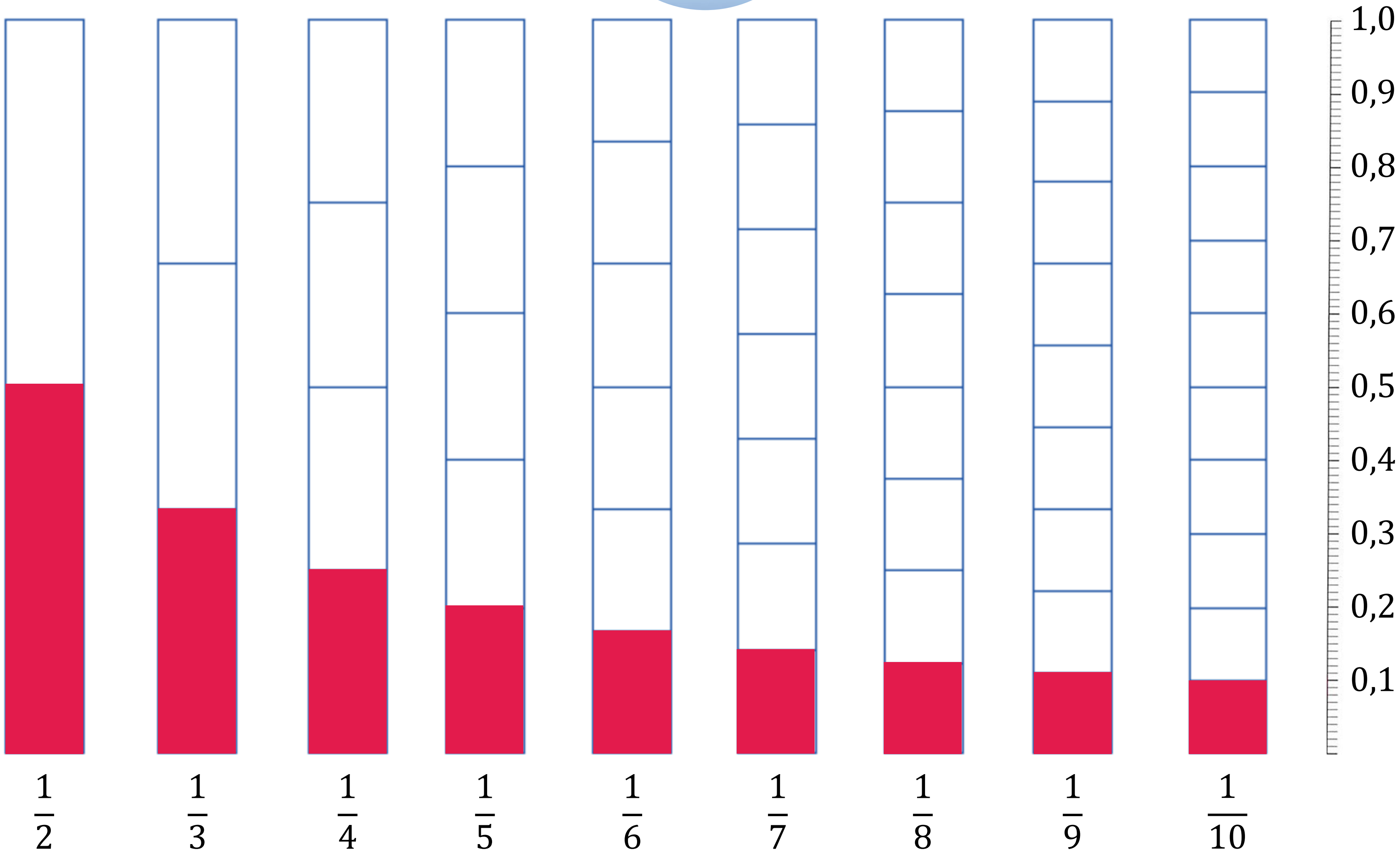
$\frac{0}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{8}{4}$

$\frac{0}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{10}{8}$ $\frac{11}{8}$ $\frac{12}{8}$ $\frac{13}{8}$ $\frac{14}{8}$ $\frac{15}{8}$ $\frac{16}{8}$

Darstellung von Stammbrüchen

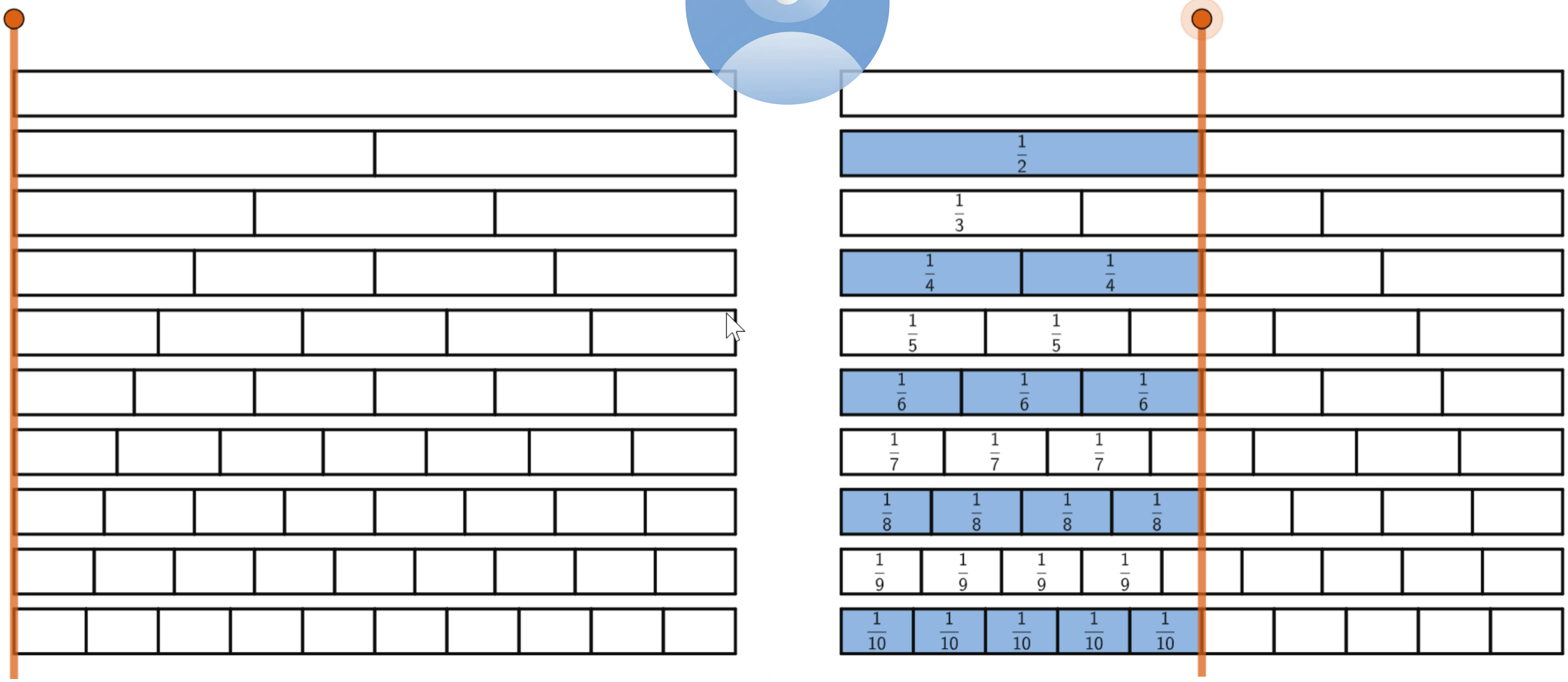


Färbe den angegebenen Teil der Streifen.
Der gefärbte Teil liegt immer unten.



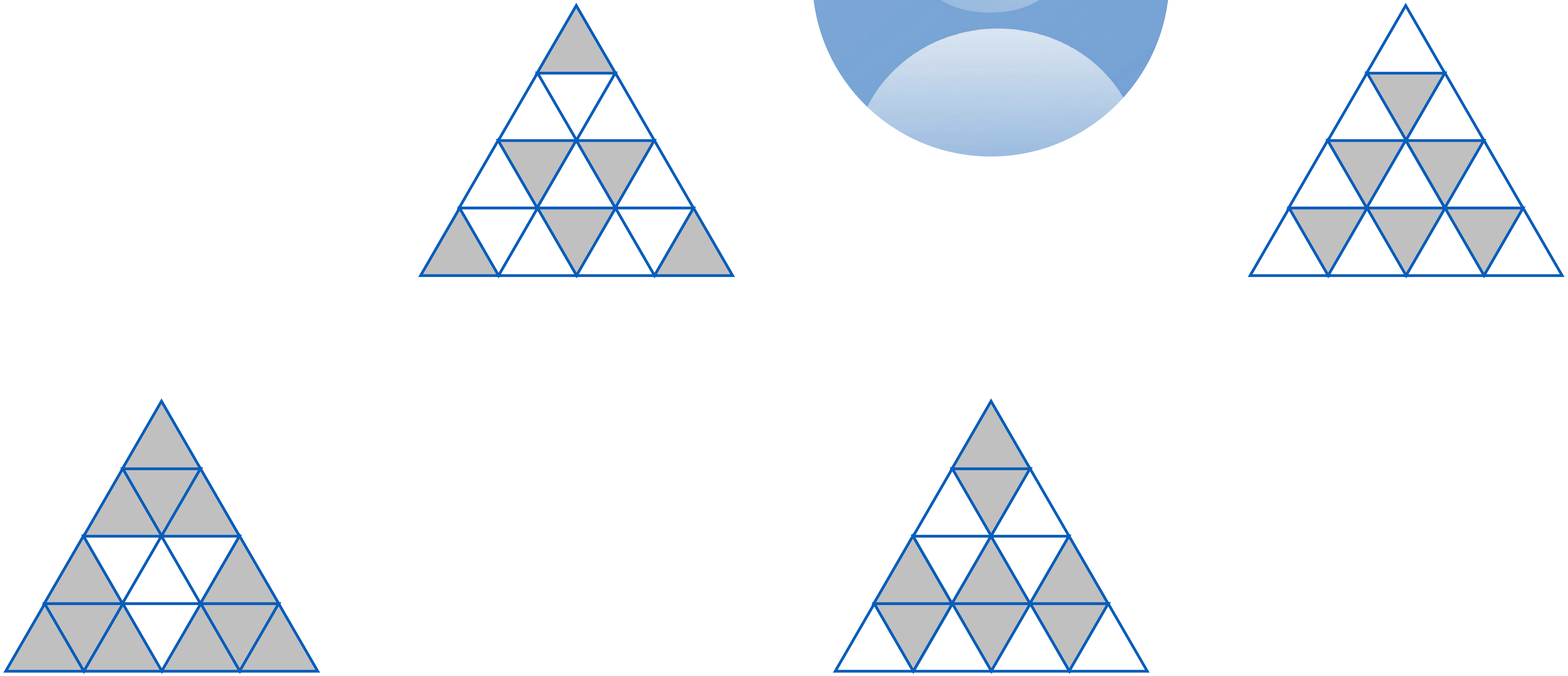
Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 13*

Bruchdarstellung in der Streifentafel



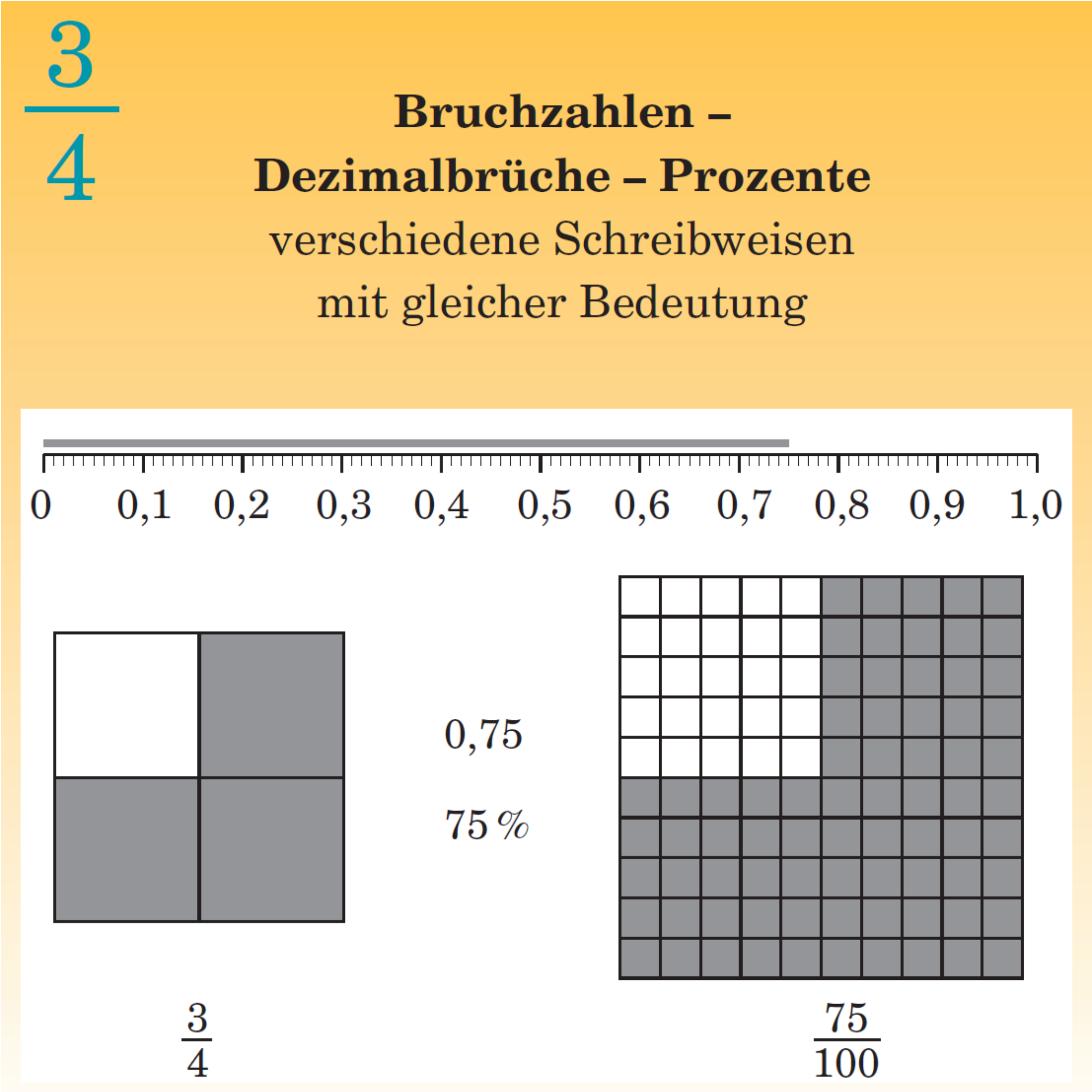
https://www.geogebra.org/m/b2qvdutv

Darstellung von Bruchzahlen



Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren, 78*, 20-22 und 47-48

Darstellung von Bruchzahlen



$\frac{3}{4}$

Bruchzahlen –
Dezimalbrüche – Prozente
verschiedene Schreibweisen
mit gleicher Bedeutung

Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 7*

Lesen Sie folgenden Artikel
zur Prozentrechnung:

Kristina Appell (2004). **Prozentrechnen – Formel, Dreisatz, Brüche und Operatoren**. *Der Mathematikunterricht, 50*(6), 23-32

Prozentrechnung

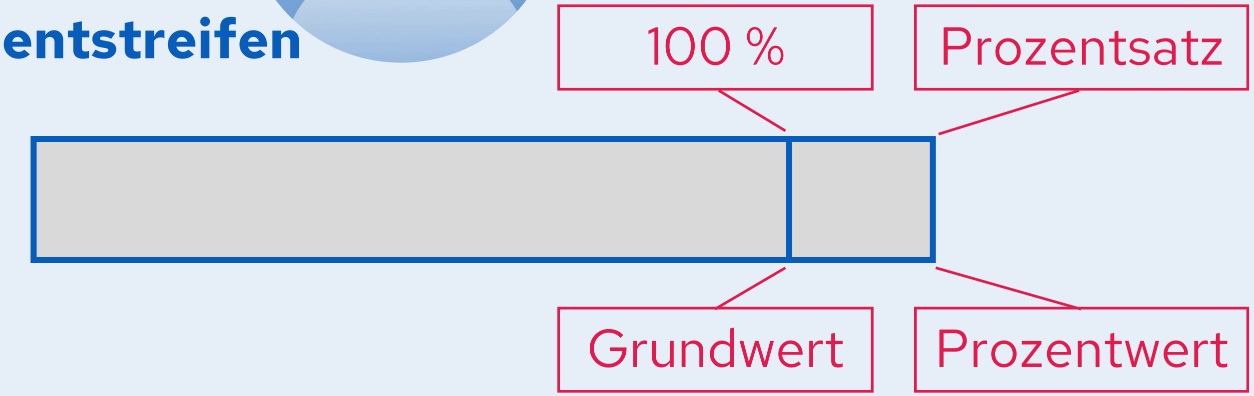
Aufgabe
Eine Hose kostet inklusive Mehrwertsteuer 87,00 €. Wie hoch ist der Preis der Hose ohne Mehrwertsteuer?

Das ist der Prozentwert zum Prozentsatz 119 %.

Gegeben: 87,00 €

Gesucht: Grundwert

Prozentstreifen



Dreisatz

$: 119$	87,00 €	sind	119 %	$: 119$
$\cdot 100$	0,7311 €	sind	1 %	$\cdot 100$
	73,11 €	sind	100 %	

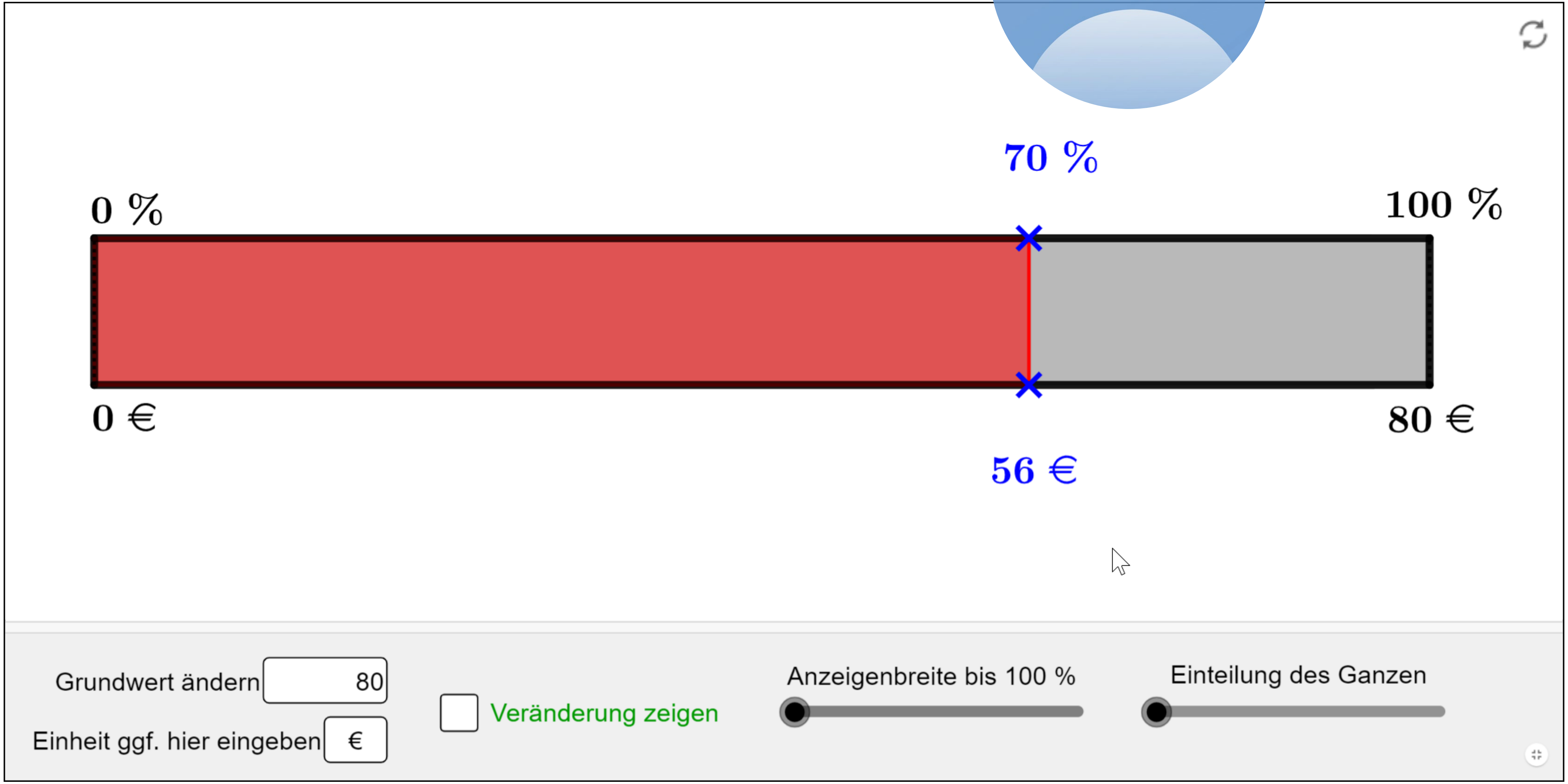
Operator

$$87{,}00\text{ €} : 1{,}19 \approx 73{,}11\text{ €}$$

Verhältnis

$$\frac{x}{100} = \frac{87{,}00\text{ €}}{119} \Rightarrow x = \frac{100}{119} \cdot 87{,}00\text{ €} \approx 73{,}11\text{ €}$$

Prozentrechnung: Prozentstreifen



Grundwert ändern: 80

Einheit ggf. hier eingeben: €

☐ Veränderung zeigen

https://www.geogebra.org/m/hsr8kzsw

Prozentgummiband

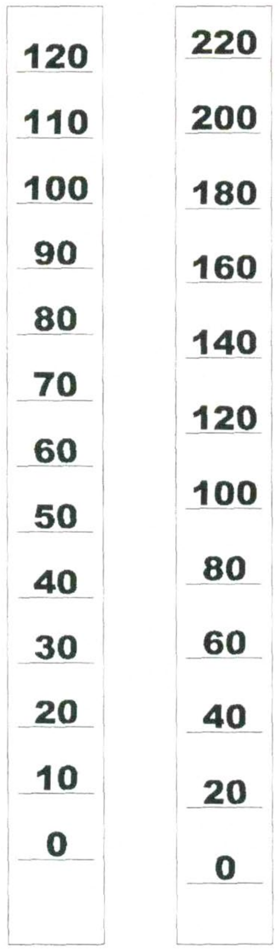


Abb. 1: Zwei mögliche Beschriftungen

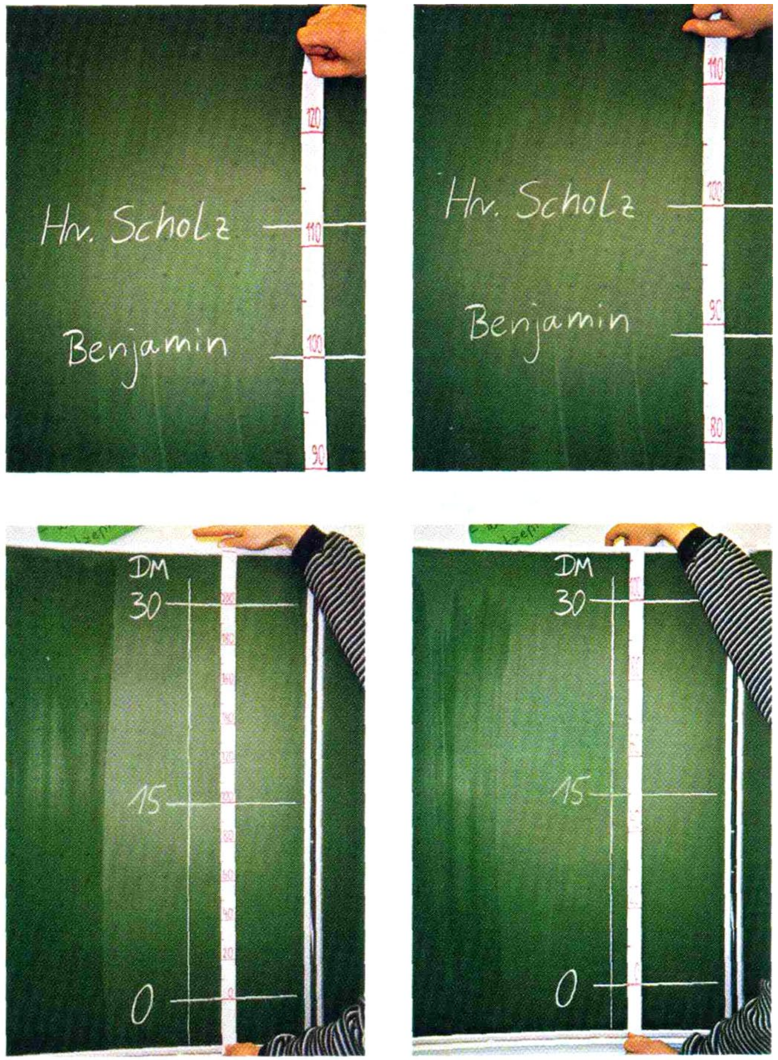
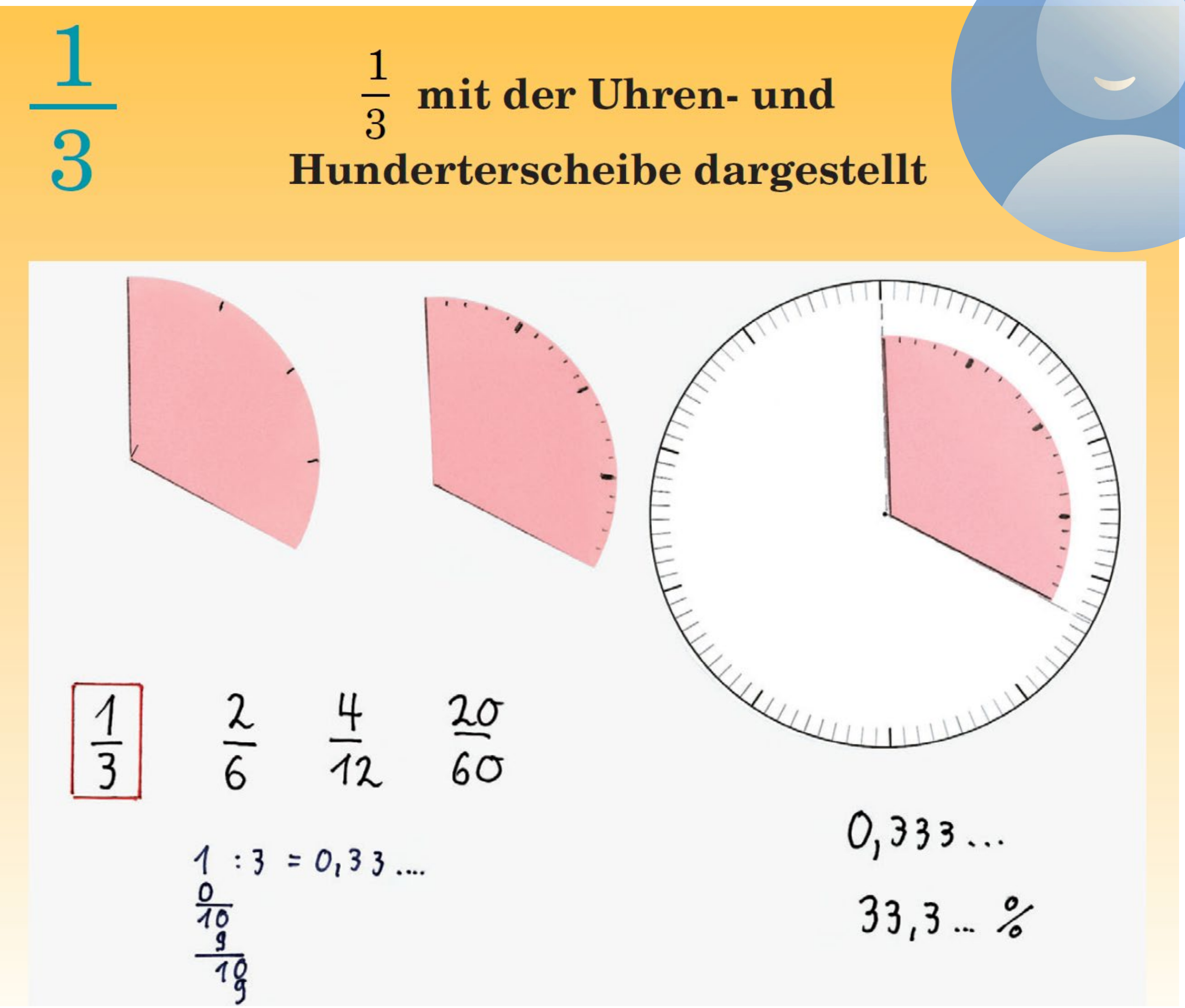


Abb. 2: Vergleichen der Körpergröße und Werte am Zahlenstrahl mit dem Prozentgummiband

Scholz, D. (2002). Das Prozentgummiband. *Mathematik lehren, 114*, 69

Darstellung von Bruchzahlen



$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ **mit der Uhren- und Hunderterscheibe dargestellt**

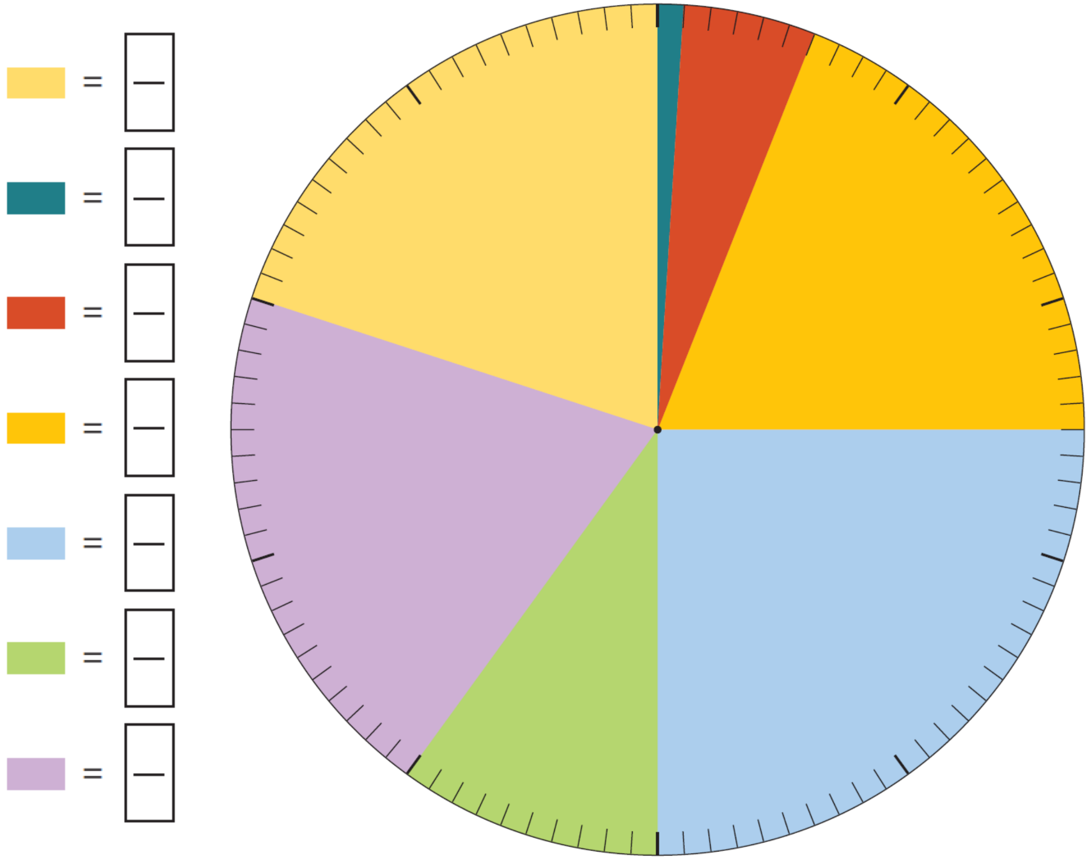
$\boxed{\frac{1}{3}}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{20}{60}$

1 : 3 = 0,33 ....
0
10
9
10
9

0,333...

33,3... %

Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 7*



Dieser Kreis ist in sieben Stücke aufgeteilt. Welchen Bruchteil des Kreises stellt jedes Stück dar?

Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 8*

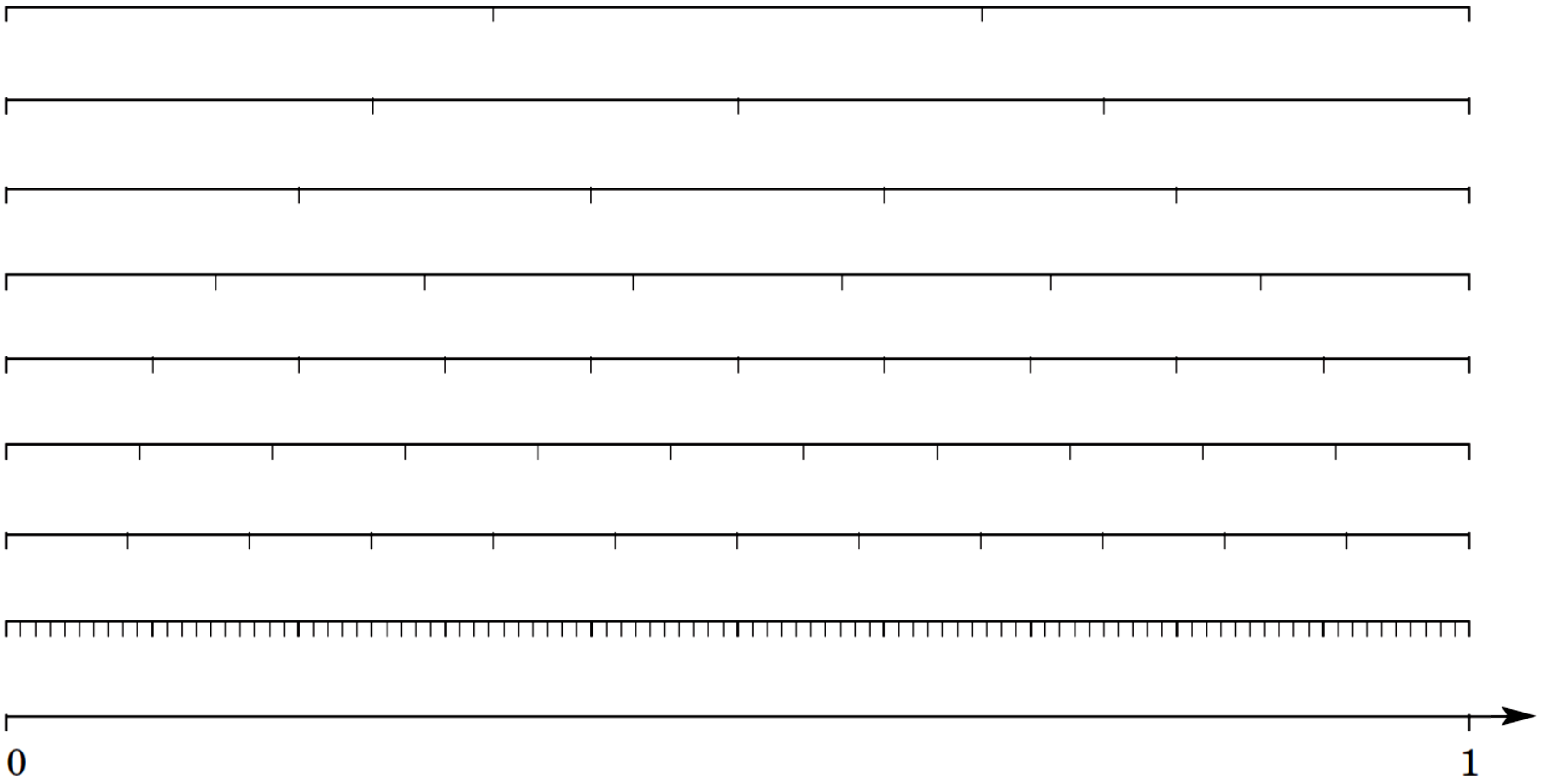
Darstellung von Bruchzahlen

Trage die Buchzahlen als farbige Längen auf den unterteilten Strecken ein. Suche dir jeweils geeignete Strecken aus.

Am Schluss werden alle Brüche auf den unteren Zahlenstrahl übertragen.

Die farbigen Strecken sollen nicht mehr auf dem Zahlenstrahl eingezeichnet werden.

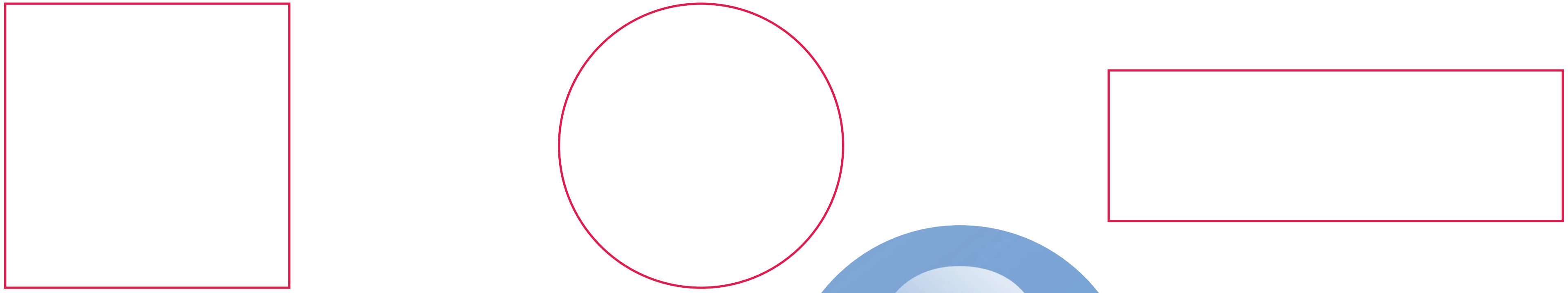
$$\frac{1}{2}\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{3}{4}\,;\ \frac{2}{5}\,;\ \frac{1}{6}\,;\ \frac{5}{7}\,;\ \frac{3}{10}\,;\ \frac{7}{11}\,;\ \frac{3}{12}\,;\ 0{,}75 \text{ und } 0{,}9$$



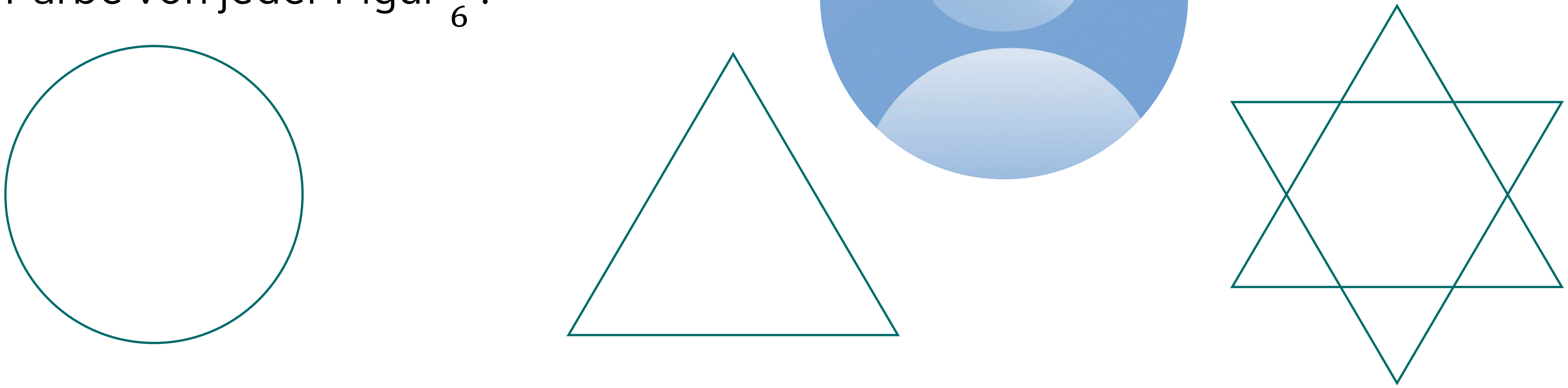
Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 13*

Darstellung von Bruchzahlen

a) Färbe von jeder Figur $\frac{1}{8}$. Mache es so genau wie möglich.



