Grundvorstellungen zur Differential- & Integralrechnung

aufbauen und wachhalten

Jürgen Roth

02.08.2023 PL, Speyer

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

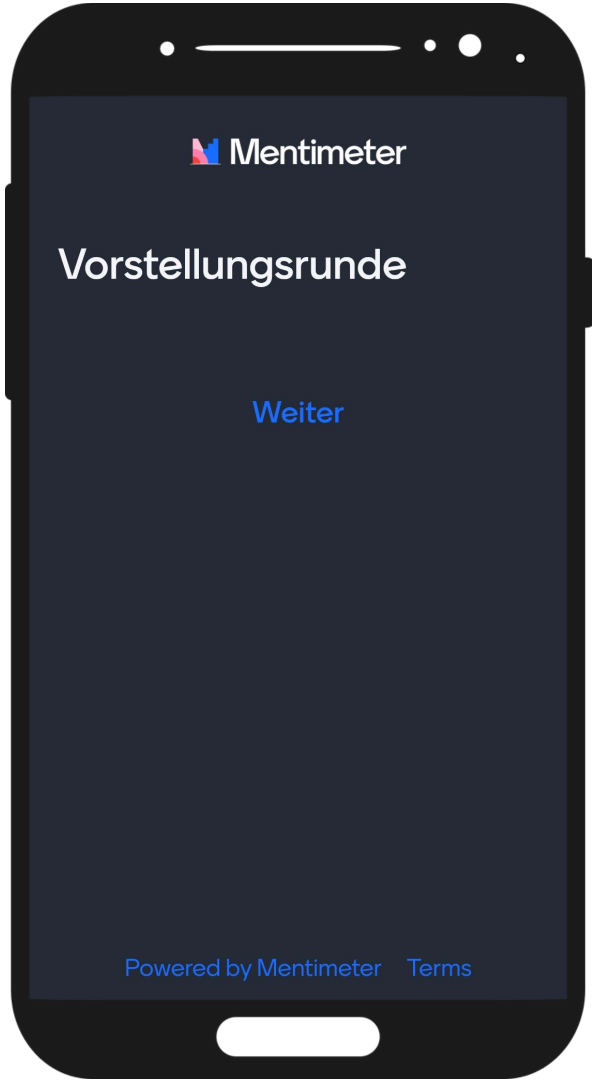
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Grundvorstellungen zur Differential- & Integralrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

1 Organisatorisches

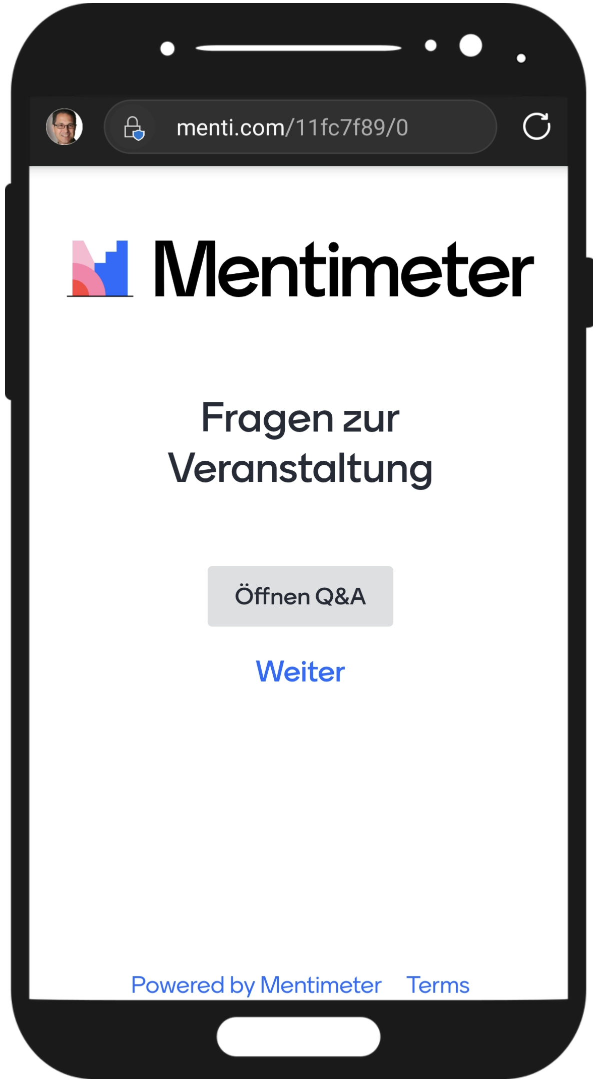
Umfrage zur Vorstellung



Fragen

- Wieviel Lehrerfahrung besitzen Sie?
  sehr wenig ↔ sehr viel
- Wieviel Erfahrung mit digitalen Lern-umgebungen im Unterricht haben Sie?
  sehr wenig ↔ sehr viel
- Wie viele Mathematik-Grundkurse haben Sie schon zum Abitur geführt?
- Wie viele Mathematik-Leistungskurse haben Sie schon zum Abitur geführt?
- Was erwarten Sie sich von der Veranstaltung?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

Organisatorisches



Materialien zur Veranstaltung

- roth.tel/hdi (ZIP-Datei)
- roth.tel/analysis (GeoGebra-Buch)

Veranstaltungsfeedback

- roth.tel/feedback

Zeitplan

Zeit	Inhalt
9:00 Uhr	Begrüßung, Organisatorisches, Vorstellungsrunde, Erfahrungen und Erwartungen
9:30 Uhr	**Grundvorstellungen zur Differentialrechnung – Teil 1**
10:45 Uhr	Kaffeepause
11:00 Uhr	**Grundvorstellungen zur Differentialrechnung – Teil 2**
12:15 Uhr	Mittagspause
13:15 Uhr	**Grundvorstellungen zur Integralrechnung – Teil 1**
14:30 Uhr	Kaffeepause
14:45 Uhr	**Grundvorstellungen zur Integralrechnung – Teil 2**
16:00 Uhr	Abschlussrunde und Veranstaltungsevaluation
16:30 Uhr	Verabschiedung und Abreise

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

dms.nuw.rptu.de

RPTU

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

Begriffsklärungen

Kompetenz

Wissen und Können, sowie die Fähigkeit und Bereitschaft diese flexibel und erfolgreich einzusetzen.

- Inhaltsbezogene Kompetenzen
- Prozessbezogene Kompetenzen

Grundvorstellung

- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

Fundamentale Ideen

- Weite (logische Allgemeinheit)
- Fülle (vielfältige Anwendbarkeit)
- Sinn (im Alltagsleben verankert)

Grundfertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

Grundwissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Formeln, Sätze, …)
- sollte auswendig gewusst werden

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- Primäre Grundvorstellungen
  haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- Sekundäre Grundvorstellungen
  werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

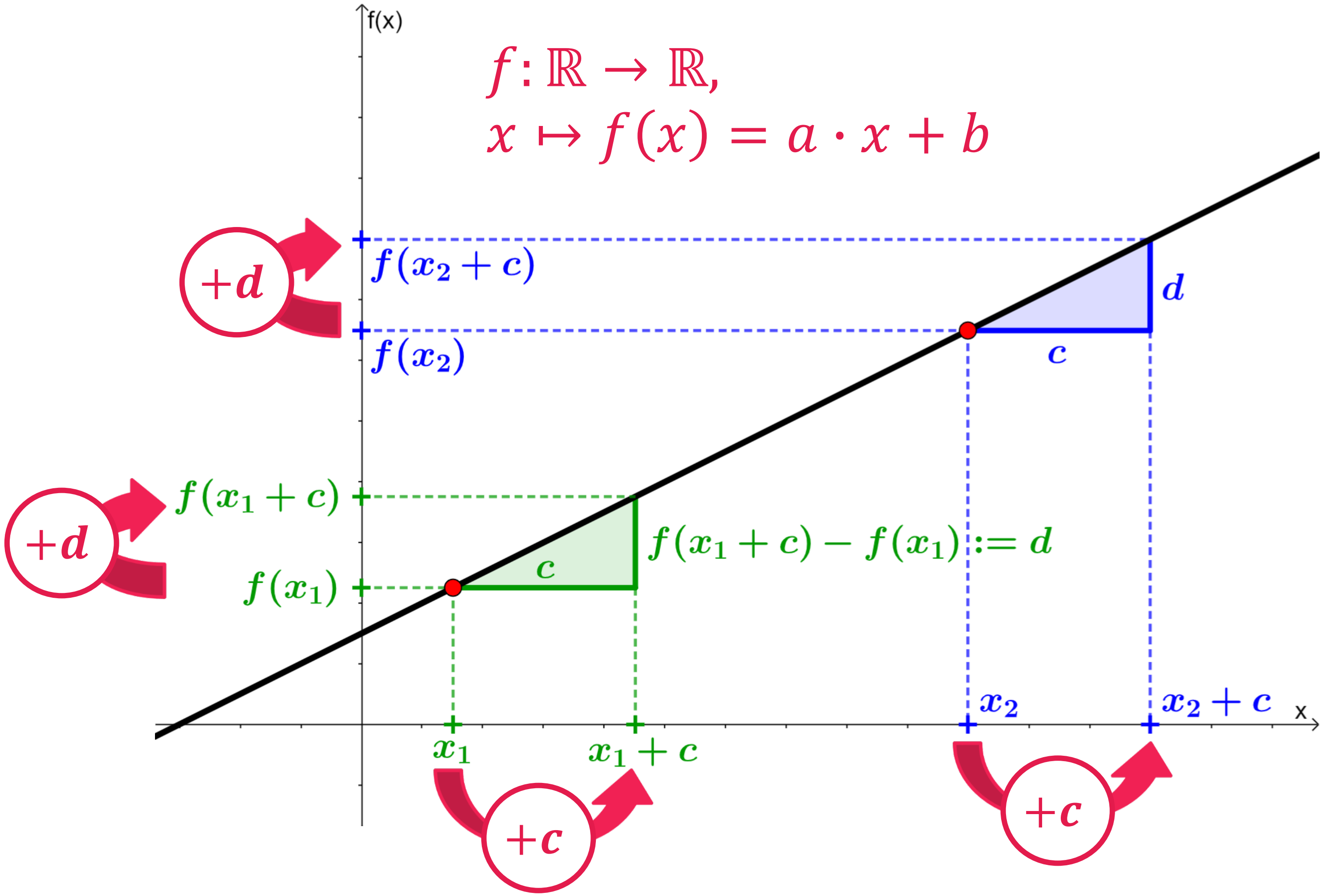
Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9

Primäre Grundvorstellungen

Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen
Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f(x + c)$$
$$= a \cdot (x + c) + b$$
$$\overset{DG}{=} a \cdot x + a \cdot c + b$$
$$\overset{KG}{=} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$
$$= f(x) + d$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Ausbilden von Grundvorstellungen: Ziele

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

 Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4-8

Verständnisanker

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Verständnisanker

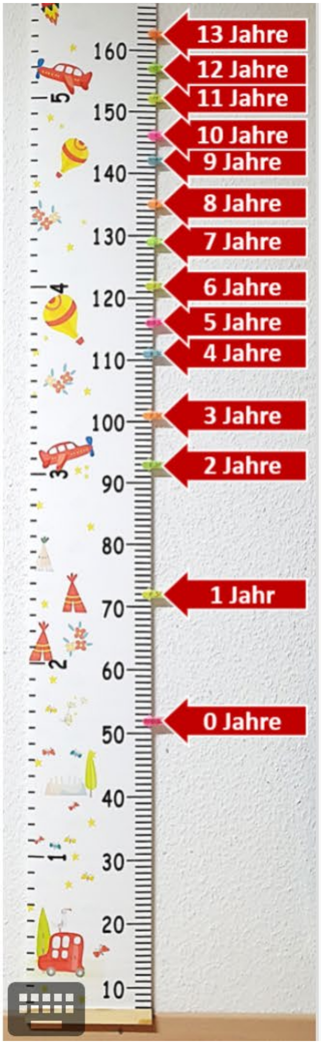
- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle für das Verständnis des mathematischen Sachverhalts wesentlichen Strukturelemente in der Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, auf den Verständnisanker zurückgreifen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel

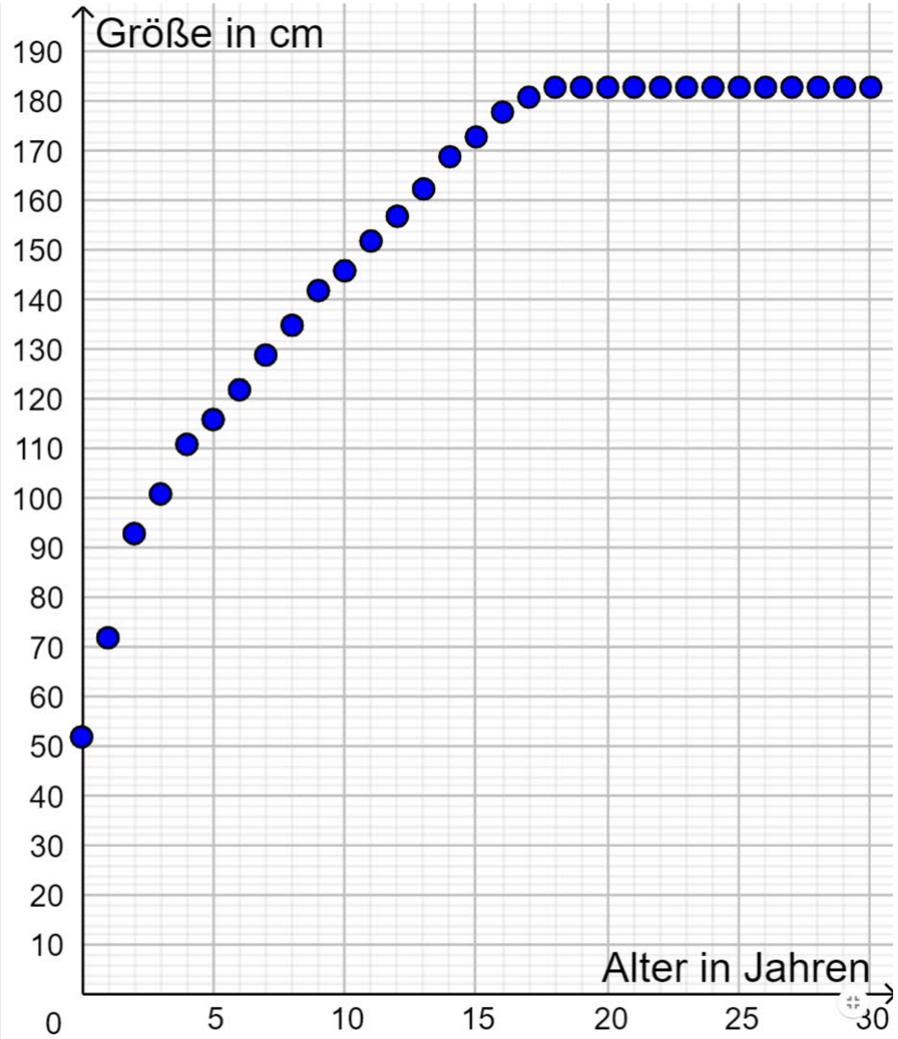
- Ein möglicher **Verständnisanker** für Grundvorstellungen zum Integral ist die Frage nach der Füllmenge eines Waschbeckens bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.
- Anhand der Waschbeckensituation können die Grundvorstellungen „Integral als Rekonstruieren des Gesamteffekts“ und „Integral als orientierter Flächeninhalt“ inhaltlich durchschaut werden.

Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. Mathematik lehren, 236, S. 6-9.

Verständnisanker für GV zu Funktionen
Zusammenhang: Alter ↦ Körpergröße



	A	B
1	Alter in Jahren	Größe in cm
2	0	52
3	1	72
4	2	93
5	3	101
6	4	111
7	5	116
8	6	122
9	7	129
10	8	135
11	9	142
12	10	146
13	11	152
14	12	157
15	13	162.5



Grundvorstellung
Zuordnung

Grundvorstellung
Kovariation

Grundvorstellung
Funktion als Ganzes

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

Vorstellungsorientierte Fähigkeiten (1)

- absolute & relative Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
- Zusammenhang zwischen mittlerer (Differenzenquotient) & momentaner Änderungsrate (Differenzialquotient) kennen, auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes beschreiben & in verschiedenen Situationen anwenden können

- Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können
- Unterschied zwischen Bestand und Änderung in Anwendungssituationen erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

 Hußmann, Prediger (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM, 52*(31), 35-38

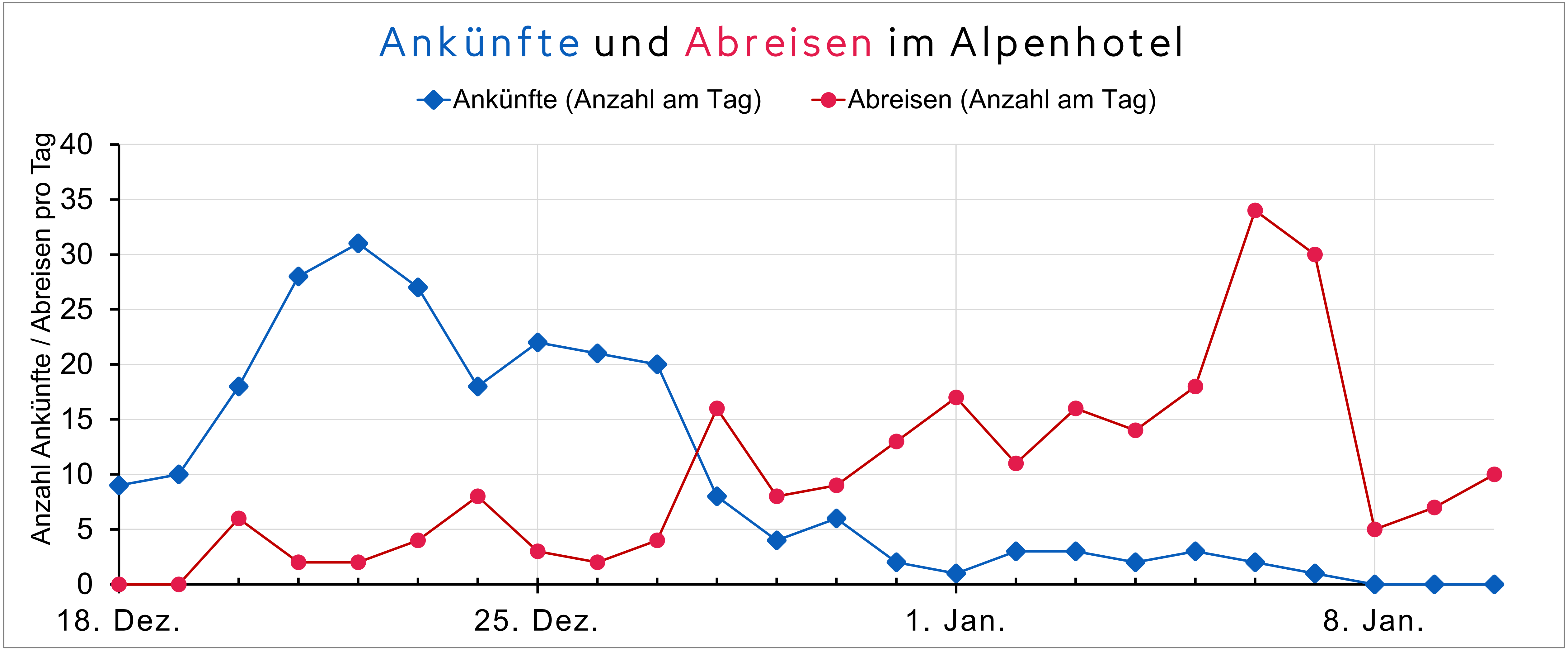
Bestand und Änderung

Bestandsgröße	Zuflüsse	Abflüsse
Anzahl der Studierenden einer Universität	Immatrikulationen	Exmatrikulationen, Ausscheiden aus der Universität
Benzinmenge im Tank	Tanken an der Tankstelle	Benzinverbrauch, Verdunstung
Kontostand	Zubuchungen	Abbuchungen
Anzahl der Gäste eines Hotels	ankommende Gäste	abreisende Gäste
Staatsverschuldung	Staatseinnahmen	Staatsausgaben

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

Bestand und Änderung

Wann waren die meisten Gäste im Hotel?



Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

https://www.geogebra.org/m/eg5dwnjy

Vorstellungsorientierte Fähigkeiten (2)

- Eigenschaften von funktionalen Zusammenhängen mit Hilfe der Ableitung beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

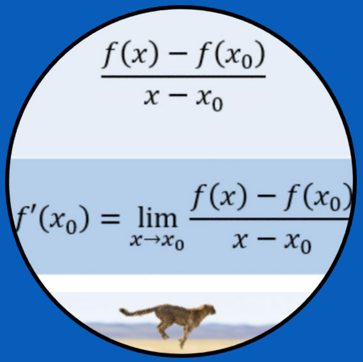
- Bestimmtes Integral in Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

- Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

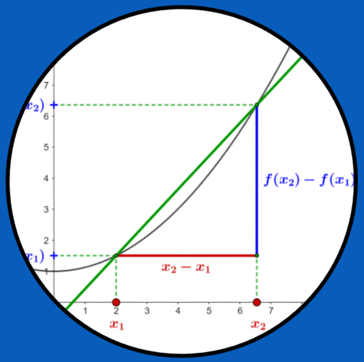
- Unterschied zwischen Änderungs-funktion & Wirkung bzw. Gesamteffekt erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

 Hußmann, Prediger (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM, 52(31)*, 35-38

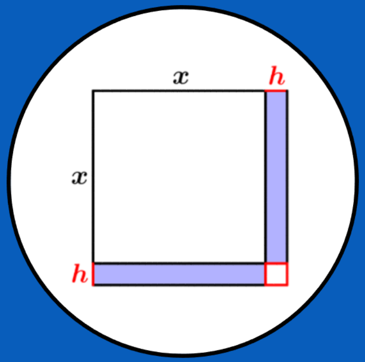
Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff



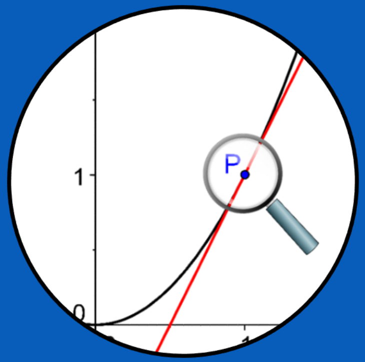
Lokale Änderungsrate



Tangenten-steigung



Verstärkungs-faktor



lokale lineare Approximation

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

- Geparden erreichen über längere Strecken eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $50 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und sind mit einer momentanen Spitzengeschwindigkeit von $93 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ die schnellsten Landtiere.
- In Versuchen wurden Hochgeschwindigkeitskameras und am Boden installierte Kraftmessplatten eingesetzt.

Wilson, A. M. et al. (2013). Locomotion dynamics of hunting in wild cheetahs, Nature, doi:10.1038/nature12295

Kernfrage

Wie bestimmt man mit den Videoaufnahmen die Geschwindigkeiten?