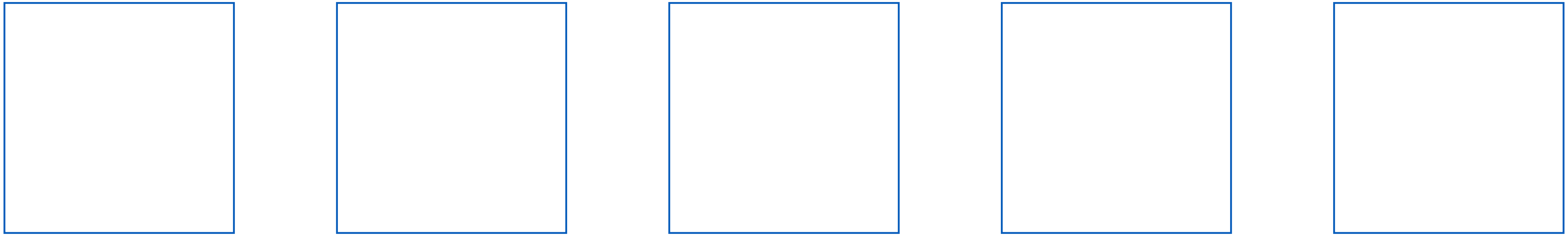
b) Färbe von jeder Figur $\frac{1}{6}$.



Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 3*

Darstellung von Bruchzahlen

c) Färbe von jedem Quadrat $\frac{1}{4}$. Mache es jedes Mal anders!



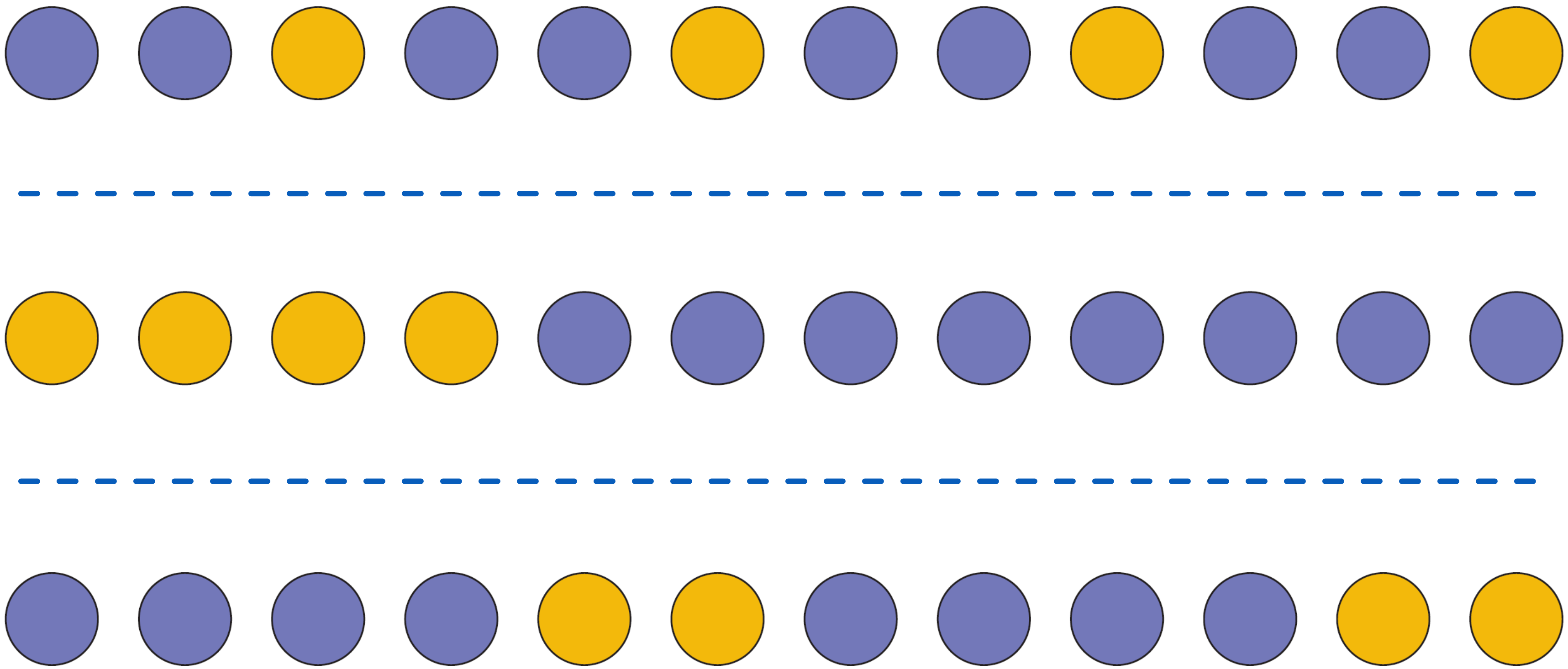
Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 3*

Darstellung von Bruchzahlen

Hier siehst du drei Plättchen-Reihen.

Wie viele Plättchen jeder Farbe sind jeweils zu sehen?

Kannst du eine Regel angeben, nach der die Plättchen jeweils angeordnet wurden?

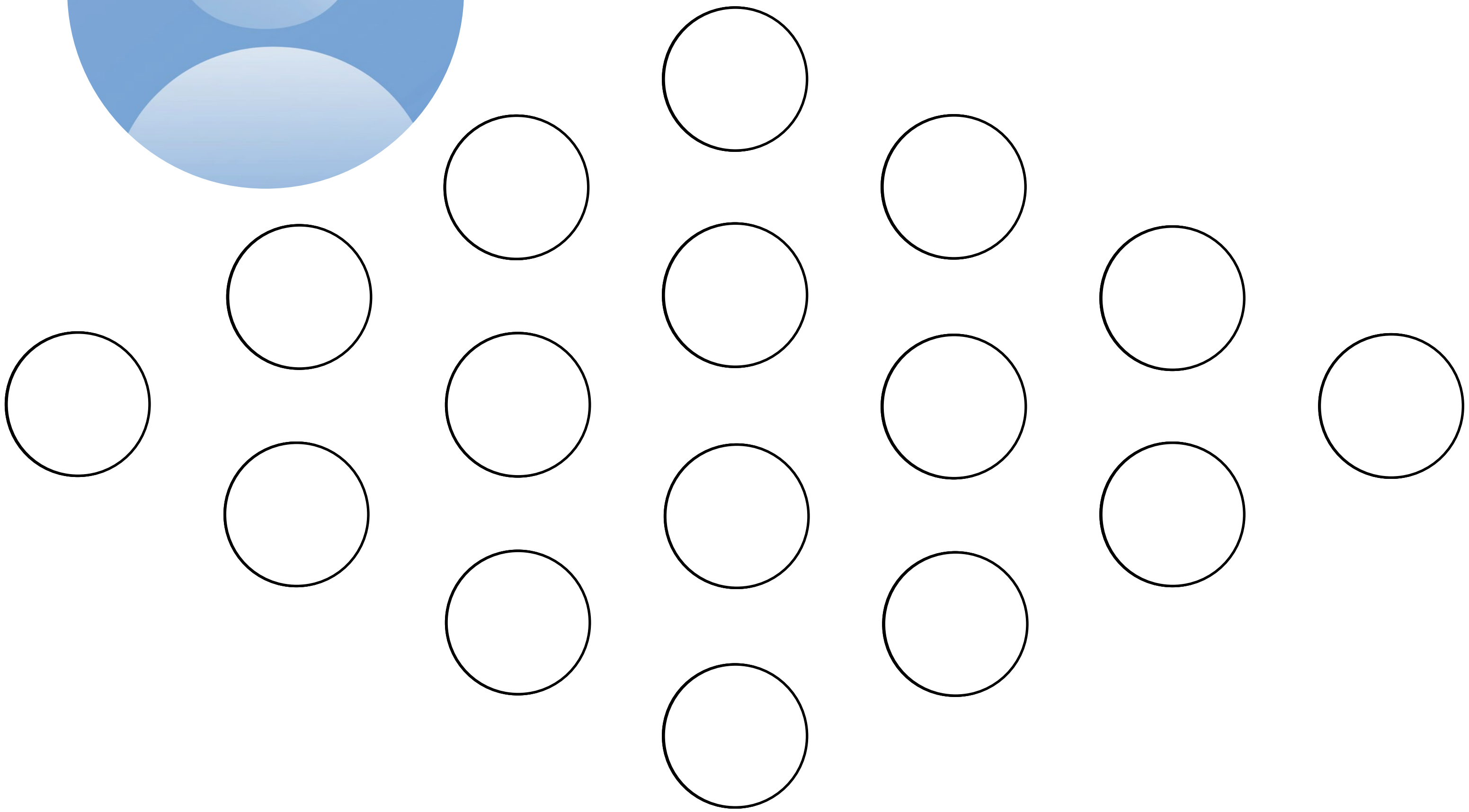


Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 4*

Darstellung von Bruchzahlen

$\frac{1}{4}$ der Plättchen sind schwarz,
$\frac{3}{8}$ sind blau und $\frac{6}{16}$ sind rot.

Male die Plättchen so aus, dass die Beschreibung stimmt.



Koepsell, A. (2004). Brüchen begegnen. *Mathe-Welt, 123, 5*

3

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

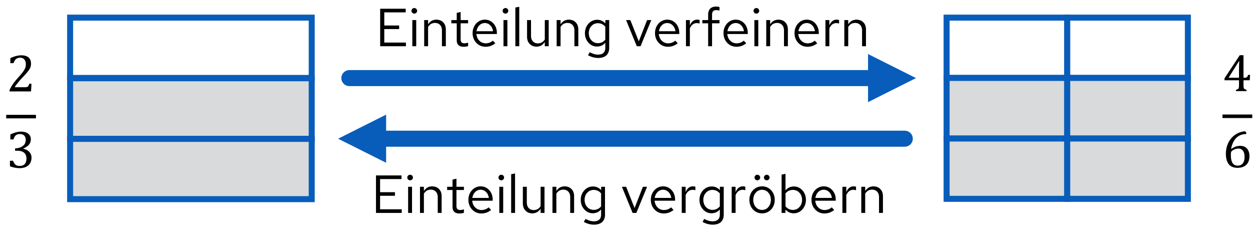
Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

3.1

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen

Erweitern und Kürzen von Brüchen

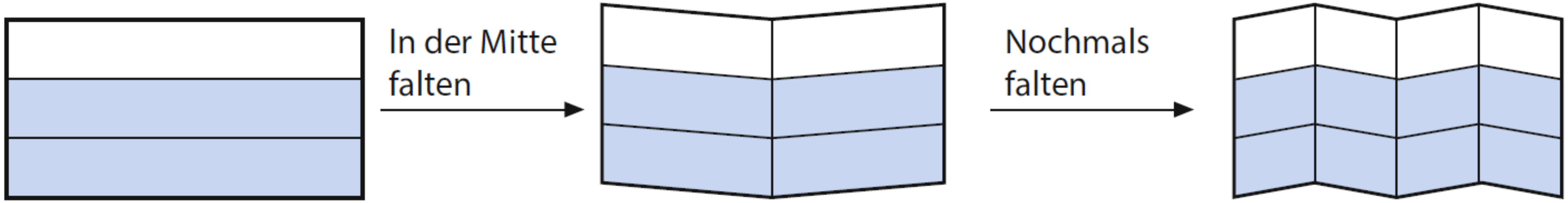


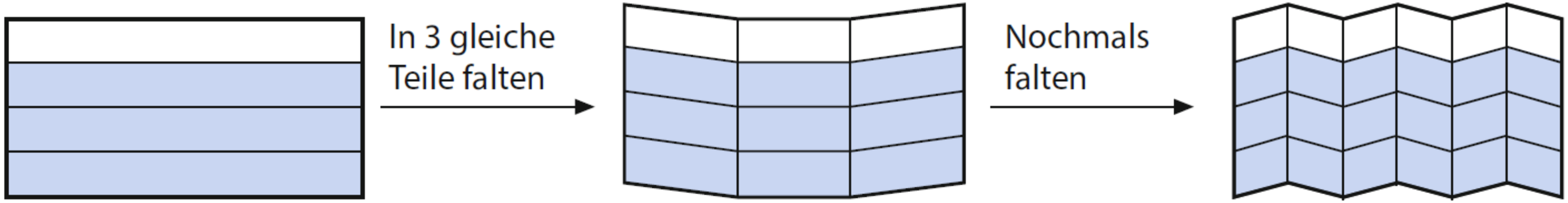
$\frac{2}{3}$

Einteilung verfeinern

Einteilung vergröbern

$\frac{4}{6}$





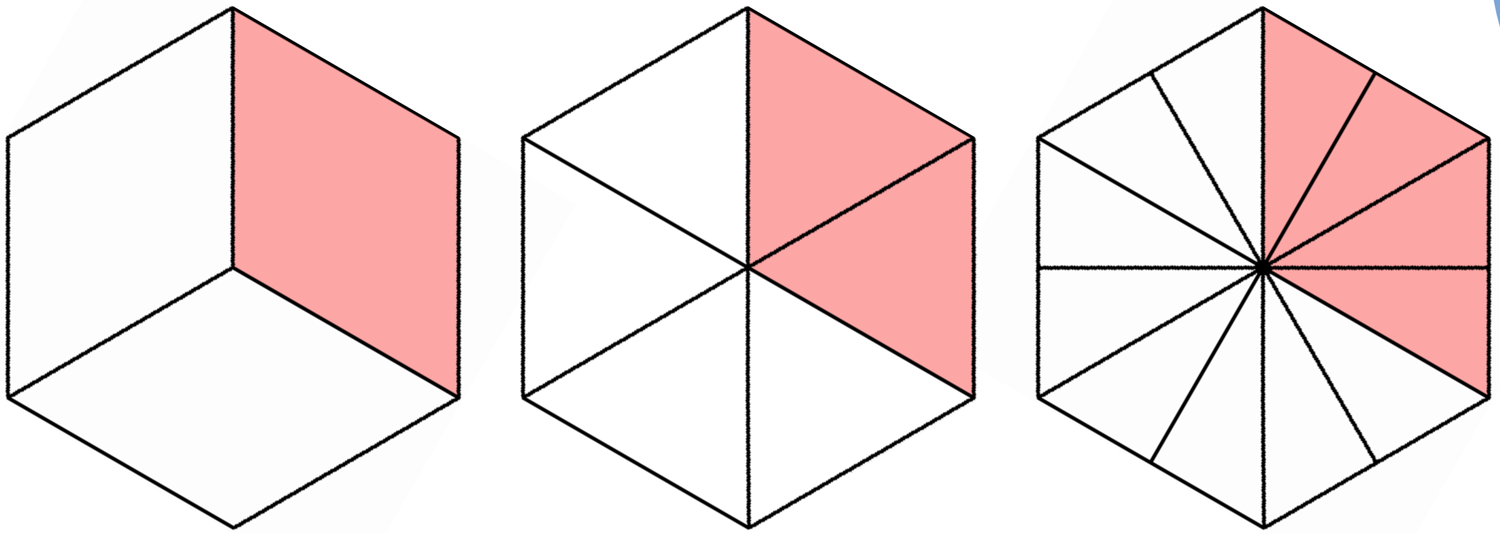
Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 123*, 4–8
Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. 5. Auflage, Berlin: Springer Spektrum, S. 43

Erweitern und Kürzen

Erweitern
Bruchstück
und das Ganze
feiner unterteilen
(**Verfeinern**)

$\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$ $\qquad$ $\frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{4}{12}$

Erweitern als Verfeinern der Einteilung



Kürzen als Vergröbern der Einteilung

$\frac{2 : 2}{6 : 2} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{4 : 2}{12 : 2} = \frac{2}{6}$ $\qquad$ $\frac{4}{12}$

Kürzen
Bruchstück
und das Ganze
gröber unterteilen
(**Vergröbern**)

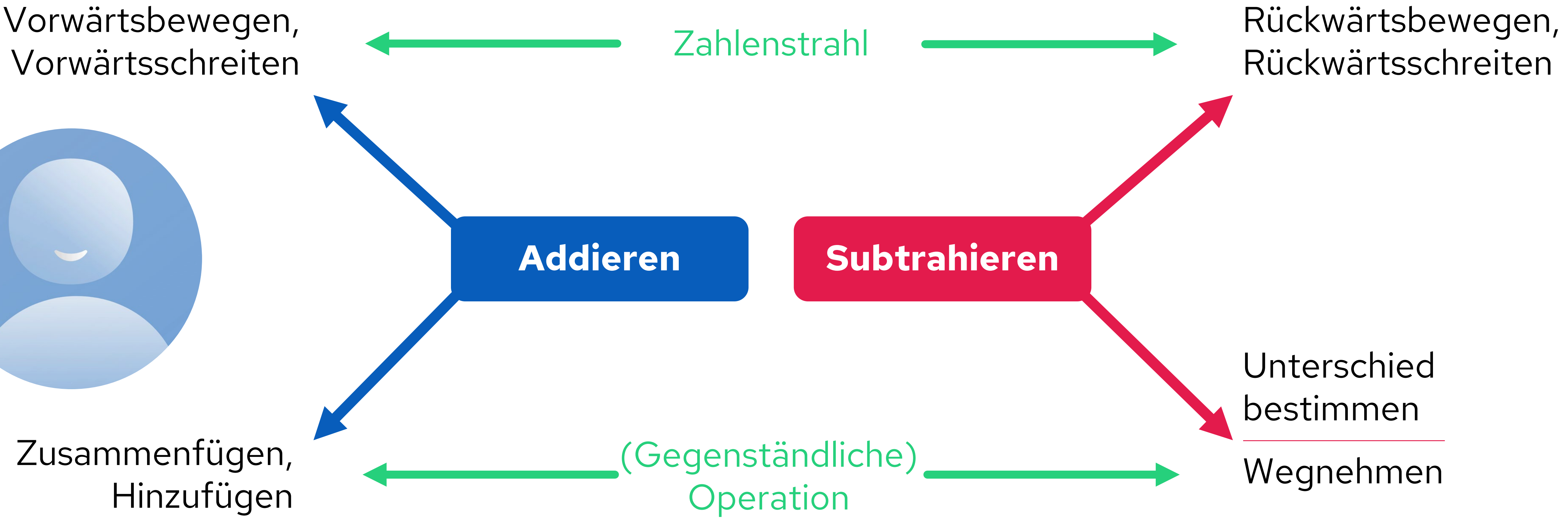
https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

3.2

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion von Bruchzahlen



Vorwärtsbewegen,
Vorwärtsschreiten

Zahlenstrahl

Rückwärtsbewegen,
Rückwärtsschreiten

Addieren

Subtrahieren

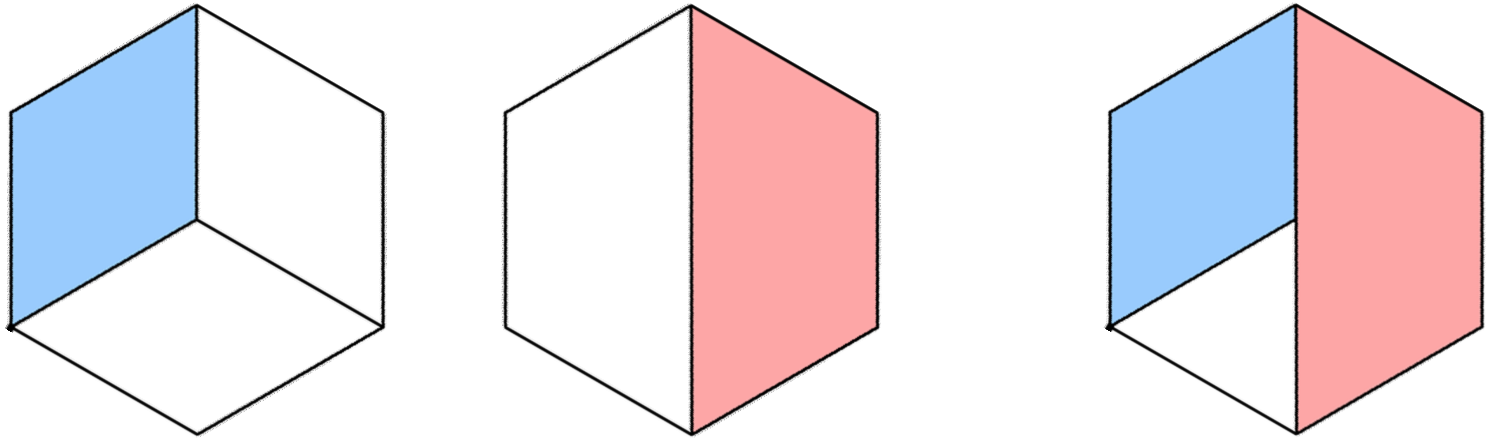
Zusammenfügen,
Hinzufügen

(Gegenständliche)
Operation

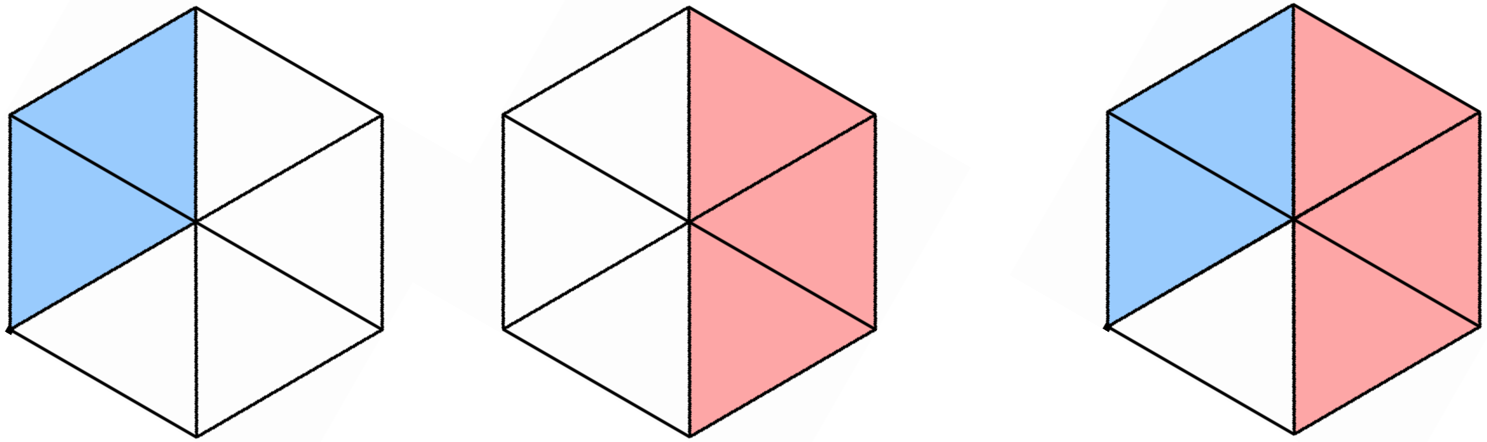
Unterschied
bestimmen

Wegnehmen

Addieren von Brüchen: Zusammenfügen



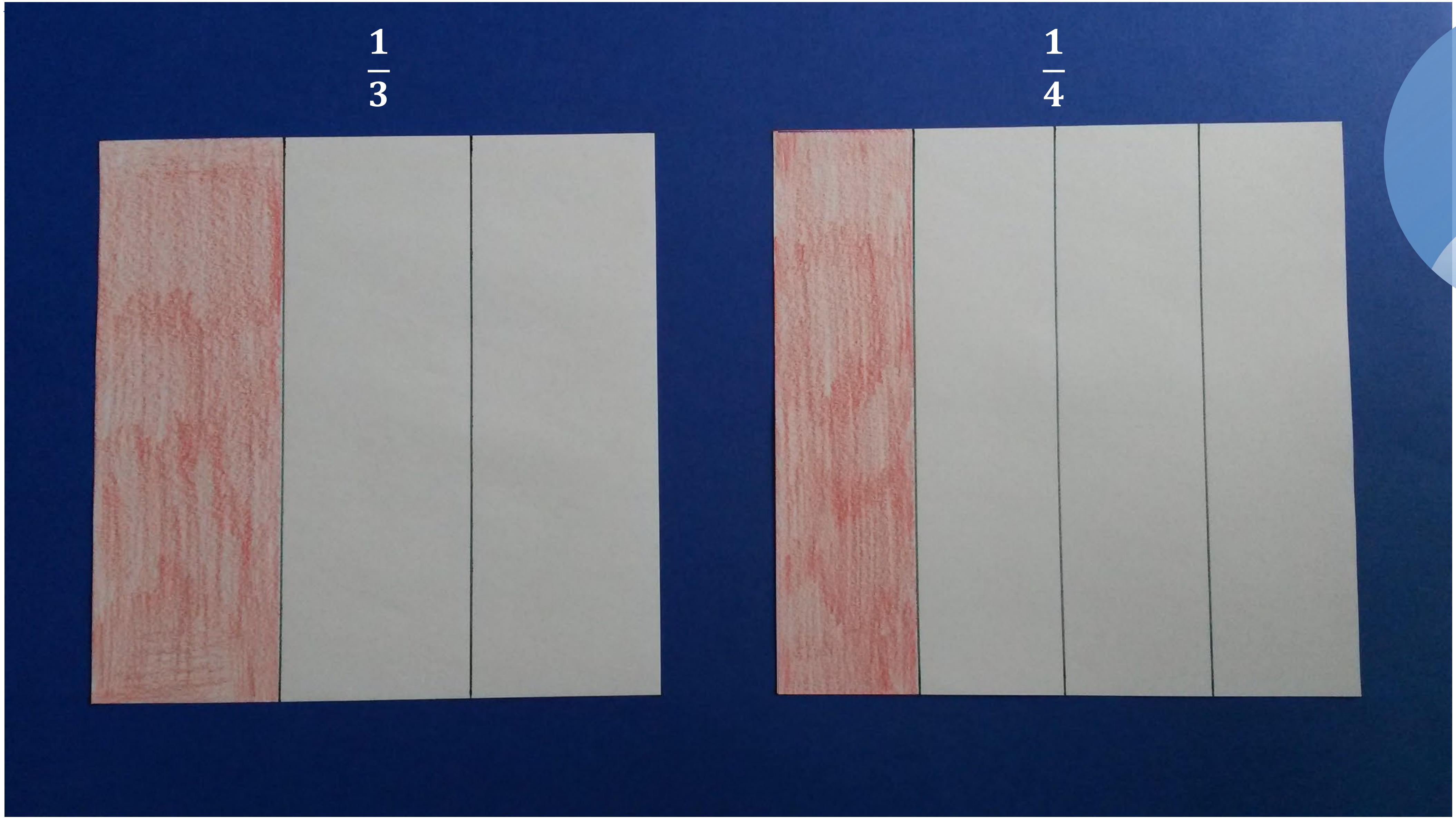
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = ?$$



$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

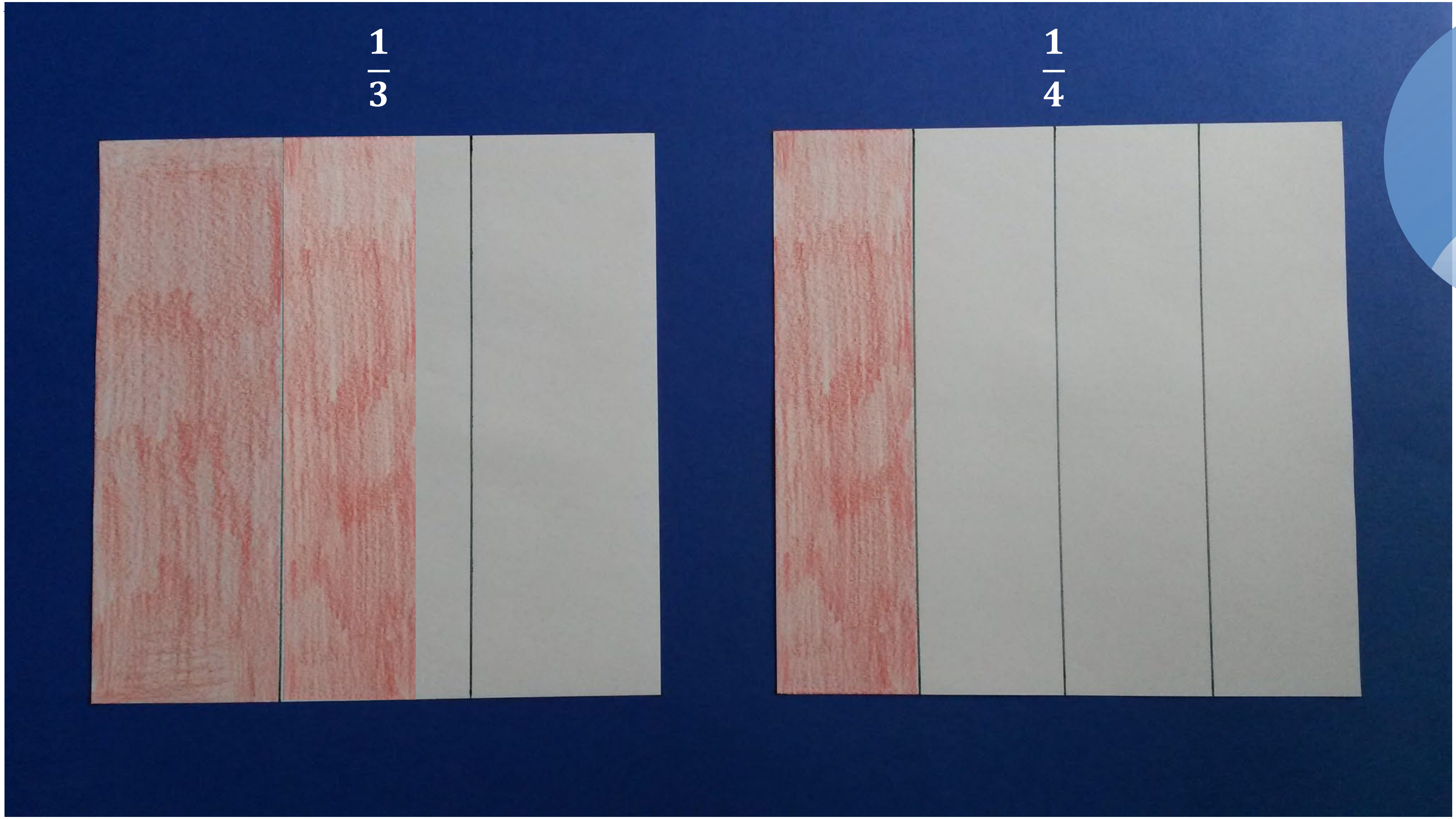
Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten

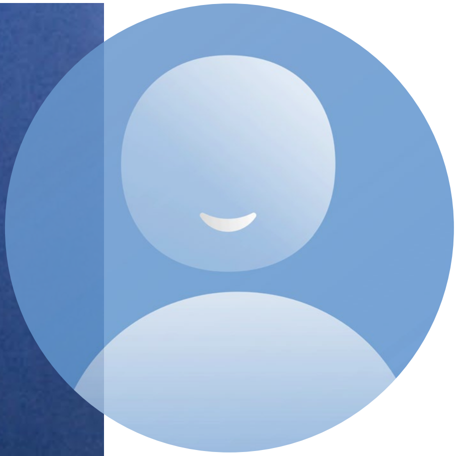


$\frac{1}{3}$

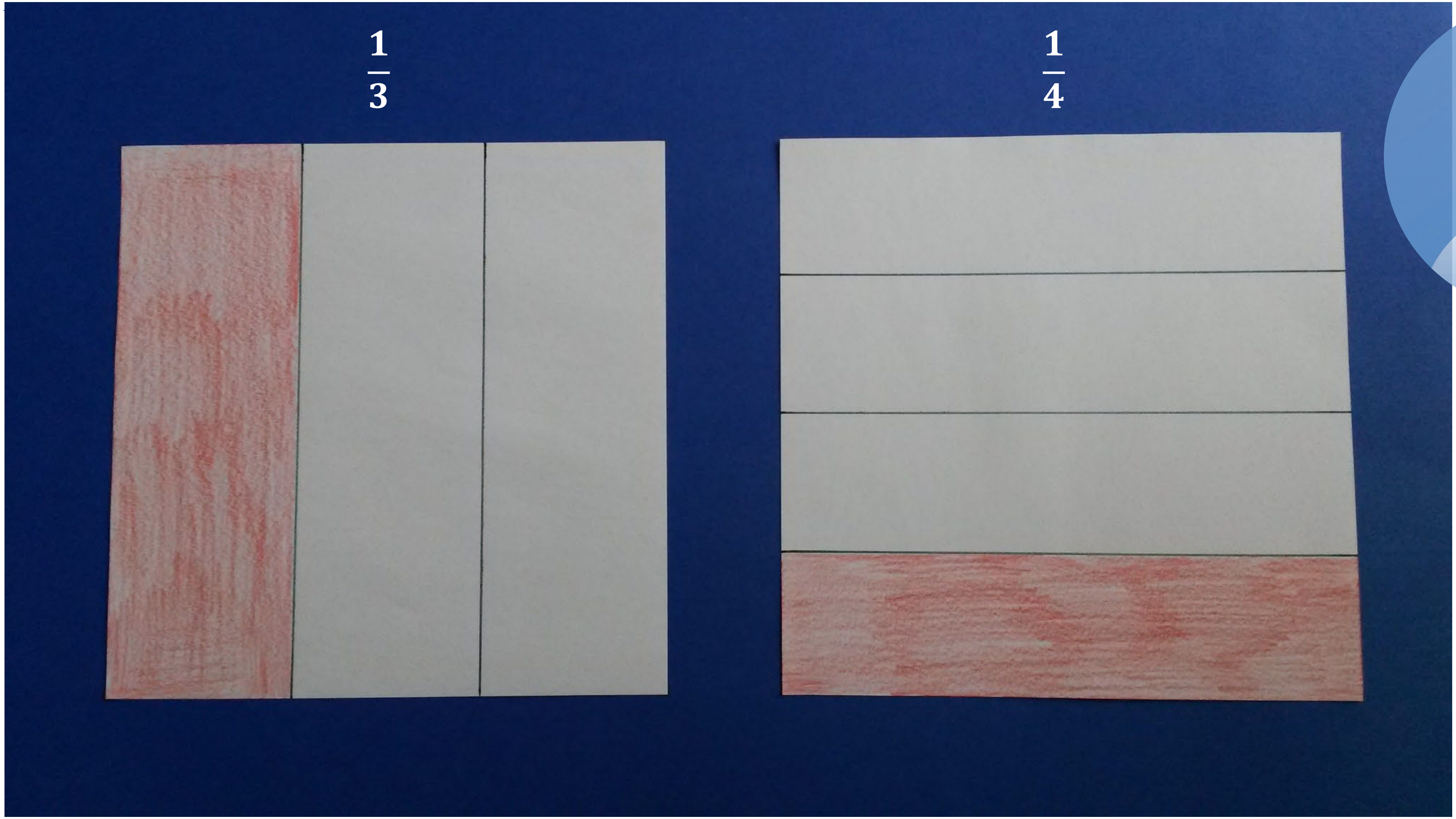
$\frac{1}{4}$

Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten

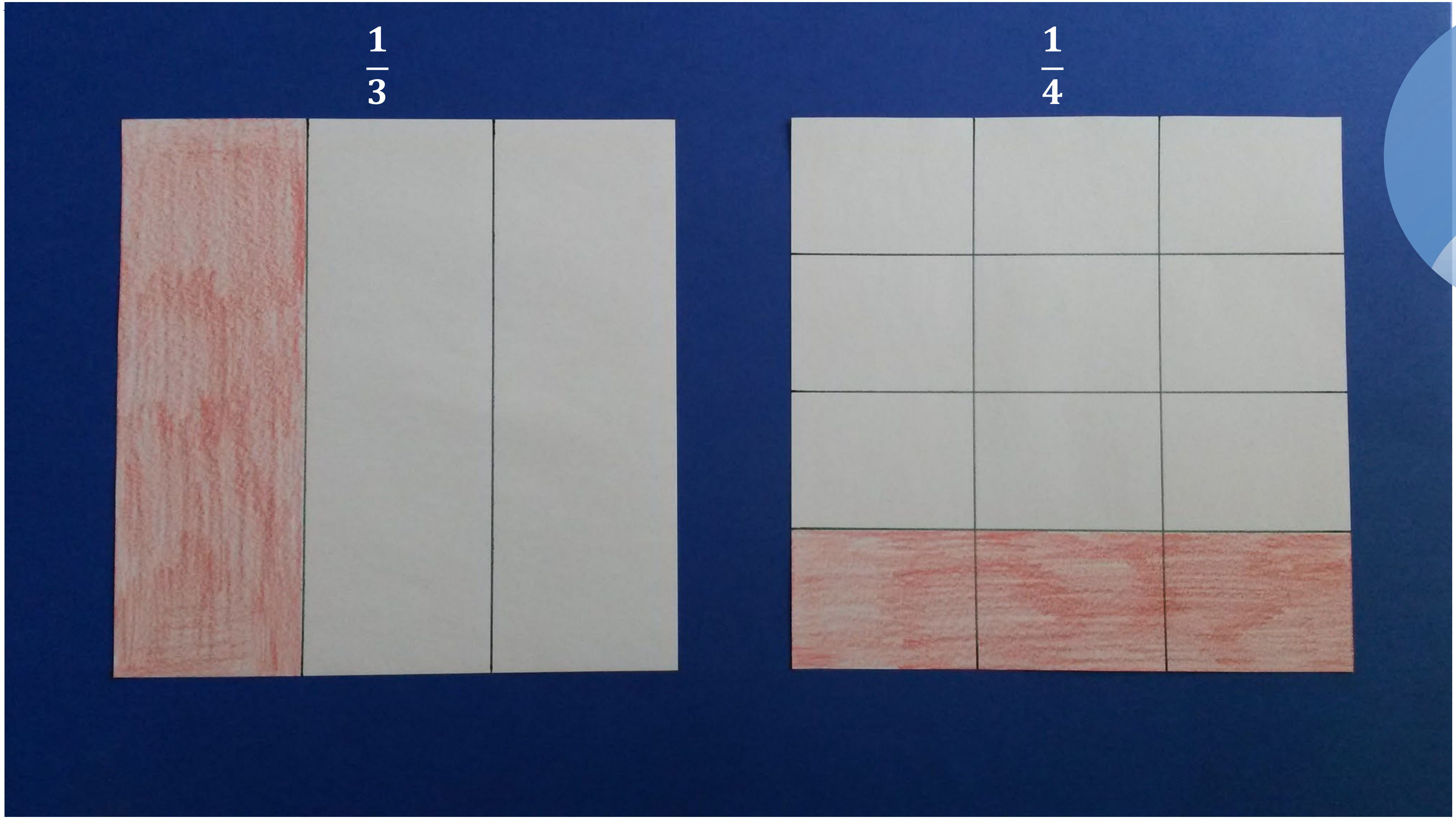




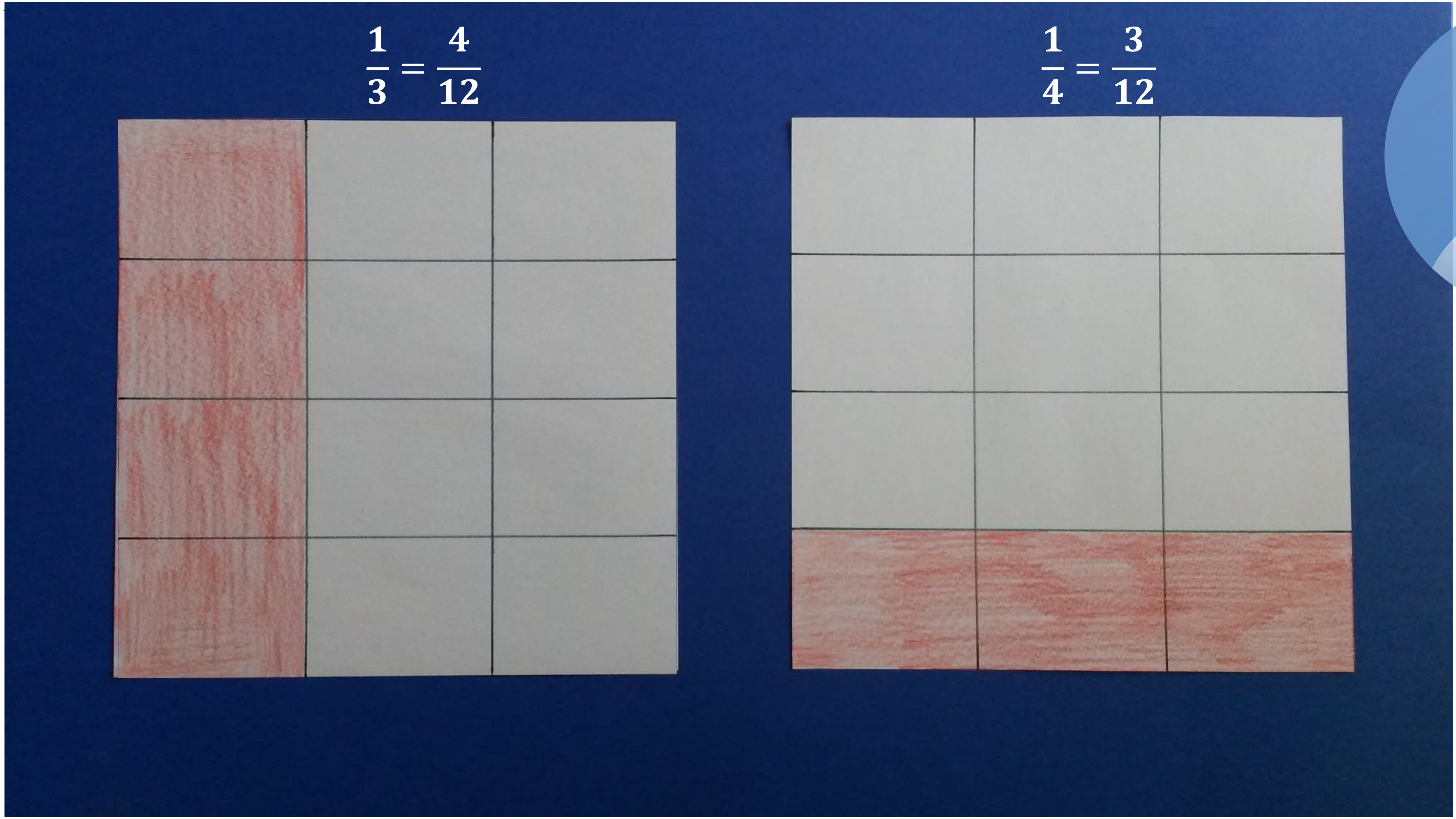
Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten



Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten



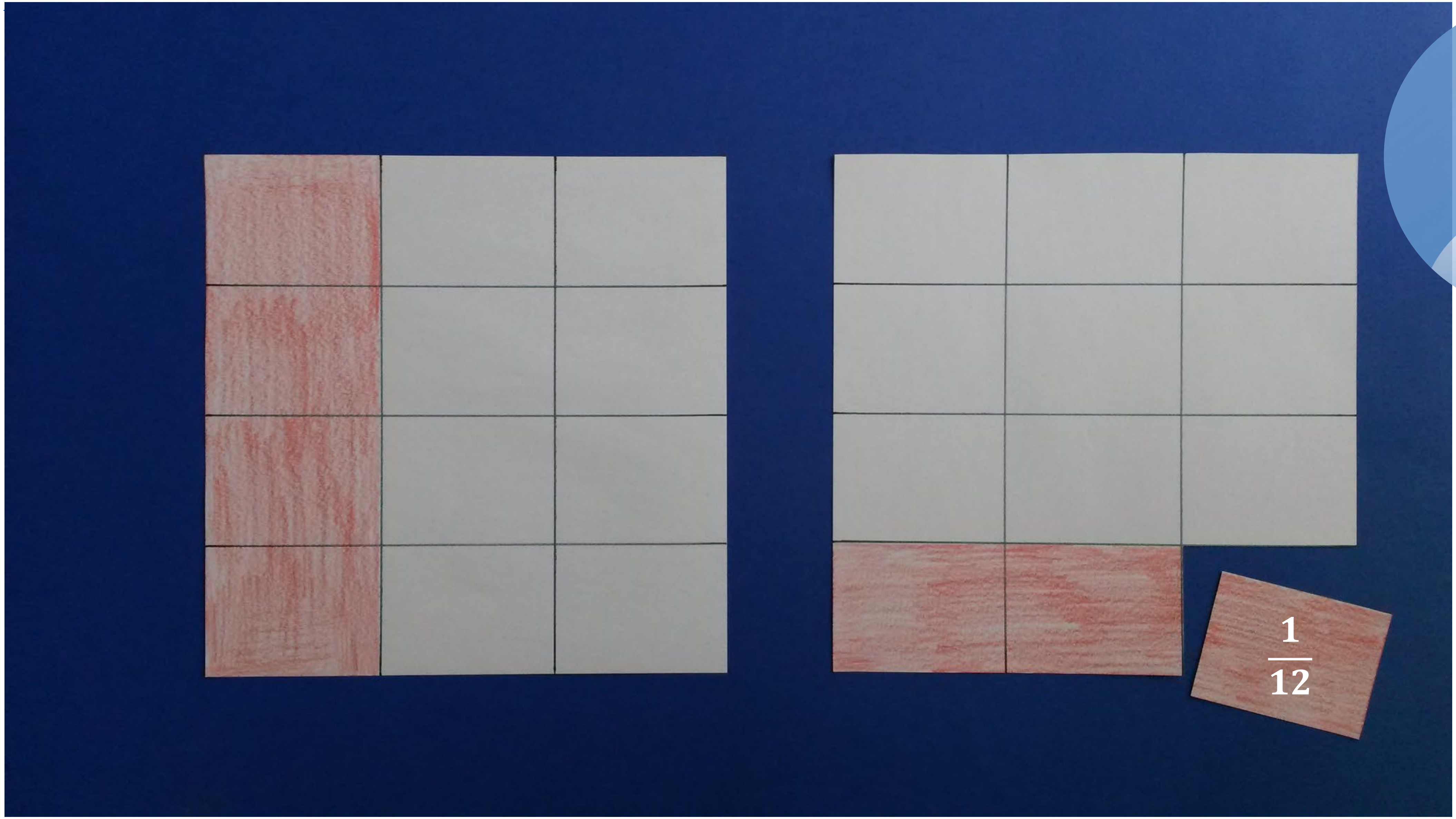
Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten

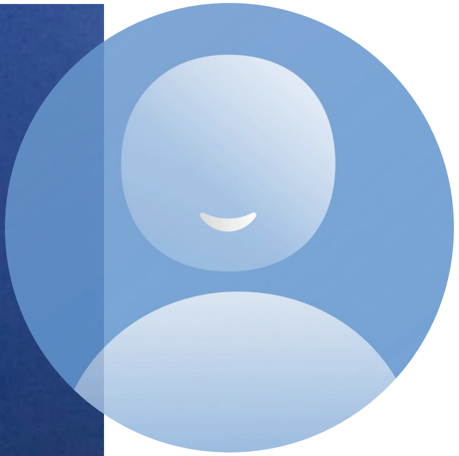


$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

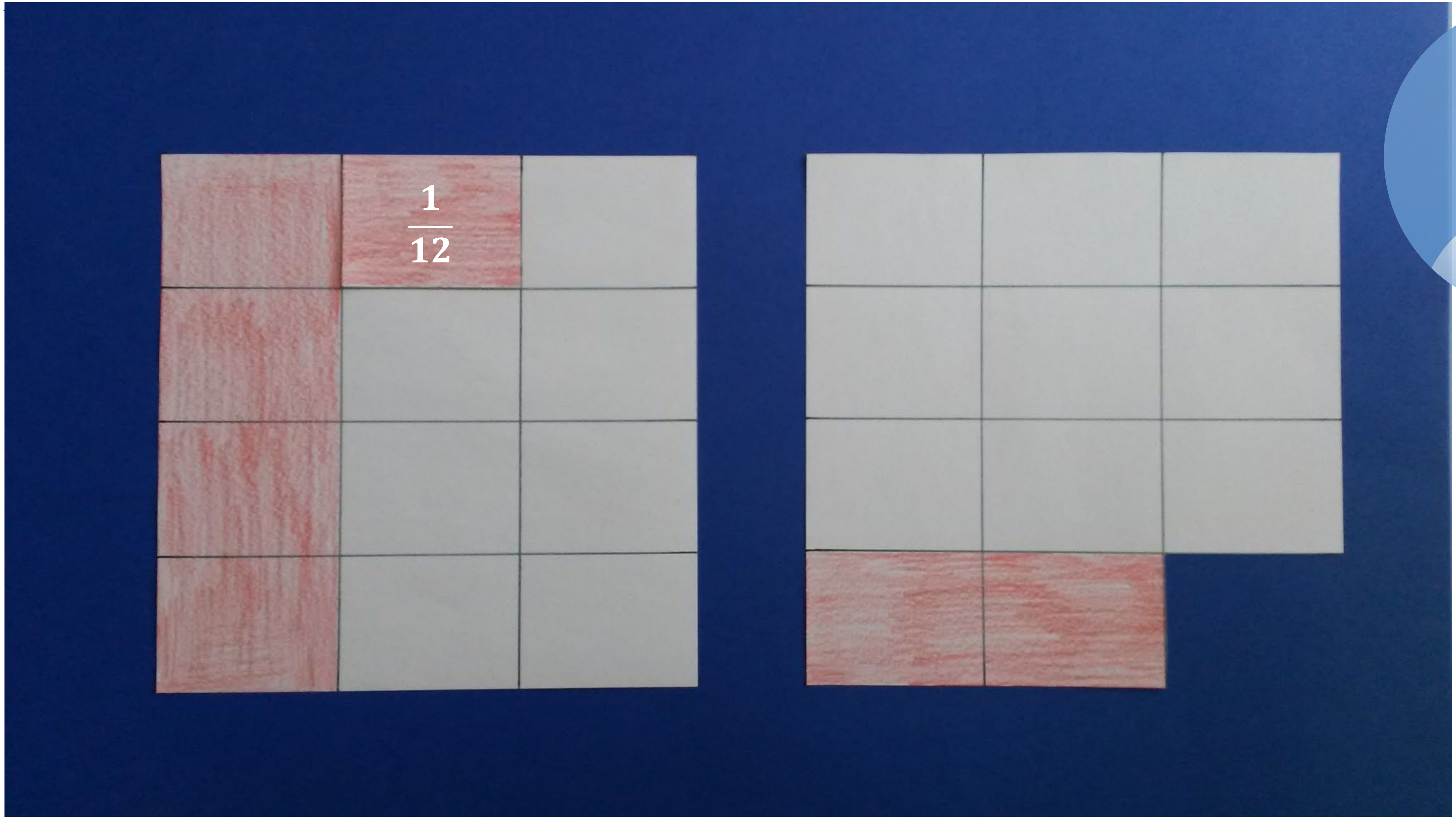
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten

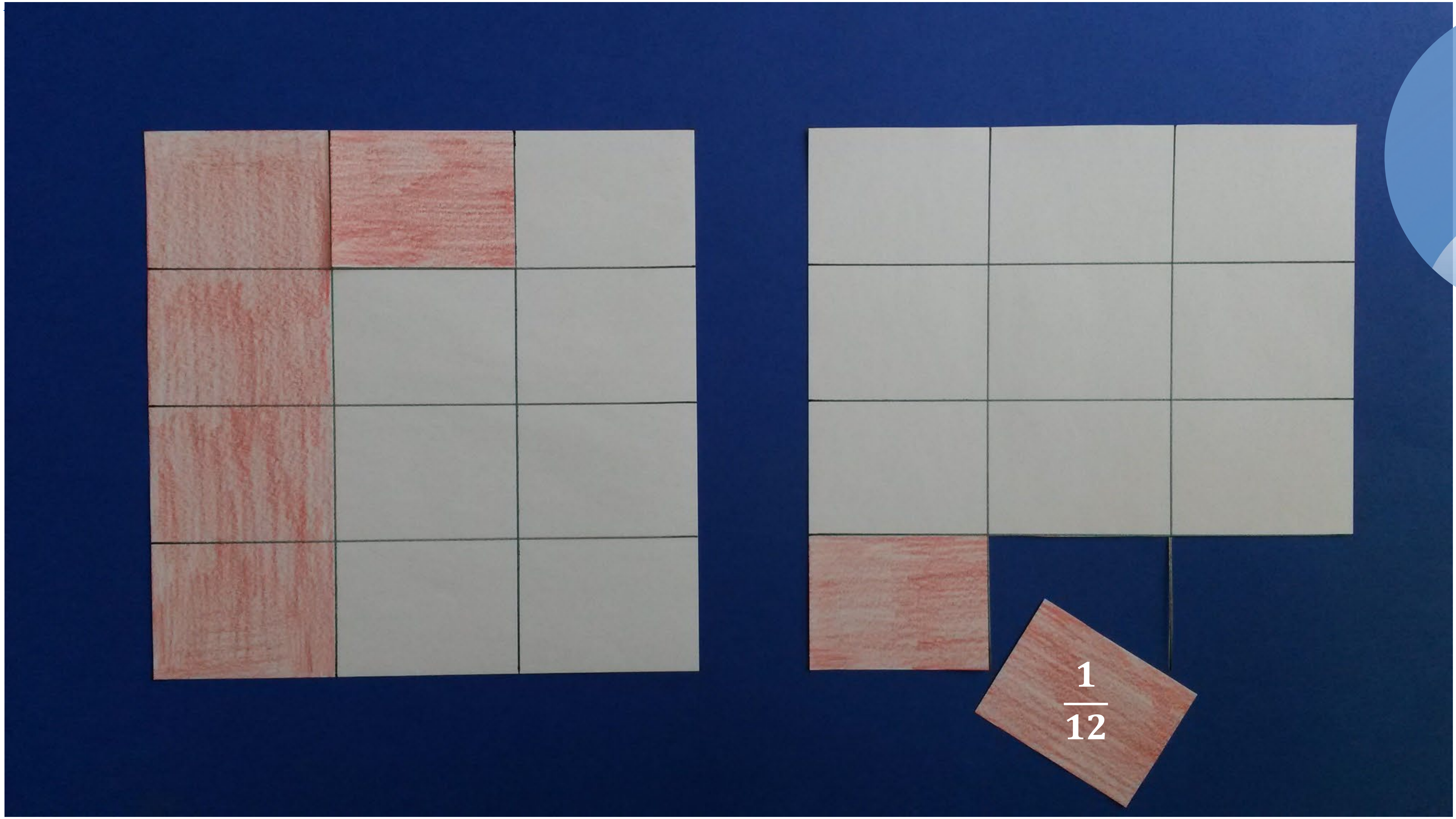




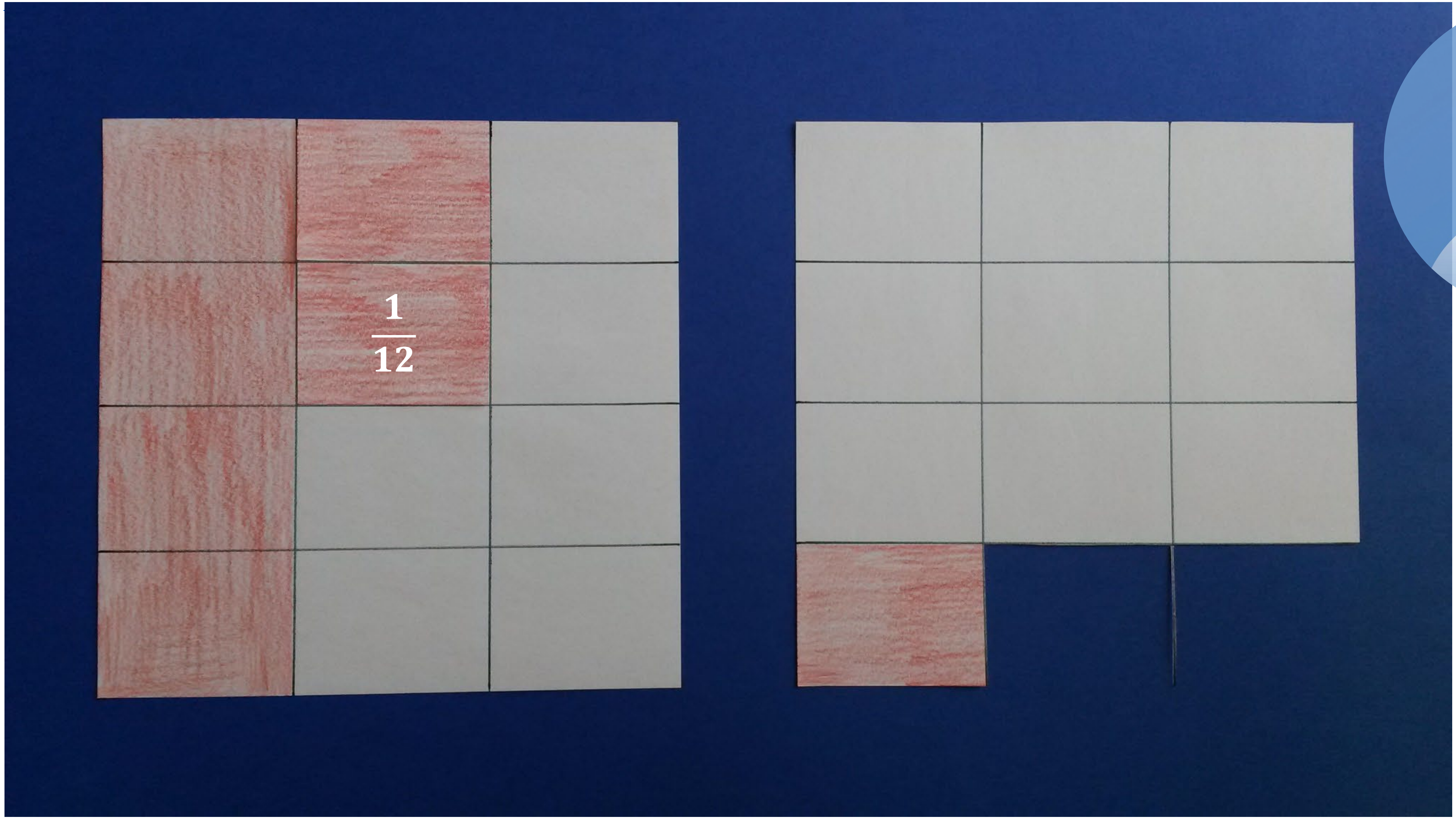
Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten



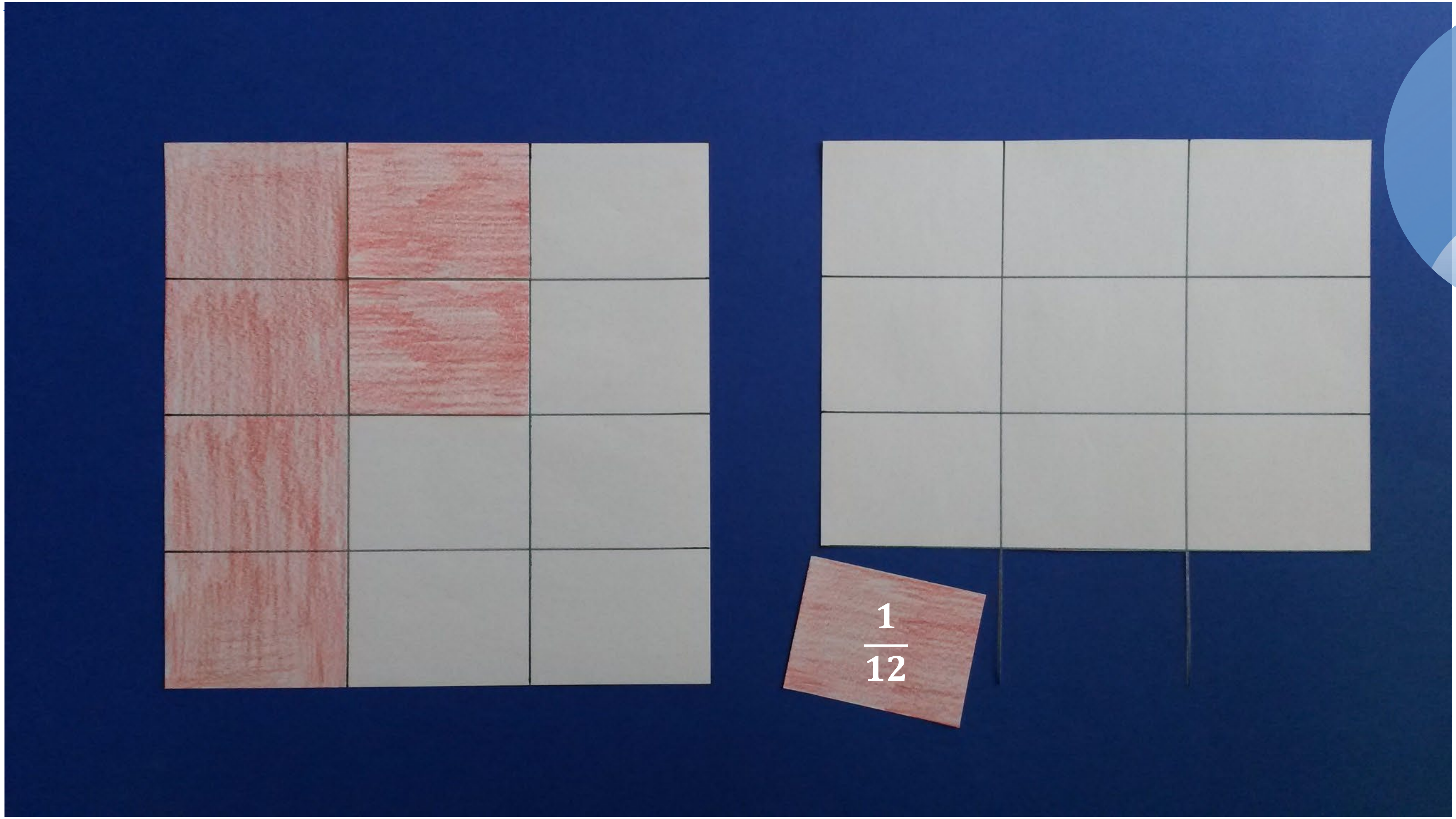
Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten

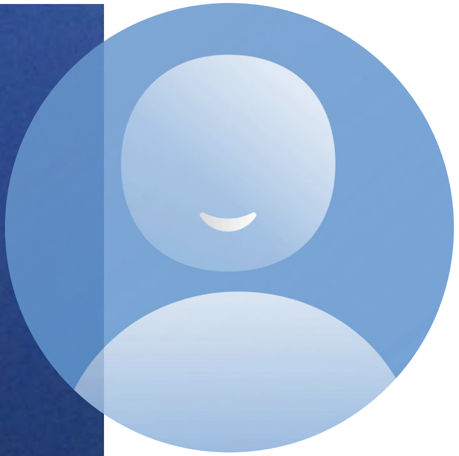


Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten

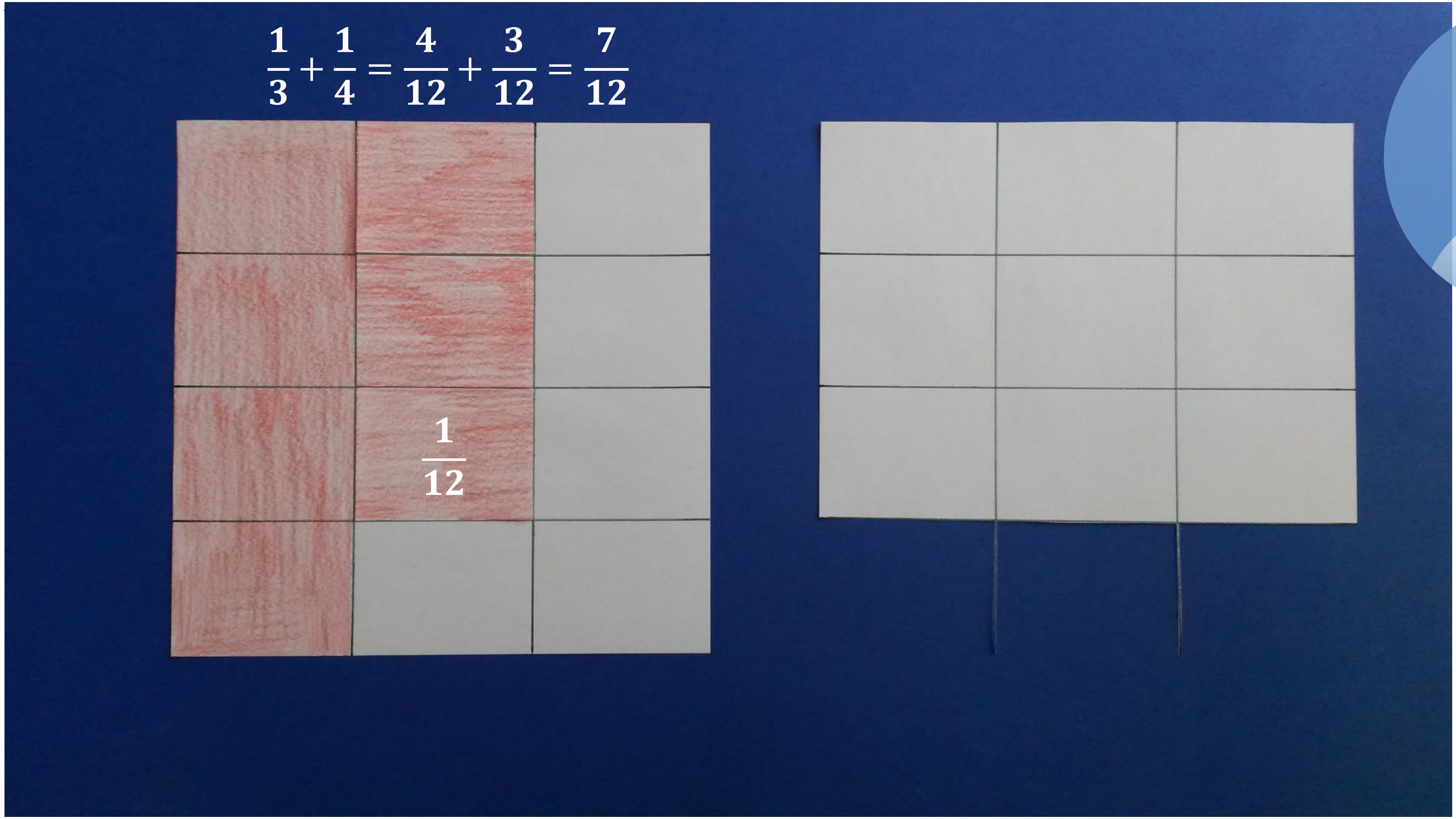


Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten



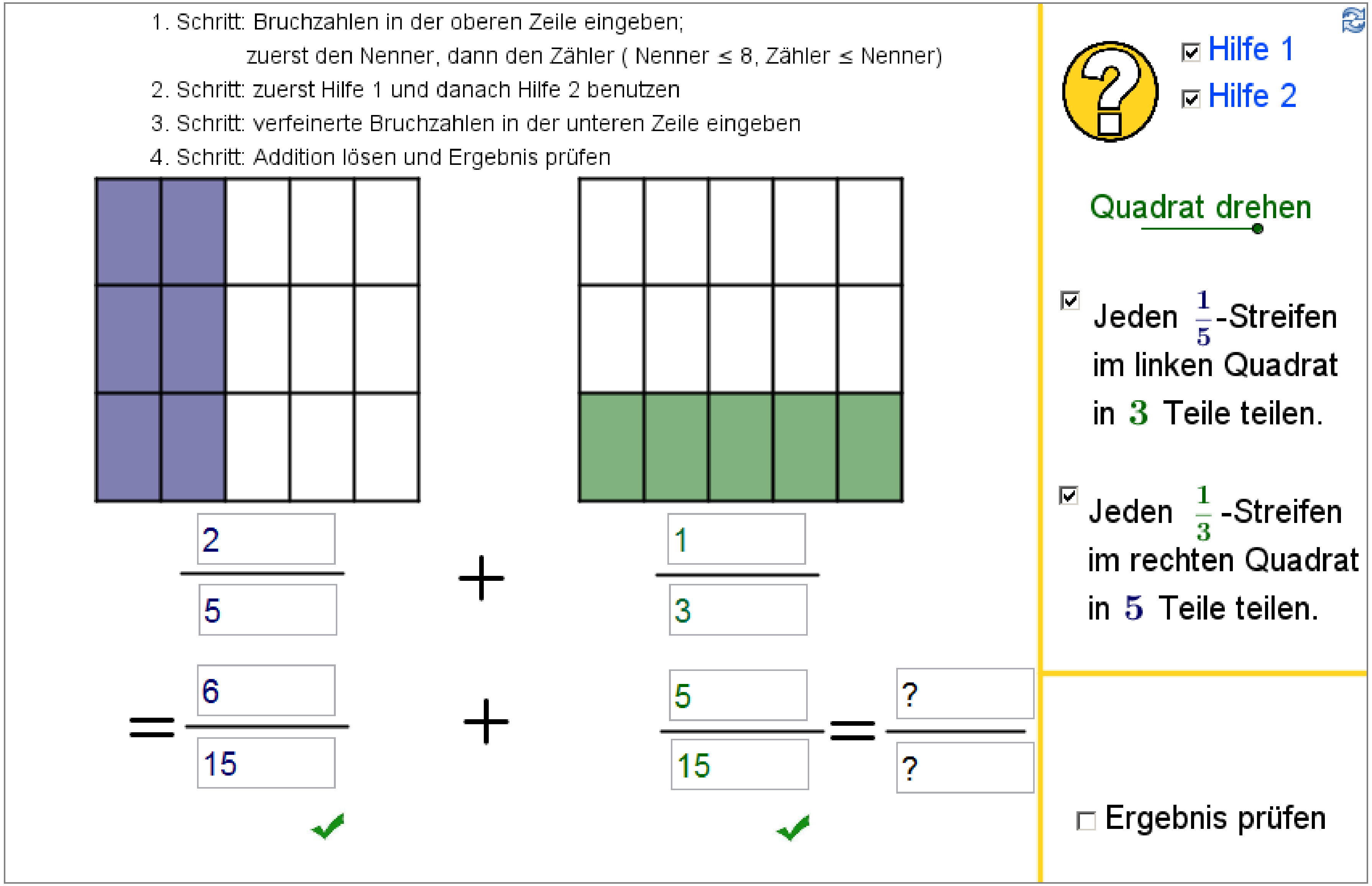


Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Ergebnis der Addition von Bruchzahlen inhaltlich erarbeiten



1. Schritt: Bruchzahlen in der oberen Zeile eingeben;
zuerst den Nenner, dann den Zähler (Nenner ≤ 8, Zähler ≤ Nenner)
2. Schritt: zuerst Hilfe 1 und danach Hilfe 2 benutzen
3. Schritt: verfeinerte Bruchzahlen in der unteren Zeile eingeben
4. Schritt: Addition lösen und Ergebnis prüfen

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{?}{?}$$

✓ ✓

☑ Hilfe 1
☑ Hilfe 2

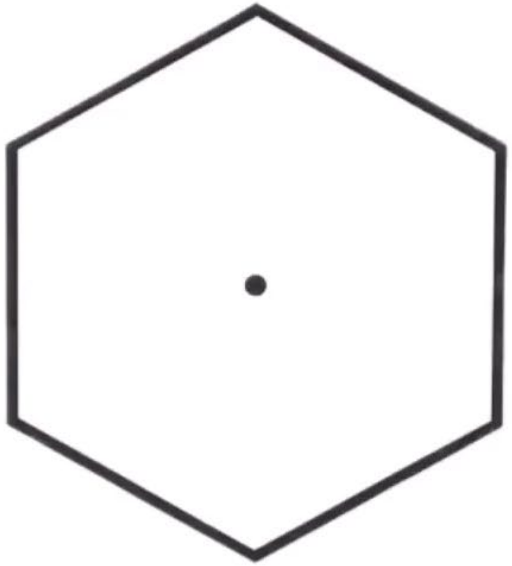
☑ Jeden $\frac{1}{5}$-Streifen im linken Quadrat in 3 Teile teilen.

☑ Jeden $\frac{1}{3}$-Streifen im rechten Quadrat in 5 Teile teilen.

☐ Ergebnis prüfen

https://mathe-labor.de/stationen/mathe-und-kunst-2015/a/teil3/ → Simulation 4 https://geogebra.org/m/tFaPj2mC

Subtrahieren von Bruchzahlen: Wegnehmen



Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

3.3

Grundvorstellungen zur Multiplikation

Grundvorstellung zur Multiplikation von Bruchzahlen → Von-Deutung

1. Natürliche Zahl mal Bruchzahl

$3 \cdot \frac{4}{5} = ?$

$$3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$$

Abgekürzte Addition

$$= 4 \text{ Fünftel} + 4 \text{ Fünftel} + 4 \text{ Fünftel}$$

Quasikardinalzahl

$$= 12 \text{ Fünftel} = \frac{12}{5}$$

Quasikardinalzahl

---

2. Bruchzahl mal natürliche Zahl

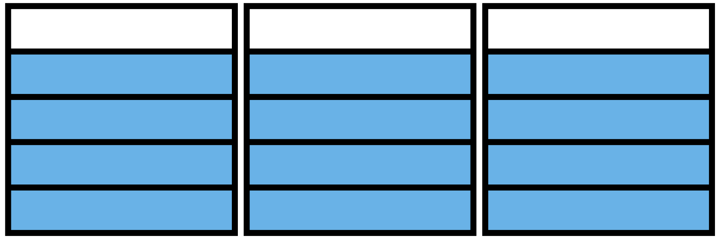
$\frac{4}{5} \cdot 3 = ?$

$$\frac{4}{5} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

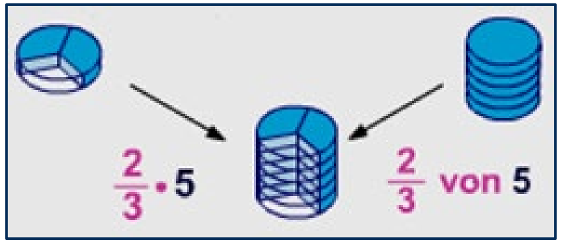
Permanenzprinzip (Kommutativgesetz)

oder $\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{4}{5} \text{ von } 3$

Von-Deutung



$\frac{12}{5}$



Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 123*, 4-8

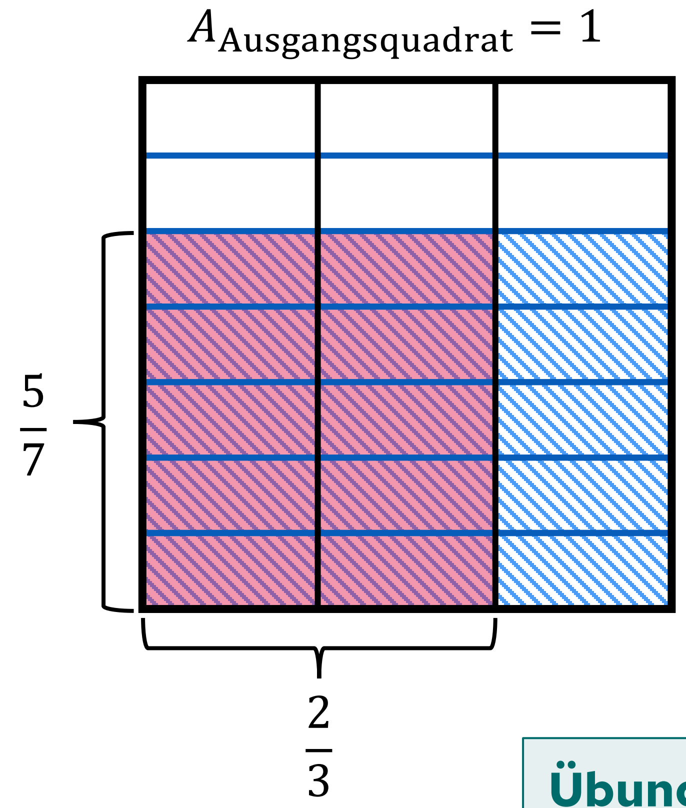
Grundvorstellung zur Multiplikation von Bruchzahlen → Von-Deutung

3. Bruchzahl mal Bruchzahl

$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = ?$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$

Von-Deutung



Aus Skizze ablesen:

$$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

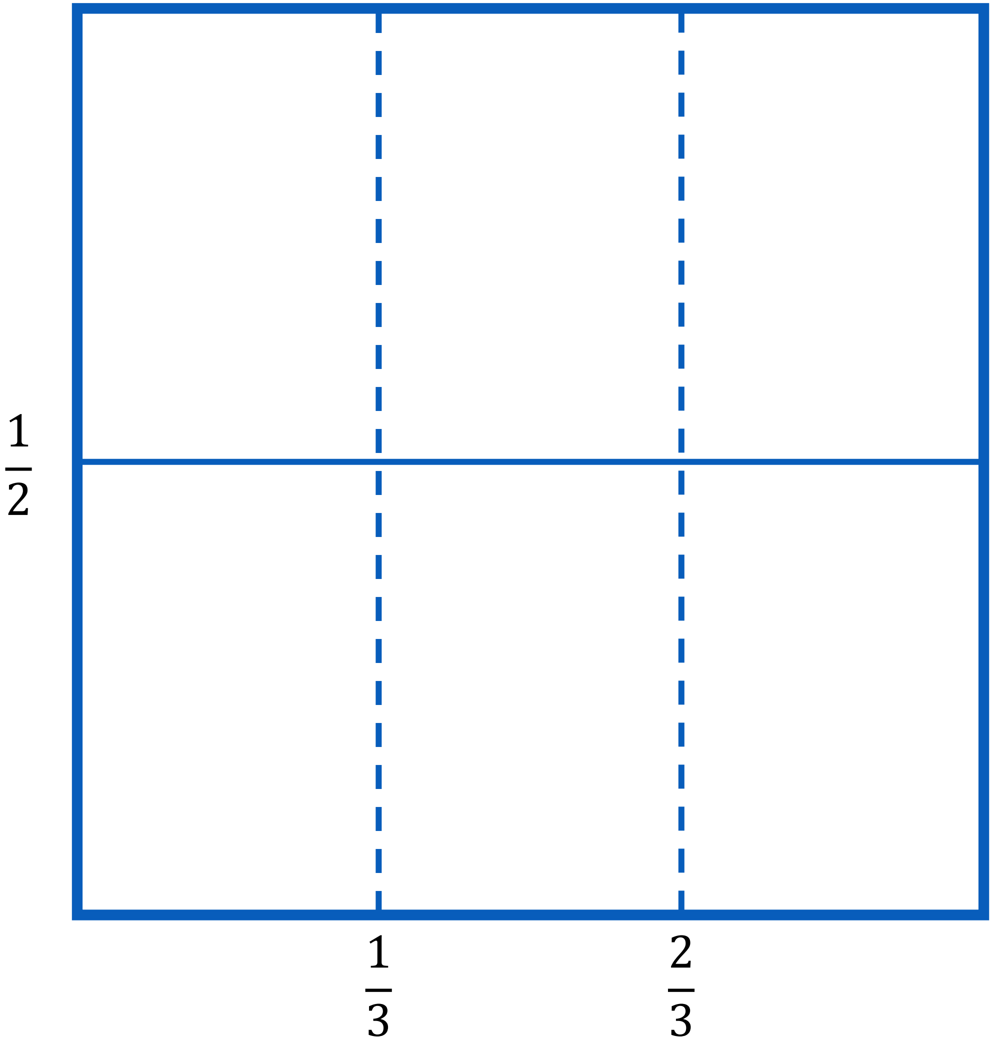
Flächeninhaltsformel

$$A_{\text{Rechteck}} = l \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$$

Übung: Bestimmen Sie genauso die Produkte $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$ und $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 123*, 4-8

Vereinigung vieler Bruchzahlaspekte



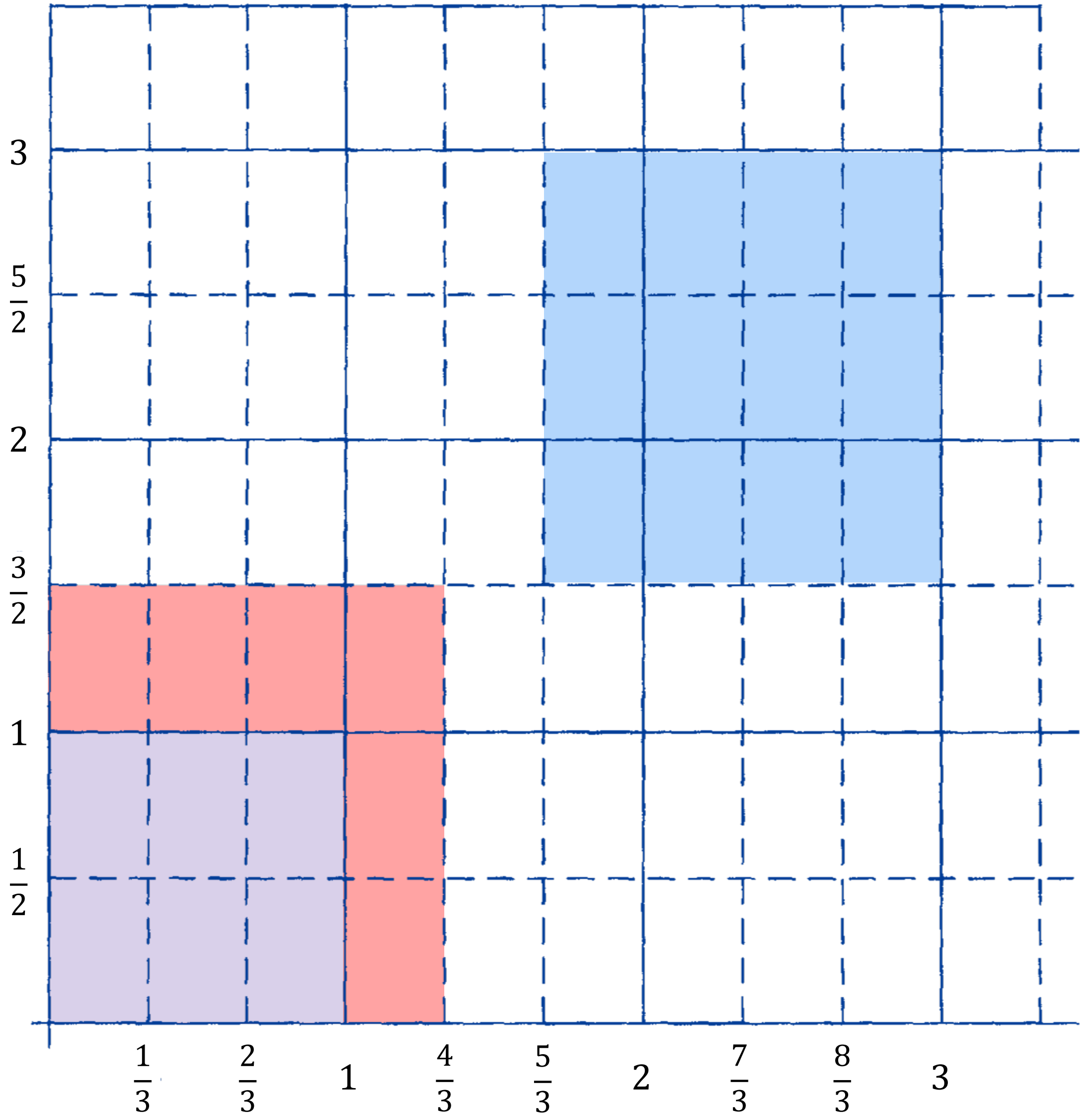
- Jede „Fliese“ hat die Seitenlängen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ und ihre Fläche ist $\frac{1}{6}$ der Gesamtfläche.