Simulierte Videoaufnahme: https://www.geogebra.org/m/sw7exvjk#material/xtsx9wnv

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Absolute Änderung (Zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegter Weg $\boldsymbol{w(t_2) - w(t_1)}$)

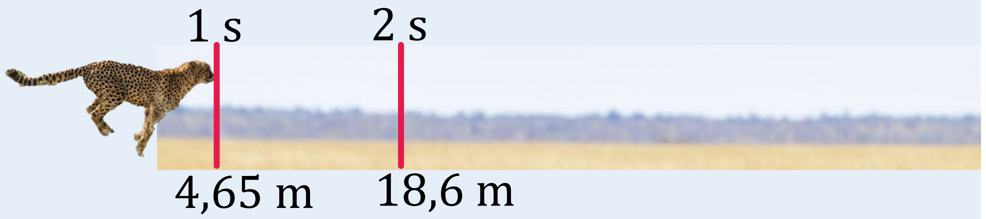
Bewegungen: Die Weg-Zeit-Funktion $t \mapsto w(t)$ ordnet jedem Zeitpunkt t den bis dahin zurückgelegten Weg w zu.

- Erste Sekunde

  $w(1\,\text{s}) - w(0\,\text{s}) = 4{,}65\,\text{m} - 0\,\text{m} = 4{,}65\,\text{m}$

- Zweite Sekunde

  $w(2\,\text{s}) - x(1\,\text{s}) = 18{,}6\,\text{m} - 4{,}65\,\text{m} = 13{,}95\,\text{m}$



- Dritte Sekunde

  $w(3\,\text{s}) - w(2\,\text{s}) = 41{,}85\,\text{m} - 18{,}6\,\text{m} = 23{,}25\,\text{m}$

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate
Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Absolute Änderung (Zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegter Weg $\boldsymbol{w(t_2) - w(t_1)}$)

- In den 2 Sekunden von $t_1 = 1\text{ s}$ bis $t_2 = 3\text{ s}$ zurückgelegter Weg:

$$w(t_2) - w(t_1)$$
$$= w(3\text{ s}) - w(1\text{ s})$$
$$= 41{,}85\text{ m} - 4{,}65\text{ m} = 37{,}2\text{ m}$$

Zeit-punkt t	zurückgelegter Weg w
0 s	0 m
1 s	4,65 m
2 s	18,6 m
3 s	41,85 m

Zeitänderung $\Delta t = 1\text{ s}$ — Wegänderung $\Delta w = 4{,}65\text{ m}$

Zeitänderung $\Delta t = 1\text{ s}$ — Wegänderung $\Delta w = 13{,}95\text{ m}$

Zeitänderung $\Delta t = 2\text{ s}$ — Wegänderung $\Delta w = 37{,}2\text{ m}$

Zeitänderung $\Delta t = 1\text{ s}$ — Wegänderung $\Delta w = 23{,}25\text{ m}$

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Relative Änderung / Änderungsrate (Durchschnittsgeschwindigkeit)

- Um die mittleren Geschwindigkeiten in unterschiedlich langen Zeitintervallen $[t_1, t_2]$ und $[t_3, t_4]$ vergleichen zu können, muss man die Wegdifferenz $w(t_2) - w(t_1)$ auf die zugehörige Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ beziehen:

$$\frac{w(t_2) - w(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- Im Zeitintervall $[1\text{ s}, 2\text{ s}]$ werden im Mittel $\frac{18{,}6\text{ m} - 4{,}65\text{ m}}{2\text{ s} - 1\text{ s}} = \frac{13{,}95\text{ m}}{1\text{ s}} = 13{,}95\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also $13{,}95\text{ m}$ pro Sekunde zurückgelegt.

- Im Zeitintervall $[1\text{ s}, 3\text{ s}]$ werden im Mittel $\frac{41{,}85\text{ m} - 4{,}65\text{ m}}{3\text{ s} - 1\text{ s}} = \frac{37{,}2\text{ m}}{2\text{ s}} = 18{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also $18{,}6\text{ m}$ pro Sekunde zurückgelegt.

- Im Zeitintervall $[1\text{ s}, 3\text{ s}]$ ist die *mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit)* mit $18{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ also höher als im Zeitintervall $[1\text{ s}, 2\text{ s}]$ mit $13{,}95\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lokale Änderungsrate (Momentangeschwindigkeit)

- Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit (lokale Änderungsrate) zu einem Zeitpunkt $t_0 = 2\text{ s}$?
- Idee
  Mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen betrachten, die $t_0 = 2\text{ s}$ als Intervallgrenze besitzen.

Zeitintervall $[t_1, t_0]$	Mittlere Geschw. $\frac{w(t_0)-w(t_1)}{t_0-t_1}$ im Zeitintervall $[t_1, t_0]$
$[1\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 4{,}65\text{ m}}{2\text{ s} - 1\text{ s}} = 13{,}95\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1{,}9\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 16{,}7865\text{ m}}{2\text{ s} - 1{,}9\text{ s}} = 18{,}135\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1{,}99\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 18{,}41447\text{ m}}{2\text{ s} - 1{,}99\text{ s}} = 18{,}553\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1{,}999\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 18{,}5814046\text{ m}}{2\text{ s} - 1{,}999\text{ s}} = 18{,}5954\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zeitintervall $[t_0, t_2]$	Mittlere Geschw. $\frac{w(t_2)-w(t_0)}{t_2-t_0}$ im Zeitintervall $[t_0, t_2]$
$[2\text{ s}; 3\text{ s}]$	$\frac{41{,}85\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{3\text{ s} - 2\text{ s}} = 23{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[2\text{ s}; 2{,}1\text{ s}]$	$\frac{20{,}065\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{2{,}1\text{ s} - 2\text{ s}} = 19{,}065\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[2\text{ s}; 2{,}01\text{ s}]$	$\frac{18{,}78647\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{2{,}01\text{ s} - 2\text{ s}} = 18{,}647\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[2\text{ s}; 2{,}001\text{ s}]$	$\frac{18{,}61860465\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{2{,}001\text{ s} - 2\text{ s}} = 18{,}6065\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Lokale Änderungsrate

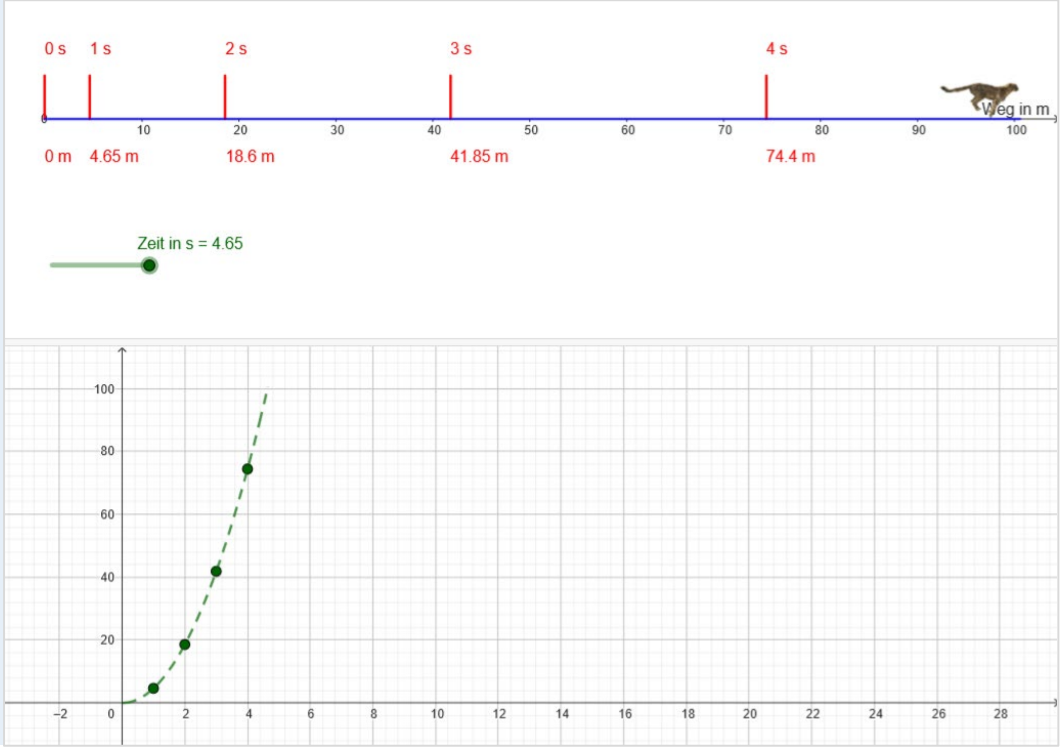
Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Momentangeschwindigkeit

- Je kleiner das Intervall $[t_0, t]$ wird, je näher also t an $\boldsymbol{t_0 = 2\,\mathrm{s}}$ heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit dem Wert $18{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Sie kommt ihm beliebig nahe.
- Jede andere Annäherung an den Zeitpunkt $\boldsymbol{t_0 = 2\,\mathrm{s}}$ führt zur selben Momentangeschwindigkeit.

Modellierung des Zusammenhangs

- Messwerte in Graph darstellen und Trendlinie einzeichnen lassen
- Vermutung: Parabelast, also quadratischer Zusammenhang $w(t) = a \cdot t^2$
- Setze a als unbekannten Parameter



Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Momentangeschwindigkeit

$w(t) = a \cdot t^2$

- Ist t ein benachbarter Zeitpunkt von $\mathbf{t_0 = 2\ s}$, dann ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[2\ \mathrm{s}, \mathrm{t}]$ der Wert:

$$\frac{w(t) - w(2\ \mathrm{s})}{t - 2\ \mathrm{s}} = \frac{a \cdot (t^2 - (2\ \mathrm{s})^2)}{t - 2\ \mathrm{s}} = a \cdot \frac{(t + 2\ \mathrm{s}) \cdot (t - 2\ \mathrm{s})}{t - 2\ \mathrm{s}} = a \cdot (t + 2\ \mathrm{s})$$

- $a \cdot (2\ \mathrm{s} + t)$ kommt dem Wert $18{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beliebig nahe, wenn t genügend nahe bei $2\ \mathrm{s}$ liegt

Lokale Änderungsrate

- Damit ist die *Momentangeschwindigkeit* (lokale Änderungsrate) zum Zeitpunkt $t_0 = 2\ \mathrm{s}$ bestimmt. Sie beträgt hier $18{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- Der Parameter a lässt sich damit bestimmen zu $a = \frac{18{,}6\ \frac{m}{s}}{2\ s + 2\ s} = 4{,}65\ \frac{m}{s^2}$.
- Überprüfen durch Eingeben der Funktionsgleichung in GeoGebra.

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Vorteile

des Zugangs zum Ableitungsbegriff als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate:

- Kinematischer Kontext ist Teil der Alltagserfahrungen von Jugendlichen. (Straßenverkehr, Computerspiele, Sport, …)
- Zeitliche Änderung von Geschwindigkeiten → Zugang zum Begriff Momentanbeschleunigung
- Das Beispiel ist als universelles Modell überall tragfähig, wo ein Änderungsverhalten punktuell beschrieben werden soll.
- Anschlussfähig an anderen Grundvorstellungen

Geparden beschleunigen auch am besten und können innerhalb eines einzelnen Schrittes knapp $11\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an Tempo hinzugewinnen.

Unterrichtsreihe zur Einführung in die Differentialrechnung als Moodle-Kurs, der vor allem die beiden Grundvorstellungen *Tangentensteigung* und *lokale Änderungsrate* berücksichtigt und mehrfach im Unterricht erprobt wurde. Er kann online genutzt, sowie heruntergeladen und in die eigene Moodle-Plattform eingebunden werden.

Schulcampus RLP

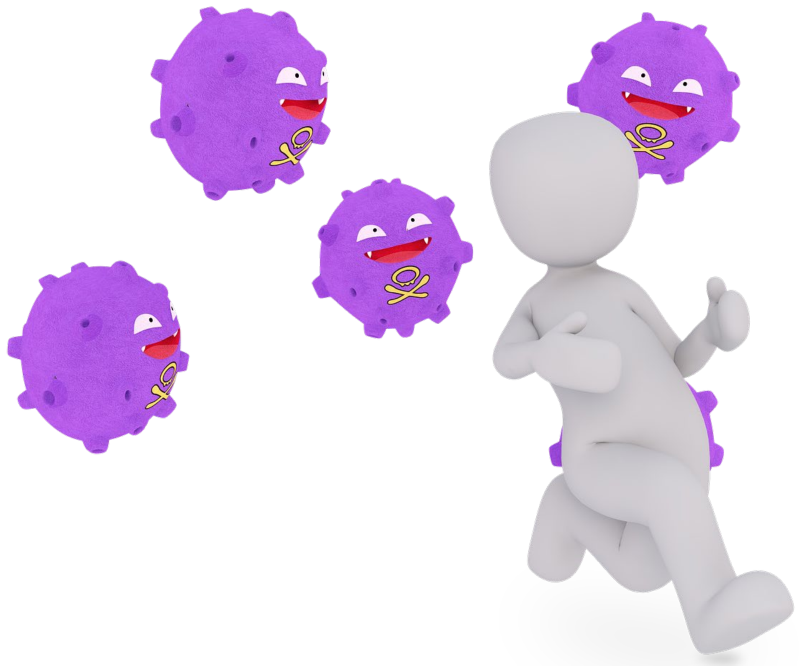
https://dms.nuw.rptu.de/akmss/

Zusammenfassung:
Ableitung als lokale Änderungsrate

Formale Darstellung	Inhaltliche Erläuterung	
$f(x_0)$	Bestand	Bis zum Zeitpunkt x_0 zurückgelegter Weg.
$f(x) - f(x_0)$	absolute Änderung	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg.
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	relative Änderung / (mittlere) Änderungsrate	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg bezogen auf die Zeitspanne $x - x_0$. (Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[x_0, x]$)
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	momentane / lokale Änderungsrate	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Grippewelle



Die Funktion f beschreibt die Anzahl $f(t)$ der an Grippe erkrankten Menschen in Anhängigkeit von der Zeit t.

a) Erläutern Sie die Bedeutung der Funktion $f'(t)$.

b) Erklären Sie, was der Funktionswert $f'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 inhaltlich bedeutet.

R
TU Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
P Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

Ableitung als Tangentensteigung

Schritte bei diesem Zugang

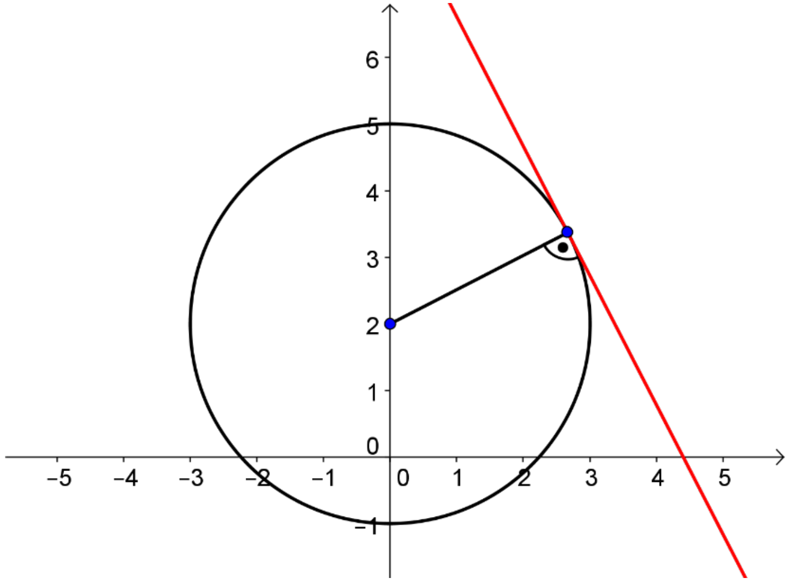
- **1. Schritt:**
  Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P
- **2. Schritt:**
  Tangente als Grenzlage von Sekanten
- **3. Schritt:**
  Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Zu beachten ist:

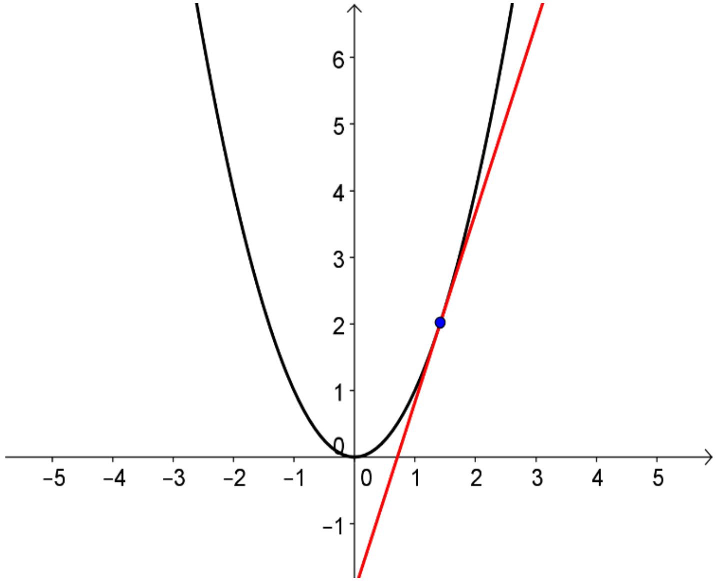
- **1. Schritt:**
  Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff

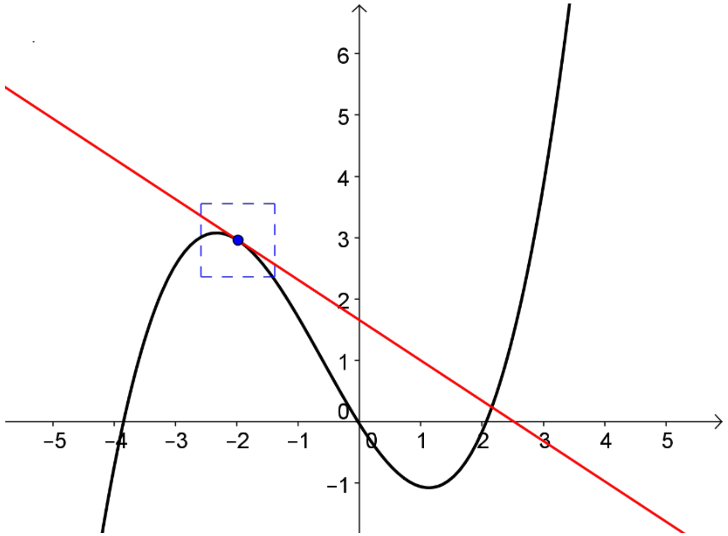
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Was ist eine Tangente?



Geometrische Sichtweise:
Tangente als globale Stützgerade





Analytische Sichtweise:
Tangente als lokale Schmieggerade

https://www.geogebra.org/m/sw7exvjk#material/JQAzj4Eu

Tangentensteigung

Schritte bei diesem Zugang

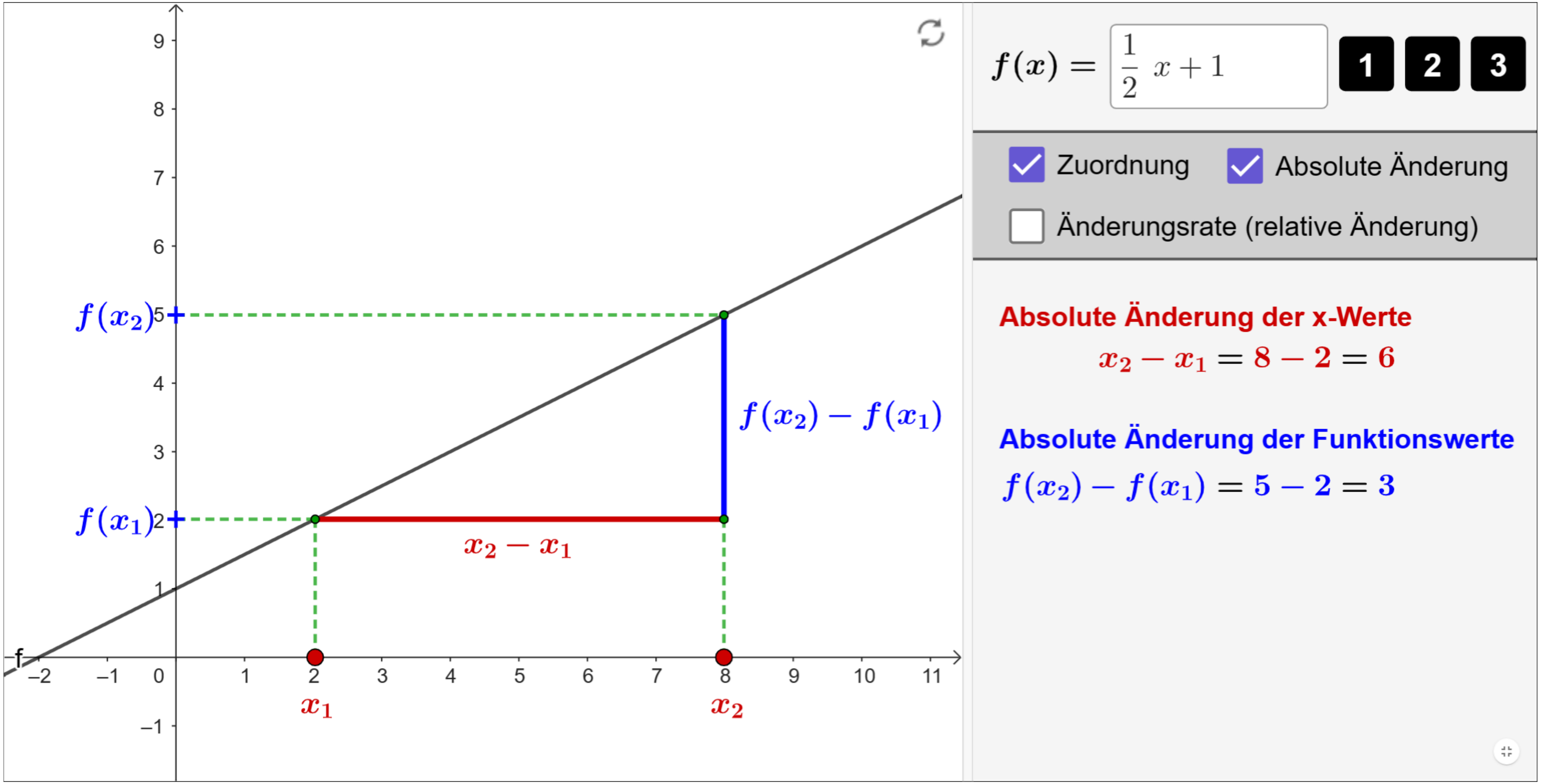
- 1. Schritt:
  Definition der Steigung der Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P
- 2. Schritt:
  Tangente als Grenzlage von Sekanten
- 3. Schritt:
  Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Zu beachten ist:

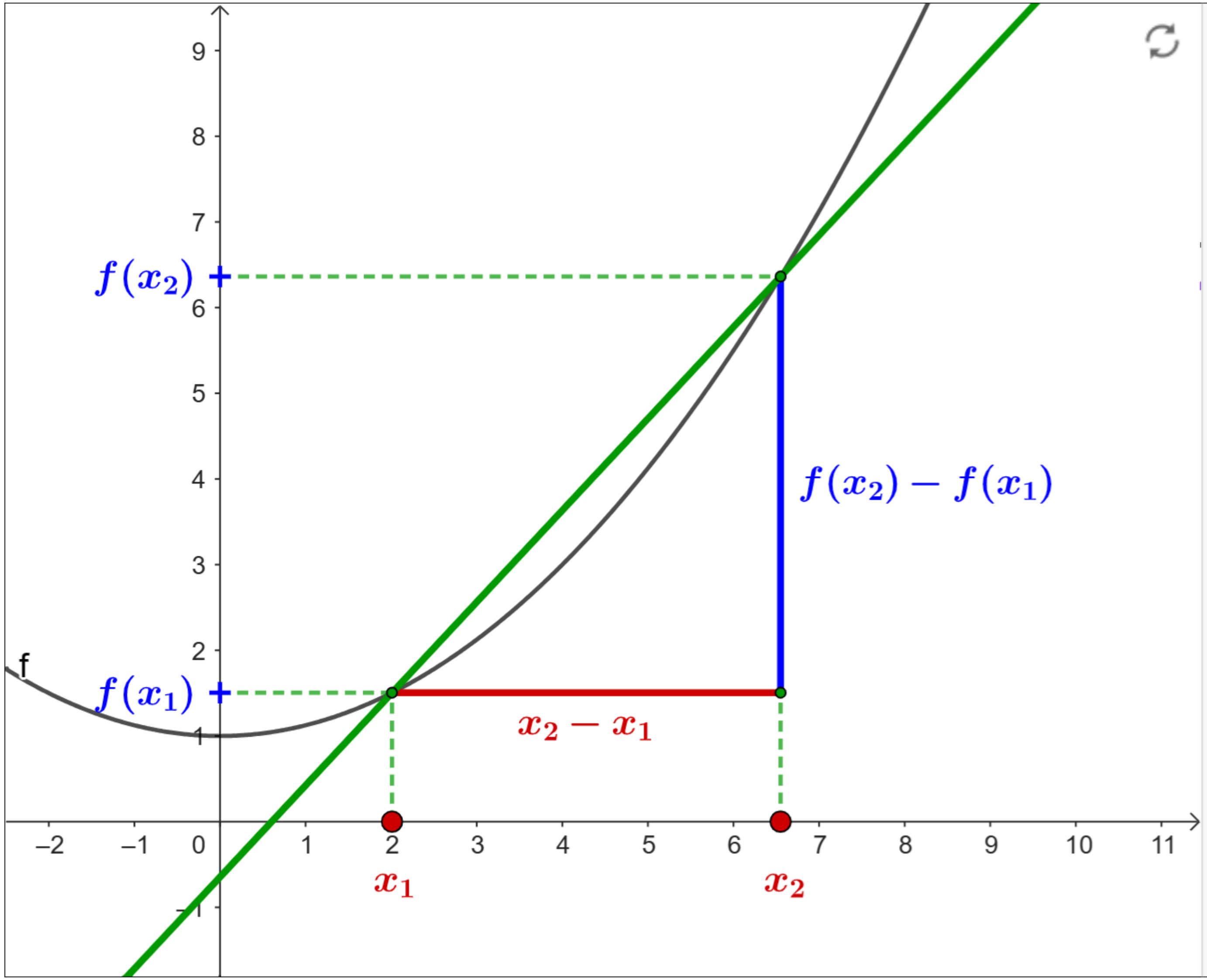
- 1. Schritt:
  Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff
- 2. Schritt:
  Liegt quer zur Schmieg-Vorstellung der Tangente
- 3. Schritt:
  Gibt es überhaupt einen Grenzfall von Sekanten? Eine Gerade durch einen Punkt ist gar nicht eindeutig festgelegt.