$\frac{1}{6}$ ist außerdem

- die Hälfte von einem Drittelstreifen,
- ein Drittel von einer Quadrathälfte,
- das Ergebnis der formalen Rechnung $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren, 78*, 20-22, 47-48

„Bruchgitter“



- Bestimme die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen 4/3 und 3/2.
- Erkläre dein Ergebnis an der Zeichnung und durch deine Rechnung.
- Finde andere Rechtecke mit demselben Flächeninhalt.
- Usw.

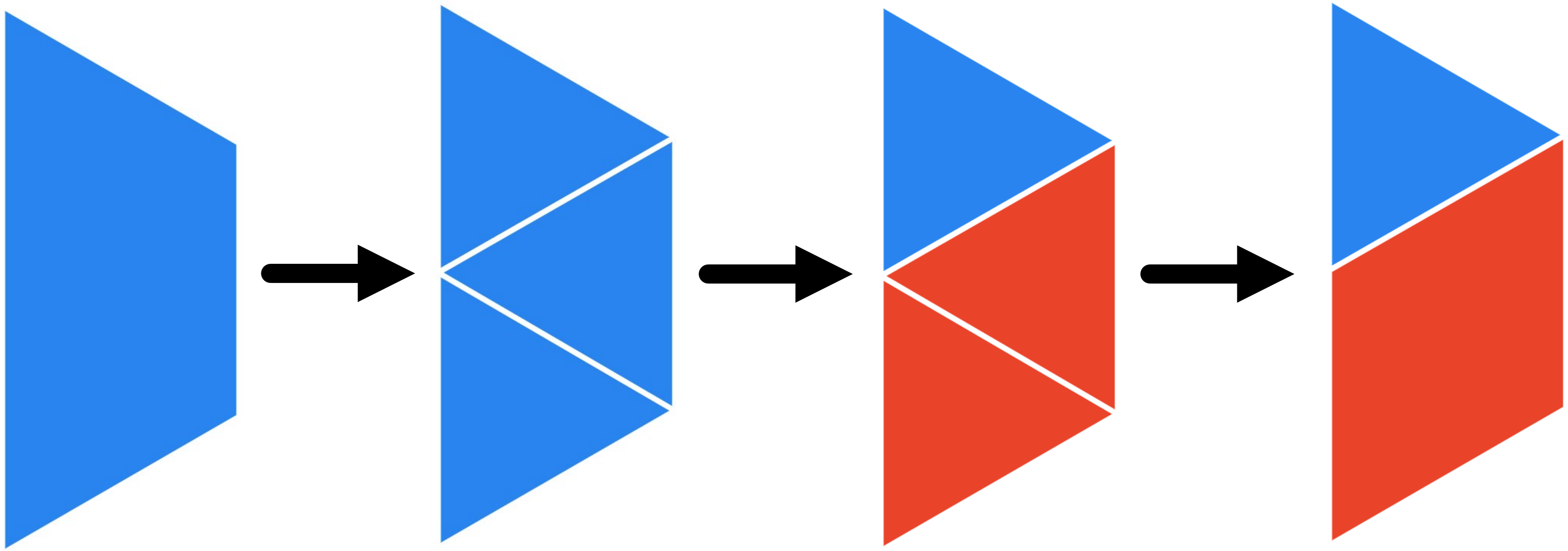
Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren, 78*, 20-22, 47-48

Multiplizieren von Brüchen: Von-Deutung

In einem Produkt wie $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$ wird der erste Faktor als Operator (zwei Drittel von …) und der zweite Faktor als WABI interpretiert.

- Zeichnen Sie den zweiten Faktor als WABI und nehmen Sie die Operation durch Einzeichnen von Trennlinien vor.
- Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

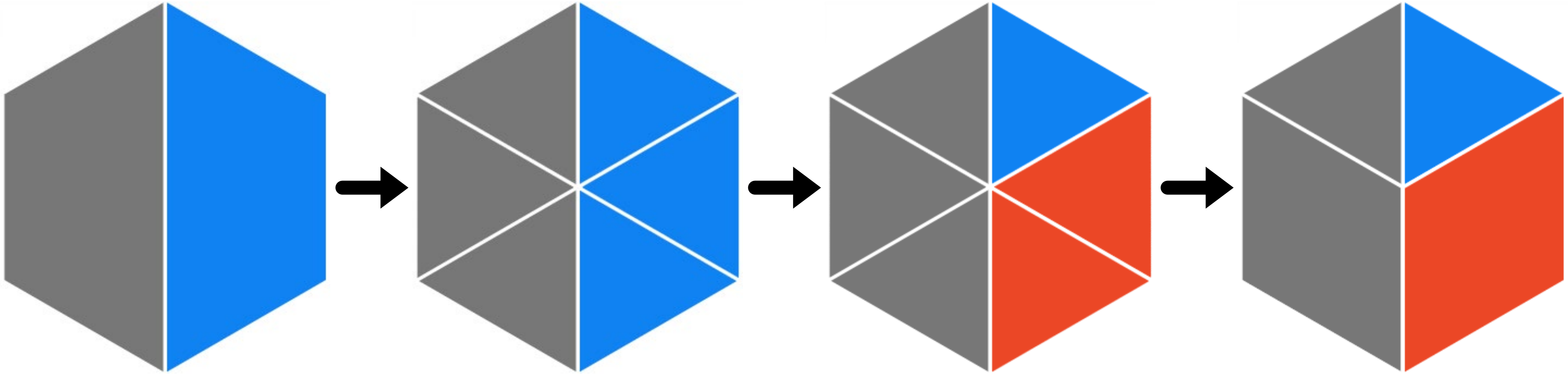


Multiplizieren von Brüchen: Von-Deutung

In einem Produkt wie $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ wird der erste Faktor als Operator (zwei Drittel von …) und der zweite Faktor als WABI interpretiert.

- Zeichnen Sie den zweiten Faktor als WABI und nehmen Sie die Operation durch Einzeichnen von Trennlinien vor.
- Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



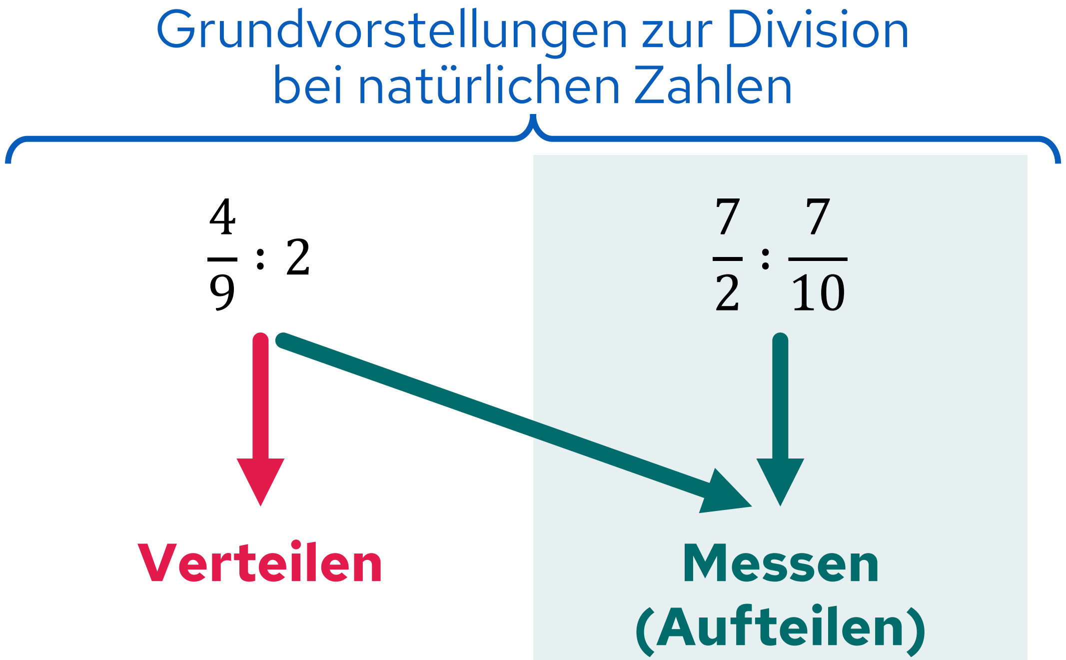
https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

3.4

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Grundvorstellungen zur Division

Grundvorstellung zur Division von Bruchzahlen → Messen



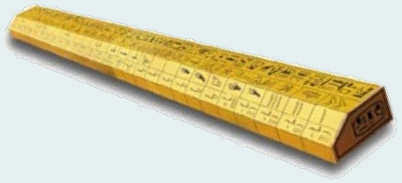
Grundvorstellungen zur Division bei natürlichen Zahlen

$\frac{4}{9} : 2$

$\frac{7}{2} : \frac{7}{10}$

Verteilen

Messen (Aufteilen)



Einzige Grundvorstellung zur Division bei Bruchzahlen

Maß kleiner als die zu messende Größe.

- **Beispiel:** $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$
- **Zugehörige Frage:**
  Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$?

Maß größer als die zu messende Größe.

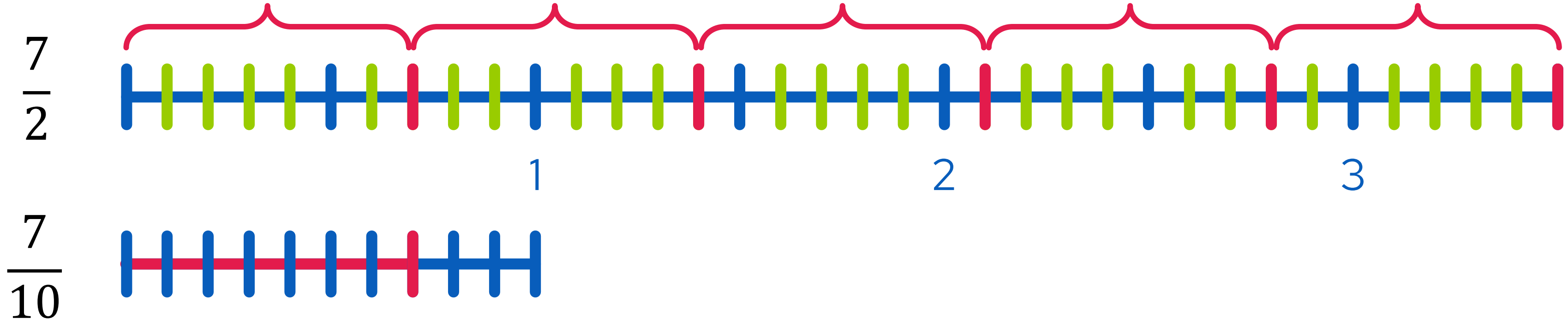
- **Beispiel:** $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$
- **Zugehörige Frage:**
  Welcher Bruchteil von $\frac{3}{4}$ passt in $\frac{1}{4}$?

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 123*, 4-8

Division von Bruchzahlen: Messen

$$\frac{7}{2} : \frac{7}{10} = ?$$

Maß kleiner als die zu messende Größe. ⇨ „Wie oft passt $\frac{7}{10}$ in $\frac{7}{2}$?“



$$\frac{7}{2} : \frac{7}{10} = 5$$

Beispiel: $\frac{7}{2}$ Liter Wein sollen in $\frac{7}{10}$ -Liter-Flaschen abgefüllt werden.
Wie viele Flaschen können gefüllt werden?

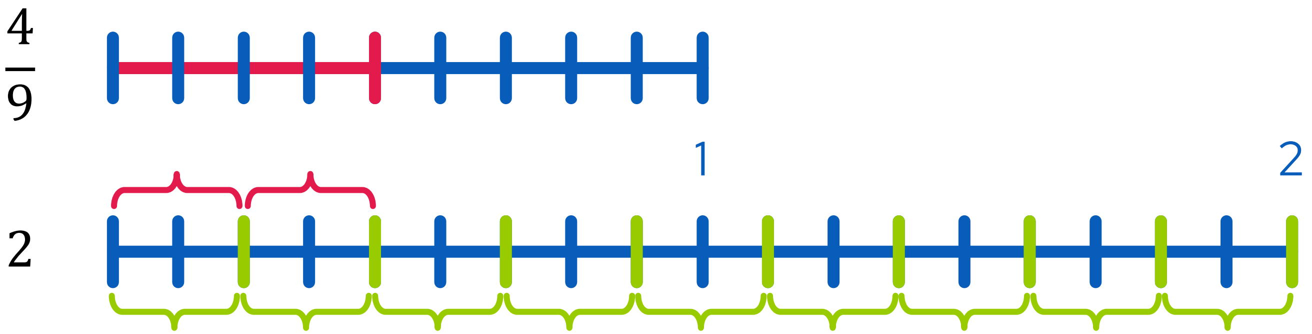
$$\underbrace{\frac{7}{2} : \frac{7}{10}}_{\text{Dividieren als Messen}} = \underbrace{\frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} : \frac{7}{10} = \frac{35}{10} : \frac{7}{10}}_{\text{Verfeinerung der Einteilung}} = \underbrace{35\ \text{Zehntel} : 7\ \text{Zehntel}}_{\text{Bruchzahl als Quasikardinalzahl}} = 5$$

Es können 5 Flaschen gefüllt werden.

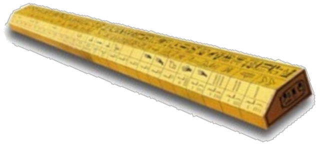
Division von Bruchzahlen: Messen

$\frac{4}{9} : 2 = ?$

Maß größer als die zu messende Größe ⇨ „Welcher Bruchteil von 2 passt in $\frac{4}{9}$?“



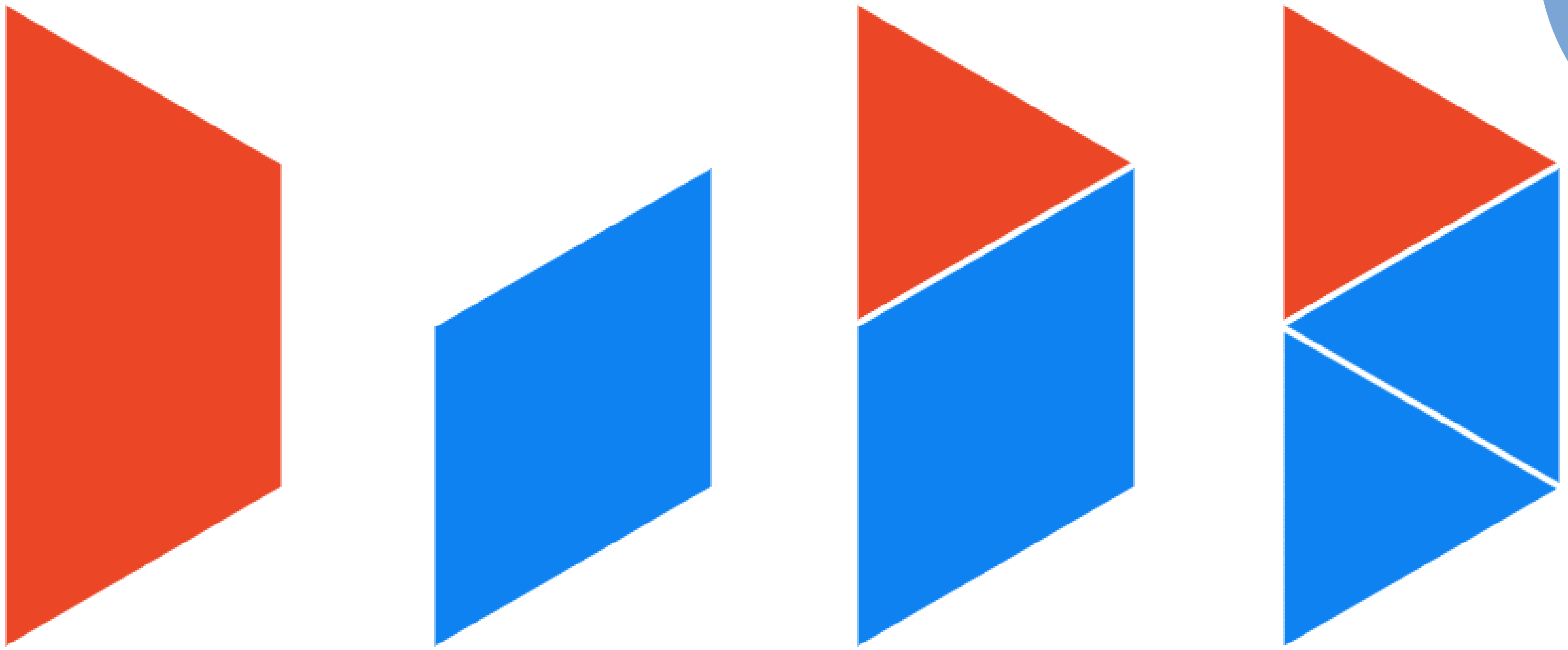
$$\frac{4}{9} : 2 = \frac{2}{9}$$



Dividieren von Brüchen: Messen

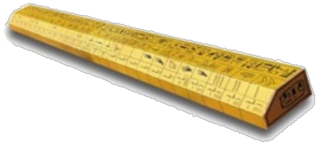
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$

Maß kleiner als die zu messende Größe. → „Wie oft passt $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$?“



$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

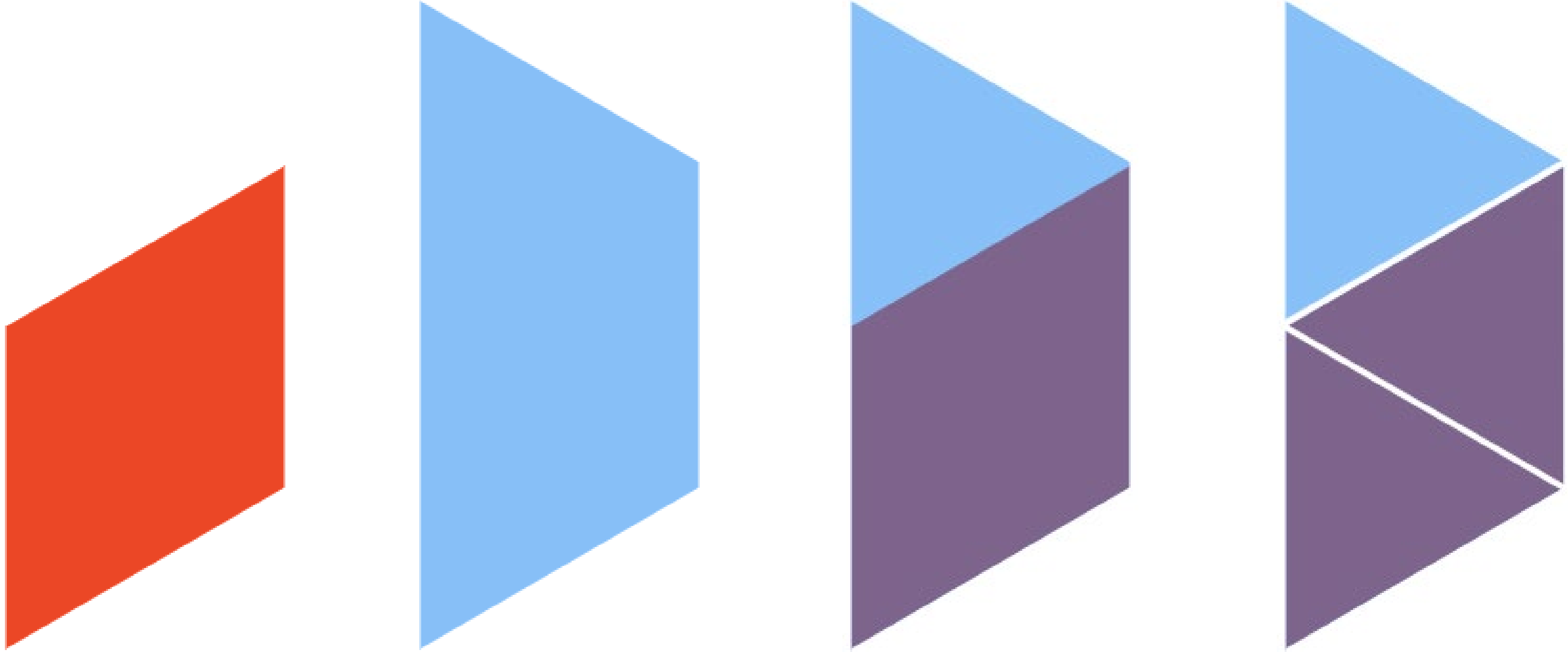


Dividieren von Brüchen: Messen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

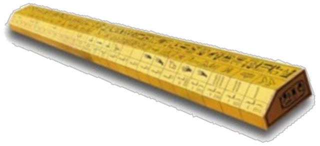
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$

Maß größer als die zu messende Größe. → „Welcher Bruchteil von $\frac{1}{2}$ passt in $\frac{1}{3}$?"



$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = ? = \frac{2}{3}$

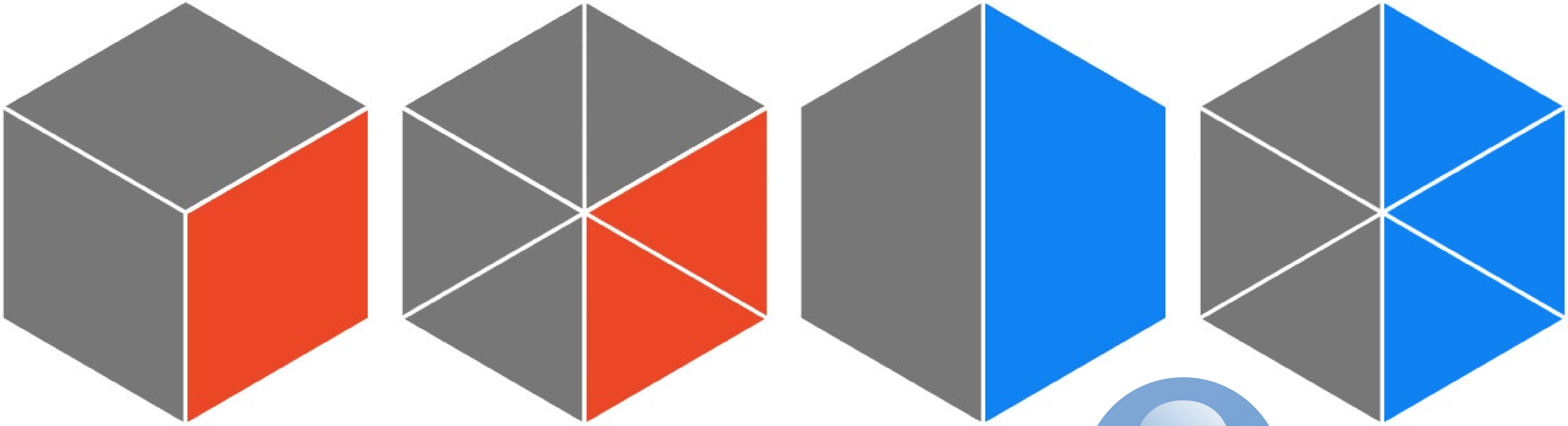
https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ



Dividieren von Brüchen: Messen

$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = ?$

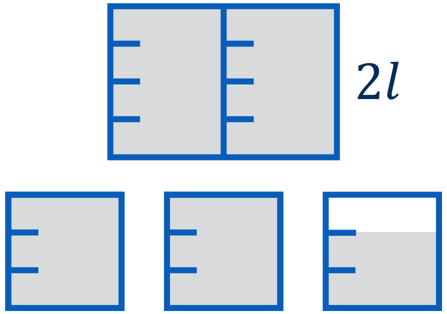
Maß größer als die zu messende Größe. → „Welcher Bruchteil von $\frac{1}{2}$ passt in $\frac{1}{3}$?"



$$\frac{1}{3} \quad : \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{2}{3}$$

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Dimensionen beim Aufgabenlösen

Syntax	**Semantik**	**Pragmatik**
Regeln, Formeln **Formales Verständnis**	**Bedeutung, Sinn** **Inhaltliches Verständnis**	**Anwendung, Gebrauch** **Handlungsverständnis**
$2 : \frac{3}{4} = \frac{2}{1} : \frac{3}{4}$ $= \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3}$ $= \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}$ $= \frac{8}{3}$ $= 2\frac{2}{3}$	2 ist mit $\frac{3}{4}$ zu messen. $2 = \frac{8}{4}$ $\frac{8}{4} : \frac{3}{4} = 8 : 3 = \frac{8}{3}$ $2 : 3 = \frac{2}{3}$ $\big\downarrow {\color{red} : 4} \qquad \big\downarrow {\color{red} \cdot 4}$ $2 : \boxed{\frac{3}{4}} = \boxed{4 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{8}{3}$	2 Liter Milch sind in $\frac{3}{4}\,l$-Gefäße zu füllen.  2 volle Gefäße und ein $\frac{2}{3}$-volles von je $\frac{3}{4}\,l$.

Winter, H. (2004). Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. *Mathematik lehren, 123*, 14–18

3.5

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Erarbeitung von Rechenregeln

Erarbeitung von Rechenregeln

Bemerkungen

- Die Erarbeitung von Rechenregeln wird hier exemplarisch an folgendem Beispiel durchgeführt:
  „Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. “

- Es gibt im Wesentlichen vier Möglichkeiten zur Herleitung dieser Regel, die hier vorgestellt werden:
  - Messen
  - (Umkehr-)Operator
  - Gleichungskette (Permanenzreihe)
  - Analogisieren

Literatur

Weitere Regelableitungen findet man z.B. in folgender Literatur:

- Allgemein:
  Padberg, F. & Wartha, S. (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Springer Spektrum.

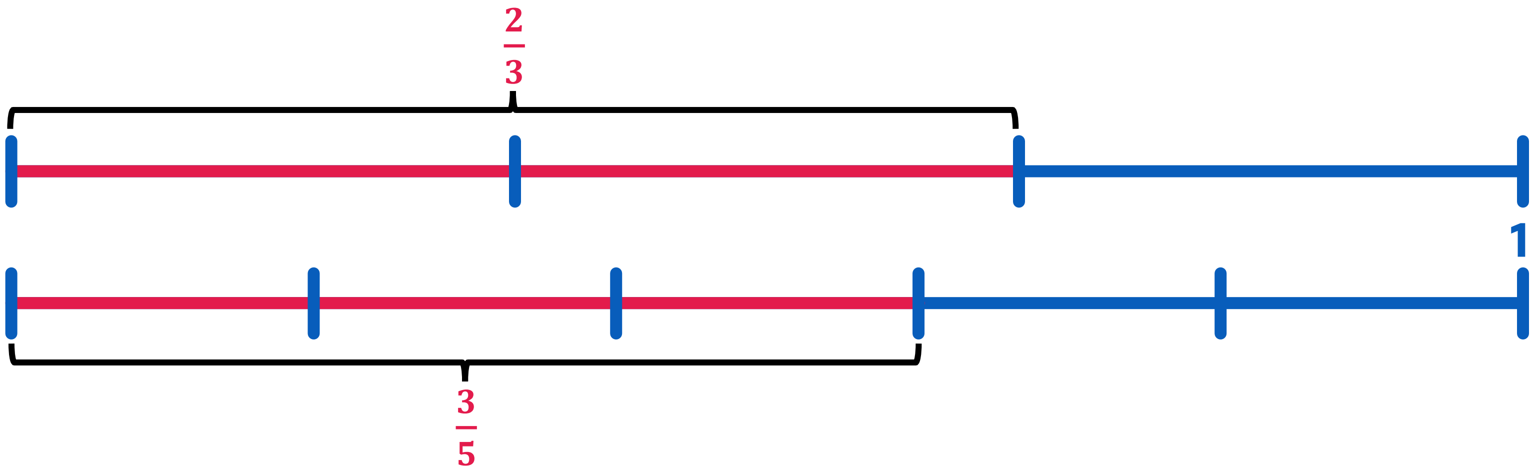
- Bruch mal Bruch:
  Glade, M. (2013) „Rechnen ist viel leichter und schneller als Kästchen zählen" – Die Rechenregel zum Anteil vom Anteil durch Fortschreitende Schematisierung erarbeiten. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *52*, 55. Jahrgang, 20-25

Regelableitung „Bruch durch Bruch"

Messen

Wie oft ist $\frac{3}{5}$ in $\frac{2}{3}$ einhalten?

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$$

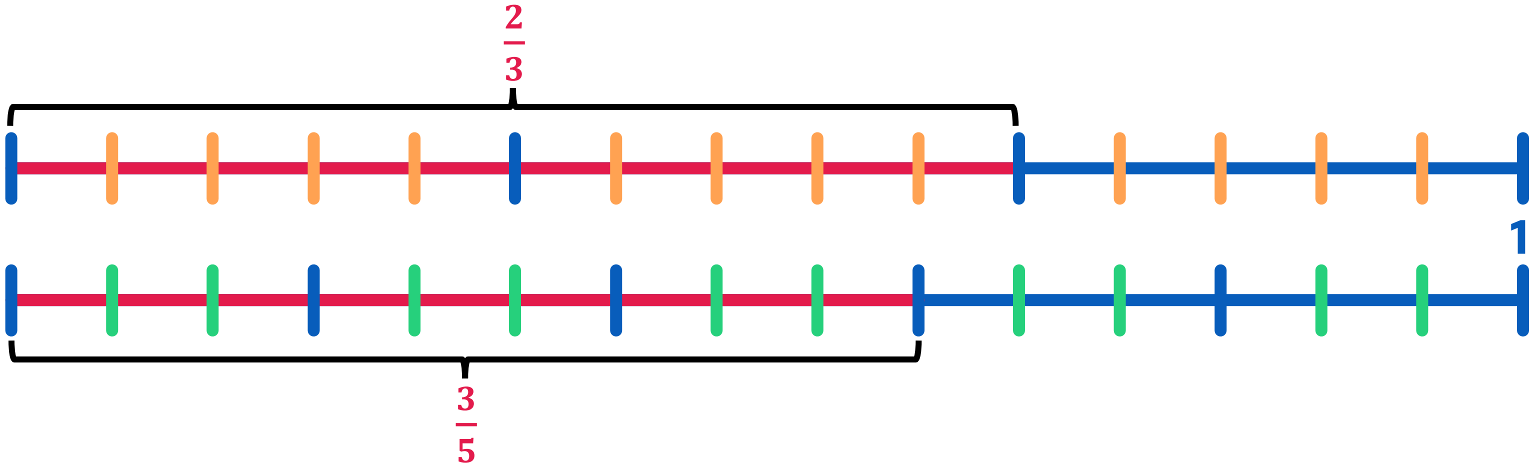


Regelableitung „Bruch durch Bruch“

Messen

Wie oft ist $\frac{3}{5}$ in $\frac{2}{3}$ einhalten?

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$$



Regelableitung „Bruch durch Bruch“

Messen

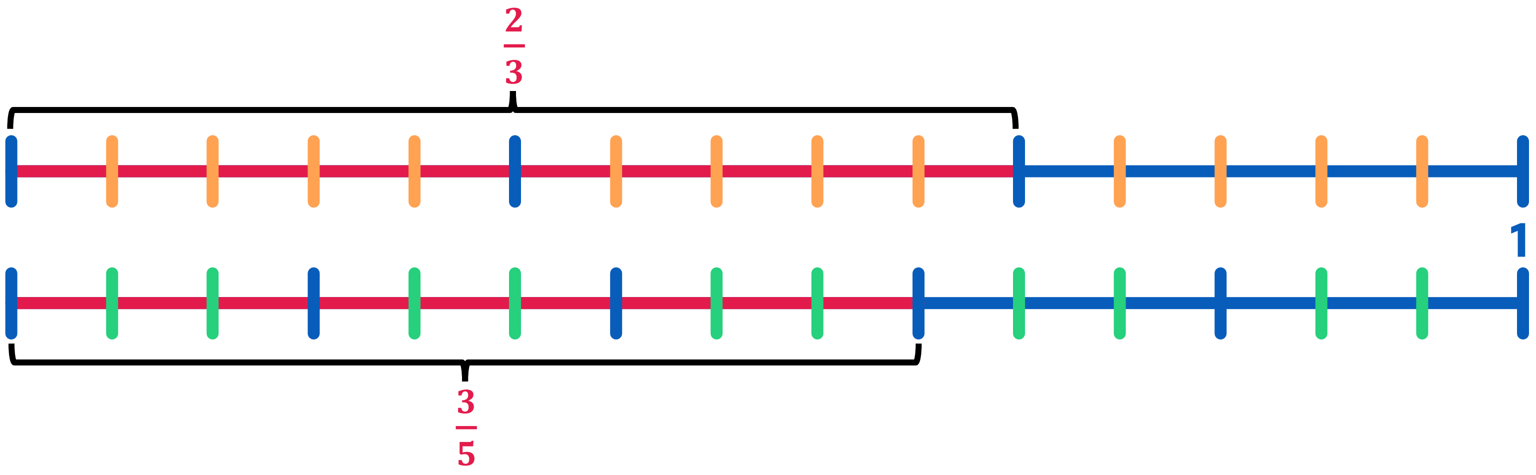
Wie oft ist $\frac{3}{5}$ in $\frac{2}{3}$ einhalten?

Rechenregel: Bruch mal Bruch

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} : \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = (2 \cdot 5) : (3 \cdot 3) = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}$$

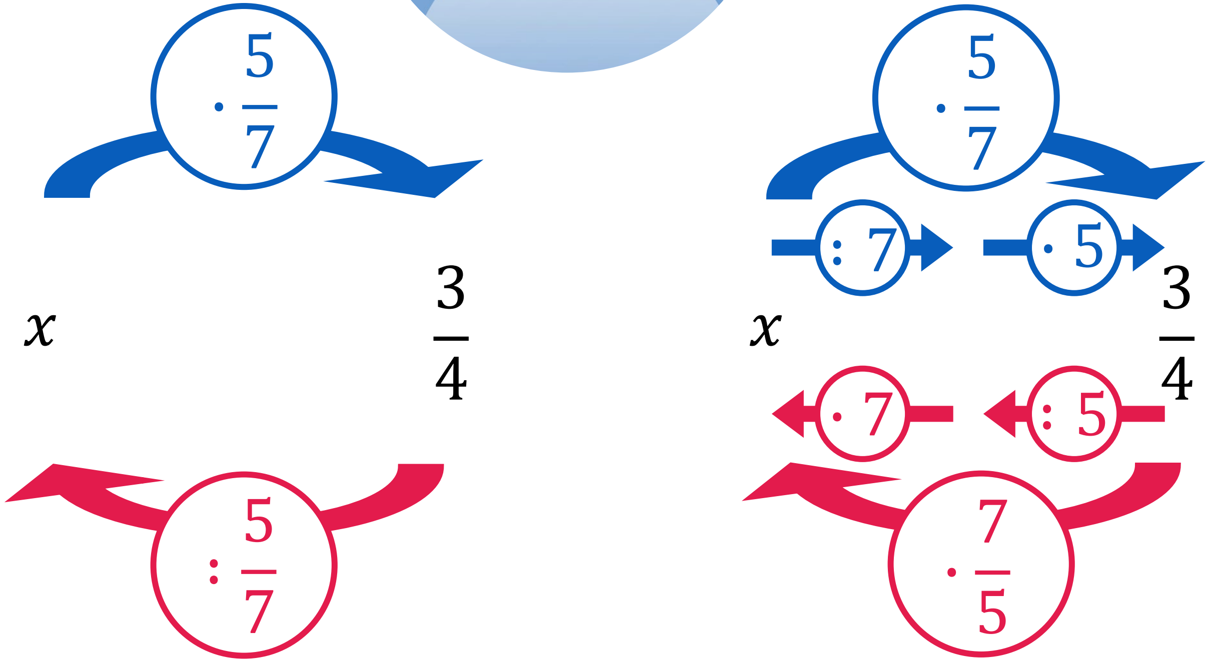
Genutzte (Grund-)Vorstellungen

- Messen & Verfeinern
- Quasikardinalzahl
- Ergebnis einer Division



Regelableitung „Bruch durch Bruch“
(Umkehr-)Operator

- Lea denkt sich eine Zahl.
- Sie multipliziert diese Zahl mit $\frac{5}{7}$.
- Als Ergebnis erhält sie $\frac{3}{4}$.
- Welche Zahl hat Lea sich gedacht?



$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}$$

Regelableitung „Bruch durch Bruch“
Gleichungskette (Permanenzreihe)

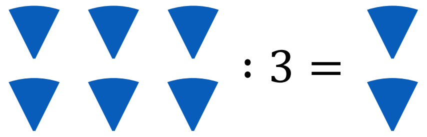
Bemerkungen

- Es geht um die Frage, was das Ergebnis folgender Rechnung ist:
  $$\frac{3}{2} : \frac{4}{5} = ?$$
- Da dies zunächst nicht klar ist, gehen wir von einer Rechnung aus (hier $\frac{3}{2} : 100$), die bereits durchführbar ist.
- Voraussetzung: Die Lernenden haben bereits eine inhaltliche Vorstellung davon, was es bedeutet einen Bruch durch eine natürliche Zahl zu teilen (vgl. die Kästen ganz rechts).

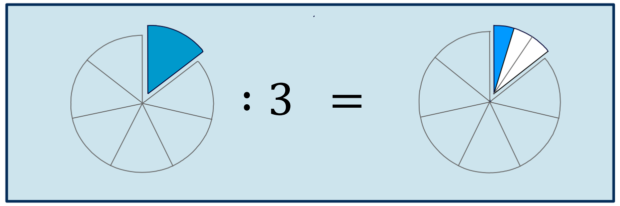
$$\begin{tikzcd}
\frac{3}{2} : 100 \arrow[d, ": 5"'] & = \frac{3}{2 \cdot 100} \arrow[d, bend left, "\cdot 5"] \\
\frac{3}{2} : 20 \arrow[d, ": 5"'] & = \frac{3}{2 \cdot 20} \arrow[d, bend left, "\cdot 5"] \\
\frac{3}{2} : 4 \arrow[d, ": 5"'] & = \frac{3}{2 \cdot 4} \arrow[d, bend left, "\cdot 5"] \\
\frac{3}{2} : \frac{4}{5} & = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \\
 & = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}
\end{tikzcd}$$

Permanenzprinzip

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$$



6 Siebtel : 3 = 2 Siebtel



Regelableitung „Bruch durch Bruch“
Analogisieren

$$\frac{4}{15}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{15\cdot 3}$$

Analogisieren

$$\frac{4}{15}:\frac{2}{3}=\frac{4:2}{15:3}=\frac{2}{5}$$

- Es muss geprüft werden, ob dieser Analogieschluss sinnvoll ist.

$$\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 3}:\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 2:2}{7\cdot 3:3}=\frac{5}{7}$$

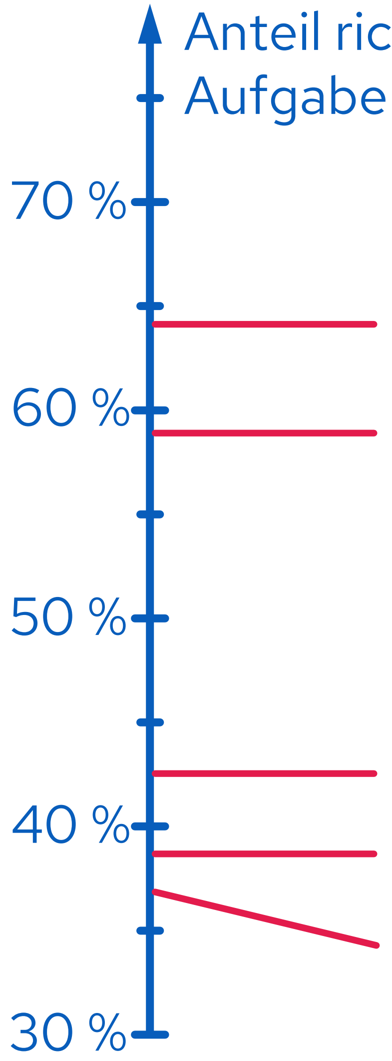
Division als Umkehrung der Multiplikation.

- Wie kann man vorgehen, wenn die Division nicht aufgeht?

$$\frac{5}{7}:\frac{2}{3}=\frac{5:2}{7:3}=\frac{5\cdot(3\cdot 2):2}{7\cdot(3\cdot 2):3}=\frac{5\cdot 3\cdot 2:2}{7\cdot 2\cdot 3:3}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 2}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{2}$$

Erweitern

Schwierigkeiten bei Division von Brüchen



- Ordnen Sie die Aufgabentypen den richtigen Lösungswahrscheinlichkeiten zu.

natürliche Zahl durch natürliche Zahl

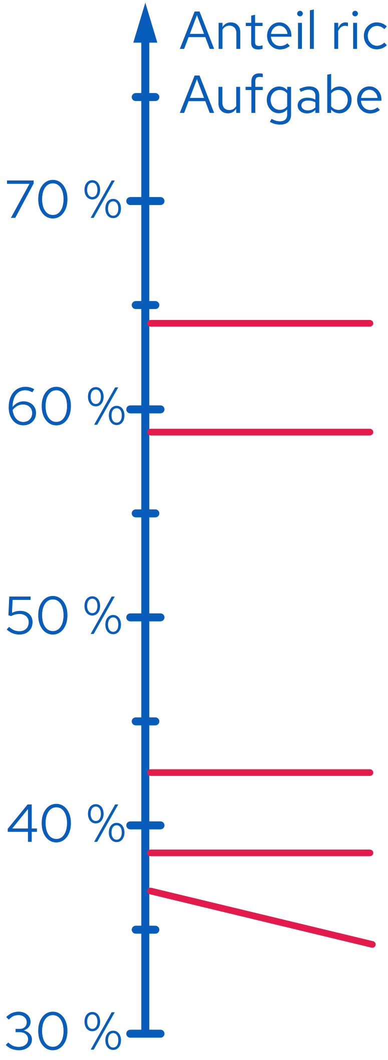
Bruch durch natürliche Zahl

natürliche Zahl durch Bruch

Bruch durch Bruch (gleichnamig, spezieller Zähler)

Bruch durch Bruch (ungleichnamig)

Schwierigkeiten bei Division von Brüchen



- Ordnen Sie die Aufgabentypen den richtigen Lösungswahrscheinlichkeiten zu.

Problembereiche bei Brüchen

Probleme

- Anschauliche Bruchvorstellungen
- Zusammenhang zwischen natürlichen Zahlen und Brüchen

Verbreitete Fehlerrahmen

- Additionsrahmen

$$\frac{a}{b}\circ\frac{c}{b}=\frac{a\circ c}{b}$$

- Multiplikationsrahmen

$$\frac{a}{b}\circ\frac{c}{d}=\frac{a\circ c}{b\circ d}$$

$$n\circ\frac{a}{b}=\frac{n\circ a}{b}$$

Zusammenfassung

Dominanz der syntaktischen Ebene gegenüber der semantischen (inhaltlichen) Ebene

Gegenmaßnahmen

- Regelableitung sorgfältig und spät
- Rechenregeln und inhaltliche Bruchvorstellungen in Beziehung setzen
- Möglichst wenige und einprägsame Rechenregeln formulieren

3.6

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Gemischte Zahlen

Gemischte Zahlen: Vorteile

- Kurzschreibweise: $3 + \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5}$
- Wert einer Bruchzahl > 1 kann besser erfasst werden

  $$\frac{35}{3} < \frac{61}{5}, \text{ denn } 11\frac{2}{3} < 12\frac{1}{5}$$
- Leichtere Addition und Subtraktion von Bruchzahlen > 1
  - **Addition**

    $$\frac{49}{3} + \frac{37}{5} = \frac{245}{15} + \frac{111}{15} = \frac{356}{15}$$

    $$16\frac{1}{3} + 7\frac{2}{5} = 23 + \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = 23\frac{11}{15}$$
  - **Subtraktion**

    $$\frac{35}{3} - \frac{21}{5} = 11\frac{2}{3} - 4\frac{1}{5} = 7\frac{7}{15}$$

Dezimalbrüche

Gemischte Zahlen können zur Einführung und Begründung der Rechenoperationen mit Dezimalbrüchen auf der Grundlage der gemeinen Brüche eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 3{,}45 + 4{,}3 &= 3\frac{45}{100} + 4\frac{3}{10} \\ &= 3\frac{45}{100} + 4\frac{30}{100} \\ &= 7\frac{75}{100} \\ &= 7{,}75 \end{aligned}$$

Gemischte Zahlen: Nachteile

- Bezeichnung „gemischte Zahl" eigentlich falsch → besser: „gemischte Zahlzeichen"
- Möglicher fehlerhafter Transfer in die Algebra:

$$a\frac{b}{c} = a \cdot \frac{b}{c} \neq a + \frac{b}{c}$$

- Multiplikation und Division von gemischten Zahlen ist sehr fehleranfällig, wenn nicht vorher in gemeine Brüche umgewandelt wird.

Zusammenfassung

- Vorteile überwiegen deutlich
- gemischten Zahlen sollten im Unterricht verwendet werden
- Ergebnisse in gemischte Zahlen umwandeln
  → Abschätzen der Größenordnung der Zahl

3.7

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Dezimalbrüche

Dezimalbrüche

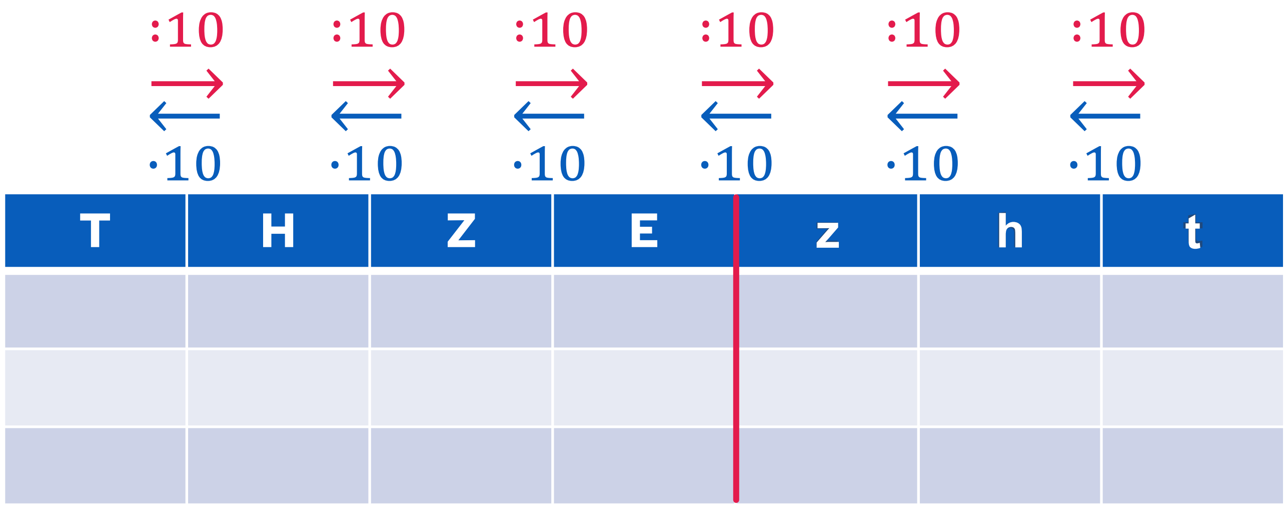
Bemerkungen

- Das Arbeiten mit Dezimalbrüchen sollte auf Rechenerfahrungen mit Größen, gemeinen Brüchen und gemischte Zahlen basieren.
- Ein gesichertes Verständnis des Stellenwertsystems im Rahmen der natürlichen Zahlen ist Voraussetzung, um es für Dezimalbrüche erweitern zu können.

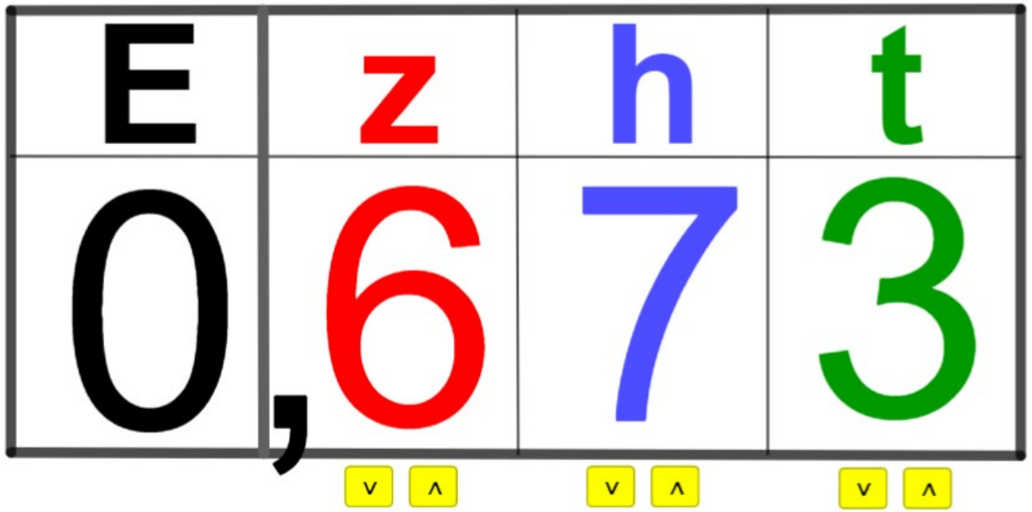
- $7{,}257 \text{ kg} = 7 \text{ kg } 257 \text{ g} = 7\frac{257}{1000} \text{ kg}$
- $0{,}234 = \frac{234}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}$
- $0{,}234 = 234 \text{ Tausendstel}$

  $= 200 \text{ Tausendstel} + 30 \text{ Tausendstel} + 4 \text{ Tausendstel}$

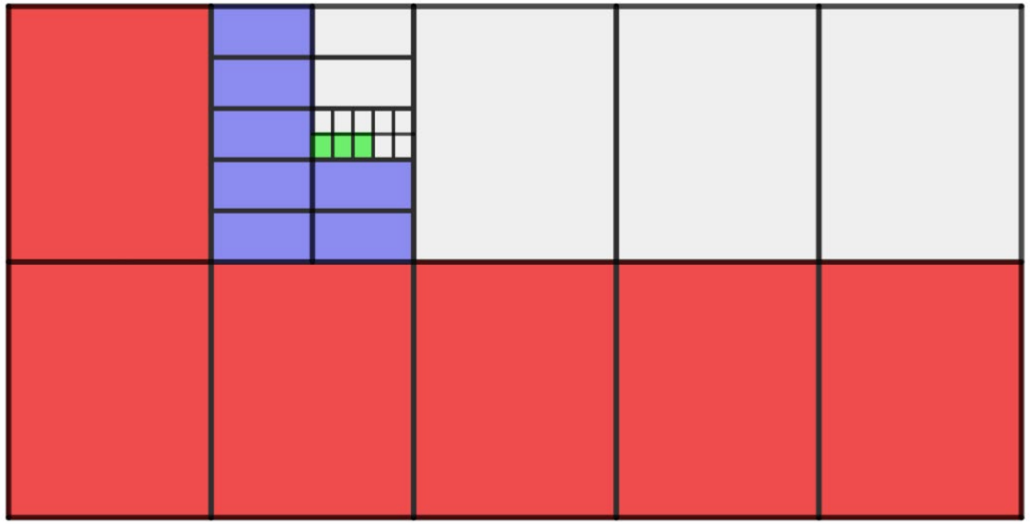
  $= 2 \text{ Zehntel} + 3 \text{ Hundertstel} + 4 \text{ Tausendstel}$



Dezimalbrüche als Bruchteile darstellen

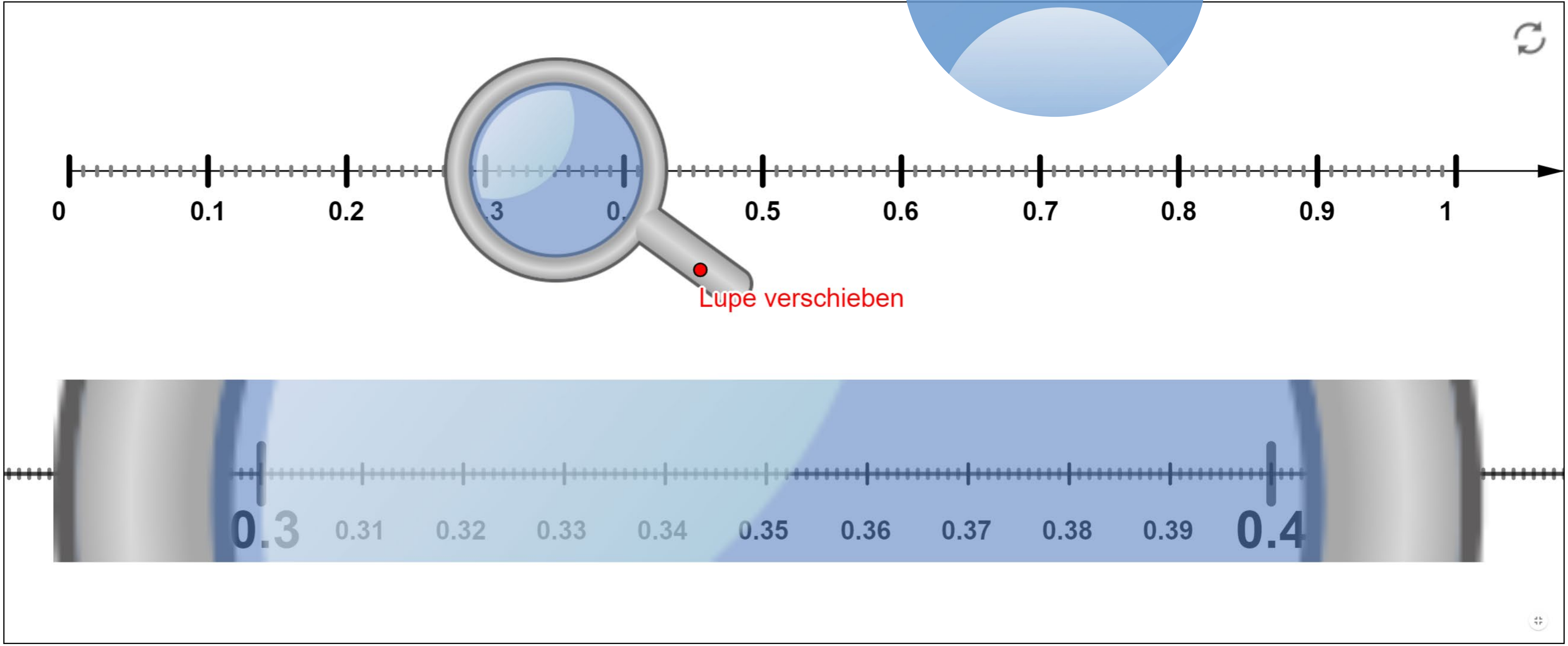


E	z	h	t
0,	6	7	3



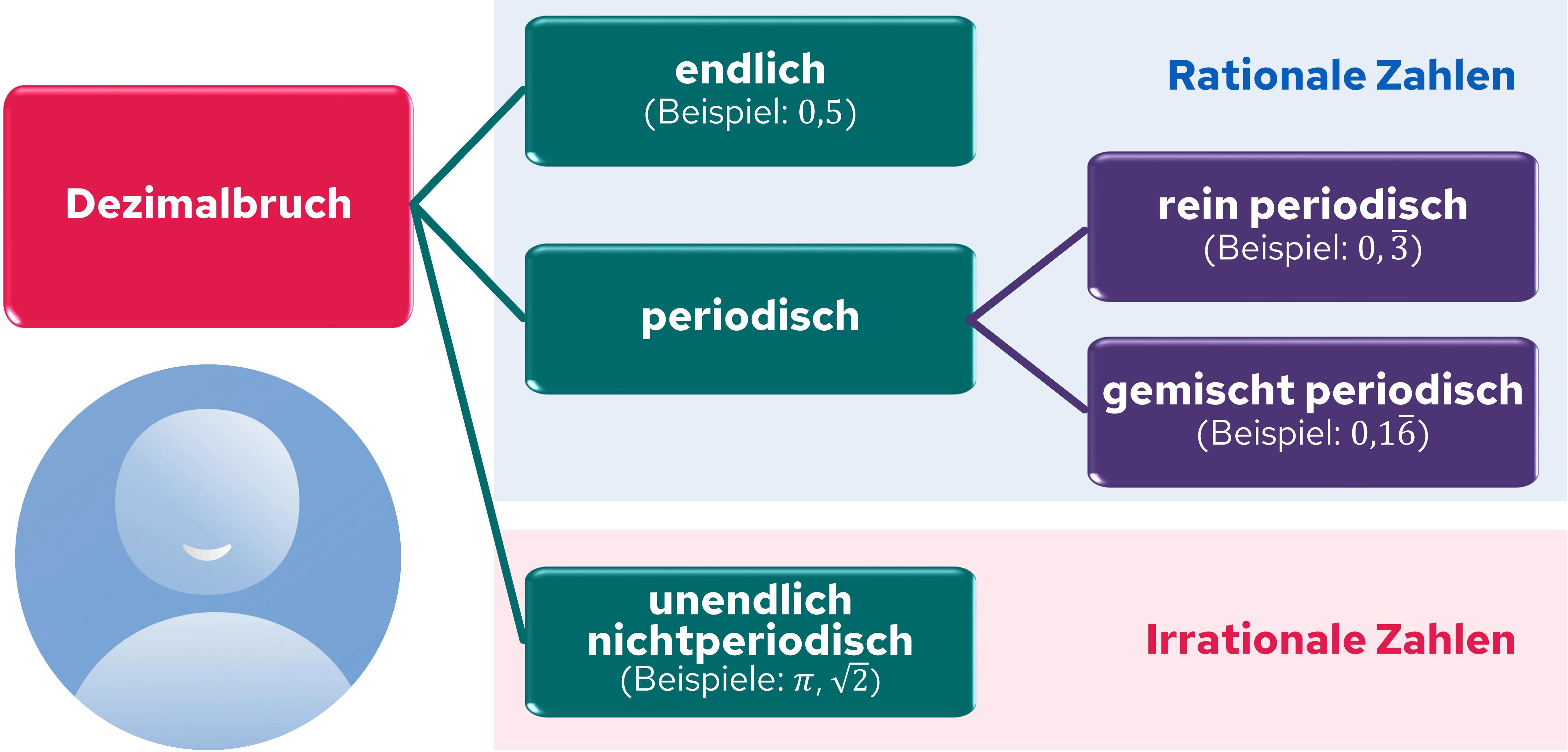
https://www.geogebra.org/m/nj3wnj75

Dezimalbrüche am Zahlenstrahl



https://www.geogebra.org/m/a5jwan4e

Dezimalbrüche



Dezimalbruch

endlich
(Beispiel: 0,5)

periodisch

rein periodisch
(Beispiel: $0,\overline{3}$)

gemischt periodisch
(Beispiel: $0{,}1\overline{6}$)

unendlich nichtperiodisch
(Beispiele: π, $\sqrt{2}$)

Rationale Zahlen

Irrationale Zahlen

Periodische Dezimalbrüche ↔ echte Brüche

Ziel
Einen periodischen Dezimalbruch als echten Bruch schreiben.

Rein periodischer Dezimalbruch

$$
\begin{aligned}
x &= 0,\overline{123} && |\cdot 1000\\
1000\cdot x &= 123,\overline{123} && |-x\\
999\cdot x &= 123 && |:999\\
x &= \frac{123}{999}
\end{aligned}
$$

Gemischt periodischer Dezimalbruch

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{31} &= \frac{1}{10}\cdot(10\cdot 0{,}2\overline{31})\\
&= \frac{1}{10}\cdot 2,\overline{31}\\
&= \frac{1}{10}\cdot 2\,\frac{31}{99}\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(2+\frac{31}{99}\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{198}{99}+\frac{31}{99}\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\frac{229}{99}\\
&= \frac{229}{990}
\end{aligned}
$$

Anschauliche Bruchvorstellungen

Anteil richtiger Lösungen: 4 %

0,740 · 1,49 ist ungefähr …
Kreuze die richtige Antwort an:

- ○ 7
- ○ 10
- ○ 1
- ○ 800
- ○ 2

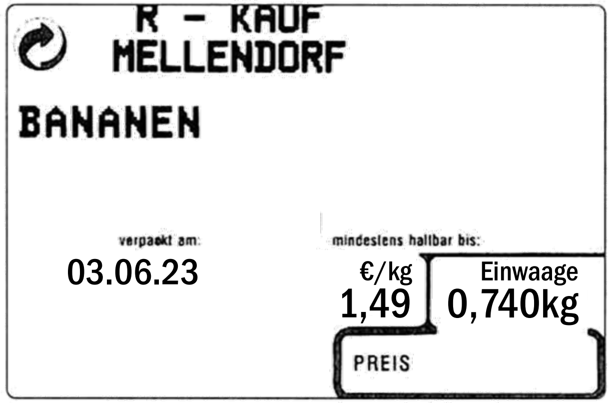
Rechne dann genauer!

Anteil richtiger Lösungen: 50 %

0,740 · 1,49 ist ungefähr …
Kreuze die richtige Antwort an:

- ○ 7
- ○ 10
- ○ 1
- ○ 800
- ○ 2

Rechne dann genauer!



R – KAUF
MELLENDORF

BANANEN

verpackt am:
03.06.23

mindestens haltbar bis:

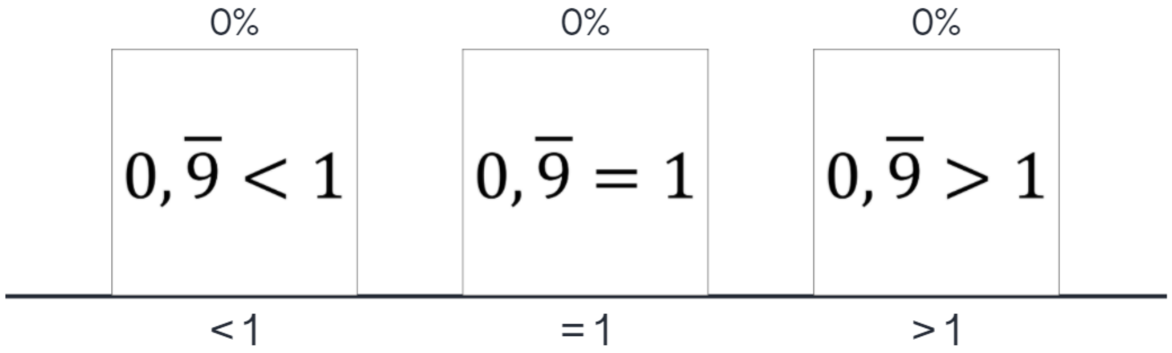
€/kg
1,49

Einwaage
0,740kg

PREIS

Welche der Aussagen ist richtig?

$$0,\overline{9}$$



$0,\overline{9} \underset{<}{\overset{>}{=}} 1$?

Wie groß ist der Abstand von $0,\overline{9}$ zu 1 ?

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{9} = 1 \;\; : 9 = 0,\overline{1} \\
\phantom{\frac{1}{9} = }\,10 \\
\phantom{\frac{1}{9}} - \underline{\;\;9} \\
\phantom{\frac{1}{9} = 1}\;1
\end{array}$$

$$\frac{1}{9} = 0,\overline{1} \qquad |\cdot 9$$

$$\frac{9}{9} = 0,\overline{1} \cdot 9$$

$$1 = 0,\overline{9}$$

$0,\overline{9} \;\substack{>\\=\\<}\; 1$?

$$\frac{1}{3} = 1 \;:\; 3 = 0,\overline{3}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\underline{\;\;9} \\ 1 \end{array}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= 0,\overline{3} + 0,\overline{3} + 0,\overline{3}$$

$$= 0,\overline{9}$$

$$x = 0,\overline{9} \qquad | \cdot 10$$

$$10 \cdot x = 9,\overline{9} \qquad | -x$$

$$9 \cdot x = 9 \qquad | : 9$$

$$x = \frac{9}{9}$$

$$x = 1$$

$0,\overline{9} \;\overset{\geq}{\underset{\leq}{=}}\; 1$?

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k = \frac{a}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1$$

$$\text{Setze} \quad q = \frac{1}{10} \quad \text{und} \quad a = 9$$

$$9,\overline{9} = \sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$$

$$9,\overline{9} = 10 \qquad |-9$$

$$0,\overline{9} = 1$$

4

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Grundvorstellungen zu Variablen, Termen & Gleichungen

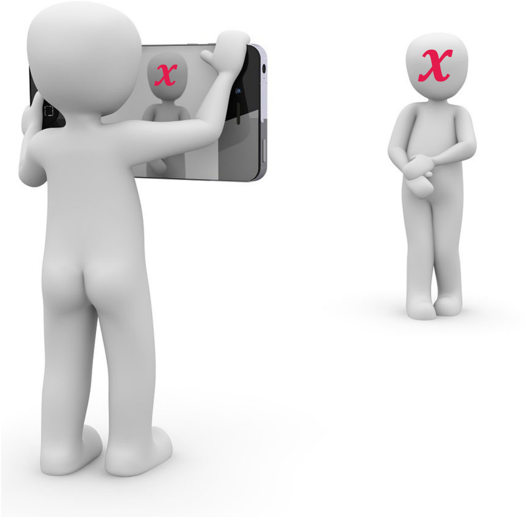
4.1

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Grundvorstellungen zu Variablen

Grundvorstellungen zu Variablen

Variable treten in unterschiedlichen Kontexten auf und sind mit verschiedenen **Grundvorstellungen** verbunden.



Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl
Die Variable ist eine allgemeine Zahl, deren Wert nicht gegeben bzw. zunächst nicht von Interesse ist.

Beispiele
$x \cdot 0 = 0$
$a \cdot b = b \cdot a$
$2x + 1$

Unbekannte
Die Variable ist Platzhalter für eine Zahl, deren Wert nicht bekannt ist, aber prinzipiell bestimmt werden kann, etwa durch regelgeleitete Umformungen.

Beispiel
$2x + 1 = 7$ kann zu $x = 3$ bestimmt werden.

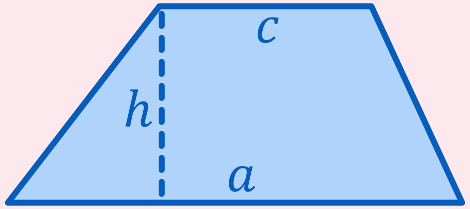
Veränderliche
Die Variable ist eine Zahl oder Größe, die verschiedene Werte aus einem festgelegten Bereich annehmen kann, also veränderlich ist.

Beispiel
$x \mapsto 2x + 1$

Weigand, H.-G. et al. (2022). *Didaktik der Algebra*. Berlin: Springer Spektrum, 35-37.

Grundvorstellungen zu Variablen

Beispiel:
Vorstellungen zur Variable $\boldsymbol{h}$ in der Flächeninhaltsformel für Trapeze $A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot \boldsymbol{h}$.



$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot \boldsymbol{h}$$

Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl
Wenn ich den Flächeninhalt des Trapezes ausrechnen möchte, muss ich für $\boldsymbol{h}$ die Länge der Höhe des Trapezes einsetzen.

Unbekannte
Wie lang ist die Höhe $\boldsymbol{h}$ im Trapez mit dem Flächeninhalt $A_{\text{Trapez}} = 28\ \text{cm}^2$ und den Seitenlängen $a = 8\ \text{cm}$ sowie $c = 6\ \text{cm}$?

Veränderliche
Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Trapezes, wenn ich die Höhe $\boldsymbol{h}$ verdopple?

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *Mathematik lehren, 169*, 2-7.

Aspekte von Variablen

Malle (1993) benennt Aspekte von Variablen,
die sich aus der Art ihrer Verwendung ergeben:

Aspekt	Verwendung der Variablen
Gegenstandsaspekt Man beschreibt etwas damit.	Ist die Variable ein *Gegenstand*, mit dem ich einfach umgehe – so etwas wie eine Black Box? 
Einsetzungsaspekt Man kann Werte dafür einsetzen.	Ist die Variable ein *Platzhalter* oder eine *Leerstelle*, wo ich etwas einsetze? 
Kalkül-Aspekt Man kann damit rechnen.	Ist die Variable eine *Größe*, mit der ich rechne wie mit Zahlen? 

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 45-47

Rollen von Variablen und mit ihnen jeweils durchführbare Handlungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Aspekte: Mögliche Handlungen mit Variablen in den verschiedenen Rollen

Grundvorstellungen: Rollen, die Variablen spielen können.

Grundvorstellung / **Aspekt**	**Einsetzungsaspekt** Man kann Werte dafür einsetzen.	**Kalkülaspekt** Man kann damit rechnen.	**Gegenstandsaspekt** Man beschreibt etwas damit.
Variable als allgemeine Zahl bzw. Unbestimmte Beispiel: $a + b = b + a$	Es können beliebige Zahlen eingesetzt werden. Setze Zahlen ein, um das Gesetz zu überprüfen.	Ausdruck mit Variablen umstellen können. Nutze das Gesetz bei einer Termumformung.	Mathem. Zusammenhänge (Formeln, Rechengesetze…) Das Gesetz beschreibt die Kommutativität der Addition.
Variable als Unbekannte Beispiel: $2x - 1 = x + 3$	Suche nach Einsetzungen, die die Gleichung erfüllen. Löse durch systematisches Probieren.	Äquivalenzumformung von Gleichungen Löse durch Äquivalenzumformungen.	Situationen in denen ein unbekannter Wert gesucht ist. Gesucht ist die Zahl, deren Doppeltes um eins verringert genauso groß ist, wie die Zahl um drei erhöht.
Variable als Veränderliche Beispiel: $f(x) = 2x + 3$	Die Werte der Definitionsmenge können eingesetzt werden. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$	Zum x-Wert den y-Wert ermitteln & umgekehrt. Zu gegebenem Funktionswert $f(x)$ einen x-Wert bestimmen (z. B. Nullstellen).	Unabh. & abhängige Größen, die in Beziehung zueinander stehen. Beziehung zwischen einer unabhängigen Größe x und einer davon abhängigen Größe $f(x)$ wird beschrieben.

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2017). Strukturen als Basis der Algebra. *Mathematik lehren, 202*, 2–8.
Weigand, H.-G. et al. (2022). *Didaktik der Algebra*. Berlin: Springer Spektrum, 42.

4.2

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Grundvorstellungen zu Termen

juergen-roth.de

RPTU

Was ist ein Term?

Beispiele

$T_1(a) = a$	Variable
$T_2 = 5$	Zahl
$T_3(a, b) = a + b$	Summe
$T_4(x) = x - 5$	Differenz
$T_5(c) = 10 \cdot c$	Produkt
$T_6(y) = \frac{y}{3}$	Quotient
$T_3\big(T_4(x), T_5(c)\big) = \underbrace{(x-5)}_{T_4(x)} + \underbrace{10 \cdot c}_{T_5(c)}$	Summe

Terme

sind formal Zeichenreihen, die selbst Zahlen darstellen oder durch Einsetzen von Zahlen in Zahlen übergehen.

- Jede Zahl ist ein Term.
- Jede Variable ist ein Term.
- Sind T_1 und T_2 Terme, dann sind auch $(T_1 + T_2), (T_1 - T_2), (T_1 \cdot T_2), (T_1 : T_2), \ldots$ Terme.
- Sind $T_1(a, b)$, T_2 und T_3 Terme, dann ist auch $T_1(T_2, T_3)$ ein Term.

Grundlegende Fähigkeiten für das Verständnis des Termbegriffs

Termstruktur erkennen

Struktur eines Terms erkennen heißt, einen Term aufstellen, lesen und interpretieren zu können.

Beziehung zwischen Term und Situation herstellen

Beziehungen zwischen Termen sowie inner- und außermathematischen Situationen herstellen heißt, (1) einen Term anhand der zugrundeliegenden Situation und (2) eine Situation anhand des sie beschreibenden Terms erläutern zu können.

Terme umformen

Einen *Term umformen* heißt, seine Darstellung zu verändern, um eines der folgenden Ziele zu erreichen:

(1) Eine einfachere Berechnung ermöglichen (vgl. Grundvorstellung: Term als Rechenschema).

(2) Eine weitere darin enthaltene Struktur identifizieren (vgl. Grundvorstellung: Term als Bauplan).

Vgl. Weigand, H.-G. et al. (2022). *Didaktik der Algebra*. Berlin: Springer Spektrum, 90

Grundvorstellungen (GV) zu Termen

GV: Term als Bauplan

Terme werden bei der Bearbeitung der Frage nach der mathematischen Struktur eines Phänomens oder eines Problems entwickelt. Ein so entstandener Term kann also als mathematischer „*Bauplan*“ für das Phänomen interpretiert werden. Aus diesem Term ist schließlich die Struktur des Phänomens direkt ablesbar.

Termumformungen sind in der Betrachtungsweise dieser GV *zulässige Veränderungen des „Bauplans“*.

Gleichheit von Termen meint in der Sichtweise dieser GV eine *Strukturgleichheit*.

GV: Term als Rechenschema

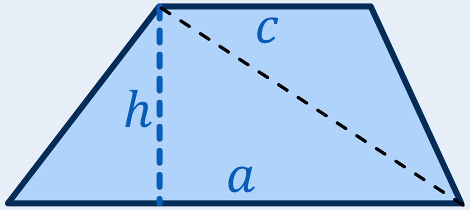
Hat man unter Zuhilfenahme der Grundvorstellung „Bauplan“ einen Term für ein Phänomen bzw. eine Problemstellung aufgestellt, dann möchte man ihn in aller Regel auch dazu nutzen, wiederholte gleichartige Berechnungen für verschiedene Werte schnell und einfach durchzuführen. Der Term wird also als „*Rechenschema*“ gesehen.

Termumformungen dienen in der Betrachtungsweise dieser GV dazu, *Berechnungen* von Zahlenwerten zu *erleichtern*.

Gleichheit von Termen meint in der Sichtweise dieser GV eine *Wertgleichheit*.

Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. *PM, 58(70)*, 2-8.
Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren, 236*, 6-9.

Grundvorstellungen zu Termen

Term als	**Bauplan**	**Rechenschema**
Beispiel	 $A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ch$	$(p \cdot x + G) \cdot 1{,}19$ $2 \cdot (a+b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
Termumformung	Zulässige Veränderung des Bauplans	Vereinfachung von Berechnungen
Gleichheit	Strukturgleichheit	Wertgleichheit

Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. *PM, 58(70)*, 2-8.

Grundvorstellung: Term als Rechenschema

Monatliche Stromkosten:

- ☐ monatl. Verbrauch: x kWh
- ☐ Verbrauchspreis: $0{,}15$ €/kWh
- ☐ Grundpreis: $7\,\frac{€}{\mathrm{kWh}}$
- ☐ Mehrwertsteuer: $19\ \%$

Rechenschema: $(0{,}15 \cdot x + 7) \cdot 1{,}19$

Mit Variablen:

- ☐ monatl. Verbrauch: x
- ☐ Verbrauchspreis: p
- ☐ Grundpreis: G

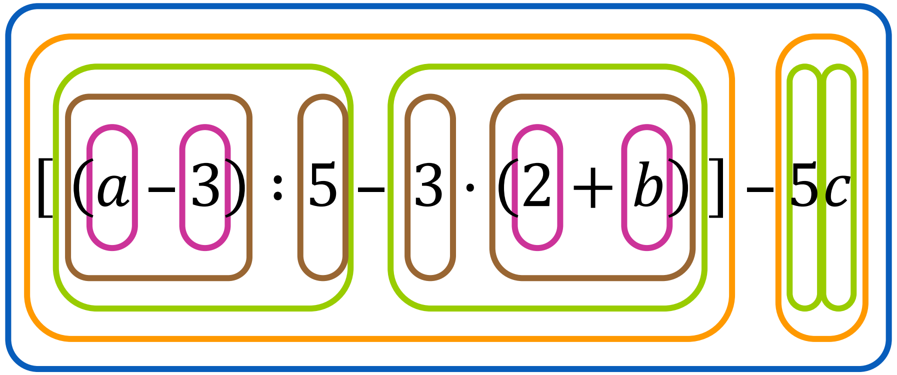
Allgem. Rechenschema: $(p \cdot x + G) \cdot 1{,}19$

In der Praxis: Tabellen als Berechnungsschemata

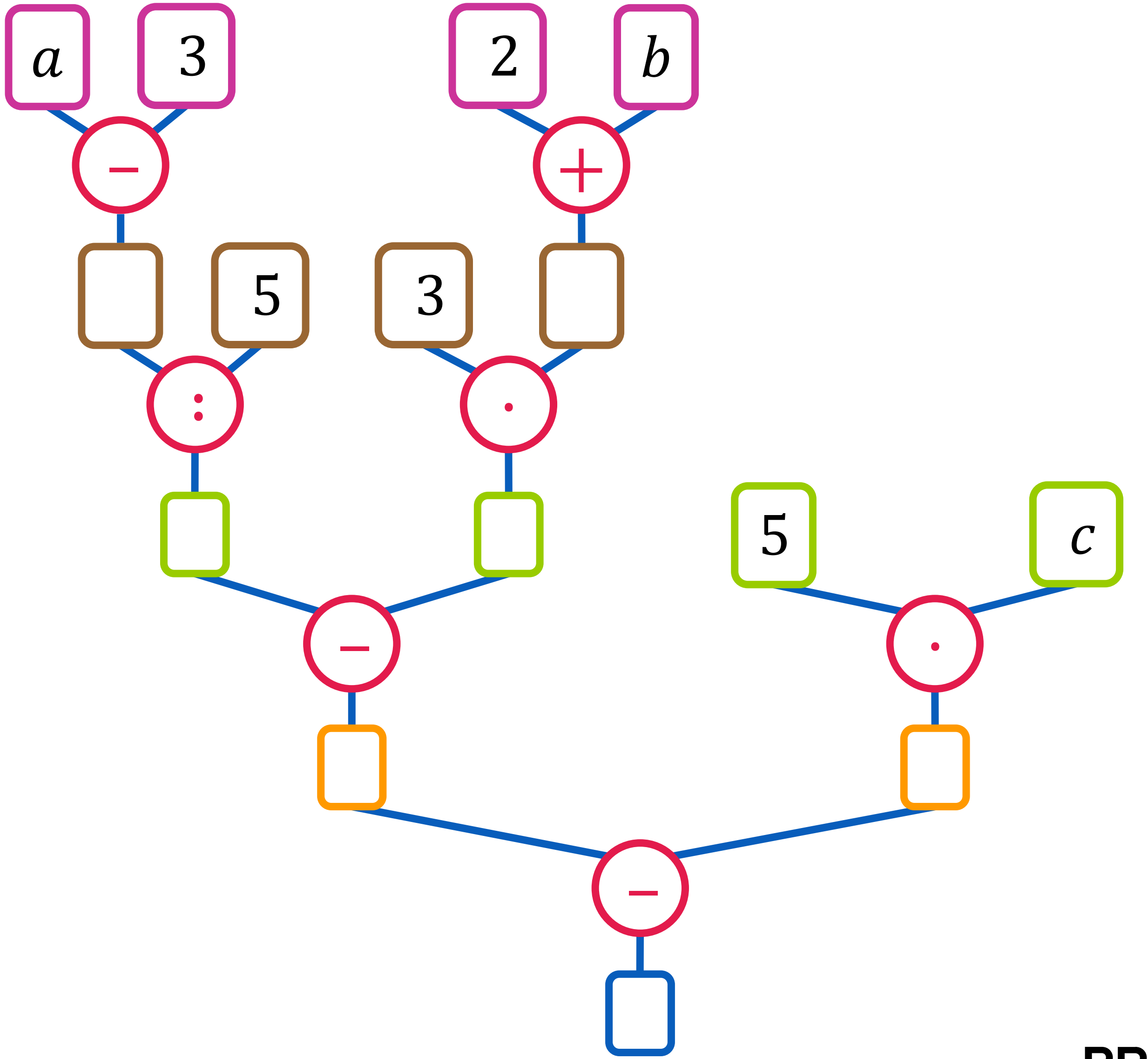
Verbrauch in kWh	Einzelpreis in €/kWh	Zwischenergebnis	Grundpreis	Netto Rechnungsbetrag	Mehrwertsteuer 19 %	Rechnungsbetrag
0	0,15	0,00 €	7,00 €	7,00 €	1,33 €	8,33 €
1	0,15	0,15 €	7,00 €	7,15 €	1,36 €	8,51 €
2	0,15	0,30 €	7,00 €	7,30 €	1,39 €	8,69 €

https://juergen-roth.de/skripte/did_algebra/excel/Rechenschema.xlsx

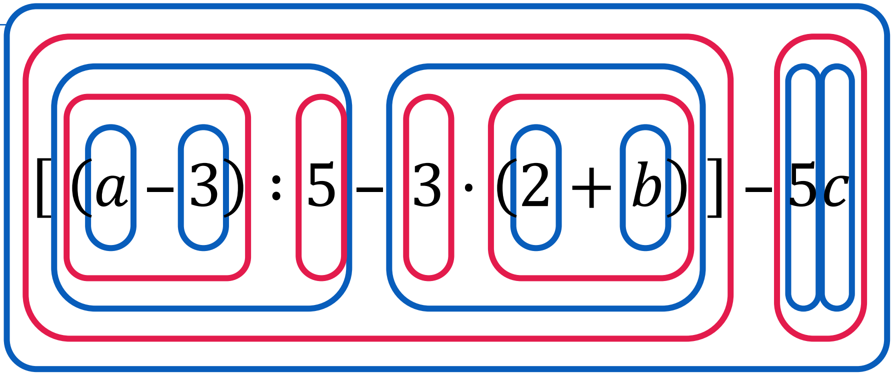
Grundvorstellung: Term als Bauplan



$$[(a-3):5-3\cdot(2+b)]-5c$$



Grundvorstellung: Term als Bauplan



$$[(a-3):5-3\cdot(2+b)]-5c$$

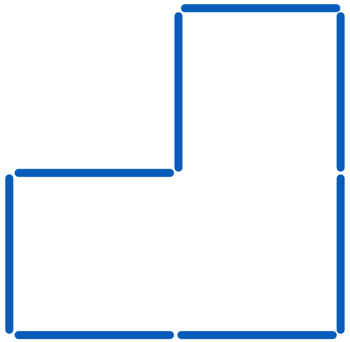
Der Term ist eine Differenz.