 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Vorwissen reaktivieren: Geradensteigung



Lokale Steigung als Tangentensteigung



$f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$ 1 2 3

- [x] Zuordnung
- [x] Absolute Änderung
- [x] Änderungsrate (relative Änderung)

Absolute Änderung der x-Werte

$$x_2 - x_1 = 6.6 - 2 = 4.5$$

Absolute Änderung der Funktionswerte

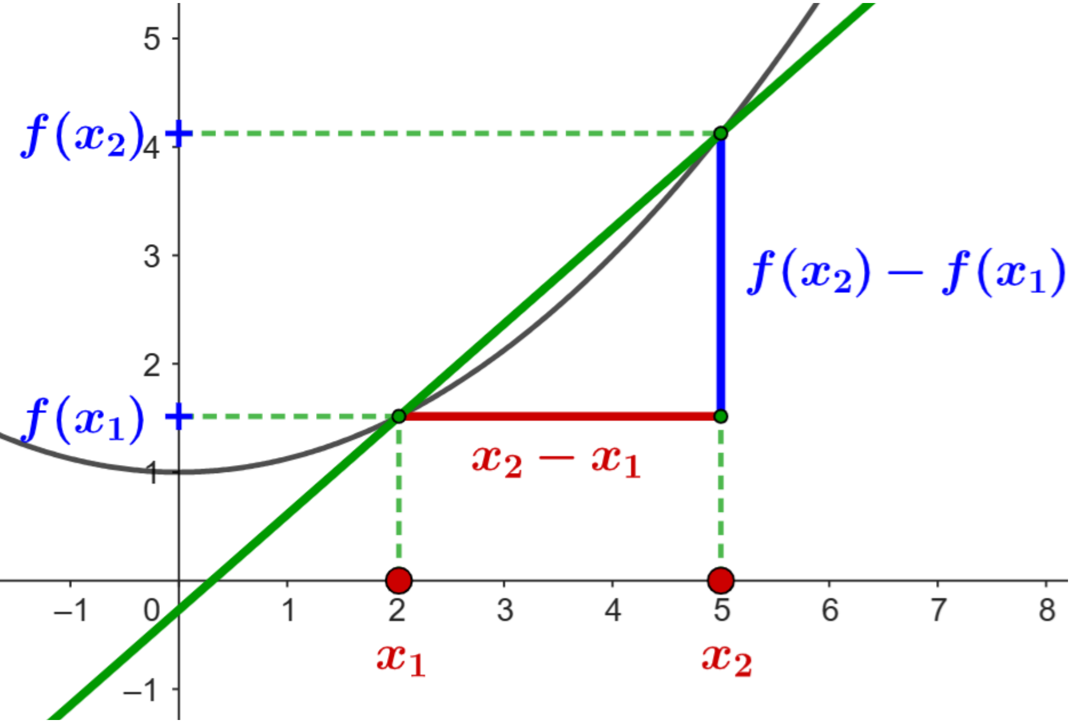
$$f(x_2) - f(x_1) = 6.4 - 1.5 = 4.9$$

Änderungsrate (Relative Änderung)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{6.4 - 1.5}{6.6 - 2} = 1.1$$

- [x] Sekante
- [ ] Tangente

Tangente als Grenzlage von Sekanten



Sprechweise

Die Sekantensteigung kommt der Zahl $\frac{1}{2}$ beliebig nahe, wenn x_2 gegen $x_1 = 2$ strebt.

Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + 1$

- Gesucht: Tangentensteigung an der Stelle $x_1 = 2$
- Sekantensteigung:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{8} \cdot x_2^2 + 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot 2^2 + 1\right)}{x_2 - 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \cdot (x_2^2 - 4)}{x_2 - 2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot (x_2 + 2) \cdot (x_2 - 2)}{x_2 - 2}$$

$x_2 \neq 2$

$$= \frac{1}{8} \cdot (x_2 + 2)$$

- Tangentensteigung:

$$\lim_{x_2 \to 2} \frac{f(x_2) - f(2)}{x_2 - 2} = \lim_{x_2 \to 2} \frac{\frac{1}{8} \cdot (x_2 + 2) \cdot (x_2 - 2)}{x_2 - 2}$$

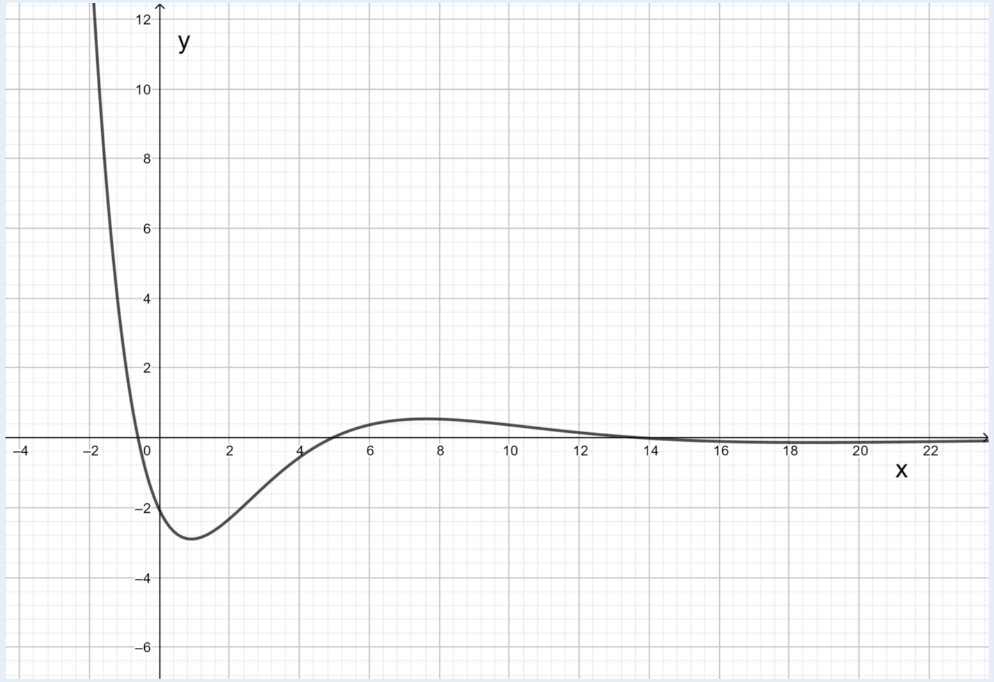
$$= \lim_{x_2 \to 2} \frac{1}{8} \cdot (x_2 + 2) = \frac{1}{2}$$

Graph von f' und f ↔ Grundvorstellung?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

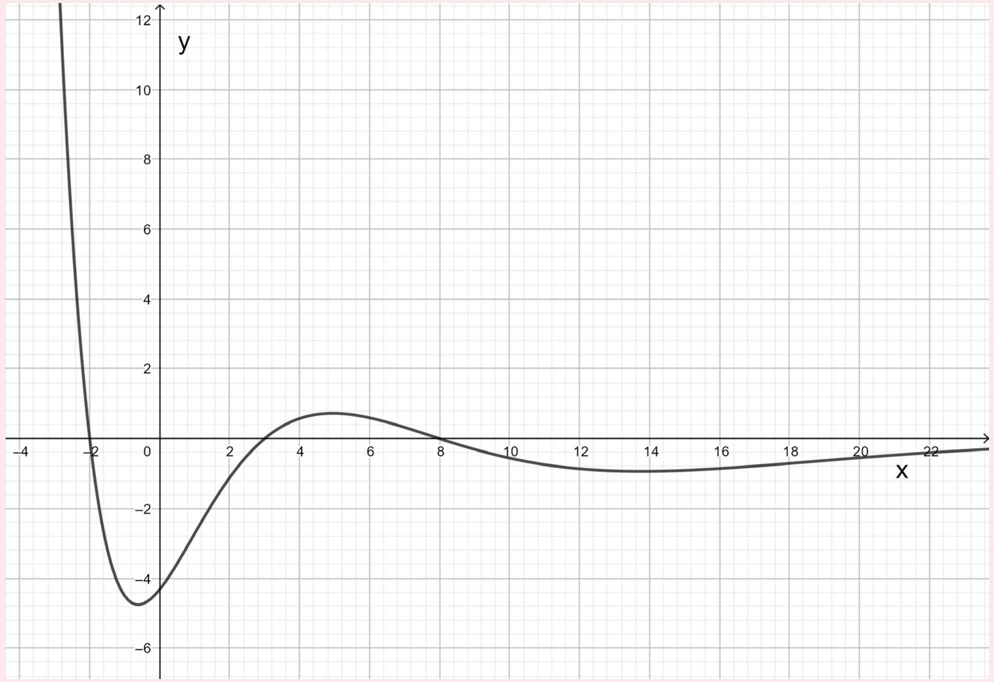
Aufgabe 5

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein



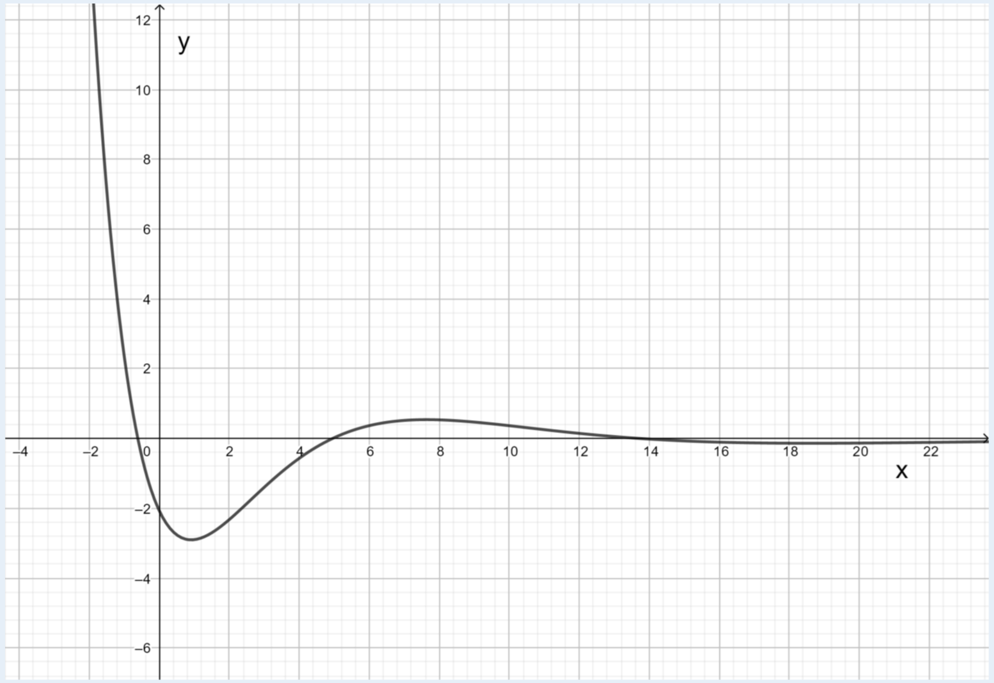
 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und $f \leftrightarrow$ Grundvorstellung?

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

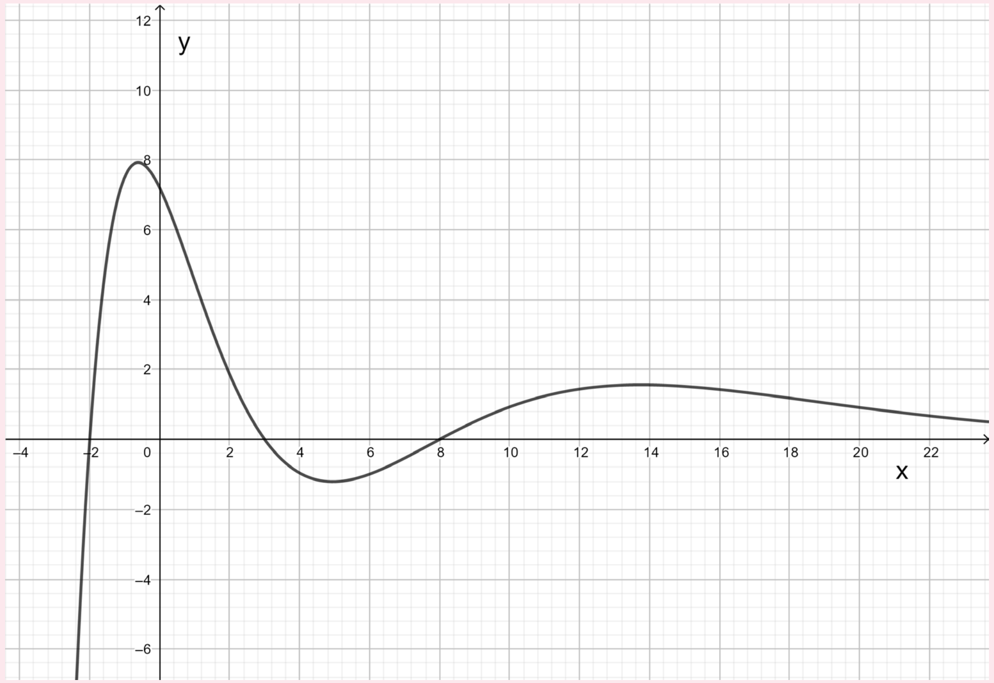
Aufgabe 5

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

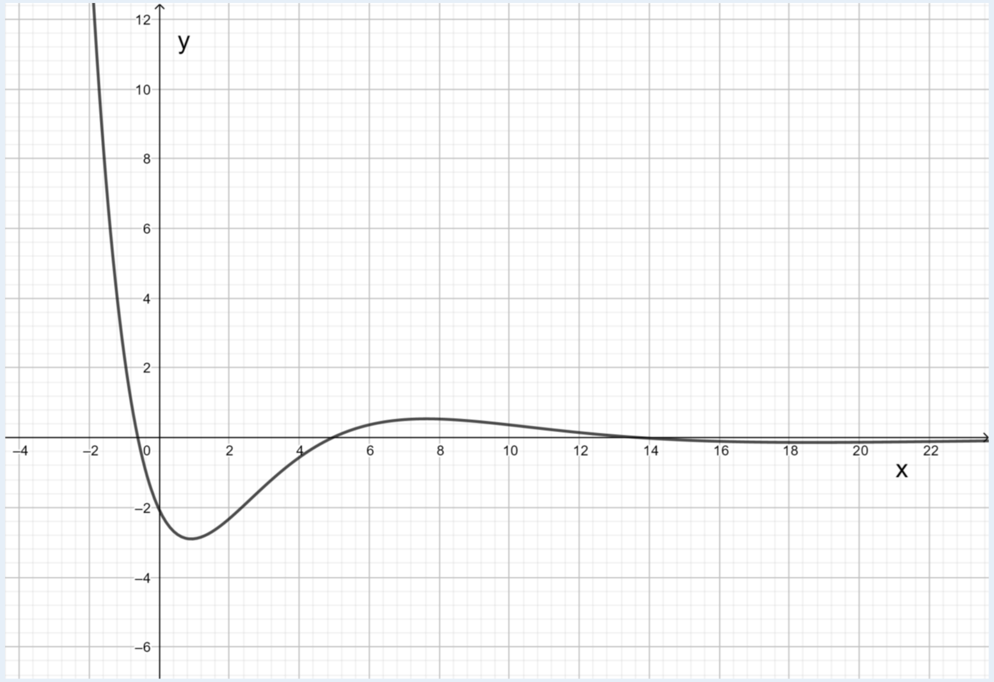
☐ Ja ☐ Nein



Graph von f' und f ↔ Grundvorstellung?

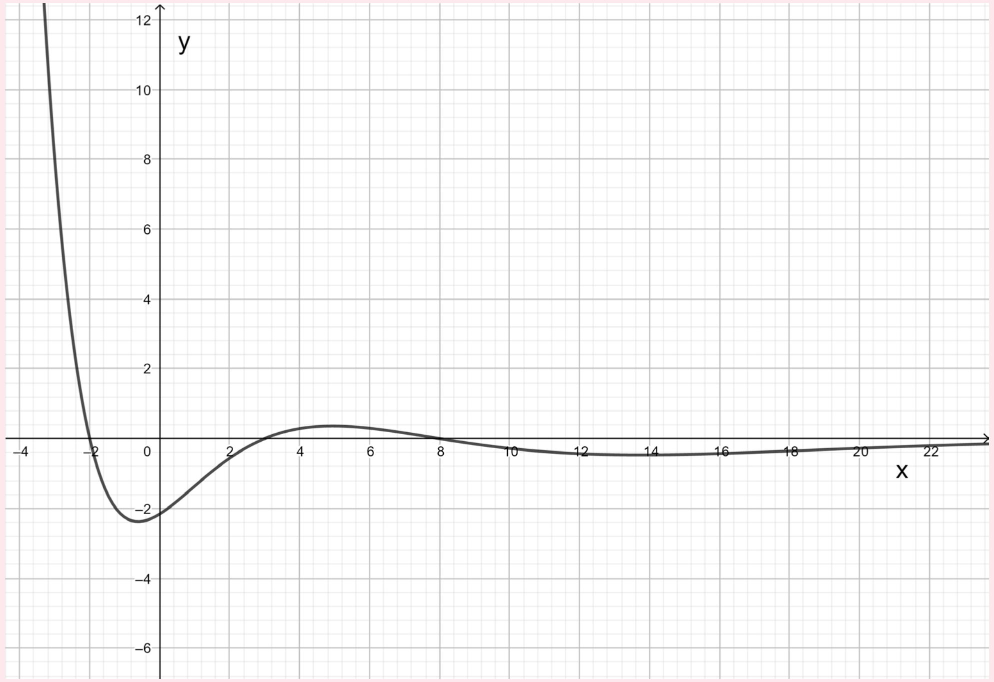
Aufgabe 5

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein



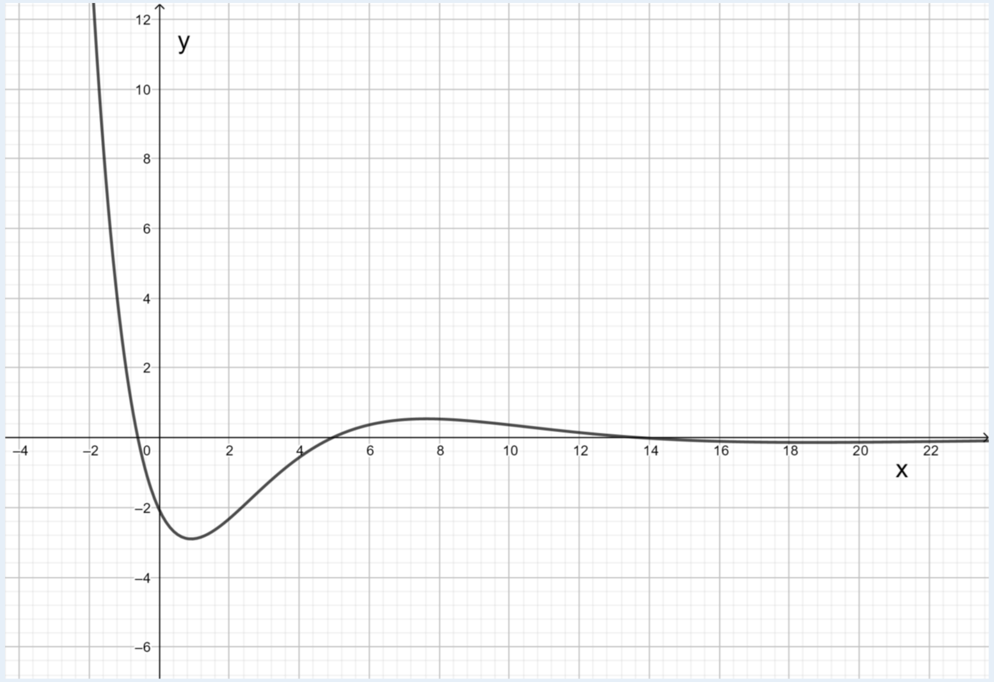
 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und $f \leftrightarrow$ Grundvorstellung?