- Minuend: Differenz
  - Minuend: Quotient
    - Dividend: Differenz
      - Minuend: a
      - Subtrahend: 3
    - Divisor: 5
  - Subtrahend: Produkt
    - 1. Faktor: 3
    - 2. Faktor: Summe
      - 1. Summand: 2
      - 2. Summand: b
- Subtrahend: Produkt
  - 1. Faktor: 5
  - 2. Faktor: c

Aufgaben zu Grundvorstellungen zu Variablen und Termen

Aufgabe 1

- Die Strohhalme sollen die Begrenzungen beliebiger ebener Figuren darstellen.
- Legt verschiedene Figuren und gebt zu jeder Figur den zugehörigen Term zur Berechnung des Flächeninhalts und des Umfangs an (zuerst in ausführlicher und dann in möglichst kurzer Form).
- Versucht eine entsprechende Regel zu finden.



- $\mathrm{U} = 2 \cdot a + 2 \cdot a + a + a + a + a$
  $= 8 \cdot a$
- $A = a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a$
  $= a^2 + 2 \cdot a^2$
  $= 3 \cdot a^2$

Wiegand, B. & Wiegand, S. (2006). Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. *Mathematik lehren, 136*, 44-46

Aufgaben zu Grundvorstellungen zu Variablen und Termen

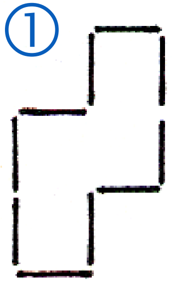
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe 1

- Typische Lösungsansätze und Fehler

Grundvorstellungen zu Variablen und Termen?

①

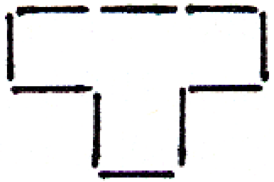


$U = 2\cdot a + 2\cdot a + a + a + a + a + a + a$

$= 10\cdot a$

$A = 2\cdot a\cdot a + 2\cdot a\cdot a = 4\cdot a^2$

②



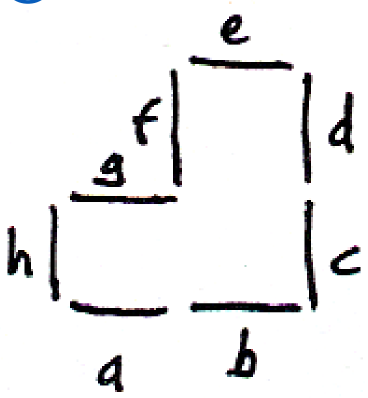
U= lange Form:

$3\cdot a + 2\cdot a + 2\cdot a + 3\cdot a$

kurze Form:

a^{10} oder $10\cdot a$

③



A: $(a+b)\cdot(d+c)-(g\cdot f)$

U: $(a+b)\cdot 4$

A kurz: $(a+b)^2-(g\cdot f)$

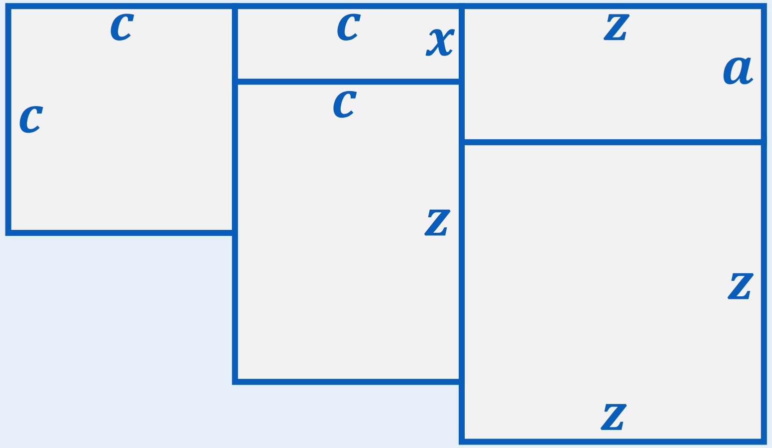
U kurz: $a\cdot 4$

Wiegand, B. & Wiegand, S. (2006). Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. *Mathematik lehren, 136*, 44-46.

Aufgaben zu Grundvorstellungen zu Variablen und Termen

Aufgabe 2

- Legt aus 5 Rechtecken eine Figur.
- Beschreibt den Flächeninhalt auf unterschiedliche Arten.



Aufgabe 3

- Setzt nacheinander für x die Zahlen $-4, -3, -2, \dots, 2, 3, 4$ in die folgenden Terme ein.
- Fertigt eine Tabelle an und beschreibt eure Beobachtungen.
  - a) $2 \cdot x + 3$
  - b) $3 \cdot x + 4$
  - c) $-2 \cdot x + 3$
  - d) $(x-1) \cdot (x-1)$

Grundvorstellungen zu Variablen und Termen?

Wiegand, B. & Wiegand, S. (2006). Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. *Mathematik lehren, 136*, 44-46

Aufgaben zu Grundvorstellungen zu Variablen und Termen

Aufgabe 3

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2 \cdot x + 3$	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11

2	2	2	2	2	2	2	2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3 \cdot x + 4$	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16

3	3	3	3	3	3	3	3

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-2 \cdot x + 3$	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(x - 1) \cdot (x - 1)$	25	16	9	4	1	0	1	4	9

-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5

2	2	2	2	2	2	2

Wiegand, B. & Wiegand, S. (2006). Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. *Mathematik lehren, 136*, 44-46

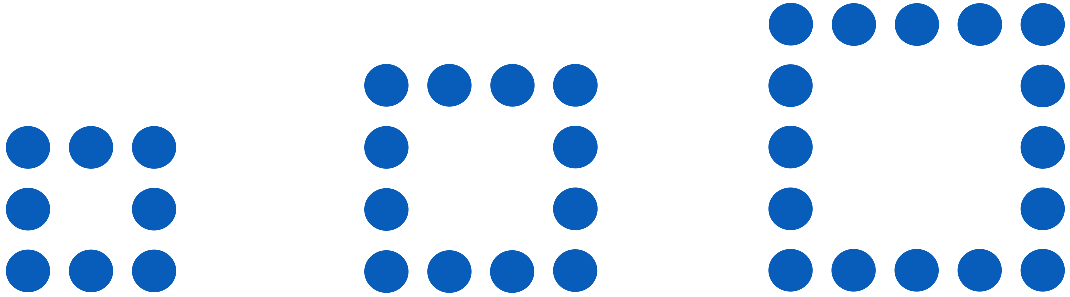
Aufgaben zu Grundvorstellungen zu Variablen und Termen

Aufgabe 4

Schaut euch die Reihe aus regelmäßig wachsenden Plättchenmustern genau an und versucht sie fortzusetzen.

a) Gebt jeweils die Gesamtzahl der Plättchen im Muster an.

b) Stellt einen allgemeinen Term auf, mit dem man die Gesamtzahl der Plättchen bestimmen kann (ohne alle Plättchen zu zählen).



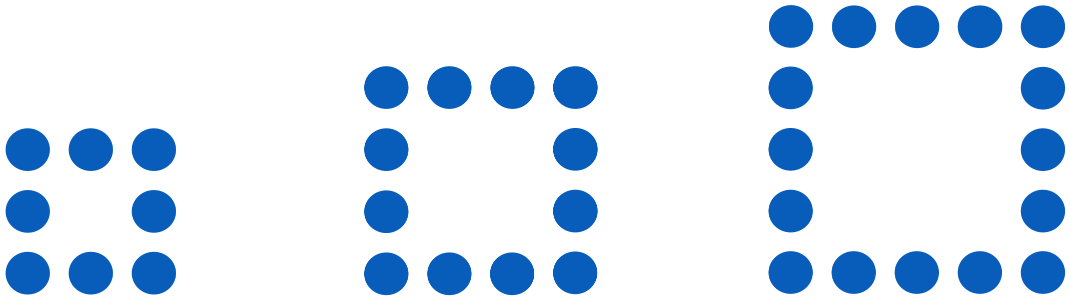
Wiegand, B. & Wiegand, S. (2006). Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. *Mathematik lehren, 136*, 44-46.

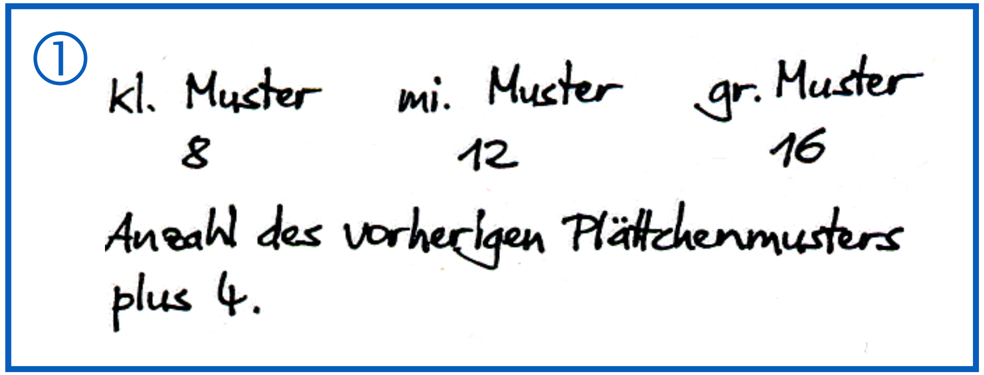
Aufgaben zu Grundvorstellungen zu Variablen und Termen

Grundvorstellungen zu Variablen und Termen?

Aufgabe 4

- Zugänge und Strategien

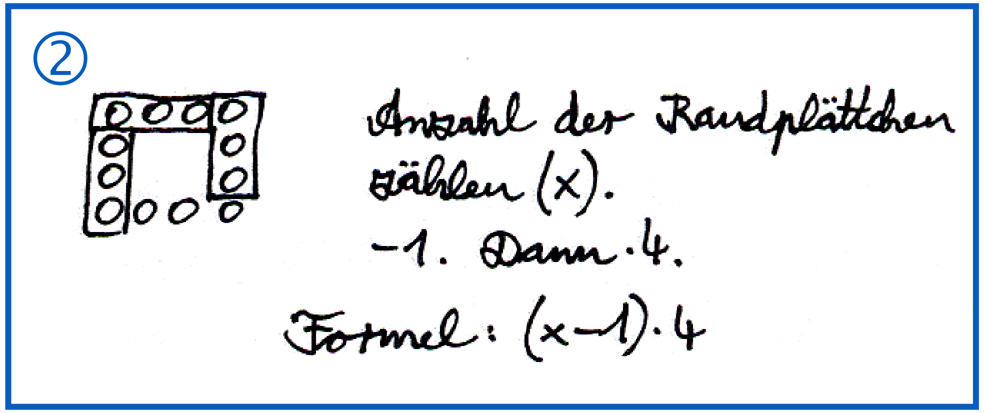




①

kl. Muster	mi. Muster	gr. Muster
8	12	16

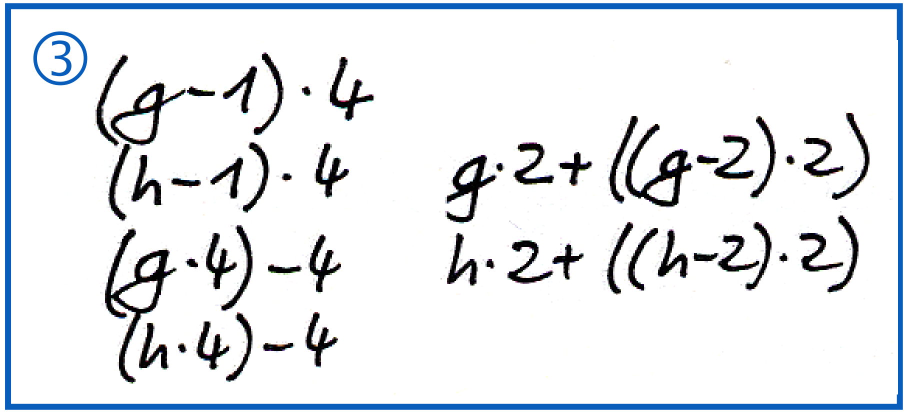
Anzahl des vorherigen Plättchenmusters plus 4.



②

Anzahl der Randplättchen zählen (x).
-1. Dann ·4.

Formel: $(x-1)\cdot 4$



③

$(g-1)\cdot 4$ $\quad g\cdot 2+((g-2)\cdot 2)$

$(h-1)\cdot 4$ $\quad h\cdot 2+((h-2)\cdot 2)$

$(g\cdot 4)-4$

$(h\cdot 4)-4$

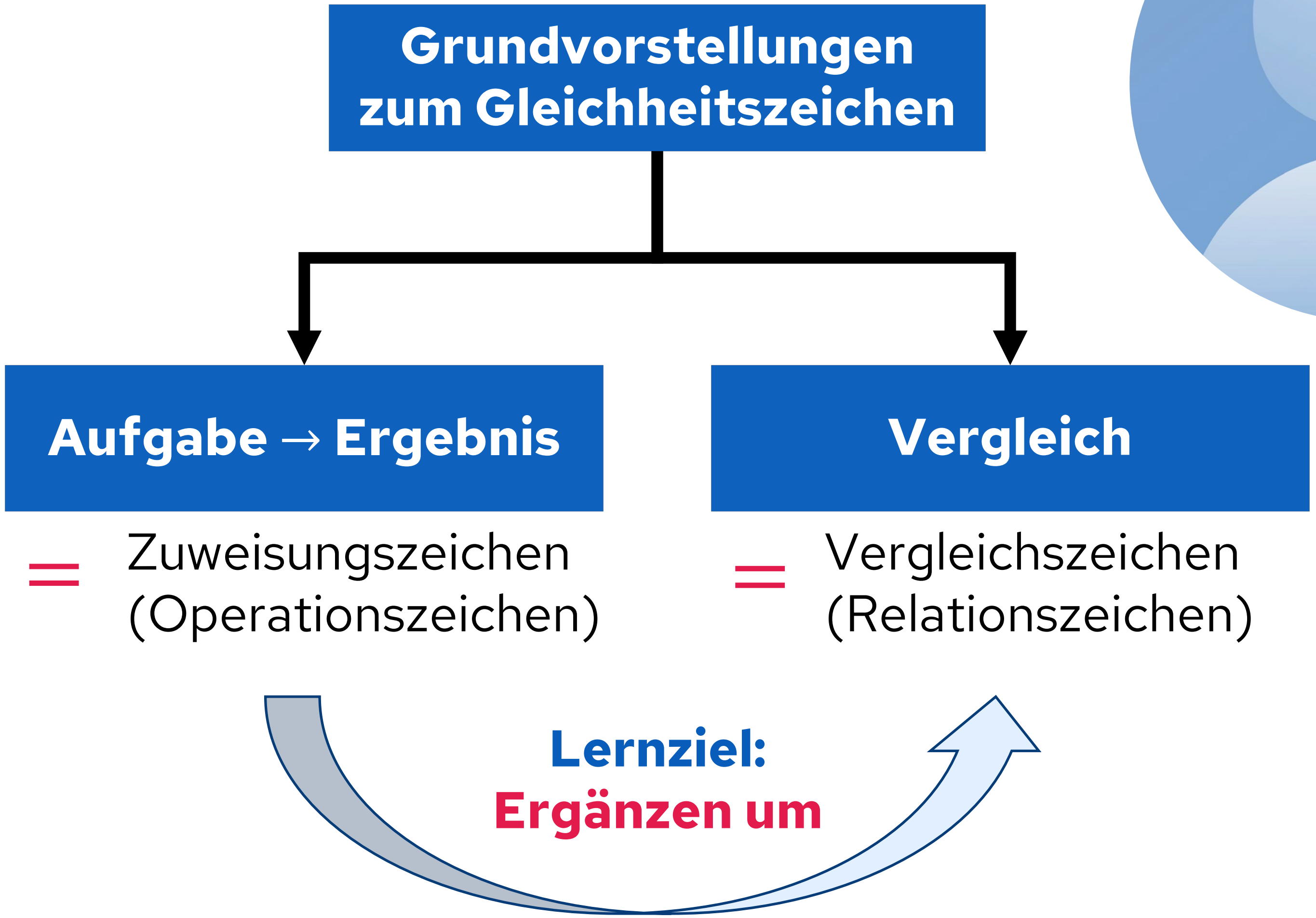
Wiegand, B. & Wiegand, S. (2006). Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. *Mathematik lehren, 136*, 44-46

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

4.3

Grundvorstellungen zu Gleichungen

Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen



Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen

Aufgabe → Ergebnis

= Zuweisungszeichen (Operationszeichen)

Vergleich

= Vergleichszeichen (Relationszeichen)

Lernziel:
Ergänzen um

Gleichheitszeichen als Vergleichszeichen

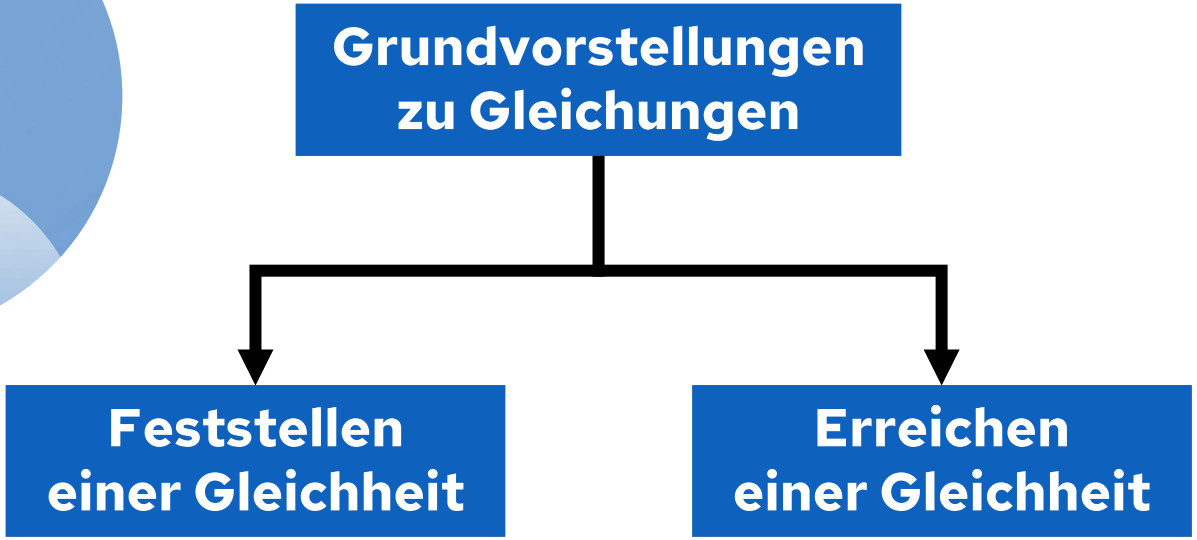
$$\underbrace{\underbrace{\sin(x)}_{\text{Term}} \overset{\downarrow}{=} \underbrace{3^x}_{\text{Term}}}_{\text{Gleichung}}$$

Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren, 236*, 8-11.

Grundvorstellungen zu Gleichungen

$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{Term}} \overset{\substack{\text{Gleichheitszeichen}\\ \text{als Vergleichszeichen}\\ \downarrow}}{=} \underbrace{2^x}_{\text{Term}}}_{\text{Gleichung}}$$

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$



Grundvorstellungen zu Gleichungen

Feststellen einer Gleichheit

Gleichung als „Gleich-Sein“

Beispiele:

- $3 + 5 = 8$
- $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Erreichen einer Gleichheit

Gleichung als „Gleich-Werden“

Gesucht:
Einsetzungen aus der Grundmenge für die die beteiligten Terme wertgleich werden.

Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren, 236*, 8-11.
Hischer, H. (2021). Was ist eine Gleichung? *GDM-Mitteilungen, 110*, 65-72.

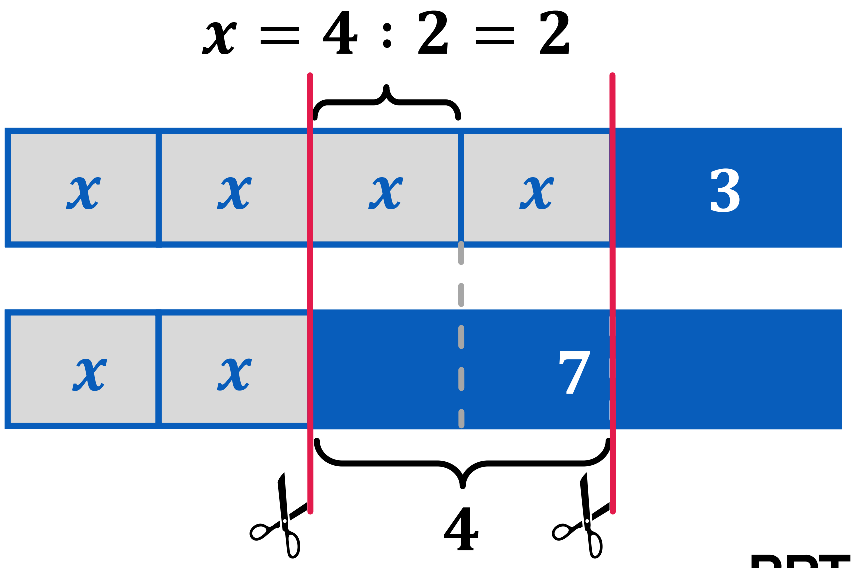
Verständnisanker

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle wesentlichen Strukturelemente zum Verständnis des mathematischen Sachverhalts in dieser Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

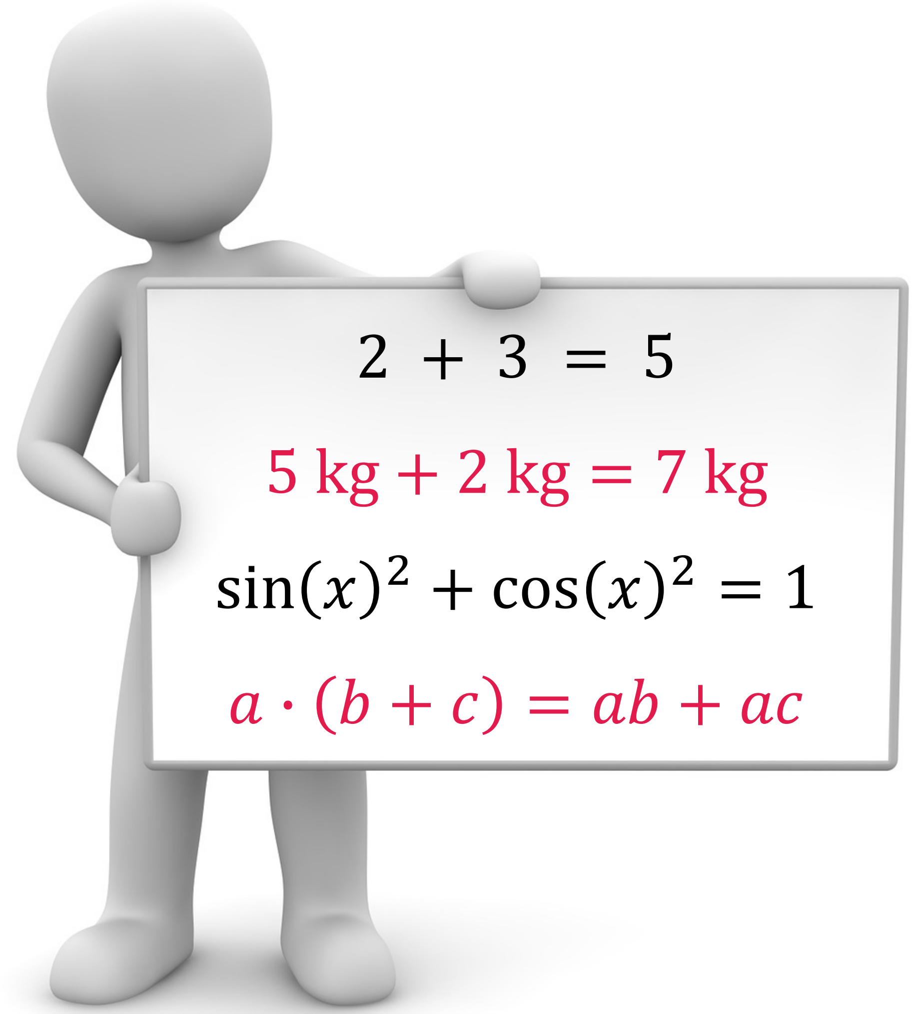
Beispiel

- Ein möglicher Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Gleichungen kann das Streifenmodell sein.
- Zwei gleich lange (Papier-) Streifen stehen jeweils für den Wert des Terms auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung. (Bsp.: $4x + 3 = 2x + 7$)



Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren, 236*, 8-11.

Gleichungen als Werkzeuge und Objekte



$$2 + 3 = 5$$

$$5\ \mathrm{kg} + 2\ \mathrm{kg} = 7\ \mathrm{kg}$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

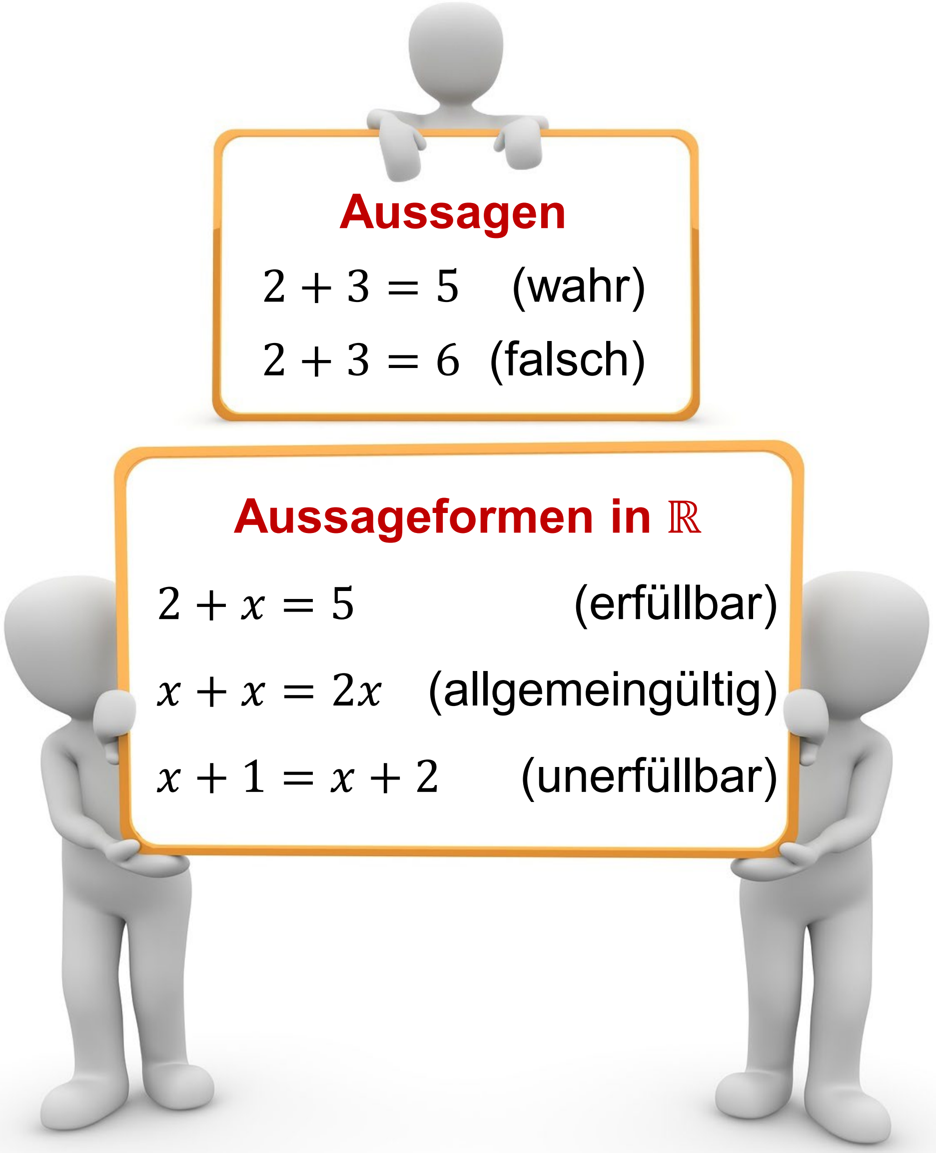
Gleichungen als Werkzeuge

- zum Formulieren von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, Größen, Funktionen),
- zum Ausdrücken von Eigenschaften,
- zum Formulieren und Lösen von Problemen.

Gleichungen als Objekte

- Untersuchung von Gleichungstypen
  - ☐ Existenz von Lösungen
  - ☐ Bestimmung von Lösungen
- Logik
  - ☐ Gleichungen ohne Variable → Aussagen
  - ☐ Gleichungen mit Variablen → Aussageformen

Begriffe rund um Gleichungen



Aussagen

$2 + 3 = 5$ (wahr)

$2 + 3 = 6$ (falsch)

Aussageformen in $\mathbb{R}$

$2 + x = 5$ (erfüllbar)

$x + x = 2x$ (allgemeingültig)

$x + 1 = x + 2$ (unerfüllbar)

Begriffe

werden benötigt, um

- über Gleichungen reden,
- Regeln formulieren und
- Ergebnisse interpretieren

zu können.

Beschreibung von Gleichungen

- Variable
- Term
- Gleichung
- **Aussage**
  Formulierung, die entweder wahr oder falsch ist.
- **Aussageform**
  Formulierung, die beim Einsetzen eine Aussage ergibt.

Begriffe rund um Gleichungen

Beschreibung von Lösungen

Grundmenge $\mathbb{G}$	Vorrat für Einsetzungen.
Lösung	Element der Grundmenge, das beim Einsetzen zu einer wahren Aussage führt.
Lösungsmenge $\mathbb{L}$	Menge aller Lösungen.

Beschreibung des Lösungsverhaltens

(bzgl. einer bestimmten Grundmenge $\mathbb{G}$!)

erfüllbare Aussageform	$\mathbb{L} \neq \{\}$
unerfüllbare Aussageform	$\mathbb{L} = \{\}$
allgemeingültige Aussageform	$\mathbb{L} = \mathbb{G}$

Beschreibung von Umformungsarten

Äquivalenzumformung	(z. B. $\mid + x, \mid - 3, \mid \cdot 4, \mid : 5$)
Gewinnumformung	(z. B. $\mid {}^2, \mid \cdot x$)
Verlustumformung	(z. B. $\mid \sqrt{}, \mid : x$)

Gewinnumformung

Probe!

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$$

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \mid {}^2$$

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1 \mid -(x+1)$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 3\}$$

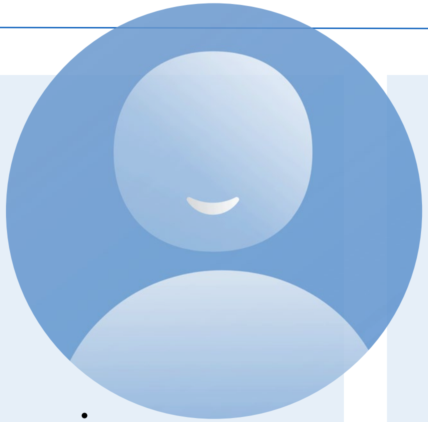
Verlustumformung

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2; 0\}$$

$$x^2 + 2x = 0 \mid : x$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2\}$$

Umgang mit Gleichungen im Unterricht



Gleichungen vernetzt lernen

- Gleichungen *nicht* isoliert behandeln
- Einbinden in zentrale Themen wie Zahlen, Funktionen, Größen, Geometrie und Sachbezüge

Einsichtig mit Gleichungen umgehen

- Überbetonung des Übens führt leicht zu mechanischem Umformen ohne Einsicht.
- Deshalb: Umformungen begründen und Lösungen kritisch kontrollieren (lassen)

Näherungslösungen akzeptieren

- Für alle praktischen Zwecke ausreichend genau
- Auch bei sehr komplizierten Gleichungen anwendbar
- Die Regel bei Problemlösungen in Wirtschaft und Technik

5

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Methoden zur Lösung von Gleichungen

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen ⤵
- Streifenmethode ⤵
- Systematisches Probieren ⤵
- Graphische Lösungsverfahren ⤵
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren ⤵
- Gegenoperatoren ⤵
- Äquivalenzumformungen ⤵
- Lösungsformeln anwenden ⤵

5.1

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Lösungsstrategien für einfache Gleichungen

Lösungsstrategien für einfache Gleichungen

$$26 + x = 107$$

Verwandte Gleichung mit gleicher Struktur

$$2 + x = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

also

$$26 + 81 = 107$$

$$26 + x = 107$$

Zerlegung

$$26 + x = 26 + 81$$

also

$$x = 81$$

$$26 + x = 107$$

Umkehraufgabe

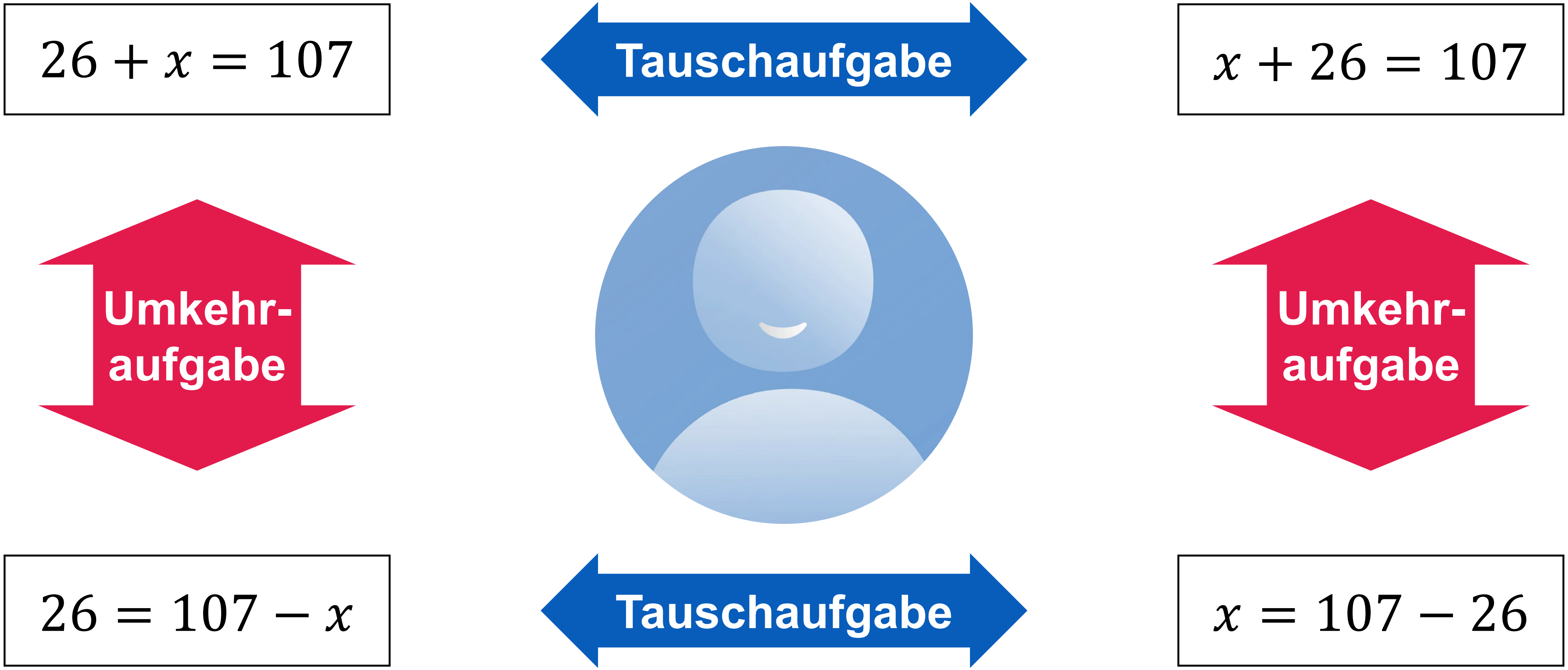
$$107 - 26 = x$$

$$81 = x$$

also

$$x = 81$$

Grundschule:
Umkehr- und Tauschaufgaben



$26 + x = 107$

Tauschaufgabe

$x + 26 = 107$

Umkehr-aufgabe

Umkehr-aufgabe

$26 = 107 - x$

Tauschaufgabe

$x = 107 - 26$

https://www.grundschulkoenig.de/mathe/2-klasse/tausch-und-umkehraufgaben/
https://fraulocke-grundschultante.de/material/Tausch-undUmkehraufgabenim20er_ohneZÜ.pdf

Methoden zur Lösung von Gleichungen
Streifenmethode

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- **Streifenmethode**
- Systematisches Probieren
- Graphische Lösungsverfahren
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren
- Gegenoperatoren
- Äquivalenzumformungen
- Lösungsformeln anwenden

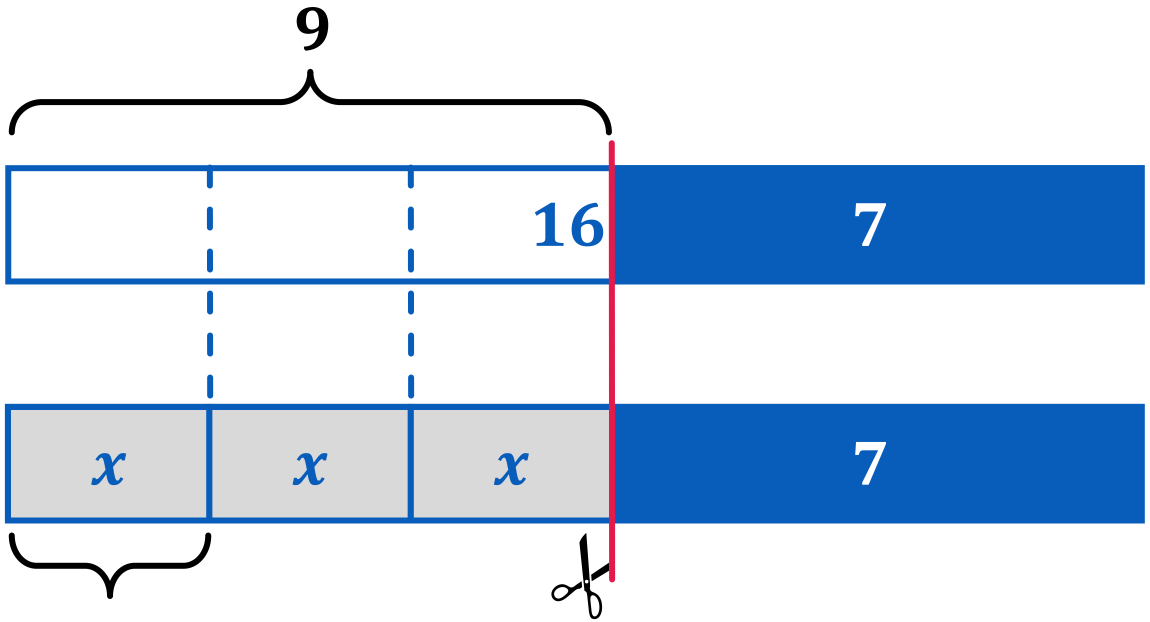
5.2

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Streifenmethode

Streifenmethode für lineare Gleichungen

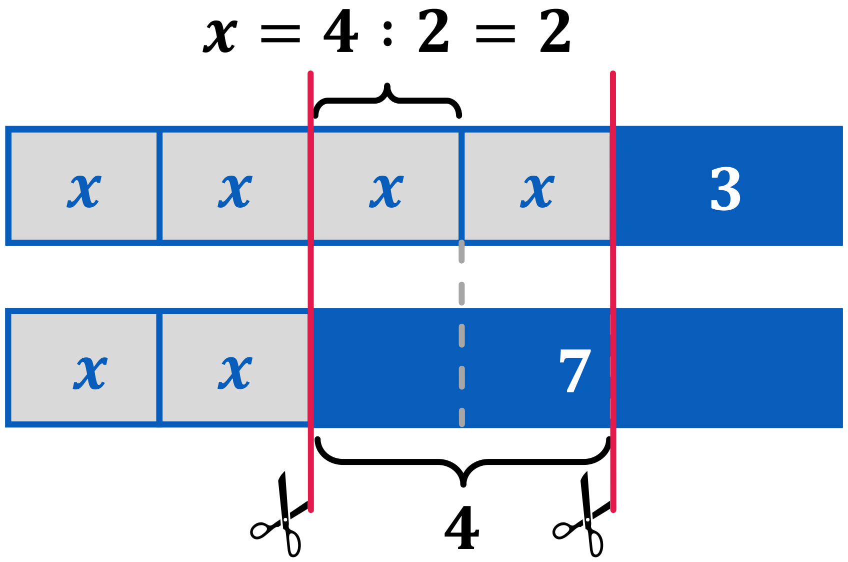
$$3x + 7 = 16$$



$$x = 9 : 3 = 3$$

Streifenmethode für lineare Gleichungen

$$4x + 3 = 2x + 7$$



$$x = 4 : 2 = 2$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen
Systematisches Probieren

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- Streifenmethode
- **Systematisches Probieren**
- Graphische Lösungsverfahren
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren
- Gegenoperatoren
- Äquivalenzumformungen
- Lösungsformeln anwenden

5.3

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Systematisches Probieren

Systematisches Probieren

$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

x	$x^3 + x^2 - 1$
0	-1
1	1
$0{,}5$	$-0{,}625$
$0{,}8$	$0{,}125$
$0{,}7$	$-0{,}167$
$0{,}75$	$-0{,}015625$
$0{,}77$	$0{,}049433$
$0{,}76$	$0{,}016576$
$0{,}755$	$0{,}0003939$
$0{,}753$	$-0{,}006033$
$0{,}754$	$-0{,}002823$

Methoden zur Lösung von Gleichungen
Graphisches Lösungsverfahren

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- Streifenmethode
- Systematisches Probieren
- **Graphische Lösungsverfahren**
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren
- Gegenoperatoren
- Äquivalenzumformungen
- Lösungsformeln anwenden

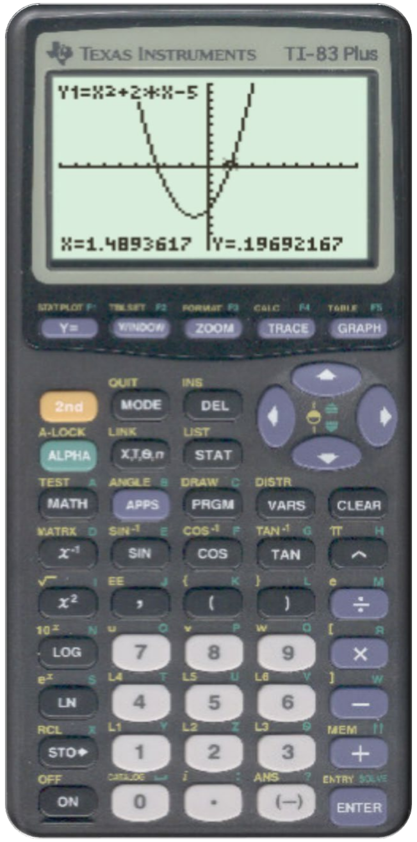
5.4

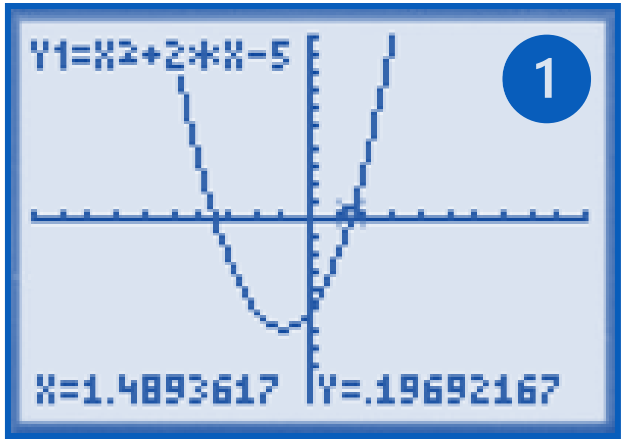
Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Graphische Lösungsverfahren

Graphische Lösungsverfahren

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$



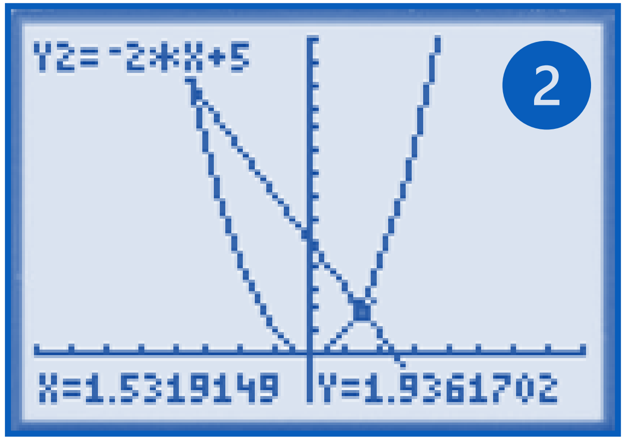


Y1=X²+2*X-5

X=1.4893617 Y=.19692167

$x^2 + 2x - 5 = 0$

x-Koordinaten der Schnittpunkte des zum (Funktions-)Term $x^2 + 2x - 5$ gehörenden Graphen mit der x-Achse



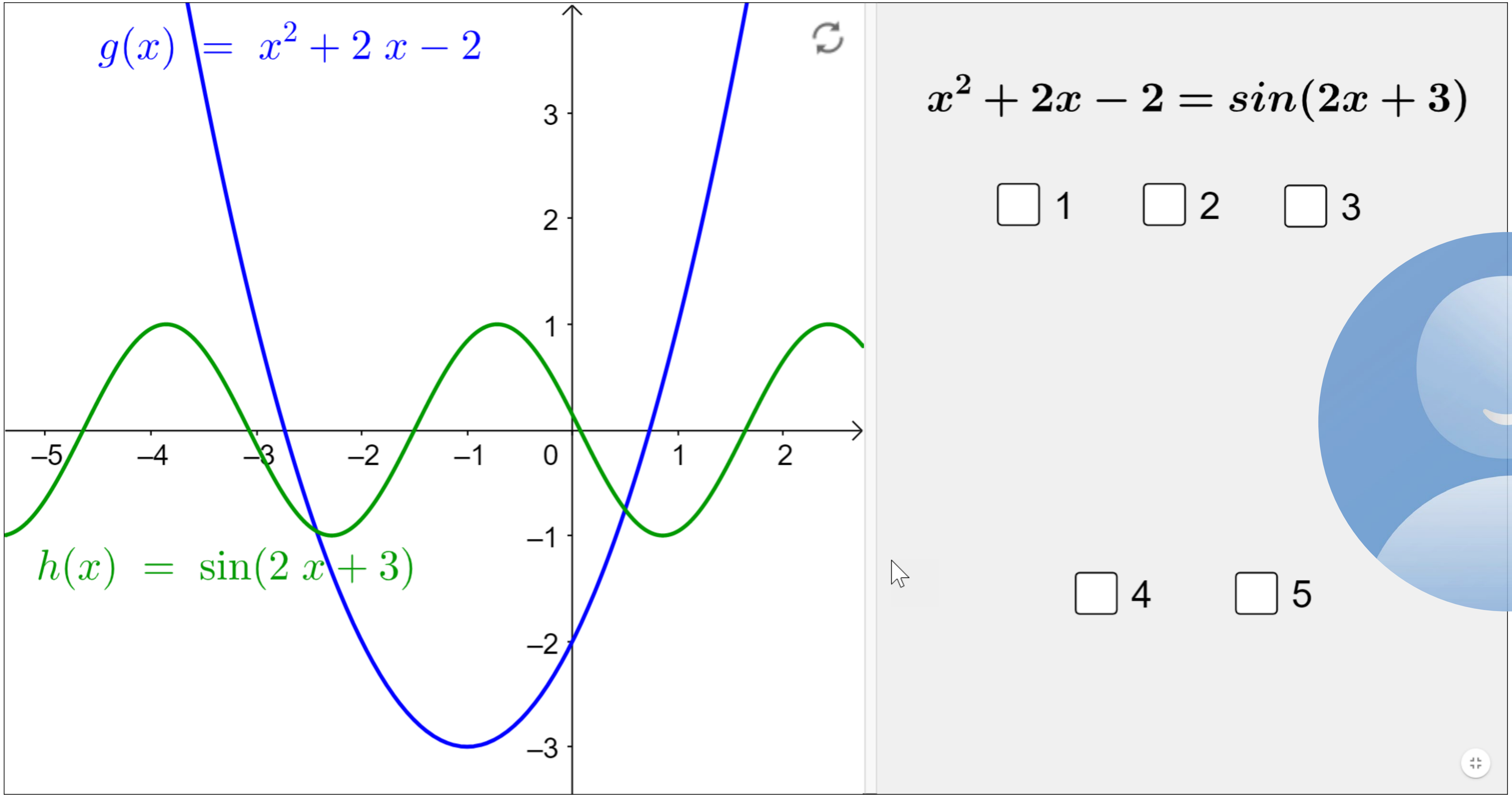
Y2=⁻2*X+5

X=1.5319149 Y=1.9361702

$x^2 = -2x + 5$

x-Koordinaten der Schnittpunkte der zu den (Funktions-)Termen x^2 und $-2x + 5$ gehörenden Graphen

Graphische Lösungsverfahren



$$x^2 + 2x - 2 = sin(2x + 3)$$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

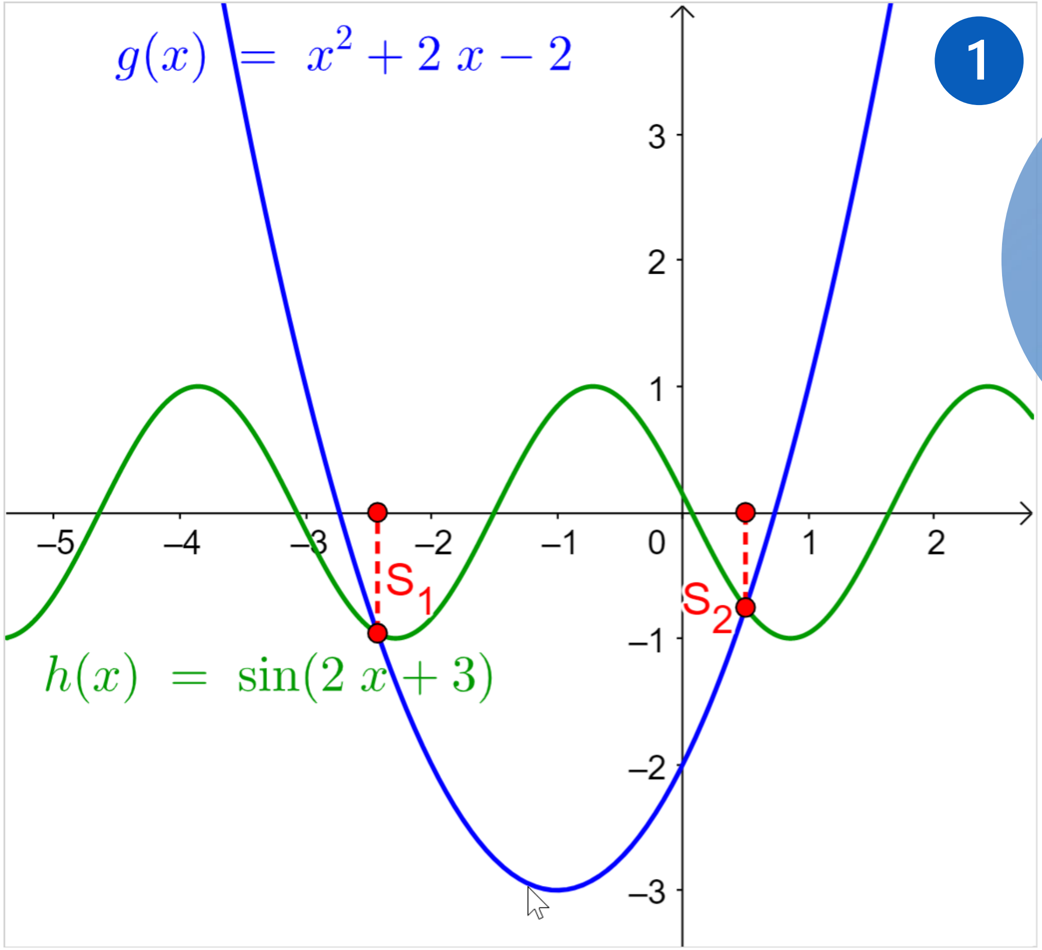
☐ 4 ☐ 5

Abramovich (2014): One-Variable Equations and Inequalities: Computational Experiment and Formal Demonstration. In: Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum. Dordrecht: Springer, p. 25-36.

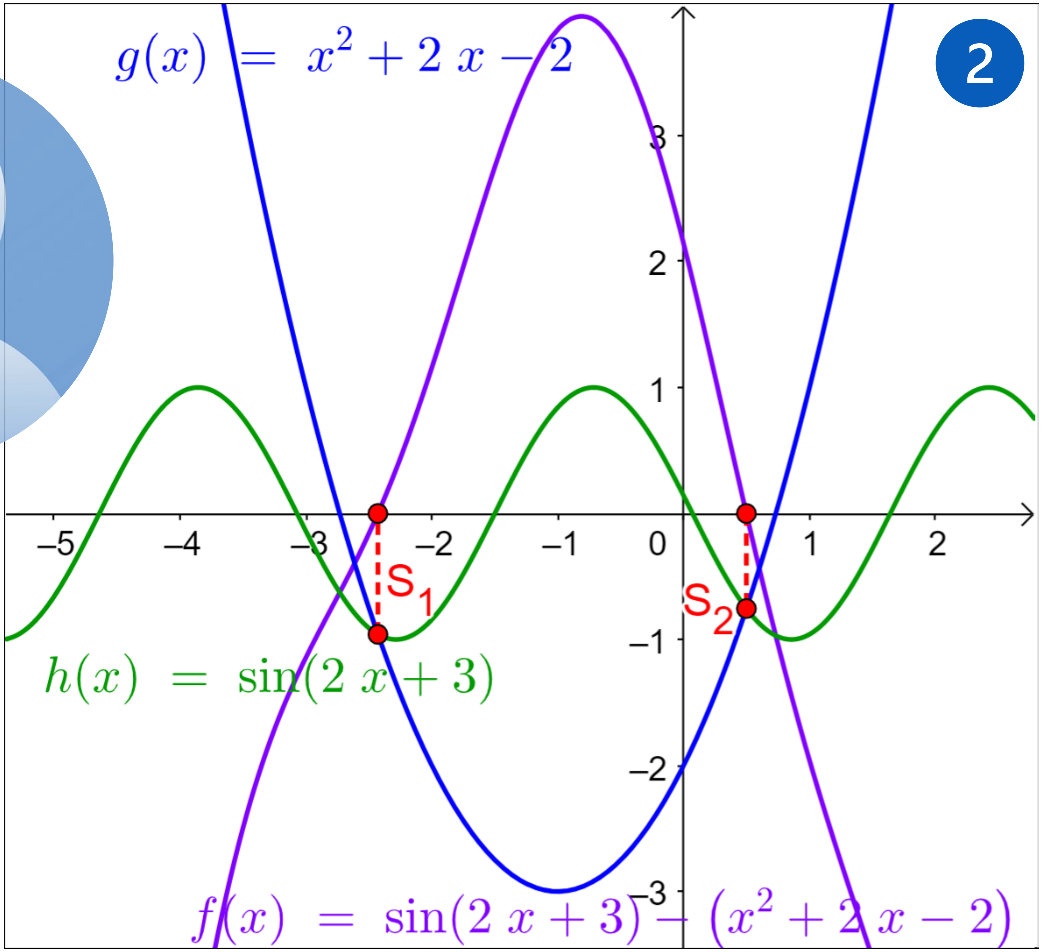
https://www.geogebra.org/m/Hw8m75hu

Graphische Lösungsverfahren

$$\sin(2x+3) = x^2 + 2x - 2$$



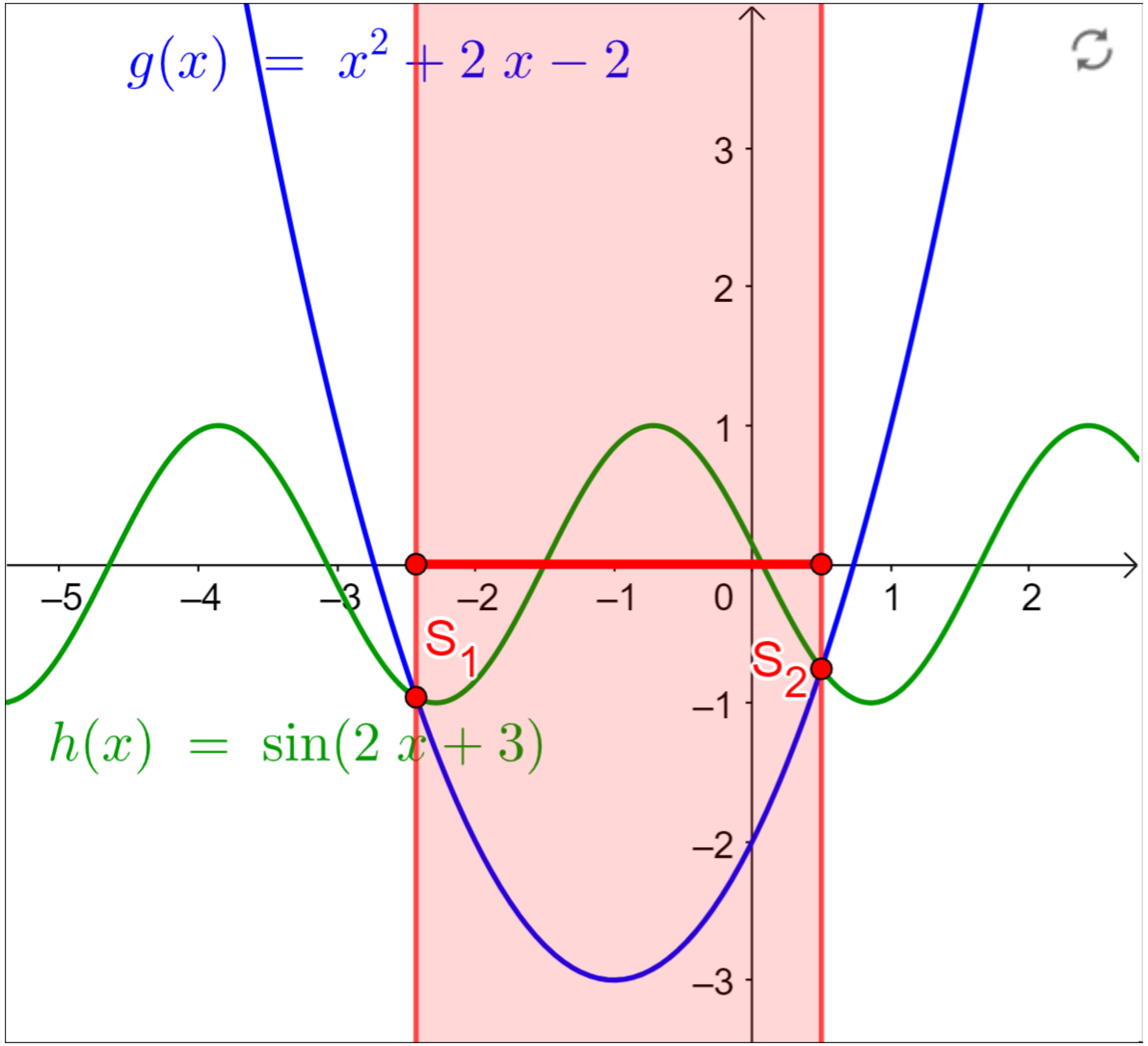
$$\sin(2x+3) - (x^2 + 2x - 2) = 0$$



Abramovich (2014): One-Variable Equations and Inequalities: Computational Experiment and Formal Demonstration. In: Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum. Dordrecht: Springer, p. 25-36.

https://www.geogebra.org/m/Hw8m75hu

Graphische Lösungsverfahren



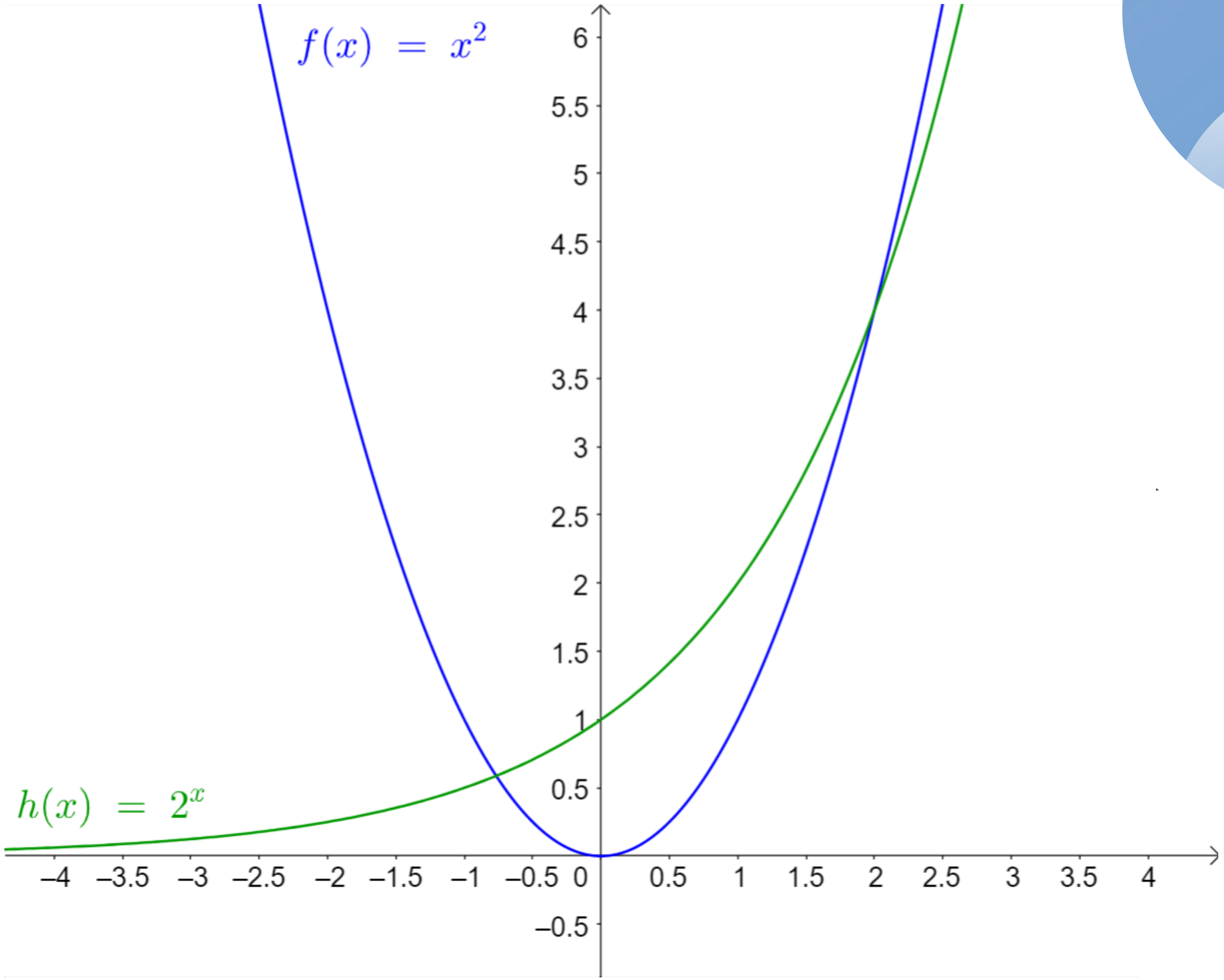
$$x^2 + 2x - 2 \leq \sin(2x + 3)$$

Auch Ungleichungen lassen
sich graphisch lösen!

Abramovich (2014): One-Variable Equations and Inequalities: Computational Experiment and Formal Demonstration. In: Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum. Dordrecht: Springer, p. 25-36.

https://www.geogebra.org/m/Hw8m75hu

Graphische Lösungsverfahren



$$x^2 = 2^x$$

Gibt es zur Gleichung $x^2 = 2^x$, neben den graphisch sichtbaren Lösungen noch weitere?

Begründen Sie Ihre Antwort!

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/NVuSuDpC

Methoden zur Lösung von Gleichungen
Numerisch-iterative Lösungsverfahren

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- Streifenmethode
- Systematisches Probieren
- Graphische Lösungsverfahren
- **Numerisch-iterative Lösungsverfahren**
- Gegenoperatoren
- Äquivalenzumformungen
- Lösungsformeln anwenden

5.5

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Numerisch-iterative Lösungsverfahren

Numerisch-iterative Lösungsverfahren

$$1,5^x = 3 \cdot \cos(x)$$

x	$1{,}5^x$	$3 \cdot \cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-6	0,0878	2,8805	-2,7927
-5	0,1317	0,8510	-0,7193
-4	0,1975	-1,9609	2,1585
-3	0,2963	-2,9700	3,2663
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1	0,6667	1,6209	-0,9542
0	1,0000	3,0000	-2,0000
1	1,5000	1,6209	-0,1209
2	2,2500	-1,2484	3,4984
3	3,3750	-2,9700	6,3450
4	5,0625	-1,9609	7,0234

Algorithmus

1. Wertetabelle für ein Intervall berechnen
2. Teilintervall auswählen, das eine Lösung enthält
3. Teilintervall spreizen und neue Wertetabelle berechnen
4. Wiederholen von 2. und 3. bis die Lösung genau genug ist

Numerisch-iterative Lösungsverfahren

x	$1{,}5^x$	$3\cdot\cos(x)$	$T_1(x)-T_2(x)$
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1,9	0,4628	-0,9699	1,4327
-1,8	0,4820	-0,6816	1,1636
-1,7	0,5019	-0,3865	0,8885
-1,6	0,5227	-0,0876	0,6103
-1,5	0,5443	0,2122	0,3321
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122
-1,2	0,6147	1,0871	-0,4723
-1,1	0,6402	1,3608	-0,7206
-1	0,6667	1,6209	-0,9542

x	$1{,}5^x$	$3\cdot\cos(x)$	$T_1(x)-T_2(x)$
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,39	0,5692	0,5394	0,0297
-1,38	0,5715	0,5689	0,0025
-1,37	0,5738	0,5983	-0,0246
-1,36	0,5761	0,6277	-0,0516
-1,35	0,5785	0,6570	-0,0786
-1,34	0,5808	0,6863	-0,1054
-1,33	0,5832	0,7154	-0,1323
-1,32	0,5855	0,7445	-0,1590
-1,31	0,5879	0,7736	-0,1856
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122

Numerisch-iterative Lösungsverfahren …

- liefern im Prinzip beliebig viele Dezimalstellen einer Lösung.
- liefern Lösungen nicht als geschlossene Terme, sondern als abbrechende Dezimalbrüche vorgegebener Länge.
- liefern nur Lösungen aus einem endlichen Startintervall.
- funktionieren *nicht*, wenn die Gleichung von Parametern abhängt.
- beantworten *nicht* die Frage nach *allen* Lösungen einer Gleichung
- genügen für die meisten praktischen Anwendungen.
- werden interaktiv vom Benutzer gesteuert.
  - Rechenpraxis: Automatisch ablaufende Verfahren.
  - Probleme: Startintervall, Konvergenzgeschwindigkeit, …

Ein Startintervall für diese Verfahren kann wie beim graphischen Lösen von Gleichung bestimmt werden.

Methoden zur Lösung von Gleichungen
Gegenoperator

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- Streifenmethode
- Systematisches Probieren
- Graphische Lösungsverfahren
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren
- **Gegenoperatoren**
- Äquivalenzumformungen
- Lösungsformeln anwenden

5.6

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Gegenoperatoren

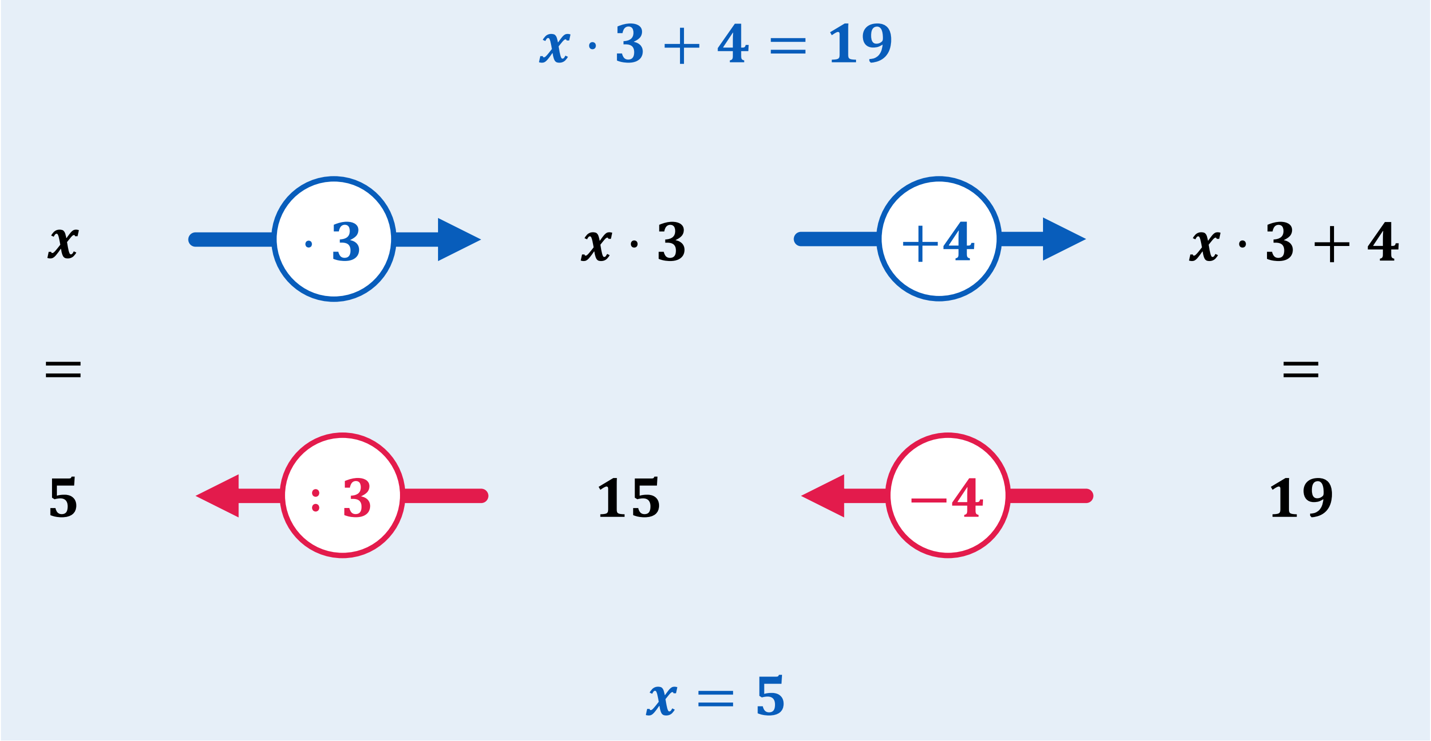
Gegenoperatoren → Äquivalenzumformung

$$x \cdot 3 + 4 = 19$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\cdot 3"] \arrow[d, phantom, "="] & x \cdot 3 \arrow[r, "+4"] & x \cdot 3 + 4 \arrow[d, phantom, "="] \\
5 & 15 \arrow[l, ":3"'] & 19 \arrow[l, "-4"']
\end{tikzcd}$$

$$x = 5$$

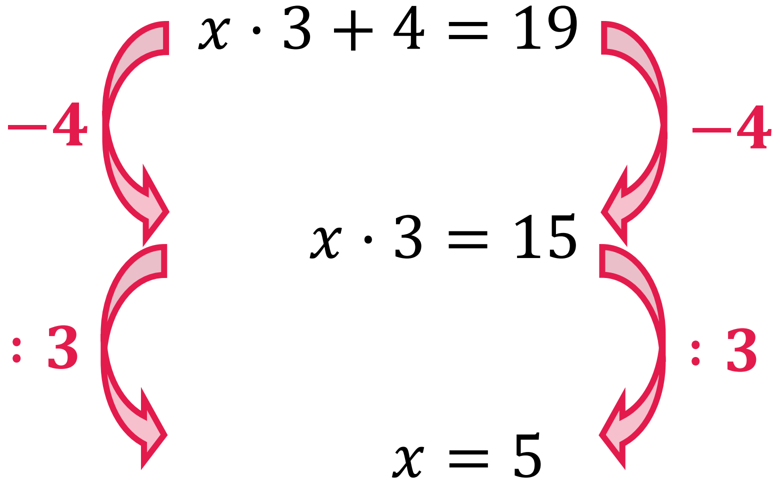
Gegenoperatoren → Äquivalenzumformung



$$x \cdot 3 + 4 = 19$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\cdot 3"] \arrow[d, phantom, "="] & x \cdot 3 \arrow[r, "+4"] & x \cdot 3 + 4 \arrow[d, phantom, "="] \\
5 & 15 \arrow[l, ":3"'] & 19 \arrow[l, "-4"']
\end{tikzcd}$$

$$x = 5$$



$$\begin{tikzcd}
x \cdot 3 + 4 = 19 \arrow[d, bend right, "-4"'] \arrow[d, bend left, "-4"] \\
x \cdot 3 = 15 \arrow[d, bend right, ":3"'] \arrow[d, bend left, ":3"] \\
x = 5
\end{tikzcd}$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen
Äquivalenzumformungen

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

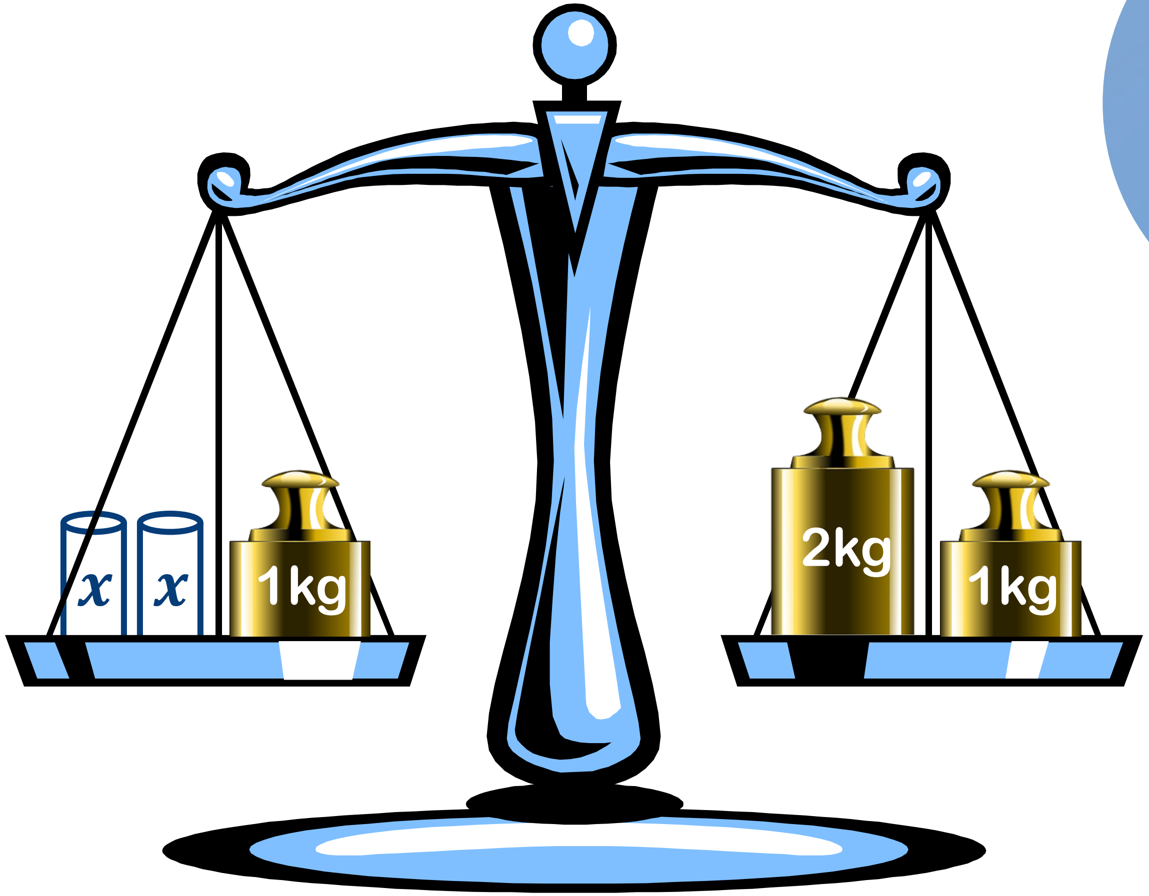
- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- Streifenmethode
- Systematisches Probieren
- Graphische Lösungsverfahren
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren
- Gegenoperatoren
- **Äquivalenzumformungen**
- Lösungsformeln anwenden

5.7

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen im **Waagemodell**



$$2x + 1 = 3$$

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden
Seiten wegnehmen.

Äquivalenzumformungen im Waagemodell

$$2x = 2$$

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden
Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden
Seiten halbieren.