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

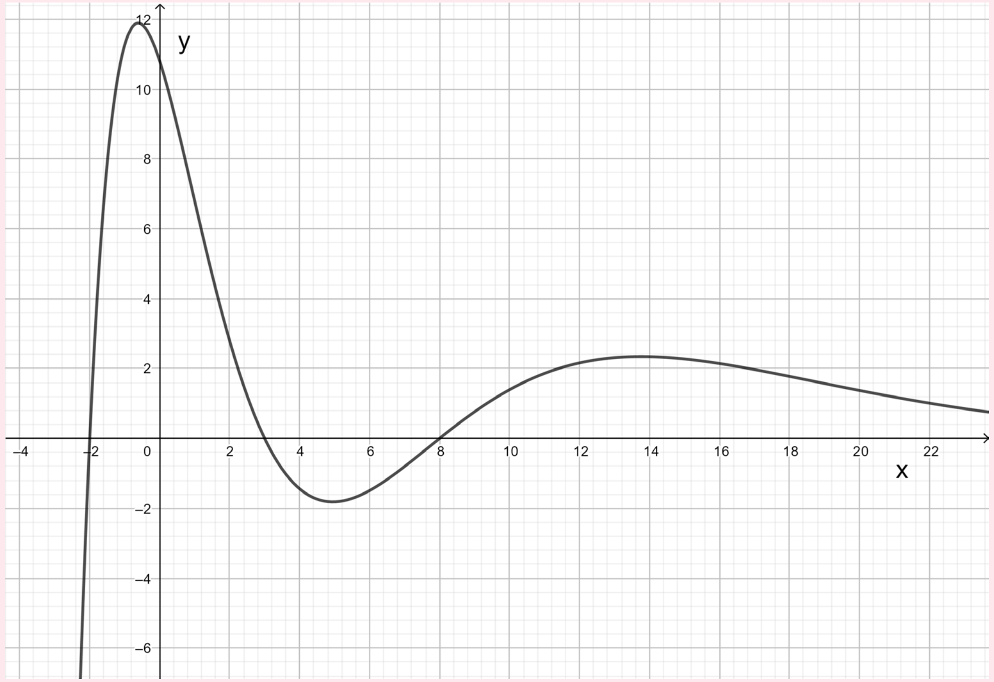
Aufgabe 5

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein



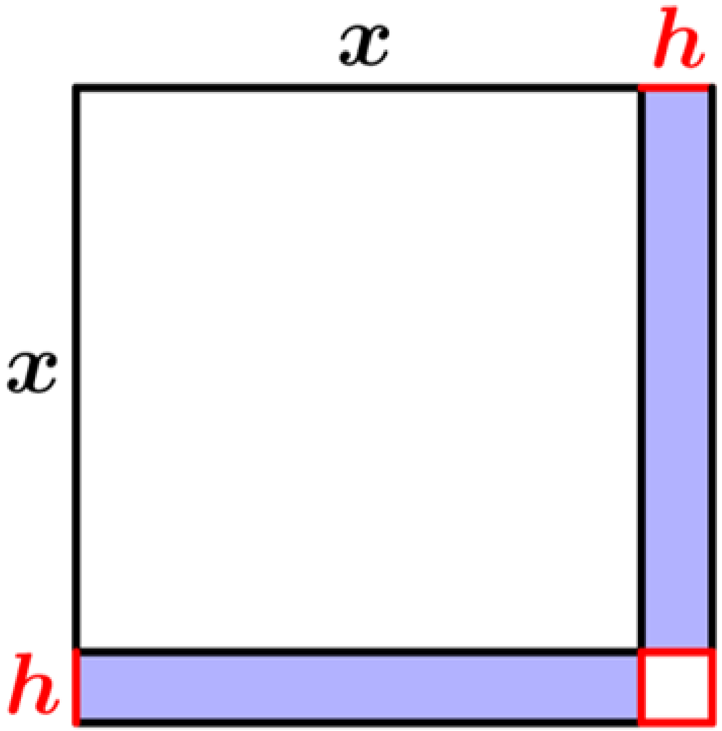
Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

Ableitung als Verstärkungsfaktor



Wichtige Aspekte der Grundvorstellung Ableitung als Verstärkungsfaktor

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen Größe auf die abhängige Größe auswirkten.
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle bzw. starke Änderung der Funktionswerte.
- Für kleine Änderungen Δx ist der Zusammenhang von Δx und Δy multiplikativ:

$$\Delta y \approx \underbrace{f'(x)}_{\text{Verstärkungsfaktor}} \cdot \Delta x$$

Greefrath, G. et al. (2016). Didaktik der Analysis – Aspekte & Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Spektrum, 151ff
https://www.geogebra.org/m/rtqcnjrr

Ableitung als Verstärkungsfaktor

Inhaltlicher Zugang zur Ableitungsregel $(x^2)' = 2x$

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Analog für $(x^3)' = 3x^2$

$(x^2)' = 2x$ wird oft rein syntaktisch verstanden.

Inhaltlich

- „Warum ist die lokale Änderungsrate des Flächeninhalts eines Quadrats der Kantenlänge x gleich seinem halben Umfang?"

Absolute Änderung des Flächeninhalts

- Für kleine h im Wesentlichen die schattierten Rechtecke.

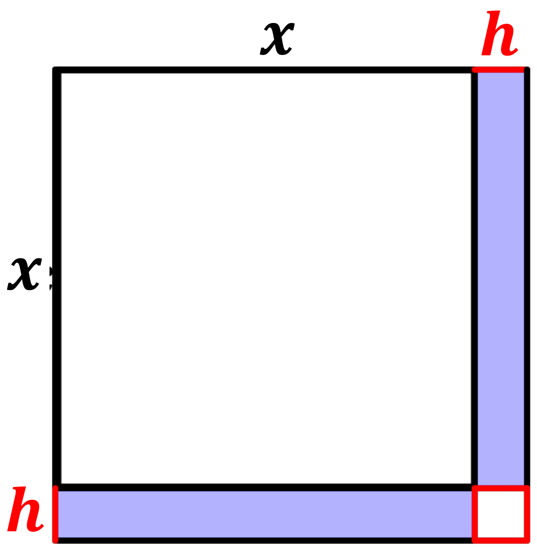
Relative Änderung des Flächeninhalts (mittlere Änderungsrate)

- Folgende Näherung ist beliebig gut, wenn h hinreichend klein ist:

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h \approx 2x$$

- Das ist im Wesentlichen der halbe Umfang des Quadrats.

Für kleine Änderungen Δx gilt:
$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x = 2x \cdot h$



Greefrath, G. et al. (2016). Didaktik der Analysis – Aspekte & Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Spektrum, 151ff
https://www.geogebra.org/m/rtqcnjrr

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

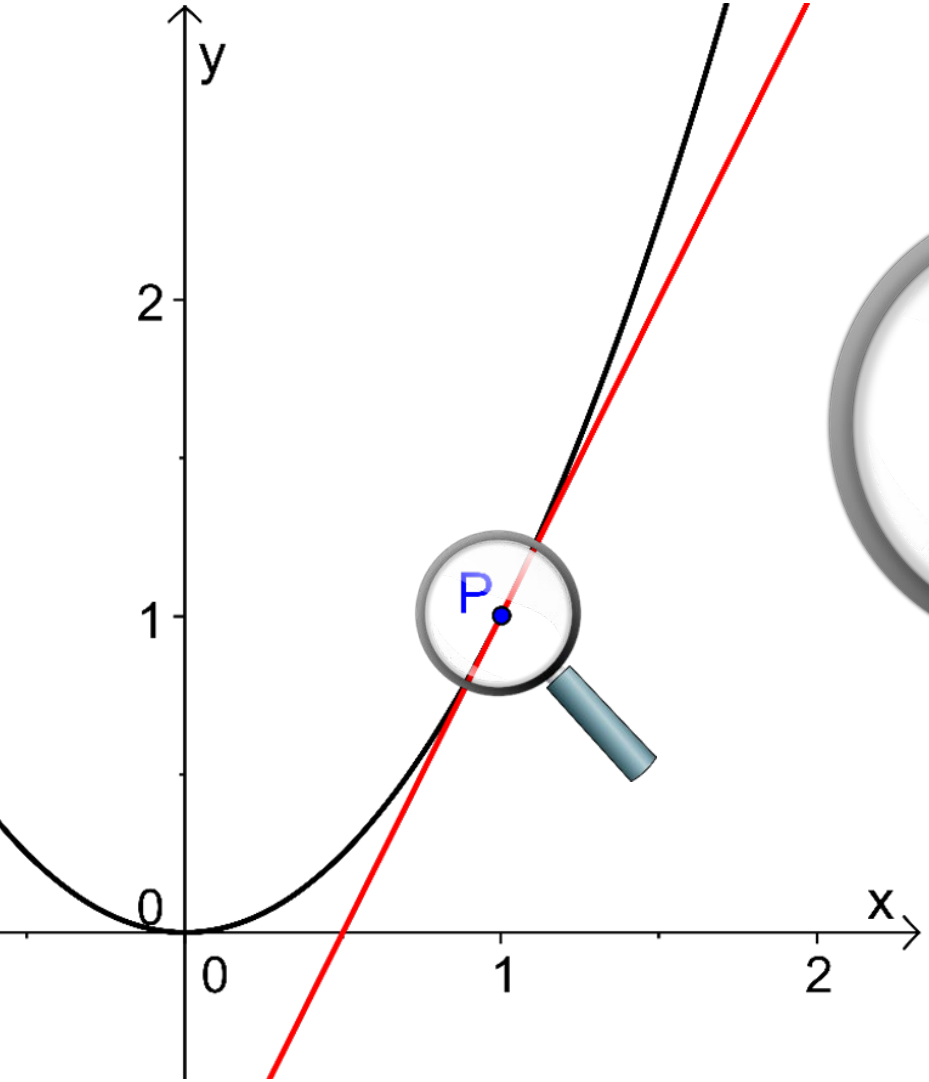
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

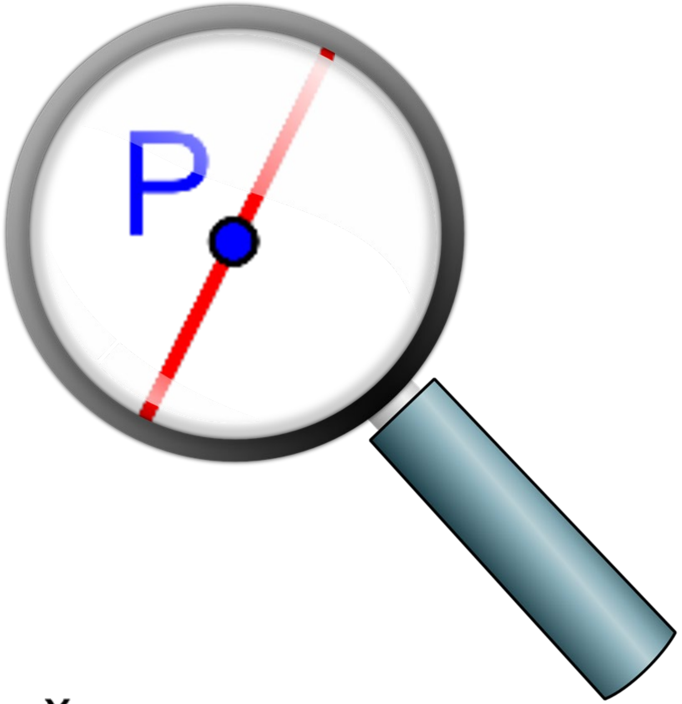
dms.nuw.rptu.de

RPTU

Ableitung als lokale lineare Approximation

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91



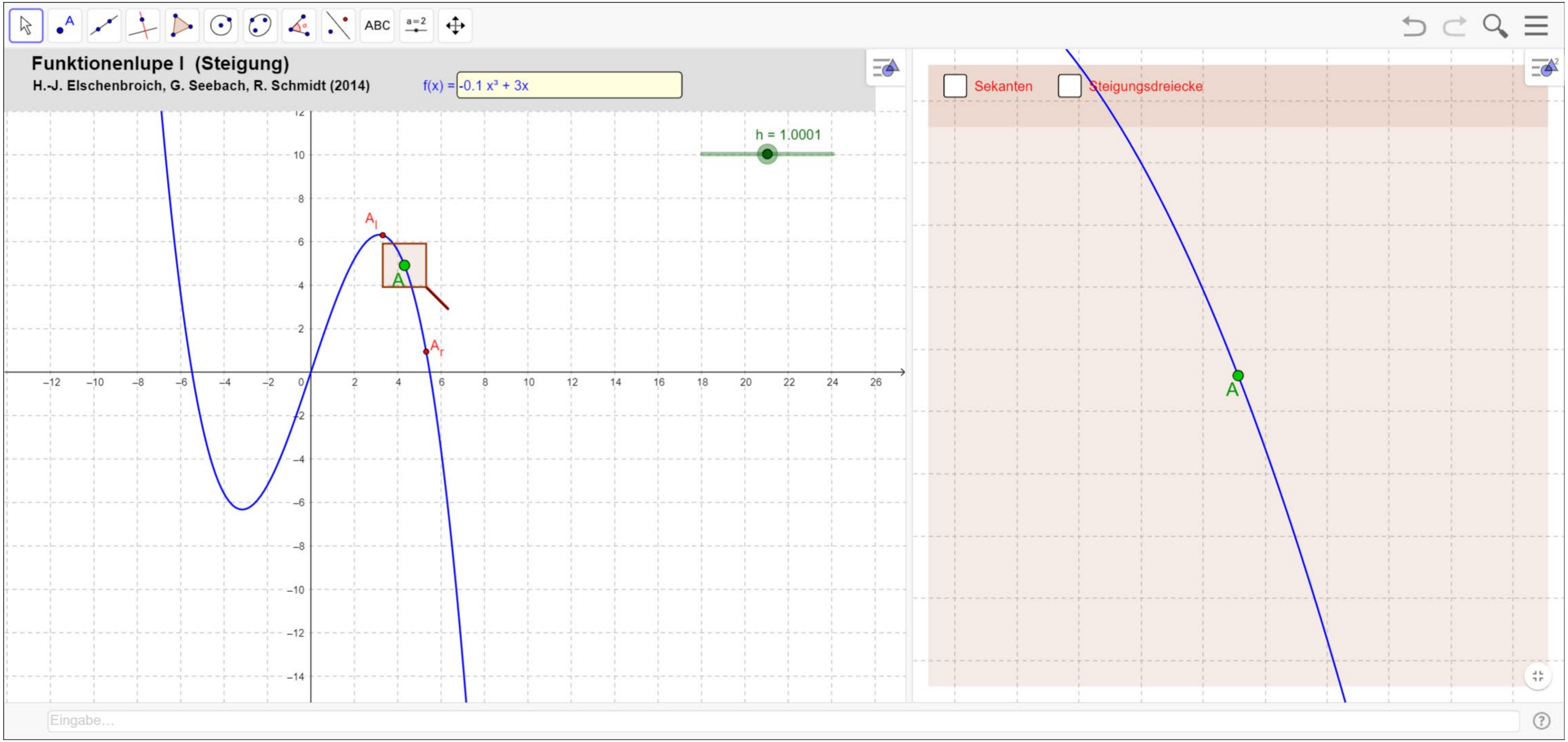


Wichtige Aspekte der Grundvorstellung Ableitung als lokale lineare Approximation

- Bei starker Vergrößerung der Umgebung eines Punktes des Funktionsgraphen, sieht man ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der x-Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also näherungsweise durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
www.funktionenlupe.de • https://www.geogebra.org/m/QxeVkgpf https://www.geogebra.org/m/tejWrTyU

Funktionenlupe

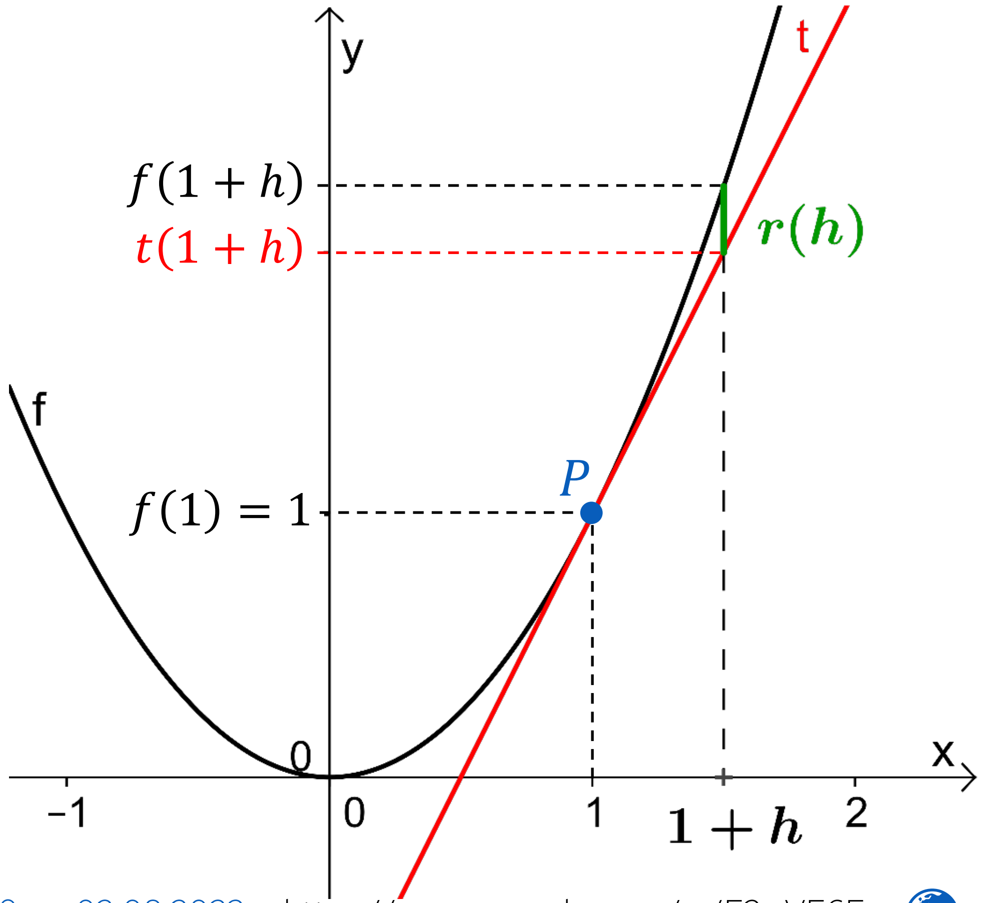


Welche Gerade ist beste lokale Approximation des Graphen?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Schmieg-Effekt der Tangente

Unterschied von Parabel $x \mapsto x^2$ und Tangente im Punkt $P(1,1)$ in der Nachbarschaft von $P(1,1)$



- Wie groß ist die Abweichung $\boldsymbol{r(h)}$?
- Funktionsgleichung: $f(x) = x^2$
- Tangentengleichung:

$$t(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0)$$
$$t(x) = \quad 1 \quad + 2 \cdot (x-1)$$

- Abweichung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r(h)} &= f(1+h) - t(1+h) \\ &= (1+h)^2 - (1+2h) \\ &= 1 + 2h + h^2 - 1 - 2h \\ &= h^2 \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

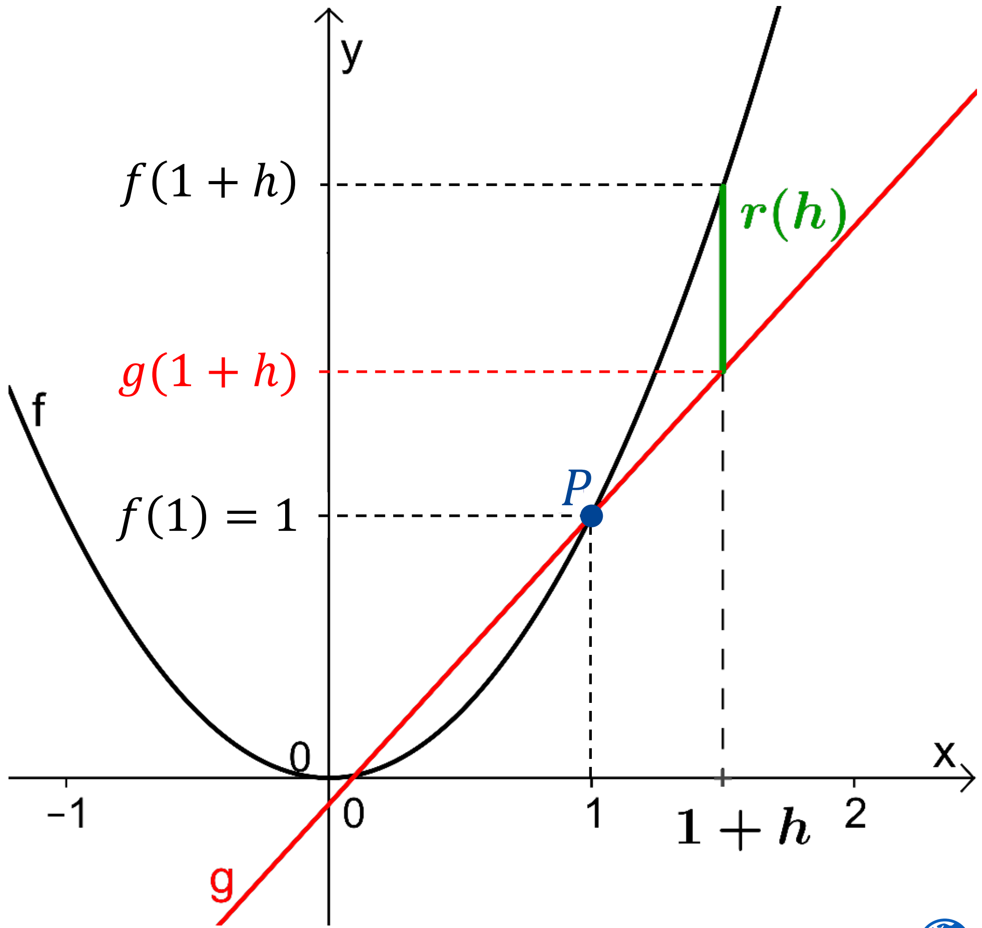
$$\boldsymbol{r(h) = h^2}$$
$$\rightarrow \mathbf{0} \text{ für } \boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

RPTU

Welche Gerade ist beste lokale Approximation des Graphen?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Schmieg-Effekt anderer Geraden durch $\boldsymbol{P(1,1)}$ bzgl. $\boldsymbol{x \mapsto x^2}$



- Wie groß ist die Abweichung $\boldsymbol{r(h)}$?
- Funktionsgleichung: $f(x) = x^2$
- Geradengleichung:

$$g(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) \qquad m \neq 2$$

$$g(x) = 1 + m \cdot (x - 1) \qquad m \neq 2$$

- Abweichung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r(h)} &= f(1+h) - g(1+h) \\ &= (1+h)^2 - (1+mh) \\ &= 1 + 2h + h^2 - 1 - mh \\ &= h^2 + (2-m) \cdot \mathrm{h} \qquad (**) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r(h) = h^2 + (2-m) \cdot h}$$

$\rightarrow \boldsymbol{0}$ für $\boldsymbol{h \rightarrow 0}$

 https://www.geogebra.org/m/F3wVF6Eq

Grundverständnis: Schmieg-Effekt

- **Absolute Abweichung**
  - Tangente in P

    $\boldsymbol{r(h)} = h^2$ $\qquad (*)$

    $r(h) \to 0$ für $h \to 0$
  - Andere Gerade durch P

    $\boldsymbol{r(h)} = h^2 + (2-m)\cdot h$ $\qquad (**)$

    $r(h) \to 0$ für $h \to 0$
- **Relative Abweichung**
  - Tangente in P

    $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} = h \to 0$ für $h \to 0$
  - Andere Gerade durch P

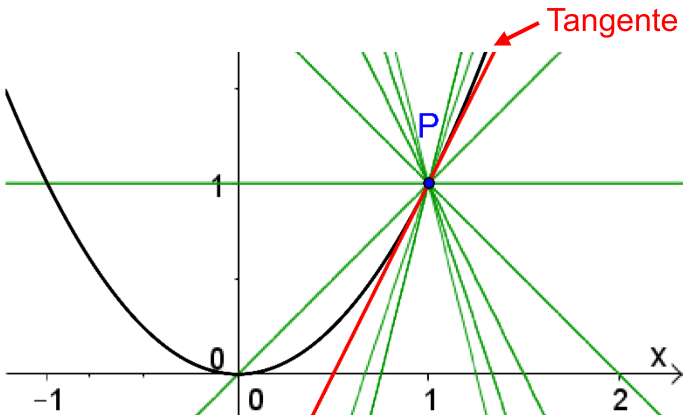
    $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} = h + (2-m)$ mit $m \neq 2$

    $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} \to 2 - m \neq 0$ für $h \to 0$

- Offensichtlich ist die Bedingung

  $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} \to 0$ für $h \to 0$

  ein analytischer Ausdruck für die Schmieg-Eigenschaft der Tangente.

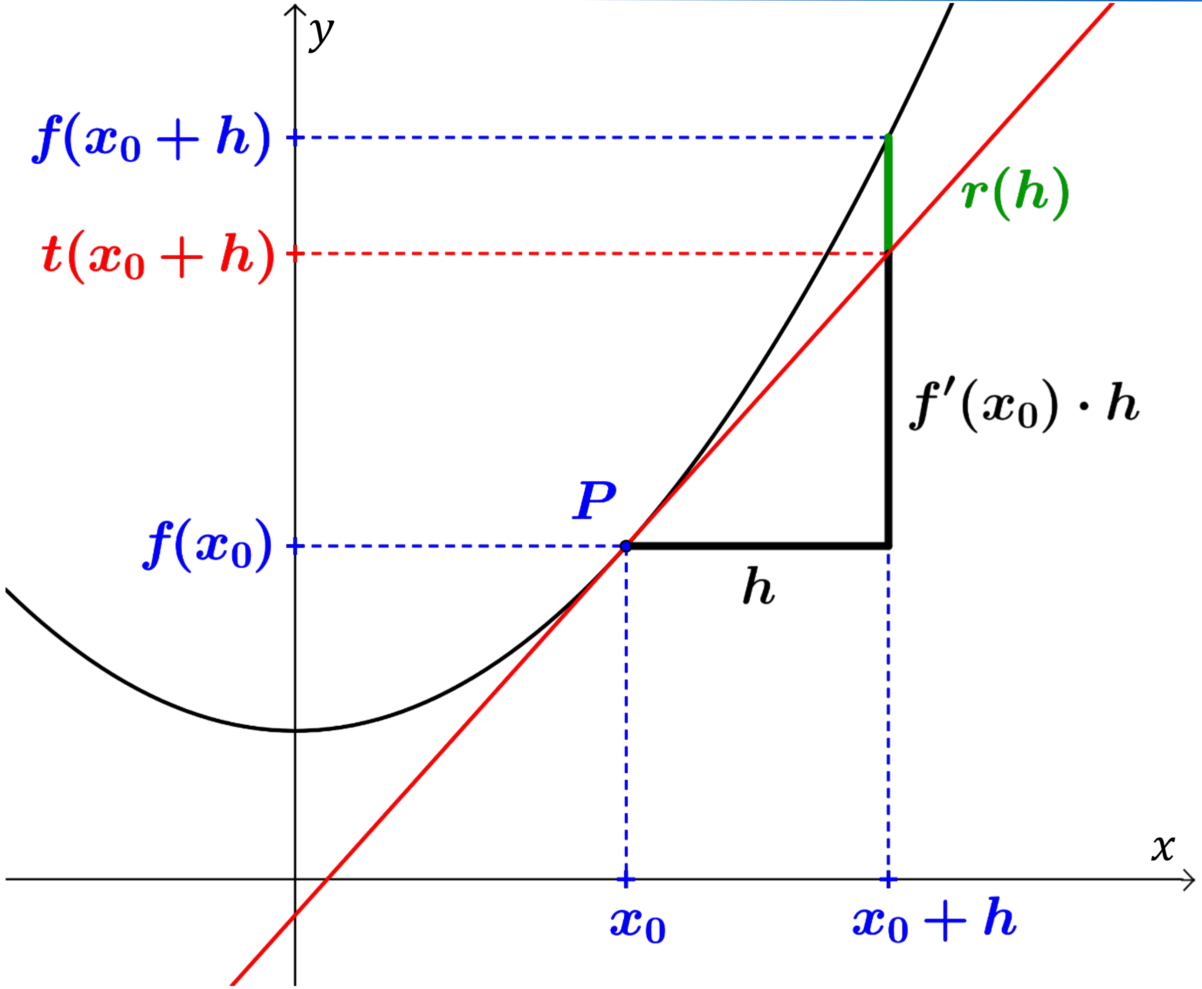


- Die gegenüber $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$

  verschärfte Restbedingung $\quad \lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

  charakterisiert die Tangente als bestapproximierende Gerade.

Zusammenfassung:
Ableitung als lokale lineare Approximation



Ableitung als lokale lineare Approximation

Der Graph von f lässt sich in der Nähe von x_0 durch die Tangente in x_0 so annähern, dass der Fehler $r(h)$ der Approximation besonders gut, nämlich schneller als h, gegen null geht:

$$f(x_0+h)$$
$$= t(x_0+h) + r(h)$$
$$= f(x_0) + \quad m \cdot h + r(h)$$

mit $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$

Tangentengleichung

$$t(x) = f(x_0) + \quad m \cdot (x - x_0)$$

Anwendungen: Num. Näherungen; Fehlerrechnung; Taylor-Abschätzung; Leibniz'sche Differenziale; Newton-Verfahren; Beweis von Ableitungsregeln; Verallgemeinerbar in höhere Dimensionen

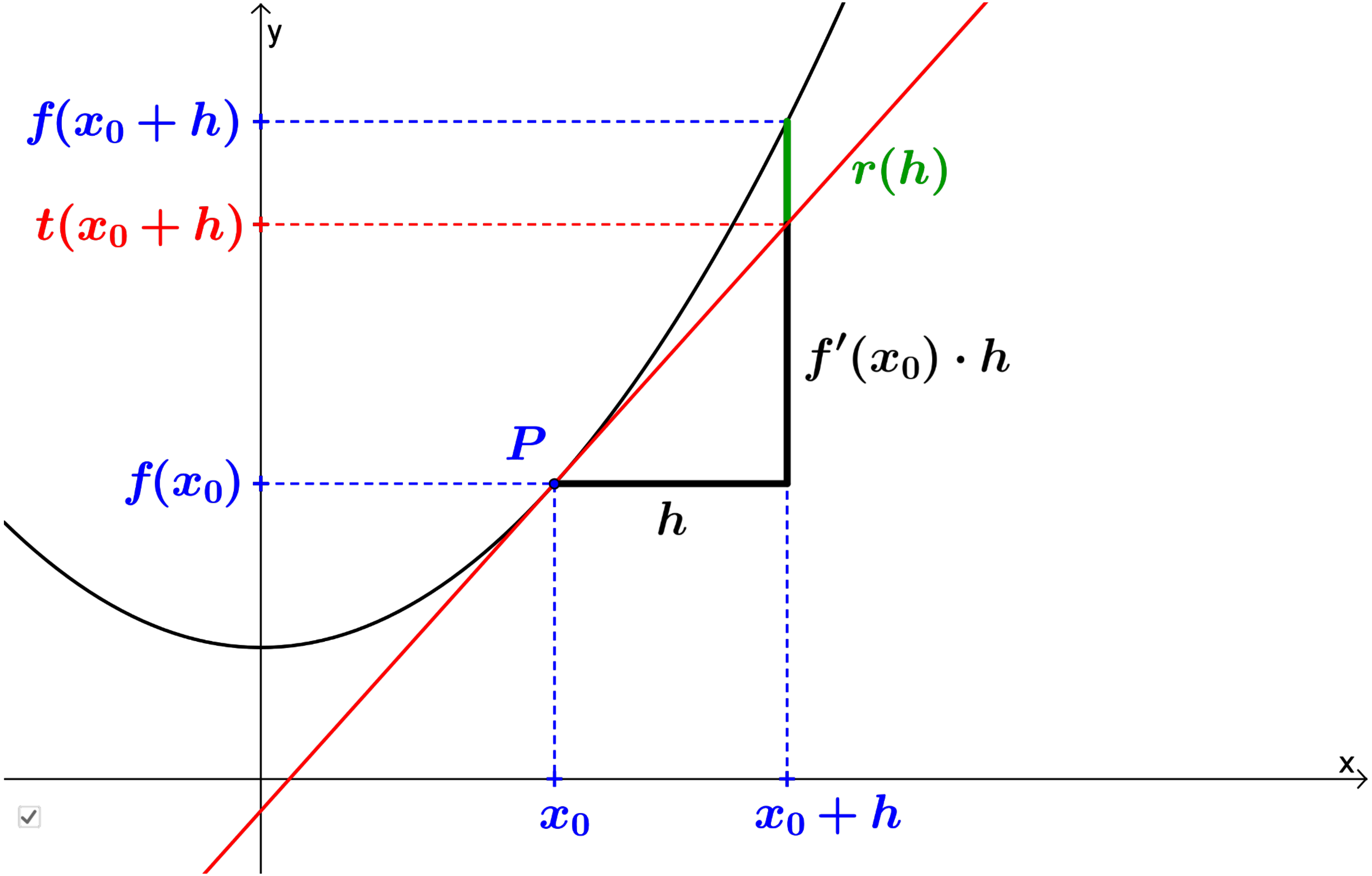
Zusammenfassung: Ableitung als lokale lineare Approximation

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Werte der Funktion nahe x_0	werden genähert durch	Werte der Tangente nahe x_0	Fehler der Näherung	Güte der Näherung für $h \to 0$
$f(x_0+h)$	$\approx$	$t(x_0+h)$ $= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$	$r(h) = f(x_0+h) - t(x_0+h)$ $= f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h$	$\frac{r(h)}{h} \to 0$
Zuwächse der Funktion nahe x_0	werden genähert durch	**Zuwächse** der Tangente nahe x_0	**Fehler** der Näherung	**Güte** der Näherung für $h \to 0$
$f(x_0+h) - f(x_0)$ (Differenz Δy)	$\approx$	$f'(x_0)\cdot h$ (Differenzial dy)	$r(h)$	$\frac{r(h)}{h} \to 0$

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
https://www.geogebra.org/m/dfUDB4N3

Zusammenfassung:
Ableitung als lokale lineare Approximation



Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
https://www.geogebra.org/m/dfUDB4N3

Analytische Definitionen der Ableitung

Definition (über lokale Änderungsrate)

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt
an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar,

wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Der Grenzwert heißt **Ableitung von f an der Stelle x_0** und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Definition (über lokale lineare Approximation)

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt
an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar,

wenn es eine Gerade t_{x_0} durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ gibt, so dass der Approximationsfehler

$$r(h) \coloneqq f(x_0 + h) - t_{x_0}(x_0 + h) \quad \text{mit} \quad x_0 + h \in \mathbb{D}$$

der Bedingung $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ genügt.

Die Steigung von t_{x_0} heißt **Ableitung von f an der Stelle x_0** und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91

Exkurs: Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an G_f

Berechnung der Tangentengleichung

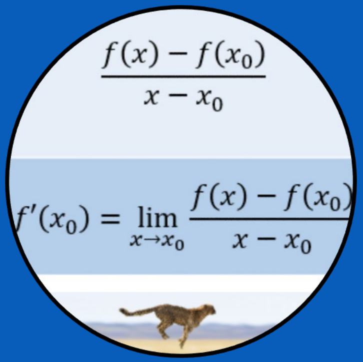
- Funktionsgleichung einer Geraden: $y = m \cdot x + t$
- m ist die Steigung der Geraden. Für eine Tangente, die sich im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an G_f anschmiegt, gilt: $m = f'(x_0)$
- Da die Tangente durch $P(x_0, f(x_0))$ verläuft, erfüllen dessen Koordinaten die Funktionsgleichung. Es gilt also: $f(x_0) = m \cdot x_0 + t$

Im Beispiel: $f(x) = x^2$

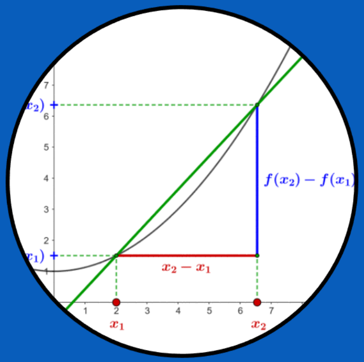
- Mit $f'(x) = 2x$ folgt: $m = 2 \cdot x_0$
- Mit $P(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0^2)$ ergibt sich: $x_0^2 = 2x_0 \cdot x_0 + t$
  $\Rightarrow t = -x_0^2$
- Damit ergibt sich die Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ zu: $y = 2x_0 \cdot x - x_0^2$

Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

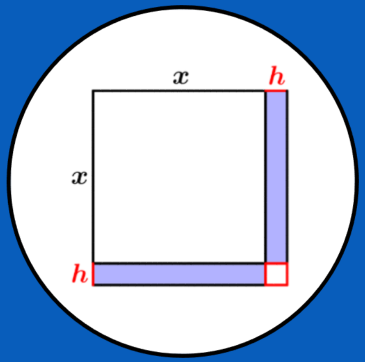
Welche würden Sie für die Einführung nutzen?



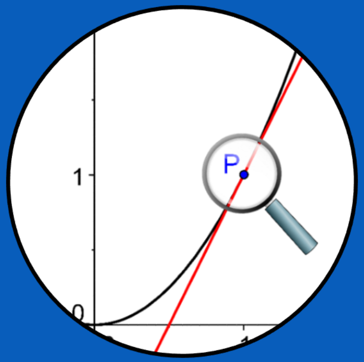
Lokale Änderungsrate



Tangenten-steigung



Verstärkungs-faktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

R
TU Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau
P

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

Aufgabenformate zum Prüfen inhaltlicher Vorstellungen

Was prüfen?	Beispiele für Aufgabentypen
Vorstellungen zur Mathematisierung nutzen	(1) Eine gegebenen Sachsituation Mathematisieren z. B.: *Geben Sie eine Funktion für den Gesamteffekt, der im Sachkontext gegebenen Änderungsfunktion an.* (2) Analysieren einer falschen Mathematisierung z. B.: *Erläutern Sie, warum die Inflationsrate keine Ableitung der Preisniveau-Funktion ist. Vergleichen Sie dazu die Formel für die Inflationsrate (…) mit dem Differenzenquotienten.*
Vorstellungen zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen	(3) Zuordnen von Mathematisierung und Sachsituation oder Bild z. B. ***Aufgabe 5*** (4) Interpretieren eines mathematischen Ausdrucks im Bild/Sachkontext z. B.: *Interpretieren Sie die Bedeutung des Integrals in Bezug auf die im Sachzusammenhang gegebene Änderungsfunktion. Siehe auch* ***Aufgabe 1****.*
Sachverhalte und Rechenverfahren durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen erklären	(5) Erklären eines Rechenverfahrens unter Rückgriff auf eine geometrische oder inhaltliche Interpretation z. B. ***Aufgabe 6*** (6) Erklären komplexer Sachverhalte durch Rückgriff auf inhaltl. Vorstellungen z. B.: *Erklären Sie die Beziehung zwischen Integrieren und Differenzieren am Beispiel folgenden Sachverhalts …*

Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten & zentr. Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

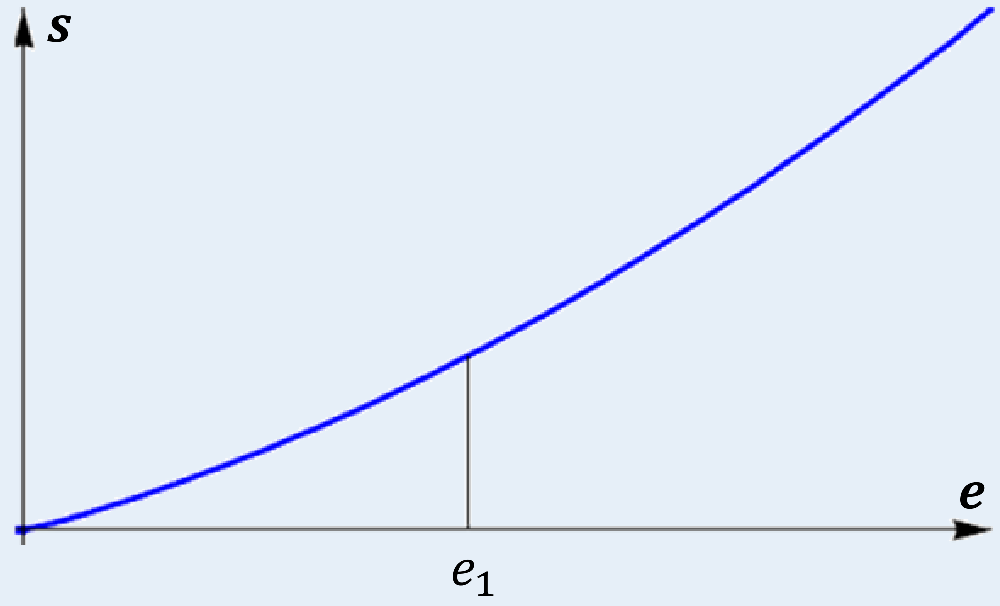
Einkommenssteuer

Präsenzaufgabe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe 1: Einkommenssteuer

Es sei $s: e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet. e_1 ist das Einkommen von Frau Meier (siehe Grafik, alles in Euro).



a) Interpretieren Sie die Terme $e_1 - s(e_1)$ und $\frac{s(e_1)}{e_1}$.

b) $s'(e_1)$ wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff.

c) Frau Meier erhält eine Gehaltserhöhung um h Euro. Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h}$.

d) Interpretieren Sie die Ungleichung $\frac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h} \geq \frac{s(e_1)}{e_1}$.

e) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze die Beziehung $s''(e) = 0$. Deuten Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang.

Dangl, M. et al. (2009). Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. Klagenfurt: Universität Klagenfurt, 36

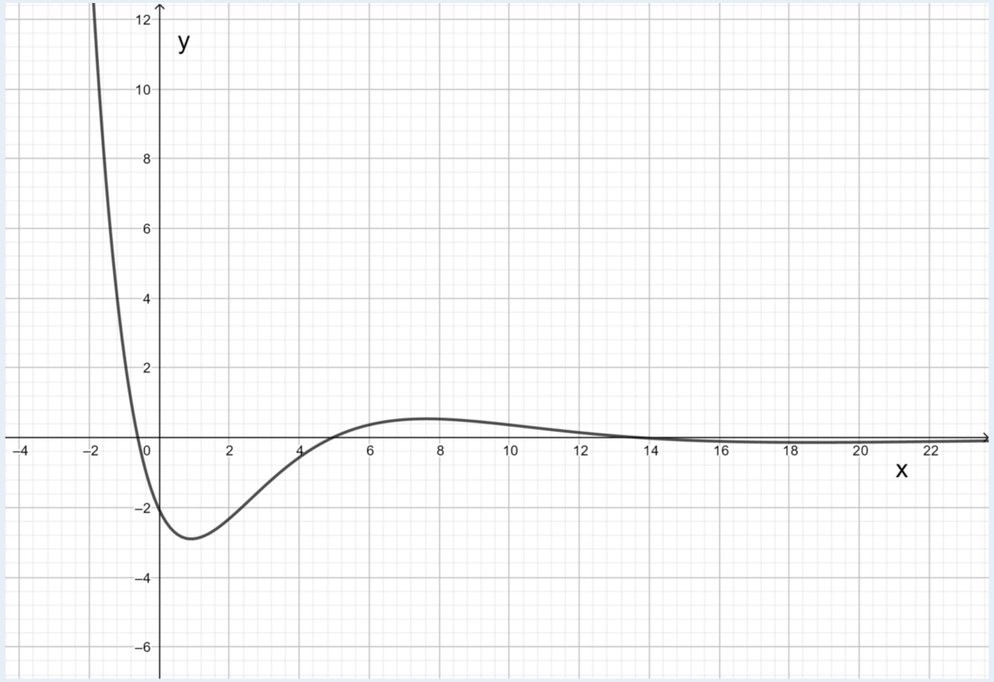
Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

Graph von f' und f

Präsenzaufgabe

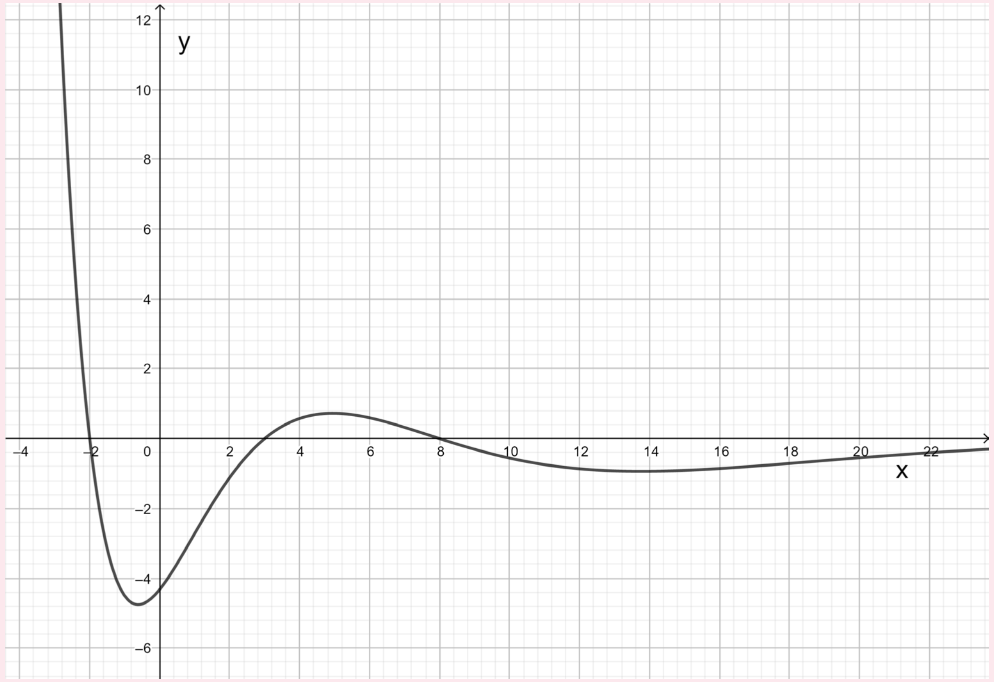
Aufgabe 2

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

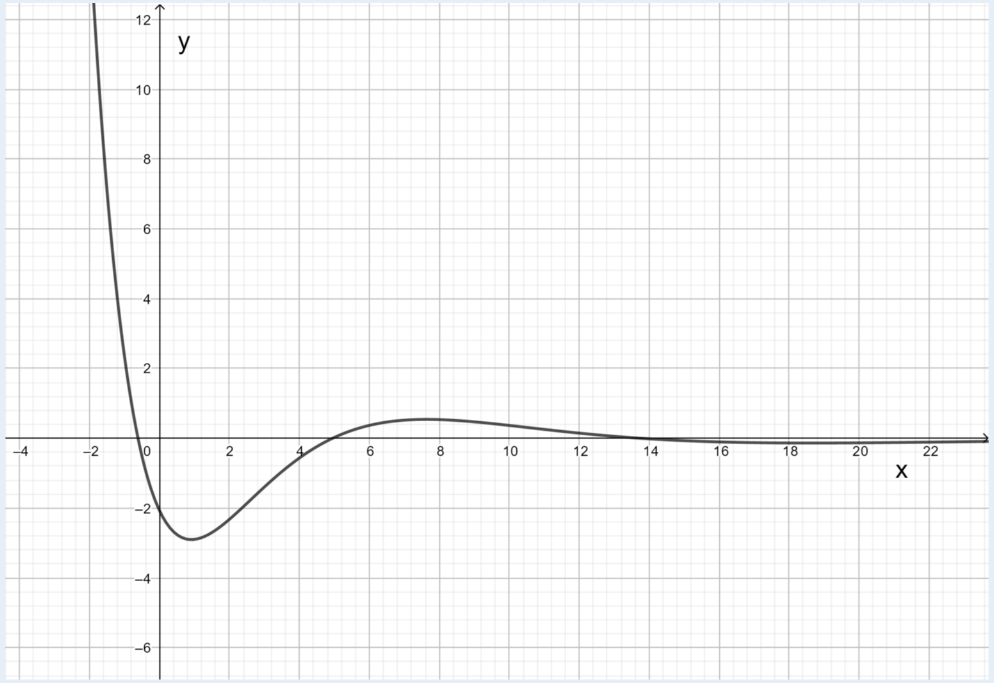
☐ Ja ☐ Nein



Graph von f' und f

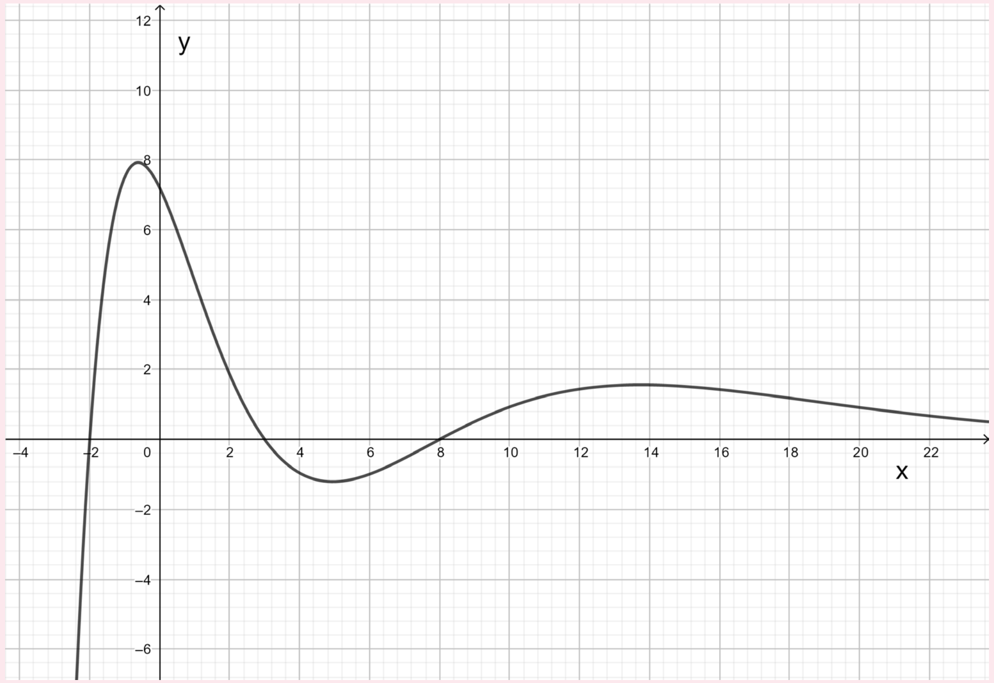
Aufgabe 2

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein

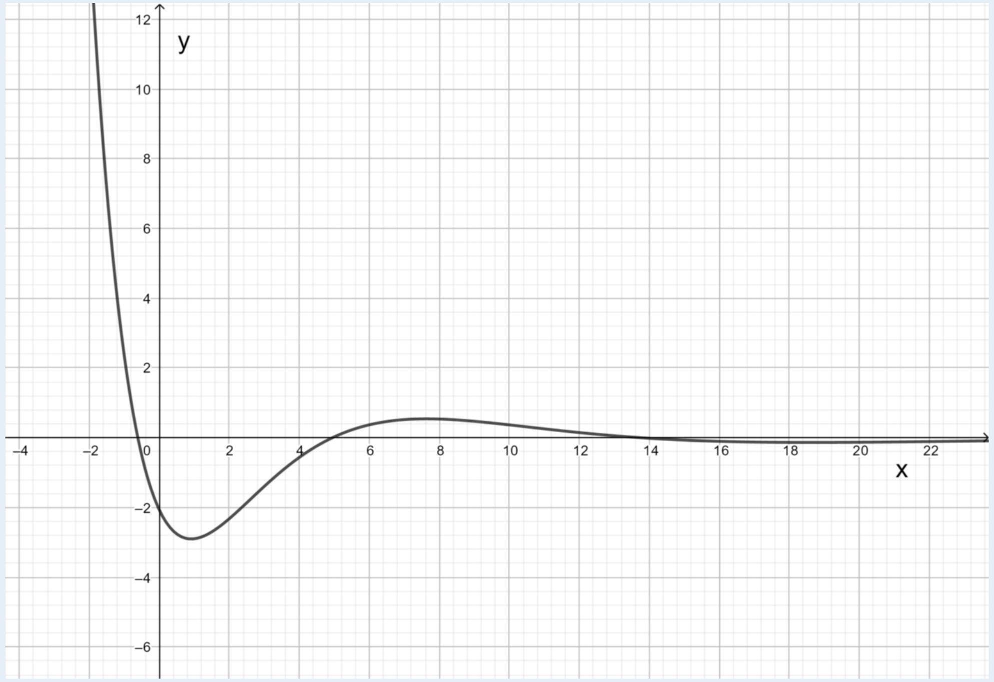


 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und f

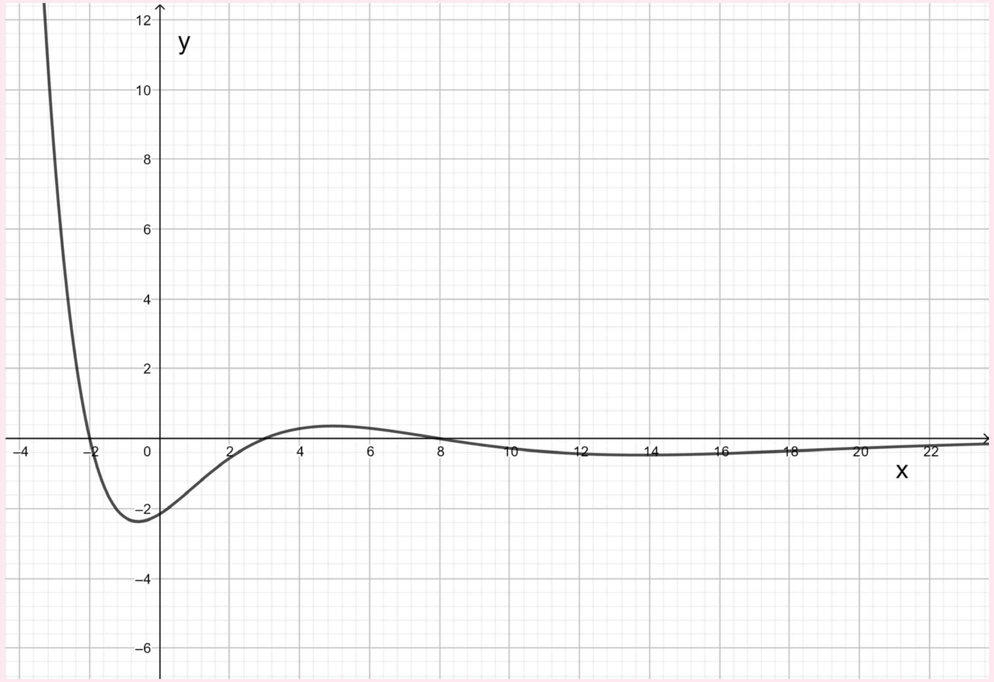
Aufgabe 2

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein

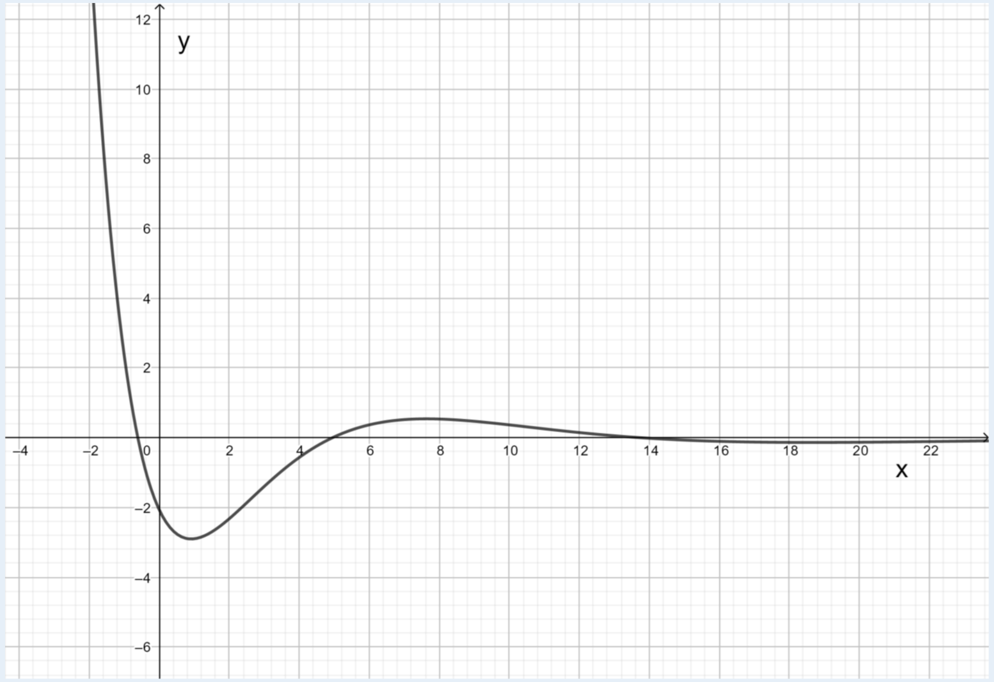


 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und f

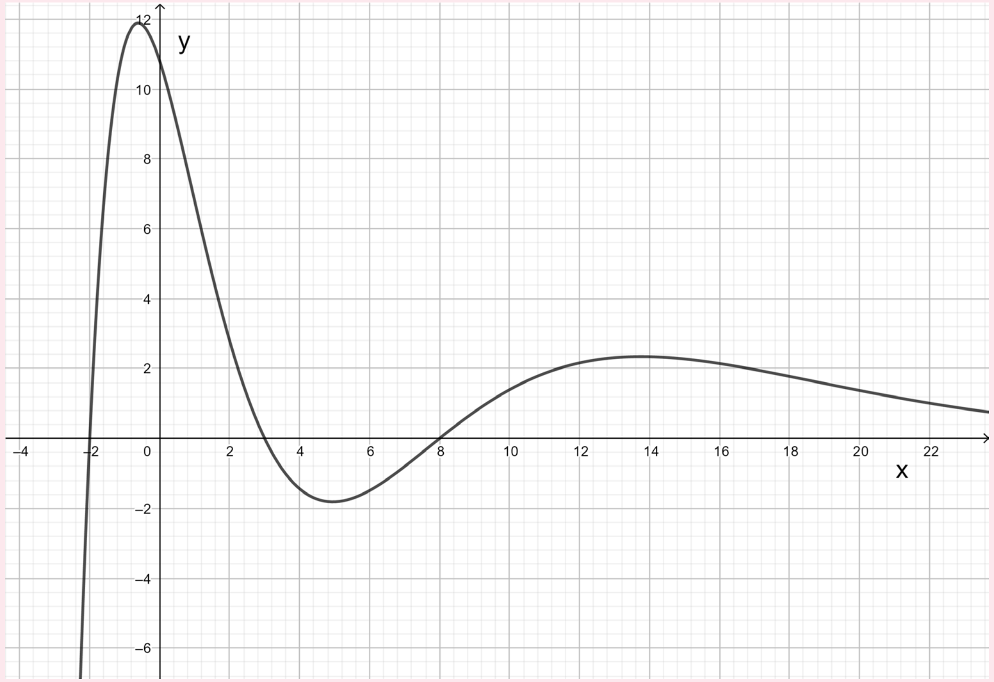
Aufgabe 2

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein



 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

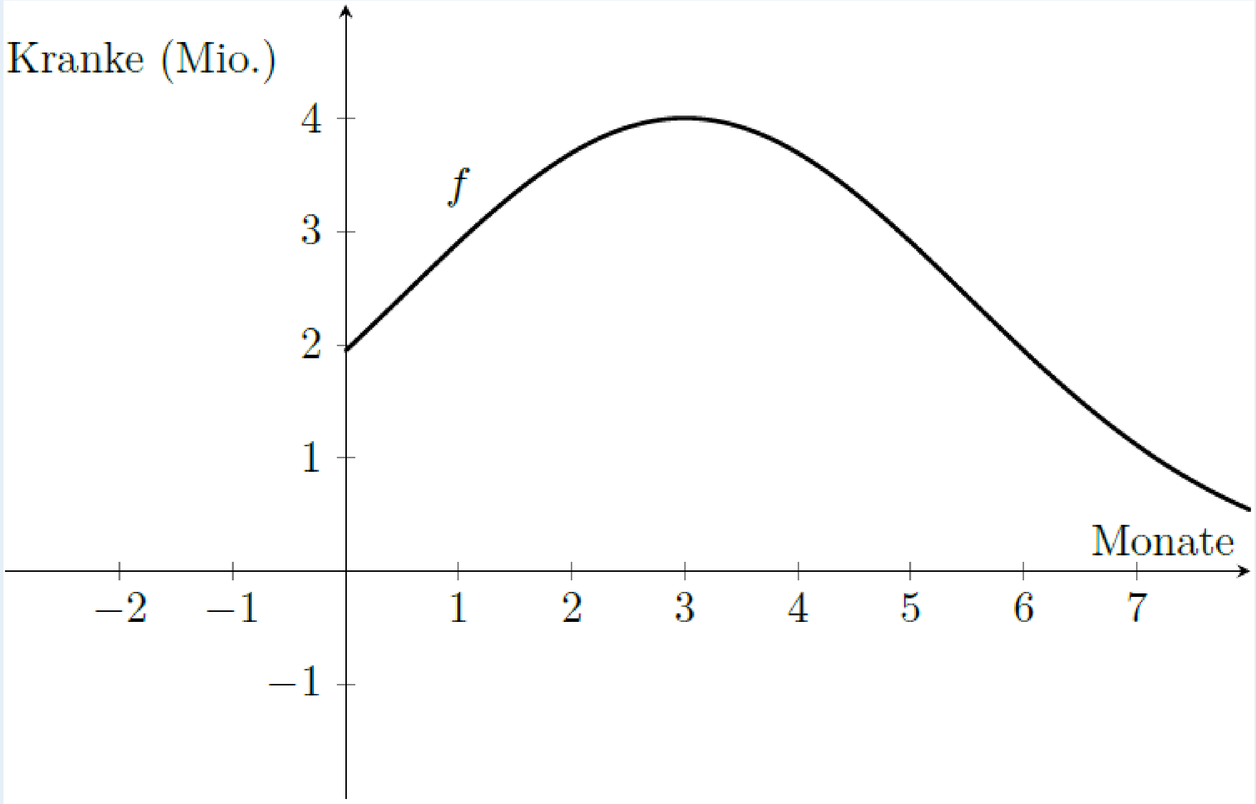
Grippewelle

Präsenzaufgabe

Aufgabe 3

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' und erläutern Sie die Bedeutung der Funktion f' im Sachzusammenhang.



IPN (2022). Mathematische Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium. Aufgabenkatalog – Ergebnisse eines Kooperationsprozesses zwischen Schulen und Hochschulen des Landes Schleswig-Holstein. https://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschung-und-projekte/malemint/2022-12-07_aufgabenkatatlog_malemint-implementation

Grippewelle in zwei Varianten

Aufgabe 3

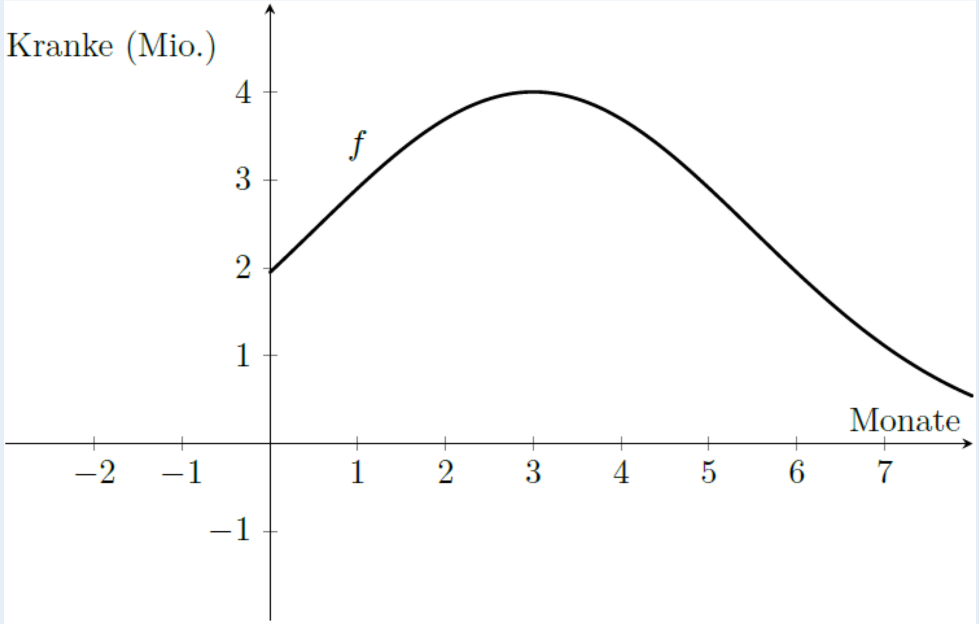
Die Funktion f beschreibt die Anzahl $f(t)$ der an Grippe erkrankten Menschen in Anhängigkeit von der Zeit t.

a) Erläutern Sie die Bedeutung der Funktion $f'(t)$ im Sachzusammenhang.

b) Erklären Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 im Sachzusammenhang.

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' und erläutern Sie die Bedeutung der Funktion f' im Sachzusammenhang.



IPN (2022). Mathematische Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium. Aufgabenkatalog – Ergebnisse eines Kooperationsprozesses zwischen Schulen und Hochschulen des Landes Schleswig-Holstein. https://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschung-und-projekte/malemint/2022-12-07_aufgabenkatatlog_malemint-implementation

Tauchvorgang eines U-Bootes

Präsenzaufgabe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

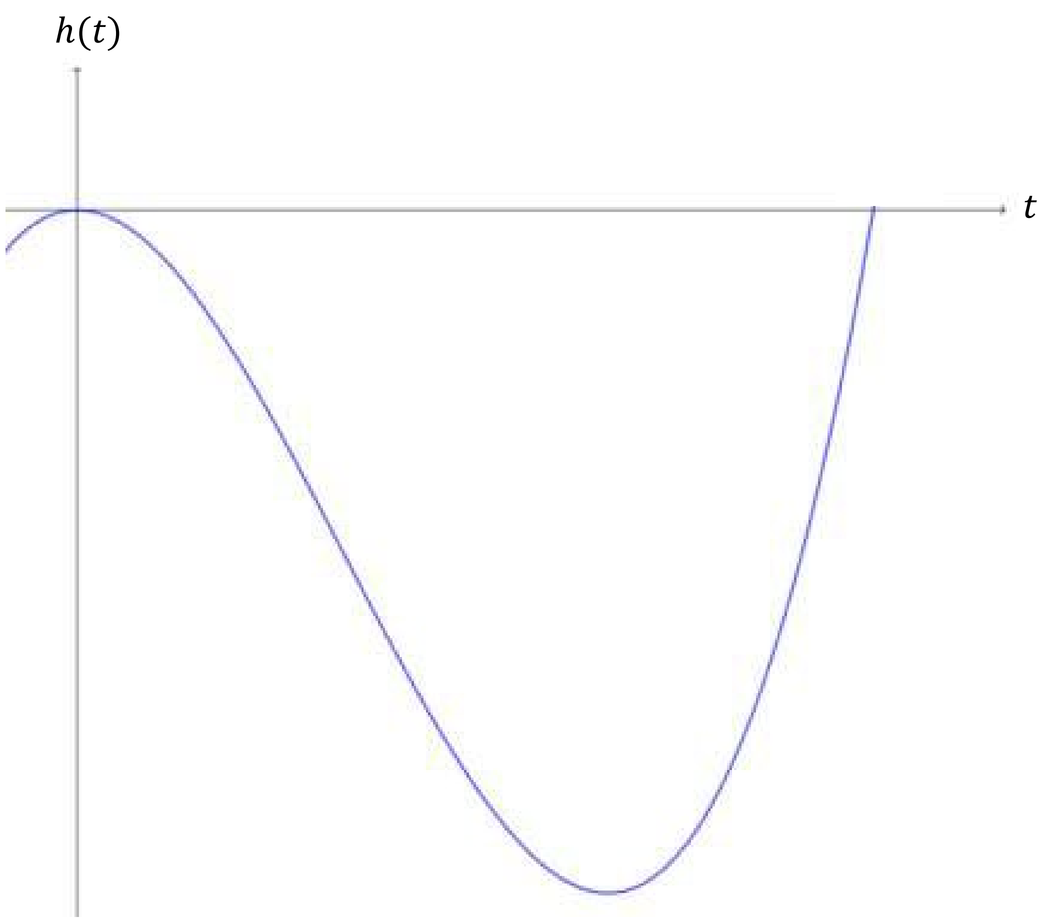
Aufgabe 4

Der Tauchvorgang eines U-Bootes wird durch die Funktion $h(t) = 2t^3 - 12t^2$ beschrieben. Dabei gibt $h(t)$ die Tauchtiefe unter der Oberfläche in Meter an, t die Zeit in Stunden. Die Crew an Land bekommt einen Graphen gesendet – jedoch sind die Angaben auf den Achsen nicht mehr lesbar.

a) Bestimme die Zeitpunkte, zu denen sich das U-Boot an der Oberfläche befindet.

b) Berechne in welcher Tiefe sich das U-Boot nach 3 Stunden befindet. Sinkt oder steigt es gerade (mit Begründung)?

c) Berechne, wann es den tiefsten Punkt erreicht hat. Wie tief es dann getaucht?



Tauchvorgang - Varianten

Präsenzaufgabe

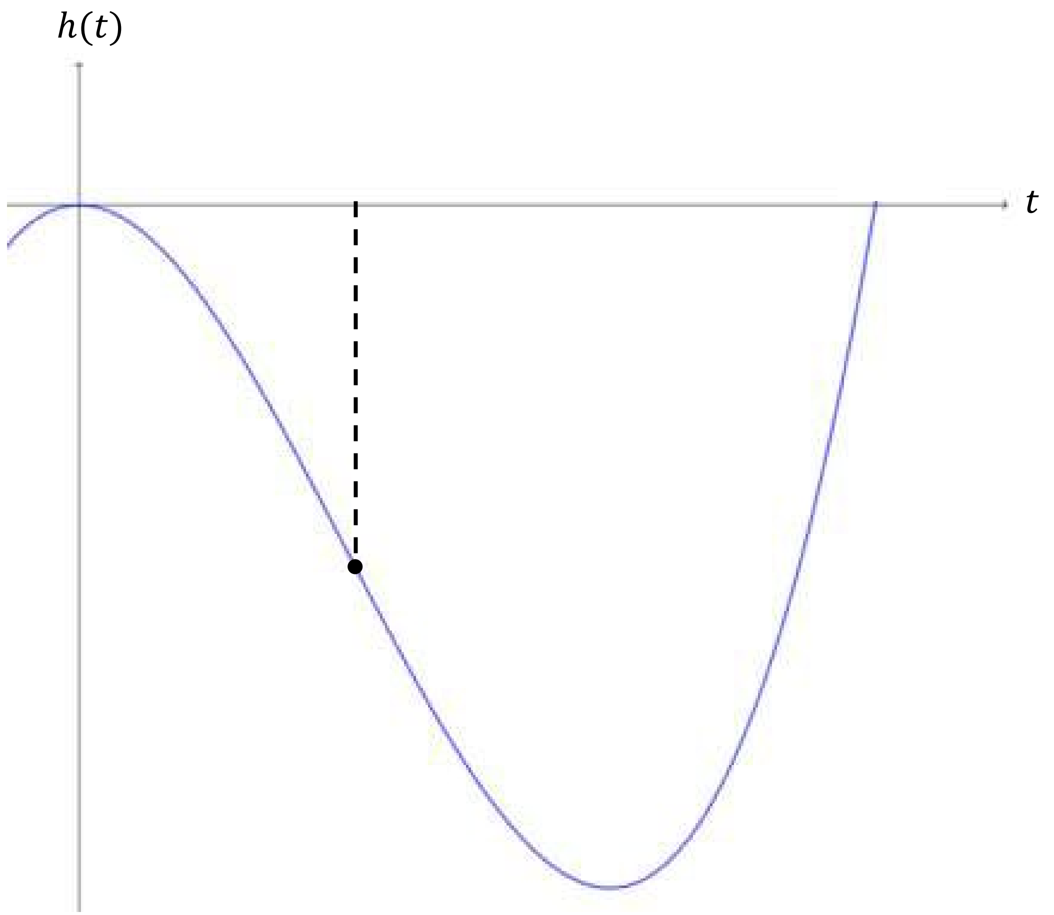
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe 4

Der Tauchvorgang eines U-Bootes wird durch eine Funktion $h(t)$ beschrieben, deren Graph rechts dargestellt ist. Dabei gibt $h(t)$ die Tauchtiefe unter der Oberfläche in Meter an, t ist die Zeit in Stunden.

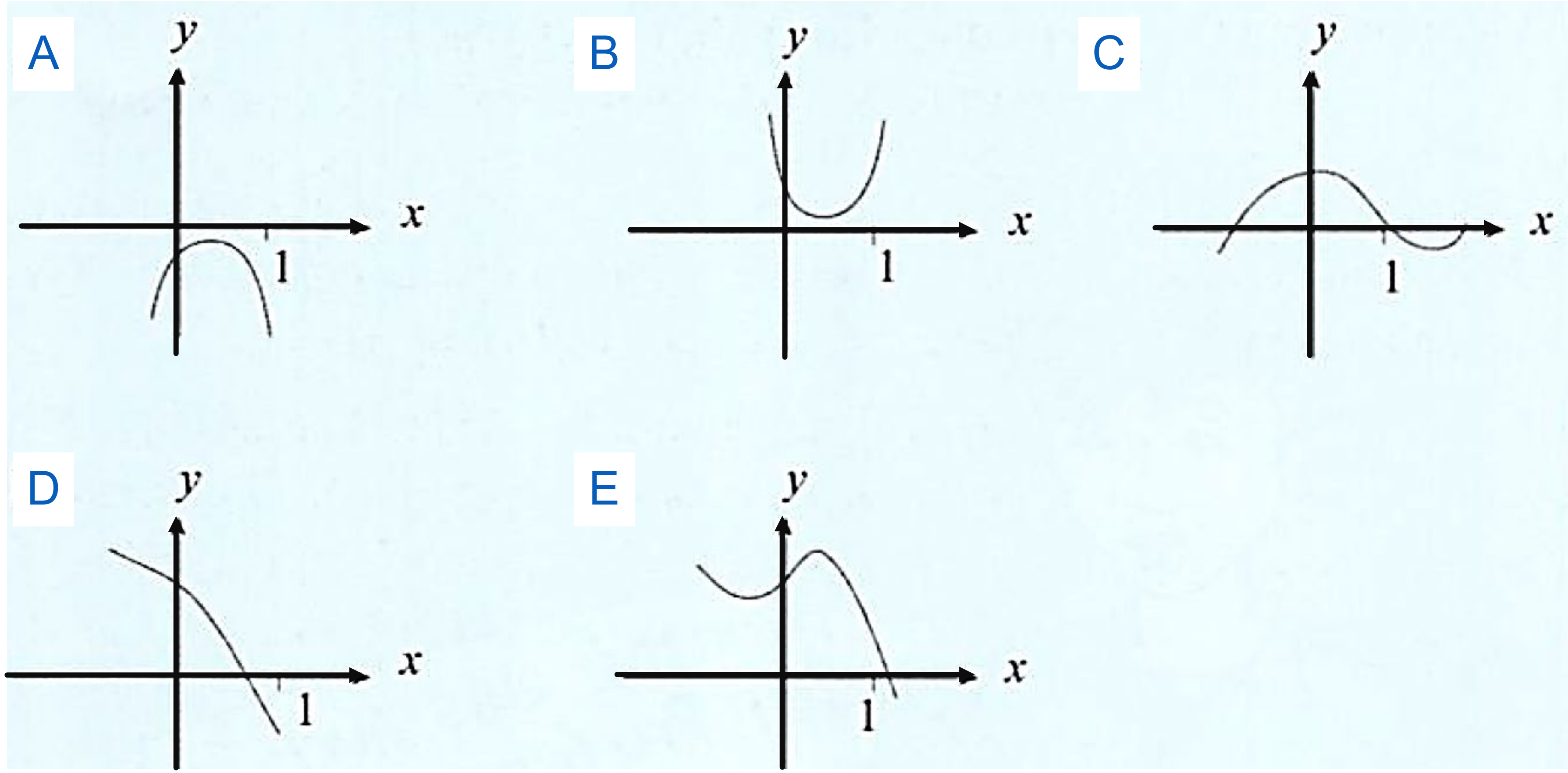
- Beschreibe die Situation zum eingezeichneten Zeitpunkt t im Sachzusammenhang.
- Erkläre mathematisch mithilfe des Graphen, dass das U-Boot zum eingezeichneten Zeitpunkt t am schnellsten sinkt.

→ Finden Sie aus Sicht jeder der vier Grundvorstellungen eine Erklärung!



Graphen analysieren

Aufgabe 5: Welcher der Graphen A, B, C, D bzw. E hat alle folgenden Eigenschaften?
$f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ



 Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten & zentr. Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

Rechenverfahren erklären

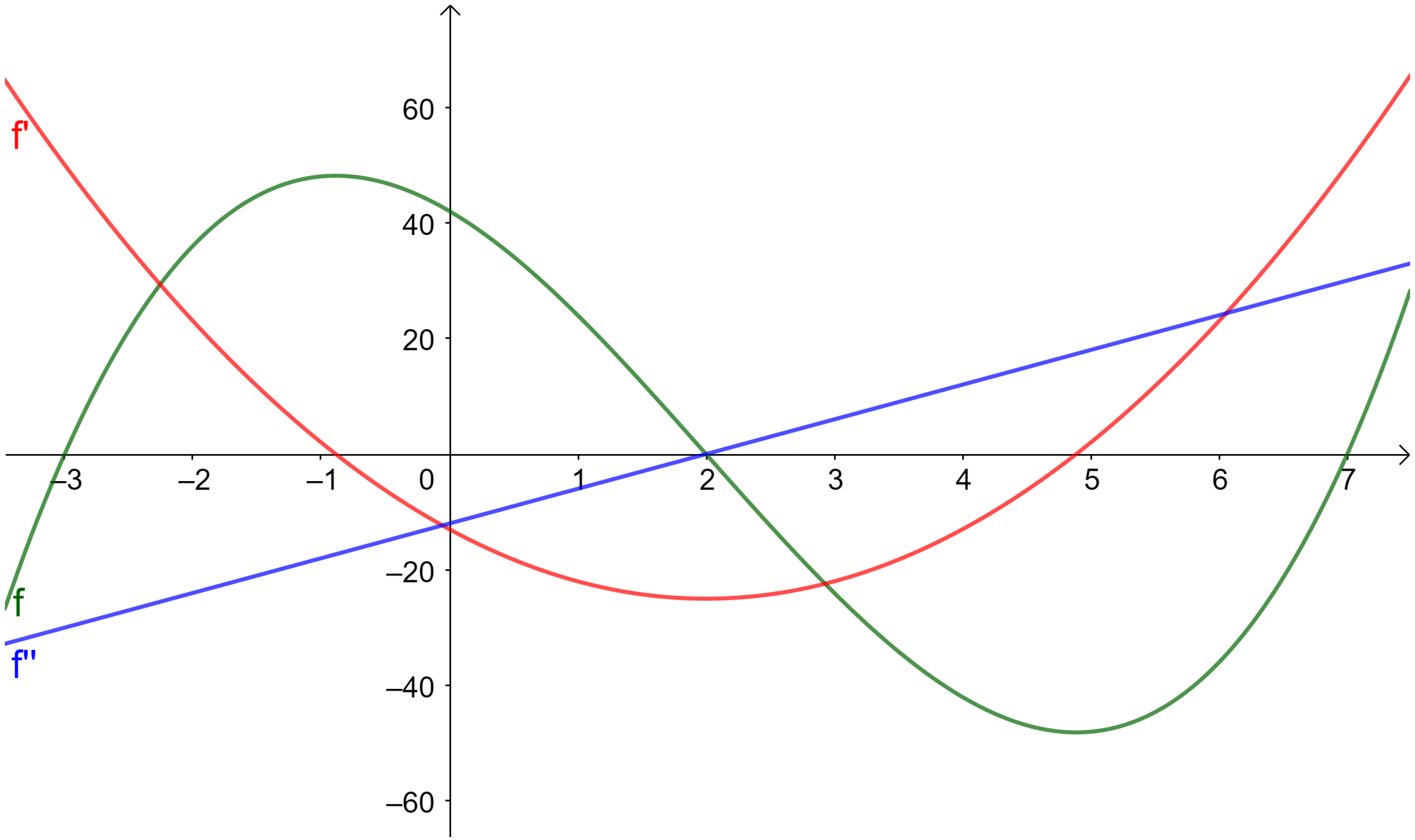
Aufgabe 6: Rechenverfahren erklären

Um eine Maximalstelle zu bestimmen, sind zwei Schritte notwendig:

(1) Man bestimmt die Nullstelle x_0 der Ableitung und

(2) überprüft, ob $f''(x_0) < 0$ ist.

Erläutern Sie anhand der Graphen, warum man mit den Schritten (1) und (2) eine Maximalstelle erhält.



Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten & zentr. Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

Hefewachstum

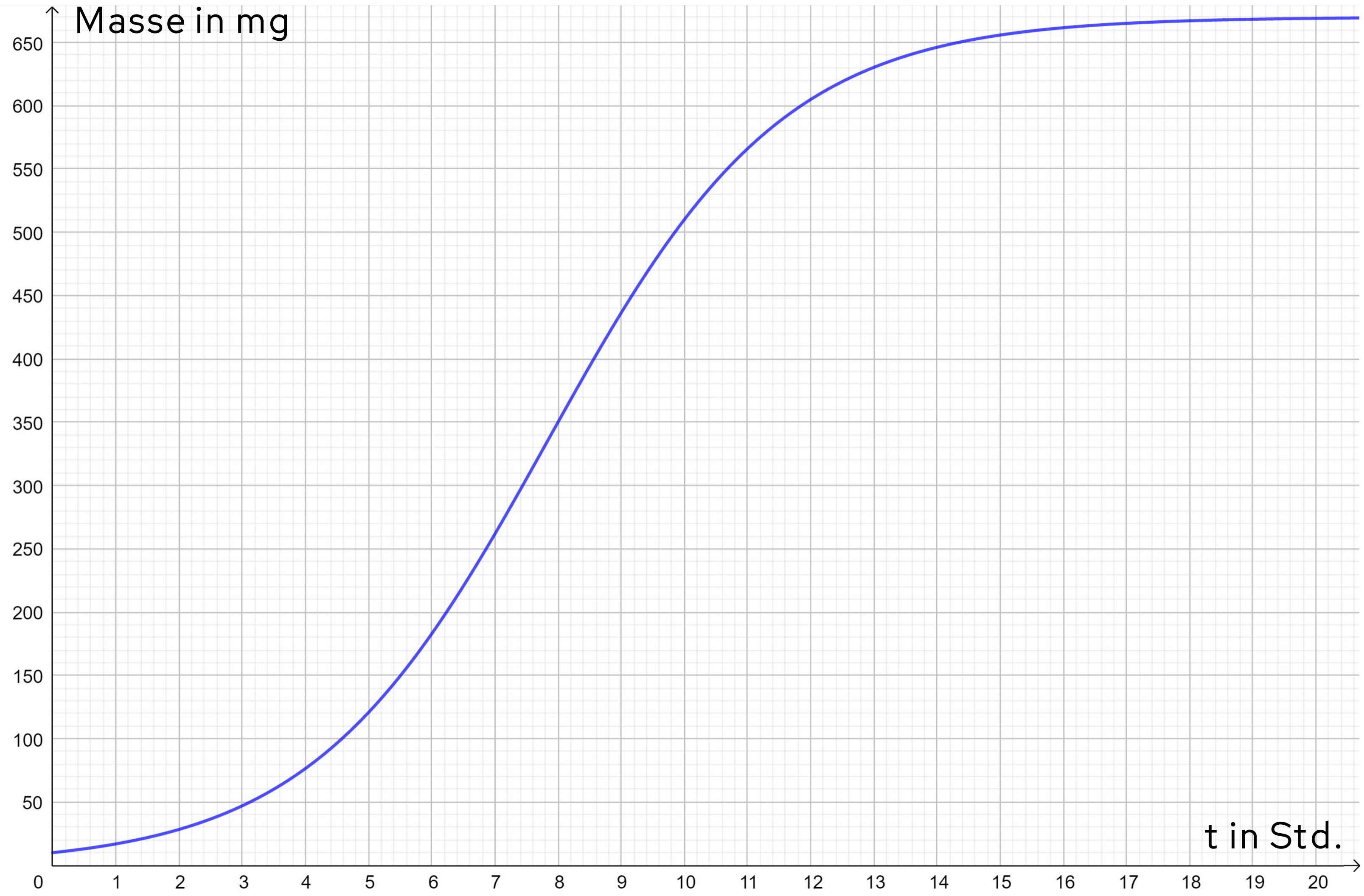
Aufgabe 7: Hefewachstum

In der Grafik ist das Wachstum einer Hefekultur dargestellt (Zeitangabe in Stunden; Hefemasse in mg).

a) Schätzen Sie die ungefähre Lage des Wendepunkts ab und zeichnen Sie ihn in der Grafik ein.

b) Schätzen Sie ab, wie groß die Wachstumsgeschwindigkeit an der Wendestelle ist.

c) Deuten Sie den Wendepunkt im Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit.



Dangl, M. et al. (2009). Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik" – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. Klagenfurt: Universität Klagenfurt, 36

Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

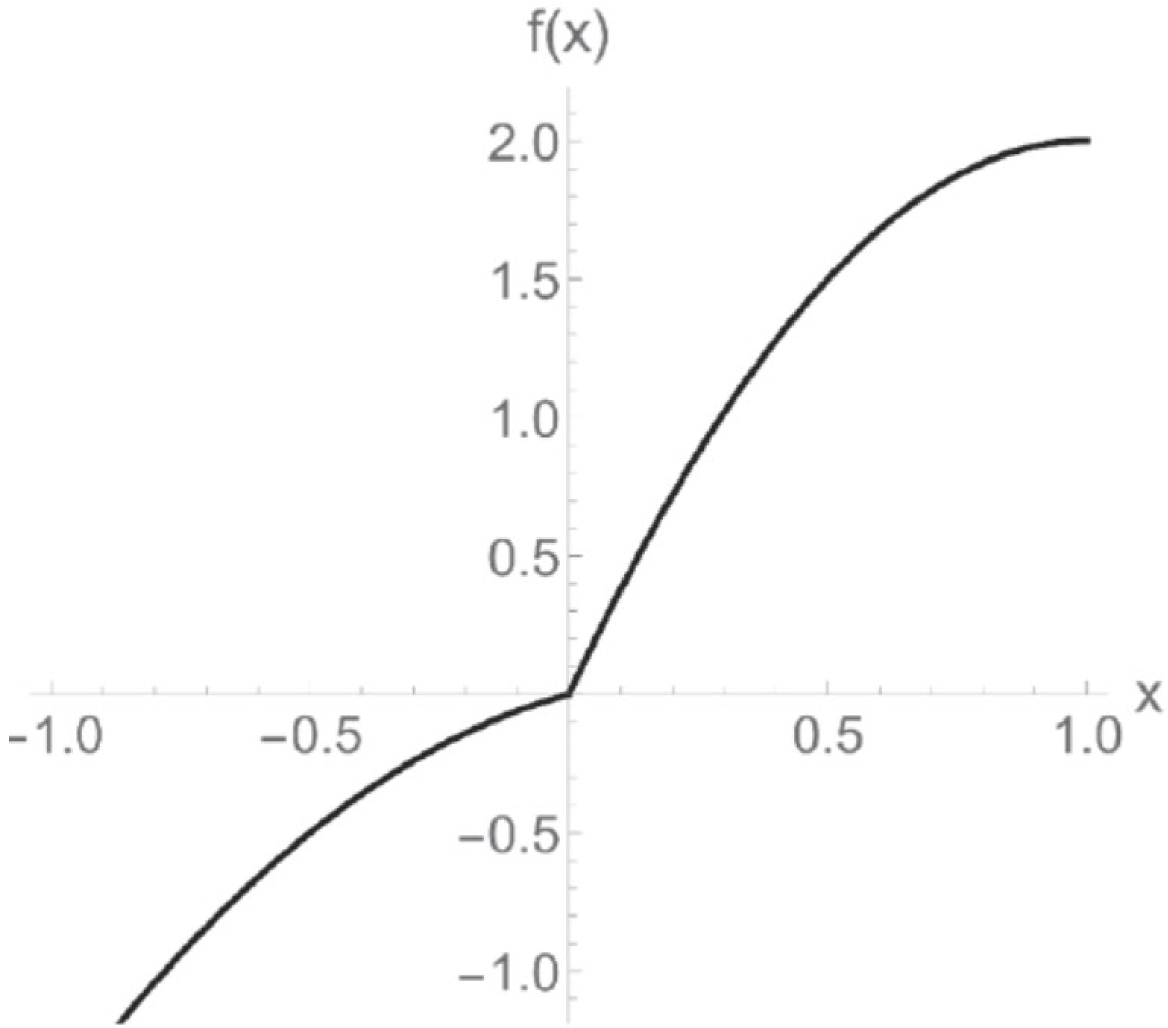
Aus Sicht jeder Grundvorstellung …

Aufgabe 8

Der Graph der Funktion f hat den abgebildeten Verlauf. Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Das kann man unterschiedlich erklären.

Finden Sie aus Sicht jeder der vier GV eine Erklärung.

Veranschaulichen Sie die Erklärung wenn möglich mit einer Skizze.

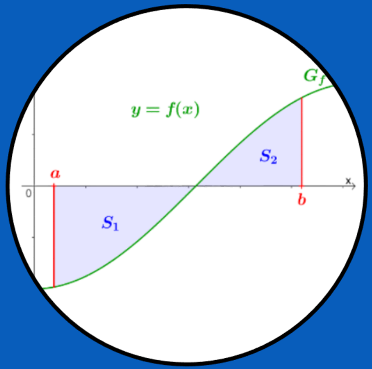


Gilbert Greefrath, Reinhard Oldenburg, Hans-Stefan Siller, Volker Ulm, Hans-Georg Weigand (2021). Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI), Empirische Erfassung von Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle und zum bestimmten Integral. hal-03103685. https://hal.science/hal-03103685

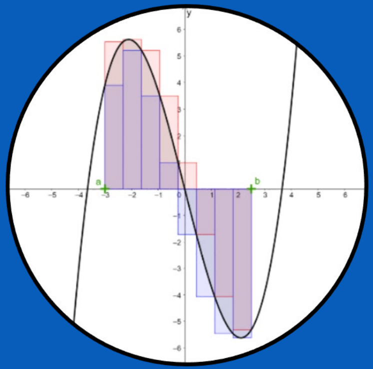
3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

Grundvorstellungen zum Integralbegriff

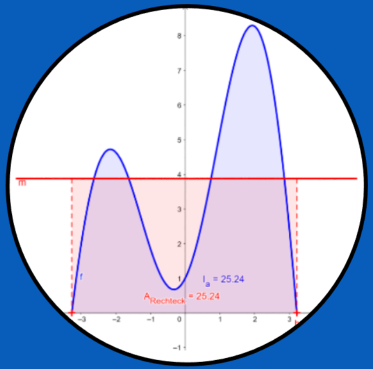
Rekonstruieren



Orientierten Flächeninhalt bestimmen



Kumulieren



Mitteln

Greefrath, G. & Ulm, V. (2021). Integral: Grundvorstellungen dynamisch visualisieren. Mathematik lehren 224, S. 36-40
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Entwicklung des Integralbegriffs

Integral

als Grenzwert von Produktsummen

analytisch-exakt

Produktsummen

geometrisch-naiv

zunehmende Abstraktion

allgemeine Rekonstruktion

$f \to I_a$ (Hauptsatz)

Kumulieren

(konkrete) Rekonstruktion

$f' \to f$

Rekonstruieren

Flächeninhalt

Mittelwert einer Funktion

(diskretes) arithmetisches Mittel

Mitteln

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis"
https://roth.tel/analysis

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

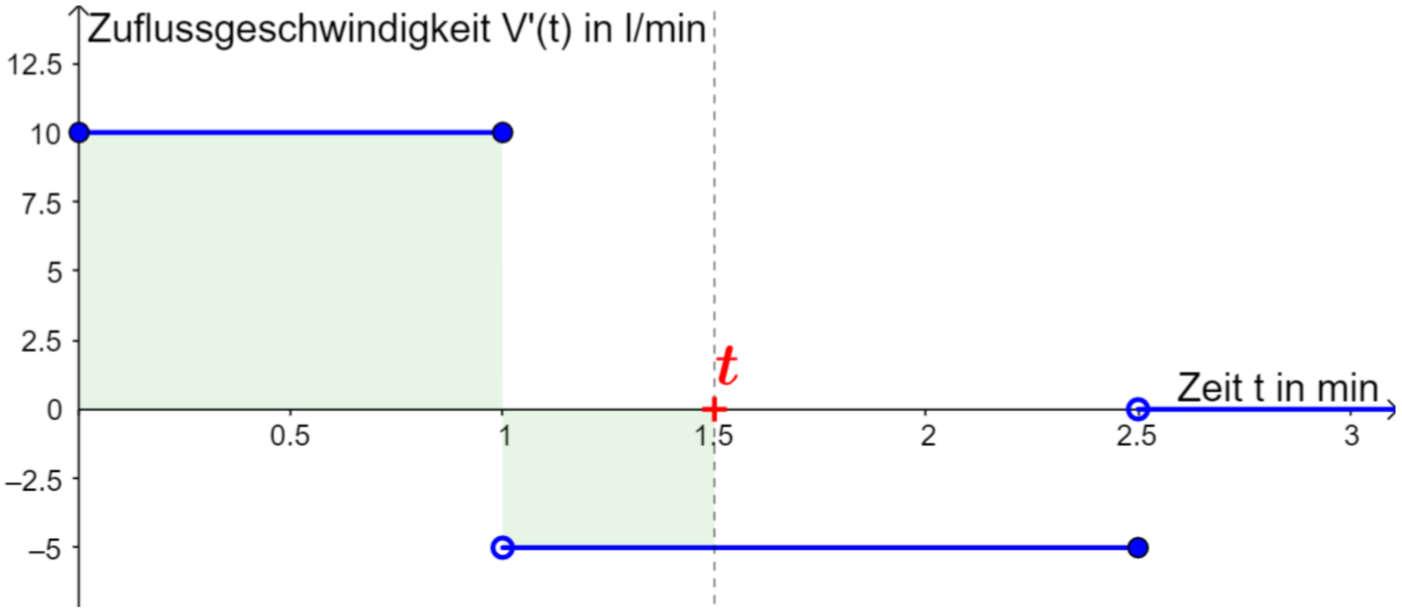
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren

R P TU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Verständnisanker: Waschbecken

In ein leeres Waschbecken wird 1 Minute lang Wasser mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit von 10 Litern pro Minute eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, aus dem das Wasser mit einer Abflussgeschwindigkeit von 5 Litern pro Minute abfließt. Nach weiteren 1,5 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen.



Wie lässt sich aus der Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit $V'(t)$ auf die Wassermenge $V(t)$ im Waschbecken zum Zeitpunkt t schließen?

 www.geogebra.org/m/jv2z8vgz

Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren

Zufluss-Phase

$10\,\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot t \text{ min} = 10 \cdot t \text{ Liter}$

$V(t) = 10 \cdot t$ für $0 \leq t \leq 1$

Nach einer Minute sind also

$10\,\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot 1 \text{ min} = 10 \text{ Liter}$

im Waschbecken.

Abfluss-Phase

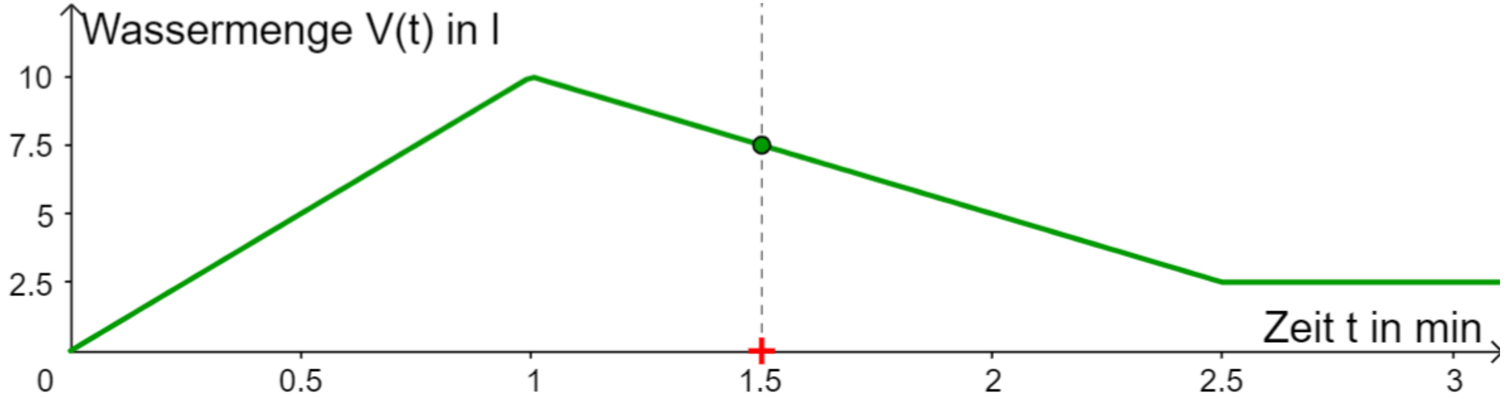
$10 - 5 \cdot (t-1)$ Liter

$V(t) = 10 - 5 \cdot (t-1)$ für $1 < t \leq 2{,}5$

Nach zweieinhalb Minuten sind also

$10 - 5 \cdot (2{,}5 - 1)$ Liter $= 2{,}5$ Liter

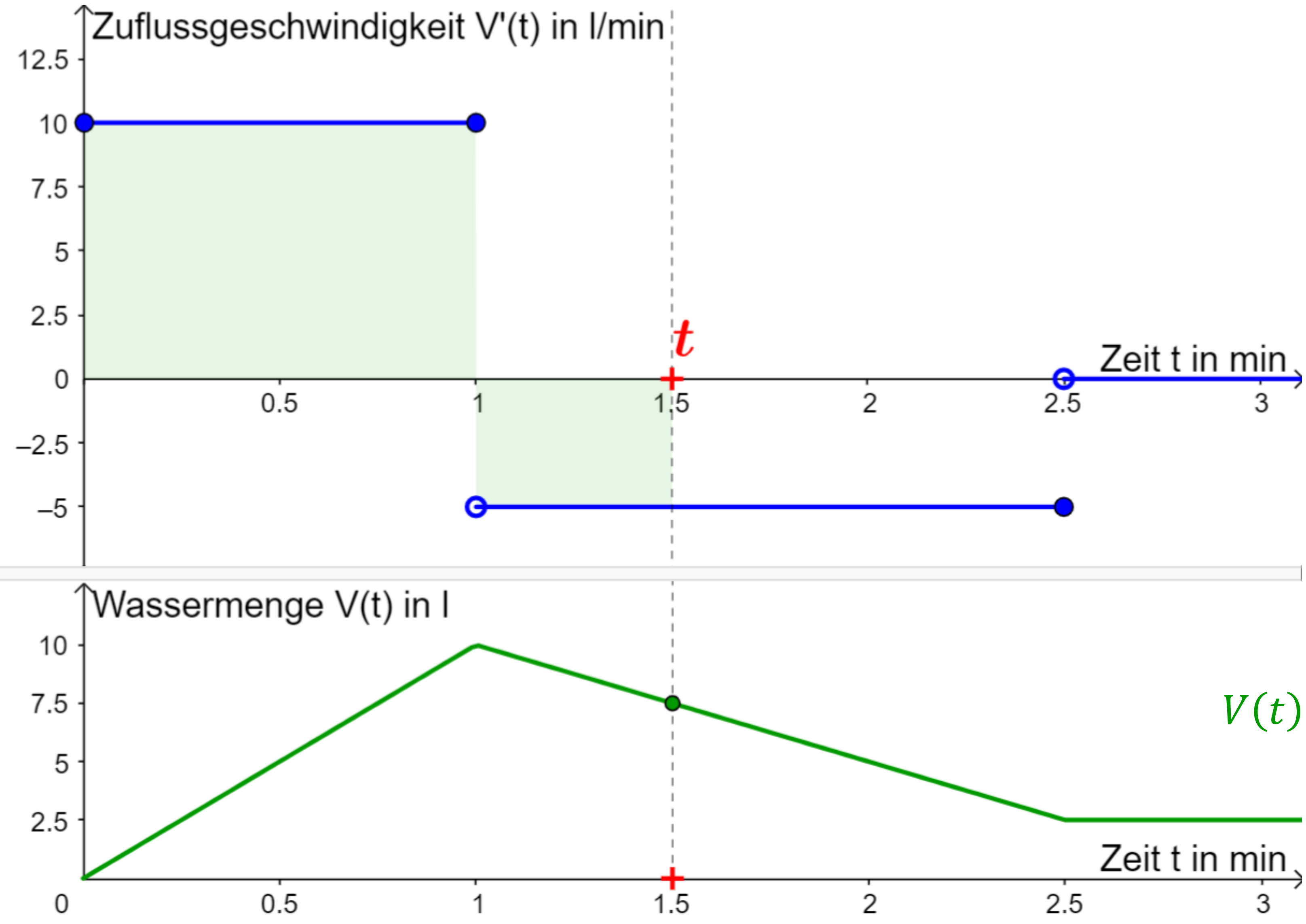
im Waschbecken.



$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad 1 < t \leq 2{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für} \quad t > 2{,}5 \end{cases}$$

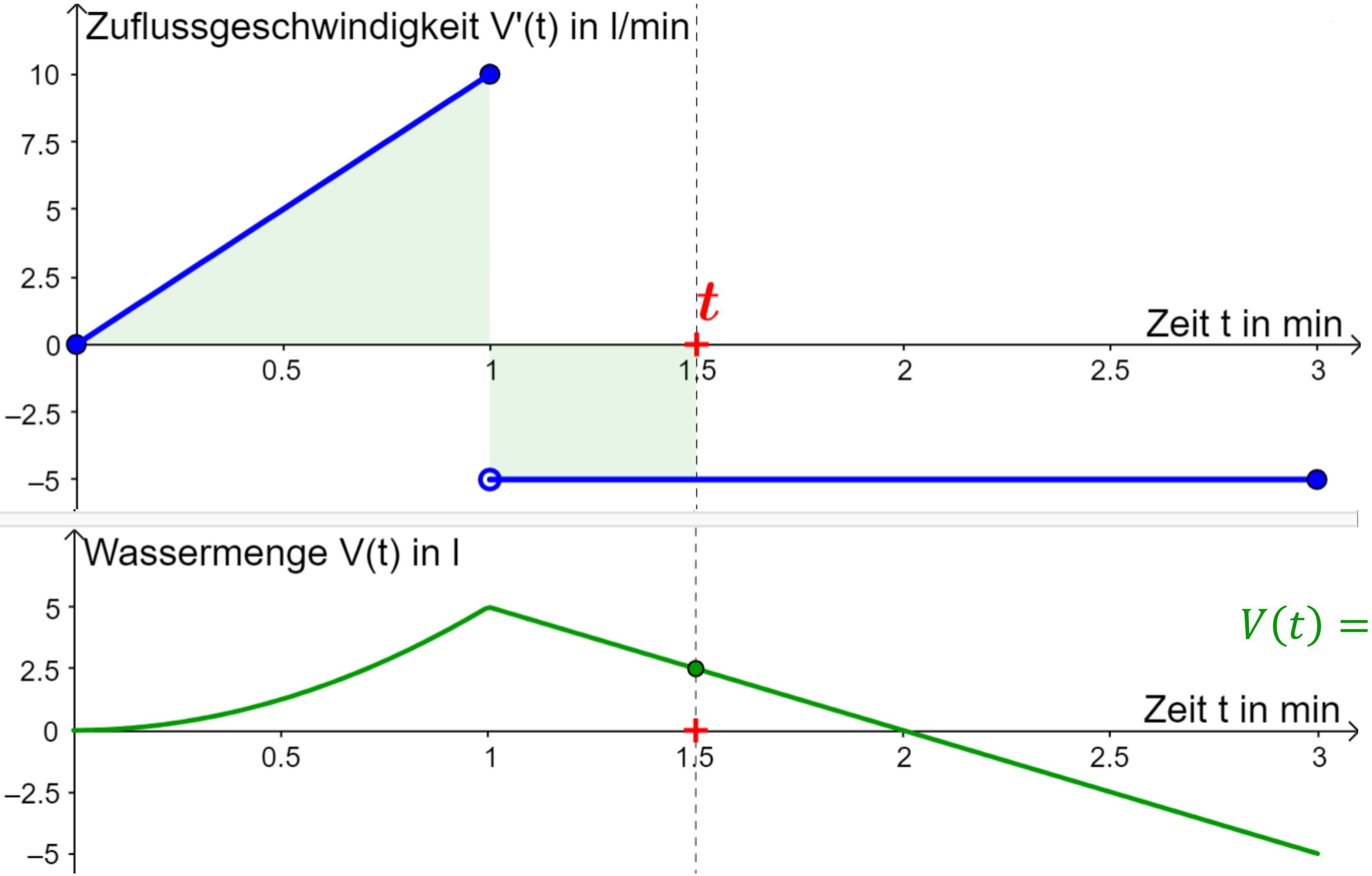
$10 \cdot t$ und $5 \cdot (t-1)$ sind Flächeninhalte von Rechtecken. $V(t)$ ist die Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte von Rechtecken, also ein orientierter Flächeninhalt.

Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren



$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad 1 < t \leq 2{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für} \quad t > 2{,}5 \end{cases}$$

Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren



$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad t > 1 \end{cases}$$

Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren

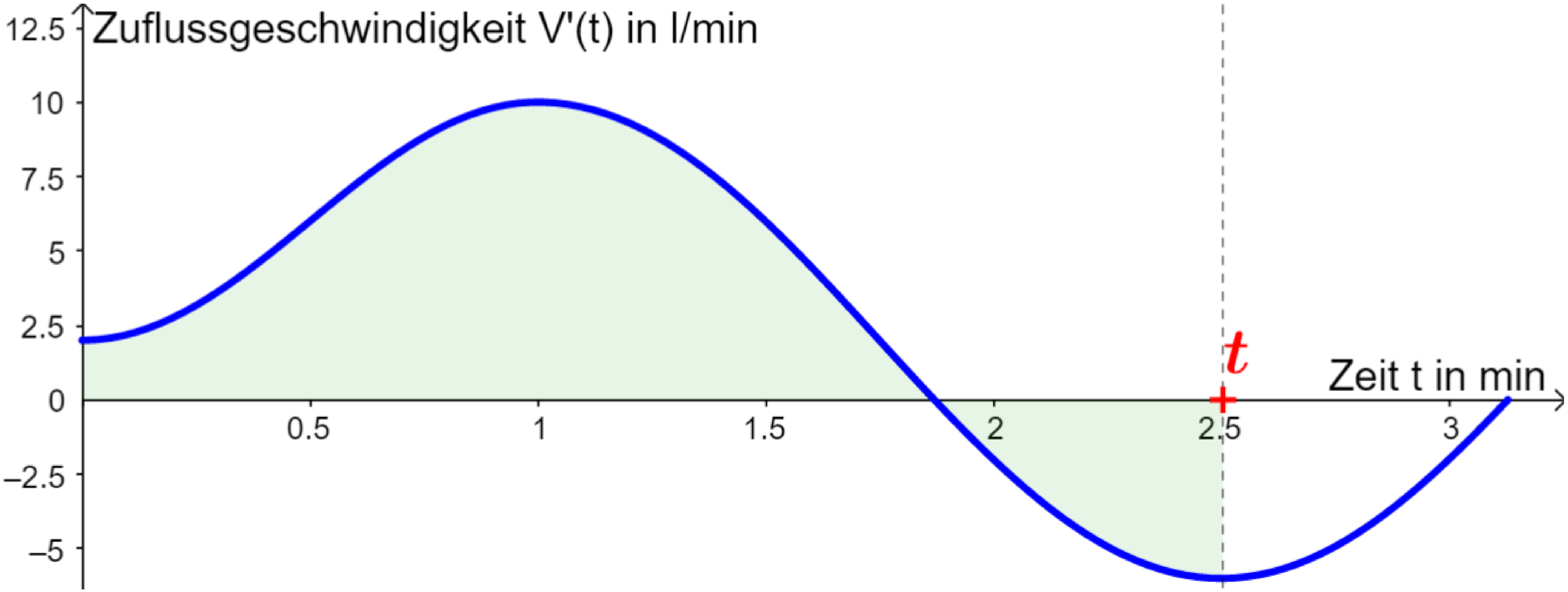
Rückblick

- Aus der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers zu jedem Zeitpunkt wurde die Wassermenge $V(t)$ zu jedem Zeitpunkt rekonstruiert.
- Die Zuflussgeschwindigkeit ist die Ableitung $V'(t)$ (momentane Änderungsrate) der Wassermenge im Waschbecken.
- Aus der Änderungsrate V' wurde die Funktion V wiederhergestellt. [wiederherstellen = integrare (lat.)]

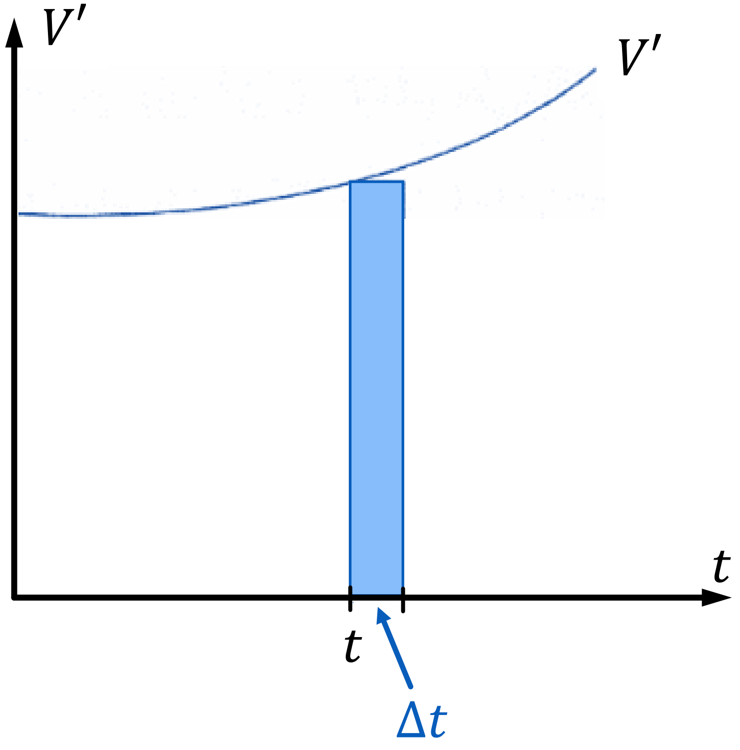
Vorteile des Beispiels

- Fokussiert auf die Grundvorstellung Integrieren als Rekonstruieren.
- Unterstützt die Grundvorstellung Integral als orientierter Flächeninhalt.

Integrieren als Rekonstruieren
Nichtlinearer Zufluss



Integrieren als Rekonstruieren
Nichtlinearer Zufluss



Idee

- Die Zuflussgeschwindigkeit ist im Kleinen, d. h. bei genügend kleinen Zeitintervallen $[t, t+\Delta t]$ nahezu konstant.
- In jedem Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ kann man vorgehen, wie in der Abbildung dargestellt.

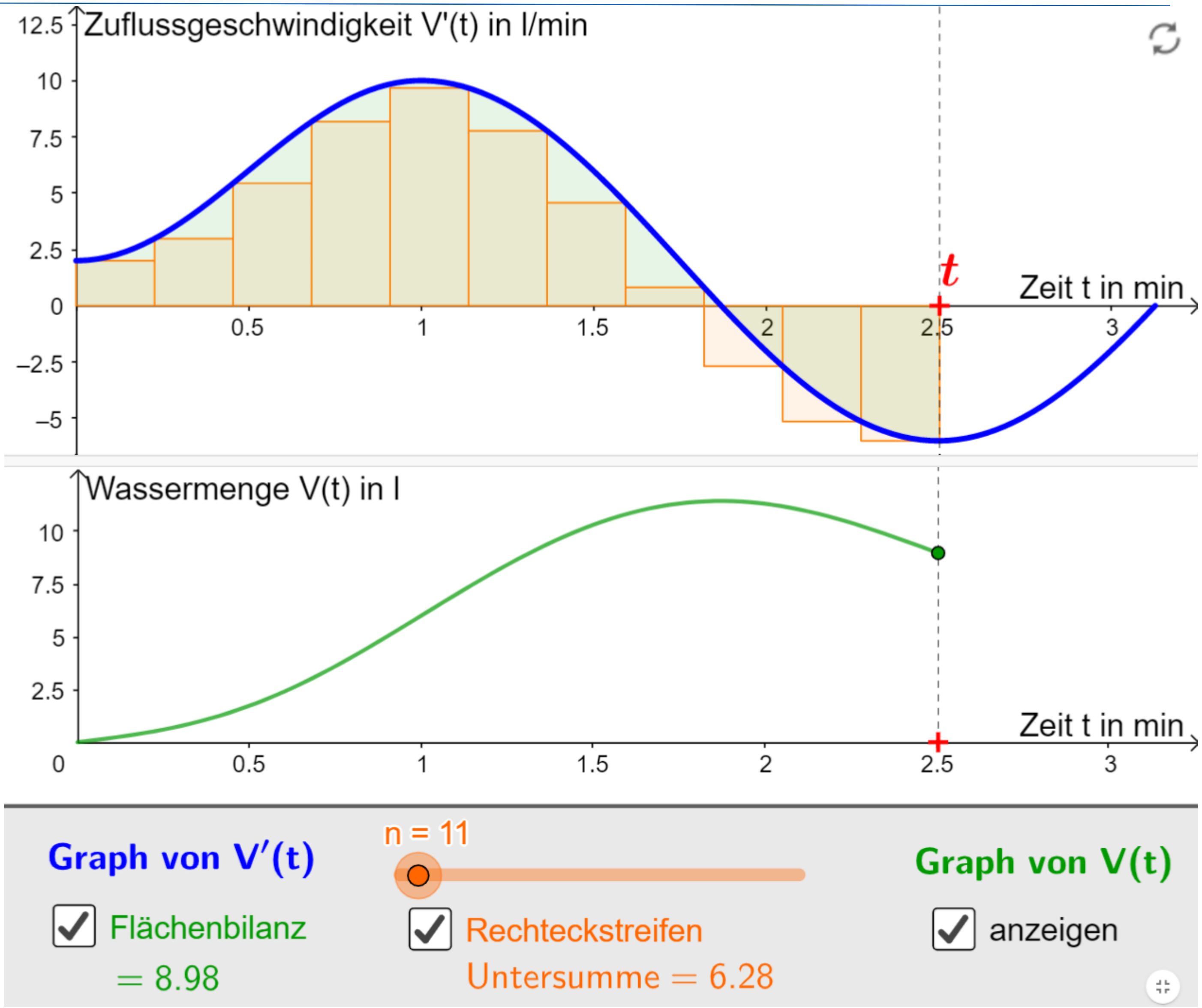
Was trägt V' im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ zum Gesamteffekt bei?

- Da V' die momentane Änderungsrate von V ist, gilt für kleine Δt in guter Näherung

$$V'(t) \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ also } \Delta V \approx V'(t) \cdot \Delta t.$$