Äquivalenzumformungen im Waagemodell

$$x = 1$$

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden Seiten halbieren.

$$x = 1$$

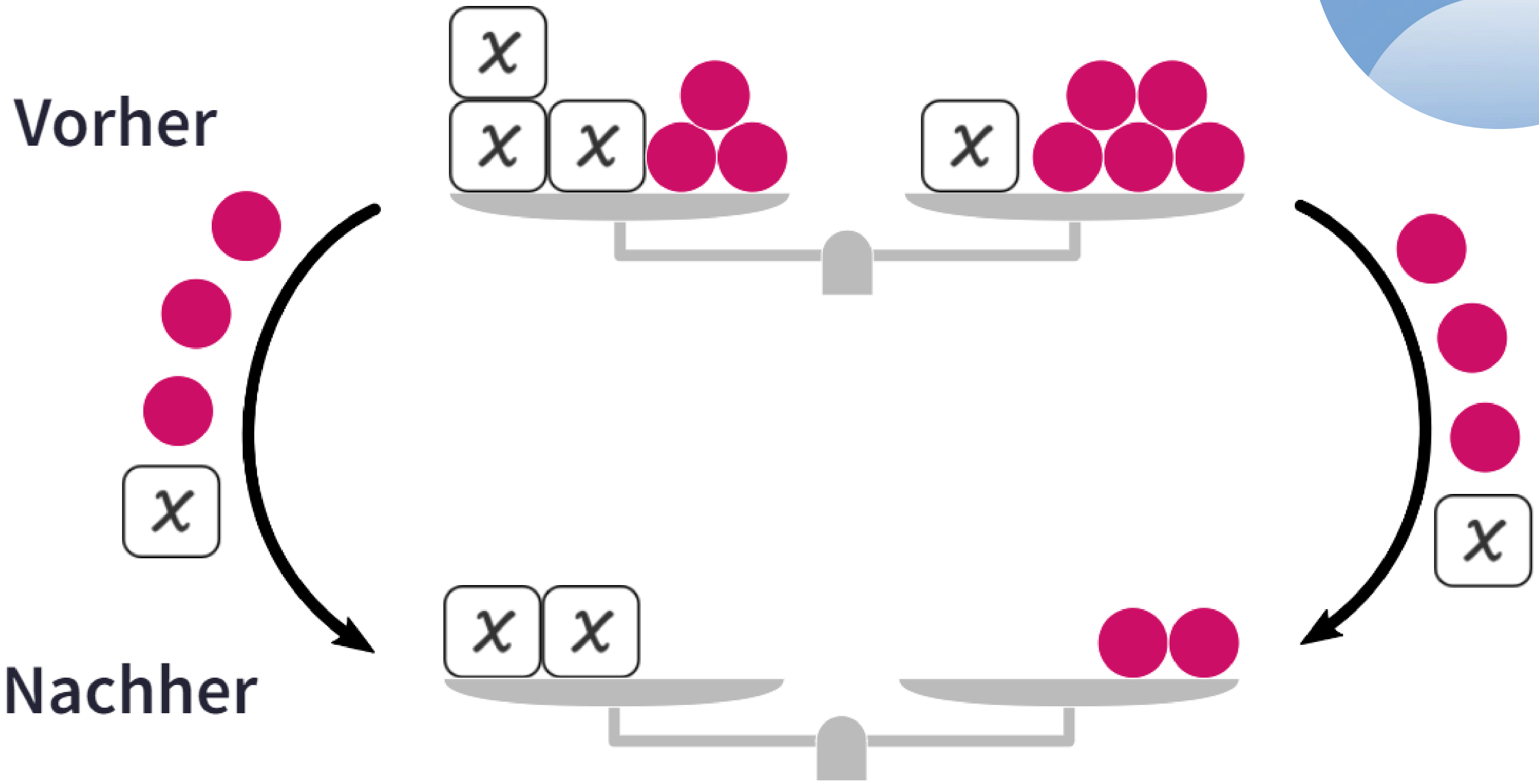
Äquivalenzumformungen im Waagemodell

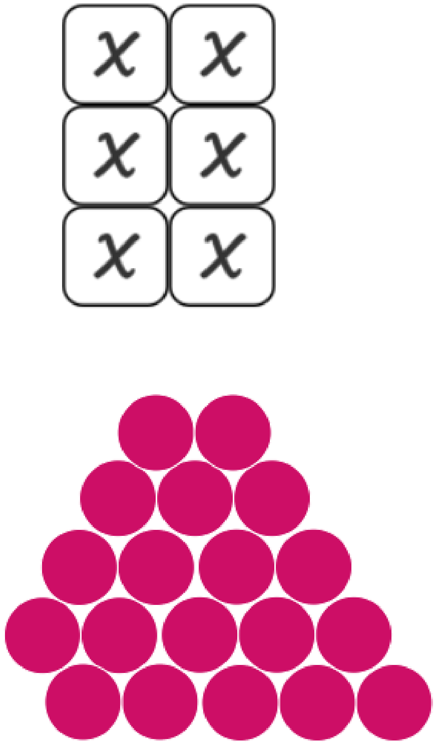
Waagemodell

- lässt sich in einfachen Fällen gut zur Veranschaulichung nutzen.
- ist, wie jedes Modell, nur begrenzt nutzbar!

(vgl. etwa negative Zahlen, irrationale Zahlen, schwierig bei Bruchzahlen, Division, Multiplikation, …)

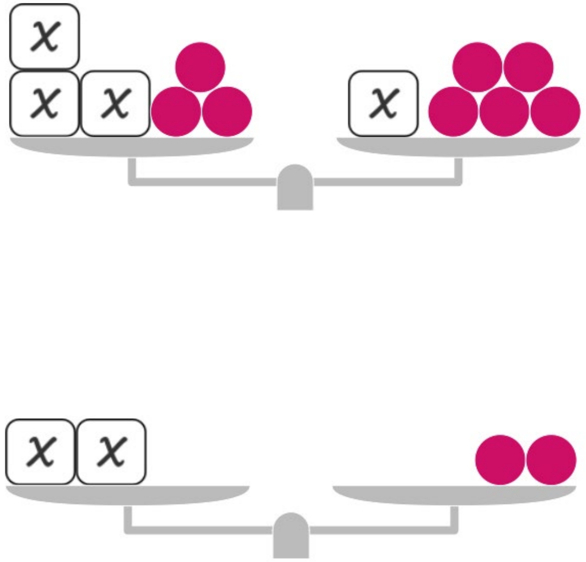
Äquivalenzumformungen im Waagemodell: Interaktive Übungen





Lachner, B. (2022). Interaktive Waage – Mit „Mathigon“ das Waage-Modell zu Äquivalenzumformungen visualisieren. Mathematik 5 bis 10, 60, 22-25.
https://mathigon.org/polypad/Cjpi5VPUOfB6w

Äquivalenzumformungen im Waagemodell: Interaktive Übungen



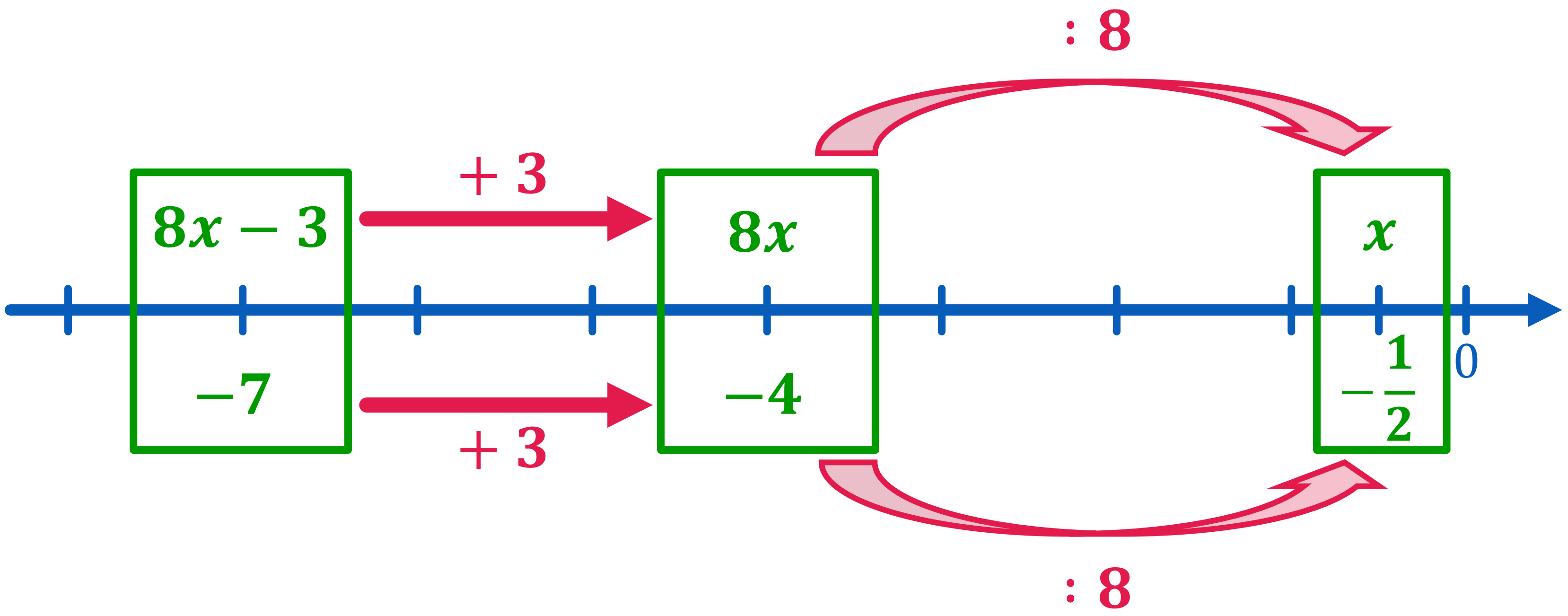
Äquivalenzumformungen

- **Addition:** https://mathigon.org/polypad/kov4hYuoPCpDLg
- **Division (Hilfe):** https://mathigon.org/polypad/cD3UO63vPHKDWg
- **Division 1:** https://mathigon.org/polypad/VTqVVFHFOy8Tpg
- **Division 2:** https://mathigon.org/polypad/9qkOi0gTe6A
- **Division 3:** https://mathigon.org/polypad/sqN4j6WNGHPZJA
- **Multiplikation 1:** https://mathigon.org/polypad/5gK5xgdaRxWA
- **Multiplikation 2:** https://mathigon.org/polypad/M9RwhX7t1bRudA
- **Subtraktion 1:** https://mathigon.org/polypad/y5iZvNdLn9Rxxg
- **Subtraktion 2:** https://mathigon.org/polypad/Cjpi5VPUOfB6w

Lachner, B. (2022). Interaktive Waage – Mit „Mathigon“ das Waage-Modell zu Äquivalenzumformungen visualisieren. Mathematik 5 bis 10, 60, 22-25.

Äquivalenzumformungen im Modell der Zahlengeraden

$$8x - 3 = -7$$



$$x = -\frac{1}{2}$$

Äquivalenzumformungen

$$8x + 2 - 3x + 5 = 17$$

Zusammenfassen:

$$5x + 7 = 17$$

Beidseitig 7 subtrahieren:

$$5x + 7 = 17 \quad | -7$$

$$5x = 10$$

Beidseitig durch 5 dividieren:

$$5x = 10 \quad | :5$$

$$x = 2$$

Äquivalenzumformungen: Umformungsregeln

$a = b$ ist äquivalent zu $a + c = b + c$

$a = b$ ist äquivalent zu $a - c = b - c$

$a = b$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $a \cdot c = b \cdot c$

$a = b$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $a : c = b : c$

Methoden zur Lösung von Gleichungen
Lösungsformeln anwenden

$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- Streifenmethode
- Systematisches Probieren
- Graphische Lösungsverfahren
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren
- Gegenoperatoren
- Äquivalenzumformungen
- **Lösungsformeln anwenden**

5.8

Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Lösungsformeln anwenden

Anwenden von Lösungsformeln

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

oder

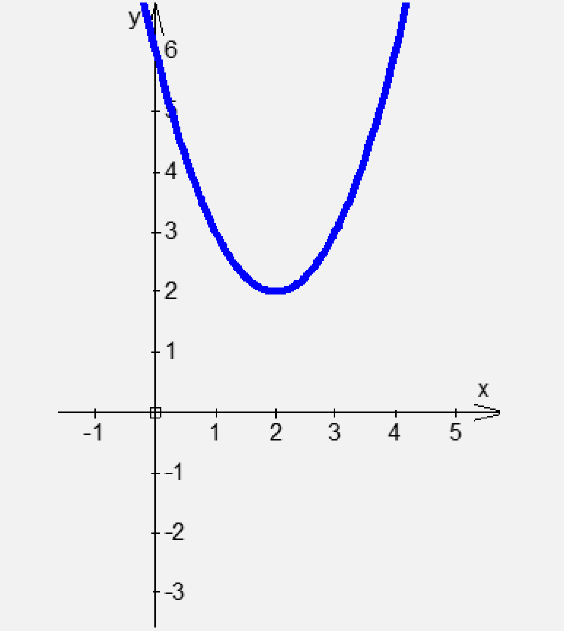
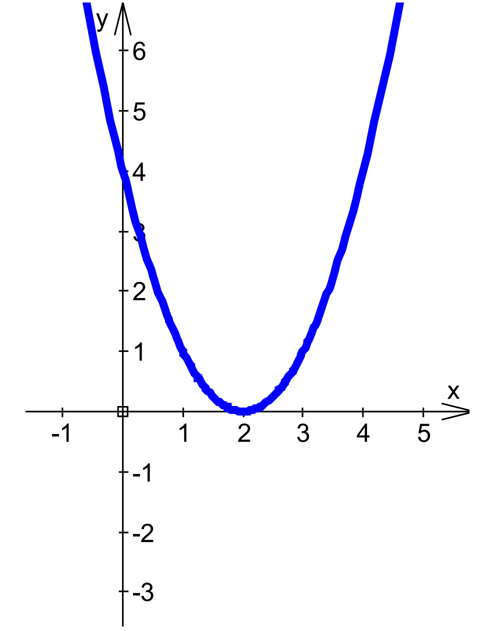
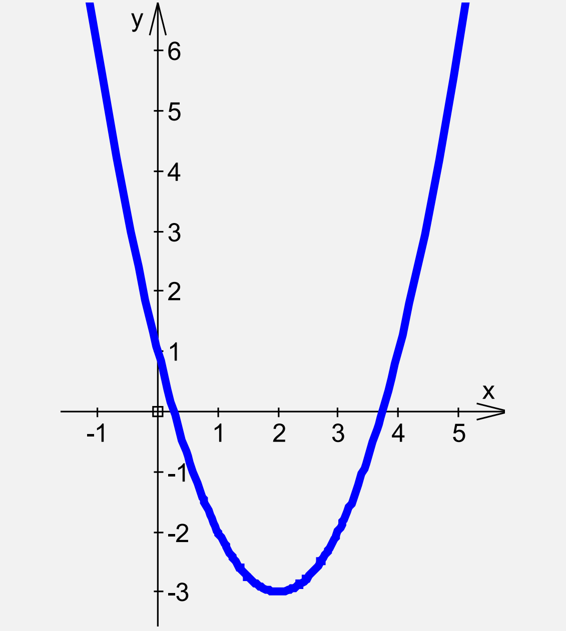
$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

oder

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Keine Lösung	Eine Lösung	Zwei Lösungen
$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac > 0$
		
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

https://www.geogebra.org/m/aweusqha

Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

Grundsätzliches

- Jede quadratische Gleichung lässt sich in folgender Form schreiben:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

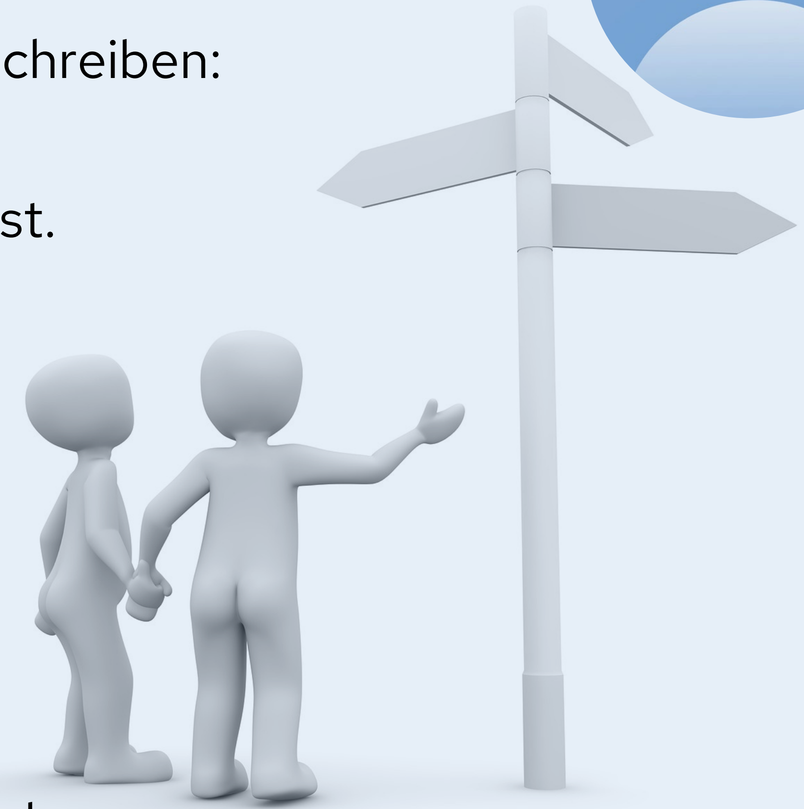
  Dabei gilt $a \neq 0$, da die Gleichung sonst nicht quadratisch ist.

- Die Gleichung muss so umgeformt werden, dass nur ein quadratisches „x-Glied“ vorkommt, aber kein zusätzliches lineares.

- **Idee:** Anwendung der „Plusformel“/1. Binomischen Formel

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

- Um die binomische Formel von rechts nach links anwenden zu können, muss der Summenterm quadratisch ergänzt werden.



Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

1. Binomische Formel (Plusformel)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Big| : a \quad \text{mit } a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Big| -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + x\frac{b}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2x\frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2x\frac{b}{2a} = -\frac{c}{a} \qquad \Big| +\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Quadratische Ergänzung

$$x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Binomische Formel anwenden

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

Quadrat auf der rechten Seite auflösen

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

Rechte Seite auf einen Bruch bringen

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$|\sqrt{}$

Die Wurzel darf nur gezogen werden, wenn gilt: $b^2-4ac\geq 0$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Wegen $\sqrt{x^2}=|x|$ folgt:

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

Hier sind genau genommen vier Fallunterscheidungen notwendig, von denen aber jeweils zwei zusammenfallen. Damit ergibt sich:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{falls} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\geq 0\wedge a>0\right)\vee\left(x+\frac{b}{2a}<0\wedge a<0\right) \\ x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{falls} \quad \left(x+\frac{b}{2a}<0\wedge a>0\right)\vee\left(x+\frac{b}{2a}\geq 0\wedge a<0\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{falls} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\geq 0\wedge a>0\right)\vee\left(x+\frac{b}{2a}<0\wedge a<0\right) \\ x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{falls} \quad \left(x+\frac{b}{2a}<0\wedge a>0\right)\vee\left(x+\frac{b}{2a}\geq 0\wedge a<0\right) \end{cases}$$

Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

Satz von Vieta: Bei einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gilt für die Parameter p, q und die Lösungen x_1, x_2 der Gleichung:

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2$$

Beispiel:
$x^2 - 5x + 6 = 0$

Beweis: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

Ausmultiplizieren liefert:

$$x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Anwenden des Distributivgesetzes liefert:

$$x^2 - x \cdot (x_2 + x_1) + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Zweimaliges Anwenden des Kommutativgesetzes liefert:

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Koeffizientenvergleich mit $x^2 + px + q = 0$ ergibt:

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2 \qquad \blacksquare$$

5.9

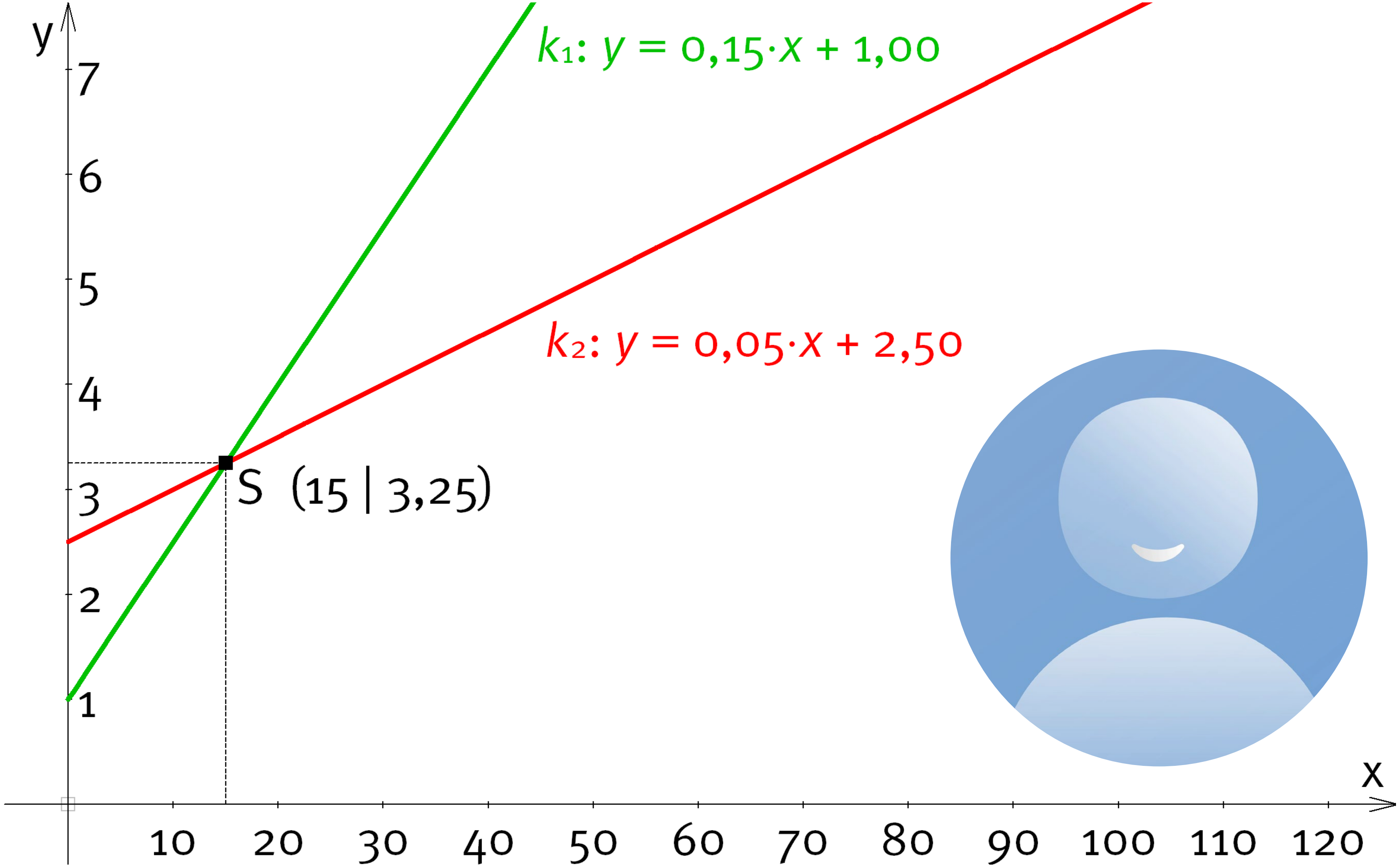
Bruchrechnung & Gleichungen grundvorstellungsbasiert unterrichten

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Günstigster Handy-Tarif

- **Tarif 1: Geringe Grundgebühr**
  - ☐ Monatliche Grundgebühr: $g_1 = 1{,}00\ €$
  - ☐ Preis pro Einheit, „Minutenpreis“: $m_1 = 0{,}15\ €$
  - ☐ Telefoneinheiten (Minuten): x
  - ☐ Monatliche Kosten: $k_1(x) = m_1 \cdot x + g_1$
- **Tarif 2: Geringer Minutenpreis**
  - ☐ Monatliche Grundgebühr: $g_2 = 2{,}50\ €$
  - ☐ Preis pro Einheit, „Minutenpreis“: $m_2 = 0{,}05\ €$
  - ☐ Telefoneinheiten (Minuten): x
  - ☐ Monatliche Kosten: $k_2(x) = m_2 \cdot x + g_2$
- **Ab wie vielen Telefoneinheiten ist Tarif 2 günstiger?**

Günstigster Handy-Tarif



Günstigster Handy-Tarif

Gesucht
ist zunächst ein Paar $(x|y)$,
das die beiden Gleichungen

$$k_1 : y = 0{,}15x + 1 \qquad \text{(I)}$$

$$k_2 : y = 0{,}05x + 2{,}5 \qquad \text{(II)}$$

gleichzeitig erfüllt, also eine Lösung für dieses **lineare Gleichungssystem** darstellt.

Lösungsverfahren (Sek. I)

für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen (Unbekannten):

- Gleichsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Einsetzungsverfahren

Ziel

Eliminieren einer Variablen, um zu einer Gleichung mit einer Unbekannten zu kommen, die einfach gelöst werden kann.

Günstigster Handy-Tarif

(I) $y = 0{,}15 \cdot x + 1$

(II) $y = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5$

Gleichsetzungsverfahren

- Gleichsetzen von (I) und (II) liefert:

$$\begin{aligned} 0{,}15 \cdot x + 1 &= 0{,}05 \cdot x + 2{,}5 \\ 0{,}1 \cdot x &= 1{,}5 && \vert -0{,}05 \cdot x \quad \vert -1 \\ x &= 15 && \vert \cdot 10 \end{aligned}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}05 \cdot 15 + 2{,}5 \\ &= 0{,}75 + 2{,}5 \\ &= 3{,}25 \end{aligned}$$

- **Lösung:** Das geordnete Paar (15|3,25).

Additionsverfahren

- Subtraktion der Gleichung (II) von der Gleichung (I), also (I) – (II), liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= 0{,}1 \cdot x - 1{,}5 \\ 1{,}5 &= 0{,}1 \cdot x && \vert +1{,}5 \\ 15 &= x && \vert \cdot 10 \end{aligned}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}05 \cdot 15 + 2{,}5 \\ &= 0{,}75 + 2{,}5 \\ &= 3{,}25 \end{aligned}$$

- **Lösung:** Das geordnete Paar (15|3,25).

Günstigster Handy-Tarif

$$\text{(I)}\quad y = 0{,}15 \cdot x + 1$$
$$\text{(II)}\quad y = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5$$

Einsetzungsverfahren

- Auflösen der Gleichung (II) nach x liefert:

$$y = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5 \qquad |-2{,}5$$
$$y - 2{,}5 = \frac{5}{100} \cdot x \qquad |: \frac{5}{100}$$
$$20 \cdot (y - 2{,}5) = x$$

- Einsetzen in (I) liefert:

$$y = \frac{15}{100} \cdot [20 \cdot (y - 2{,}5)] + 1$$
$$y = 3 \cdot (y - 2{,}5) + 1$$
$$y = 3y - 7{,}5 + 1$$
$$y = 3y - 6{,}5 \qquad |-y \quad |+6{,}5$$
$$6{,}5 = 2y \qquad |: 2$$
$$3{,}25 = y$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$3{,}25 = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5 \qquad |-2{,}5$$
$$0{,}75 = \frac{5}{100} \cdot x \qquad |: \frac{5}{100}$$
$$15 = x$$

- **Lösung:** Das geordnete Paar (15|3,25).

Lösungen linearer Gleichungssysteme

Satz

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Die zugehörige Lösungsmenge ist entweder

- leer,
- ein geordnetes Zahlenpaar $(x|y)$ oder
- eine unendliche Menge von Zahlenpaaren.

Bemerkung

Graphisch interpretiert entsprechen diese drei Fälle genau den möglichen Lagebeziehungen der beiden durch

$$a_1x + b_1y = c_1$$

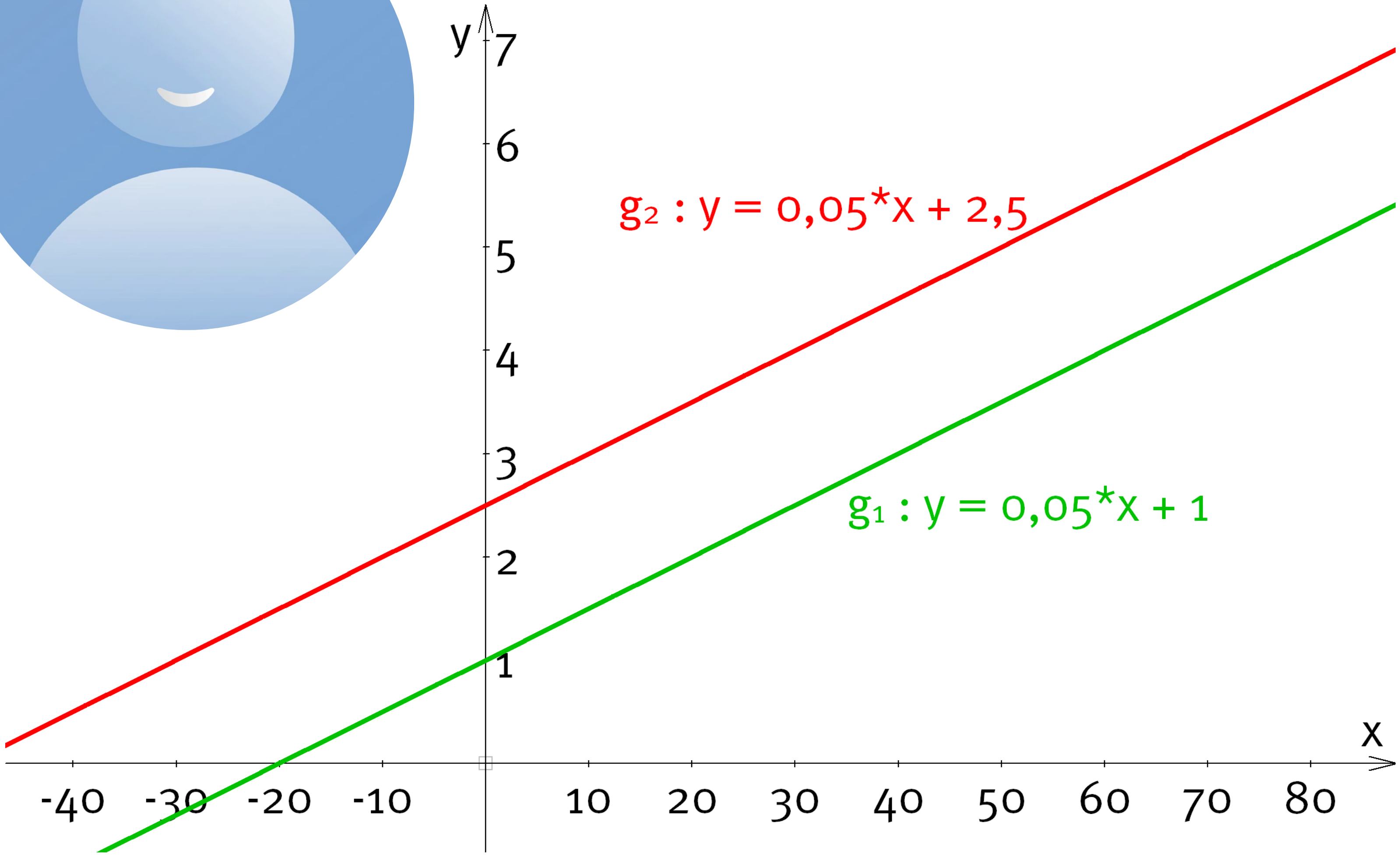
und

$$a_2x + b_2y = c_2$$

gegebenen Geraden.

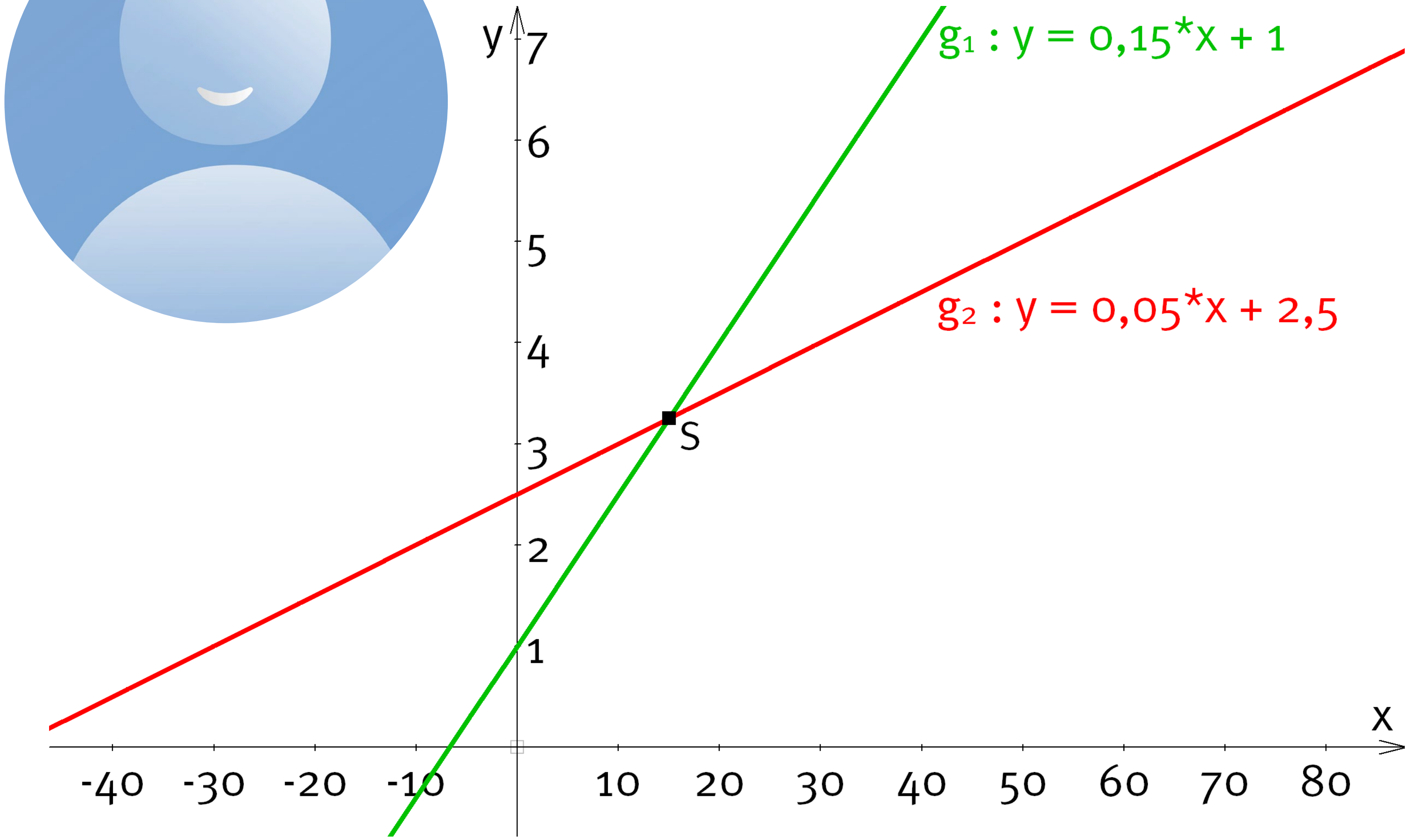
Lösungen linearer Gleichungssysteme

Die Lösungsmenge ist leer, wenn die Geraden parallel sind.



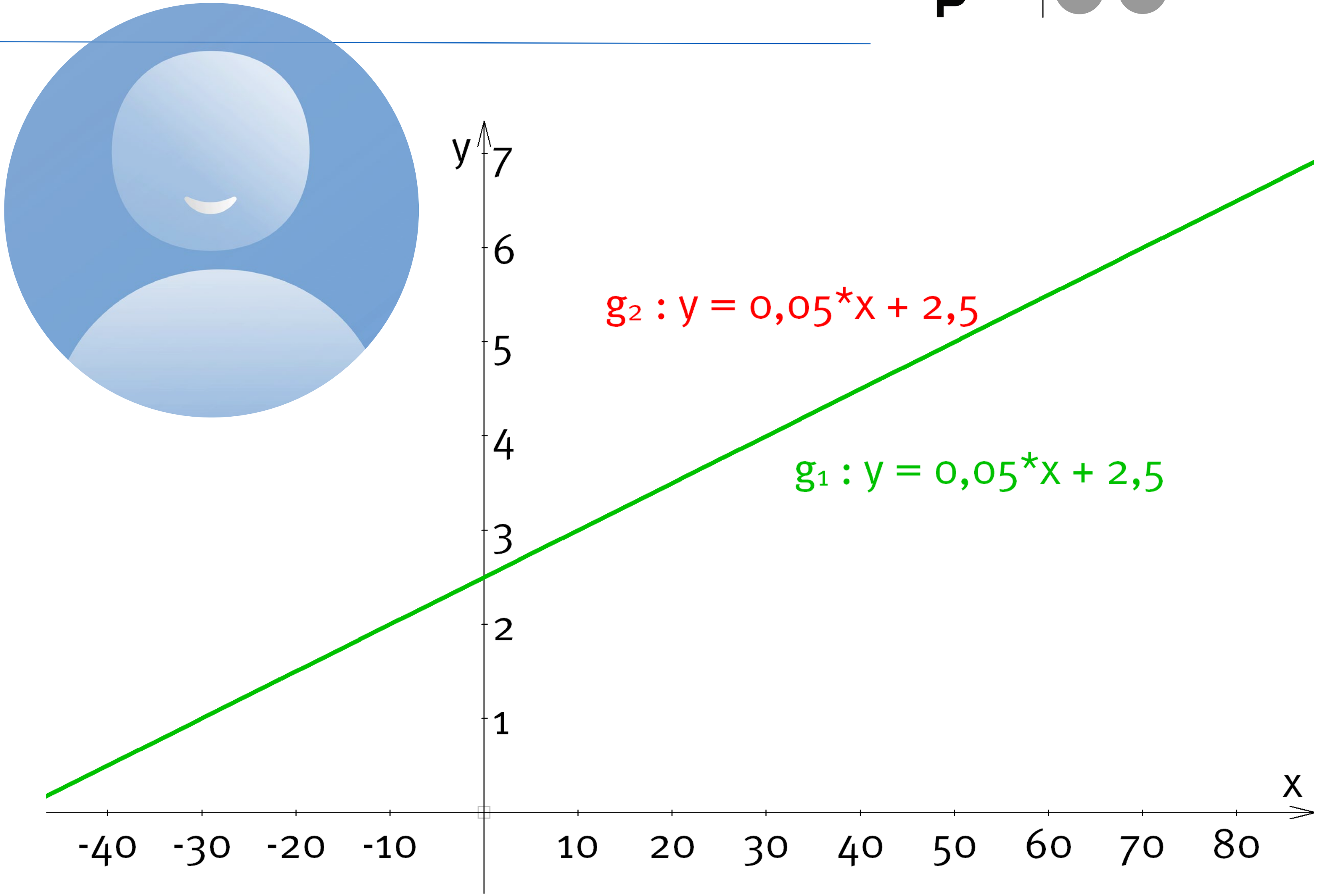
Lösungen linearer Gleichungssysteme

Die Lösungsmenge ist ein geordnetes Paar (ein Punkt), wenn die Geraden sich schneiden.



Lösungen linearer Gleichungssysteme

Die Lösungsmenge ist eine unendliche Menge von geordneten Zahlenpaaren (alle Punkte der Geraden), wenn die Geraden identisch sind.

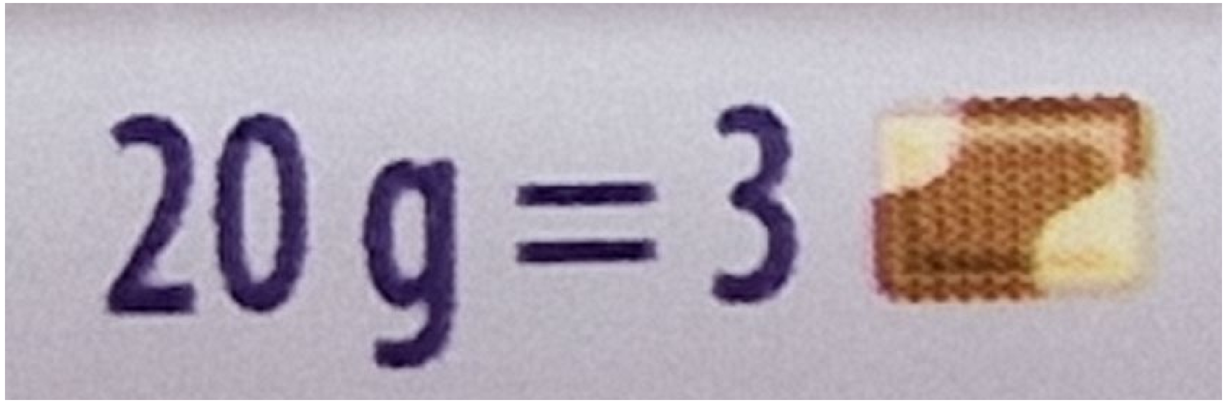


Schokolade und lineares Gleichungssystem

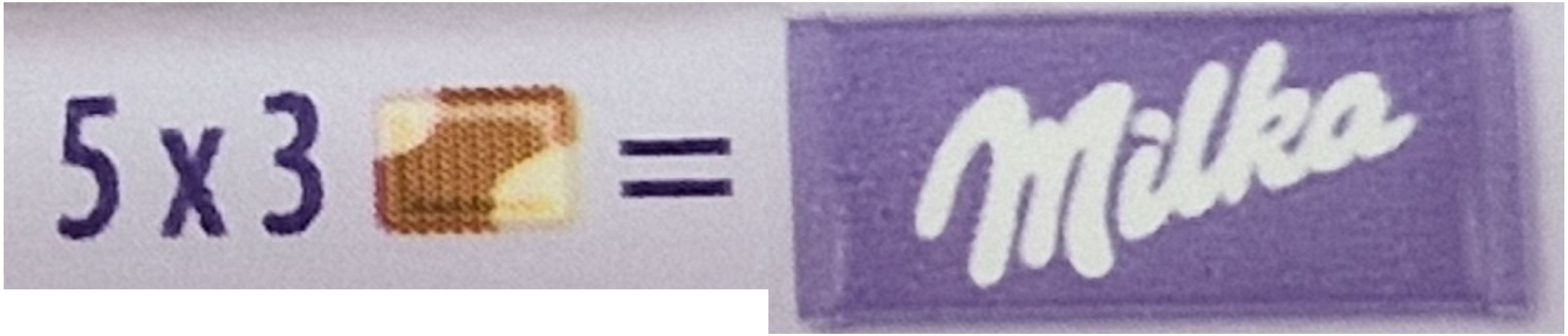
20 g = 3 | 5 x 3 = Milka

www.snackmindful.com

	100 g	20 g	%*/20 g
cukrok /	57 g	11 g	13 %



20 g = 3



5 x 3 = Milka

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU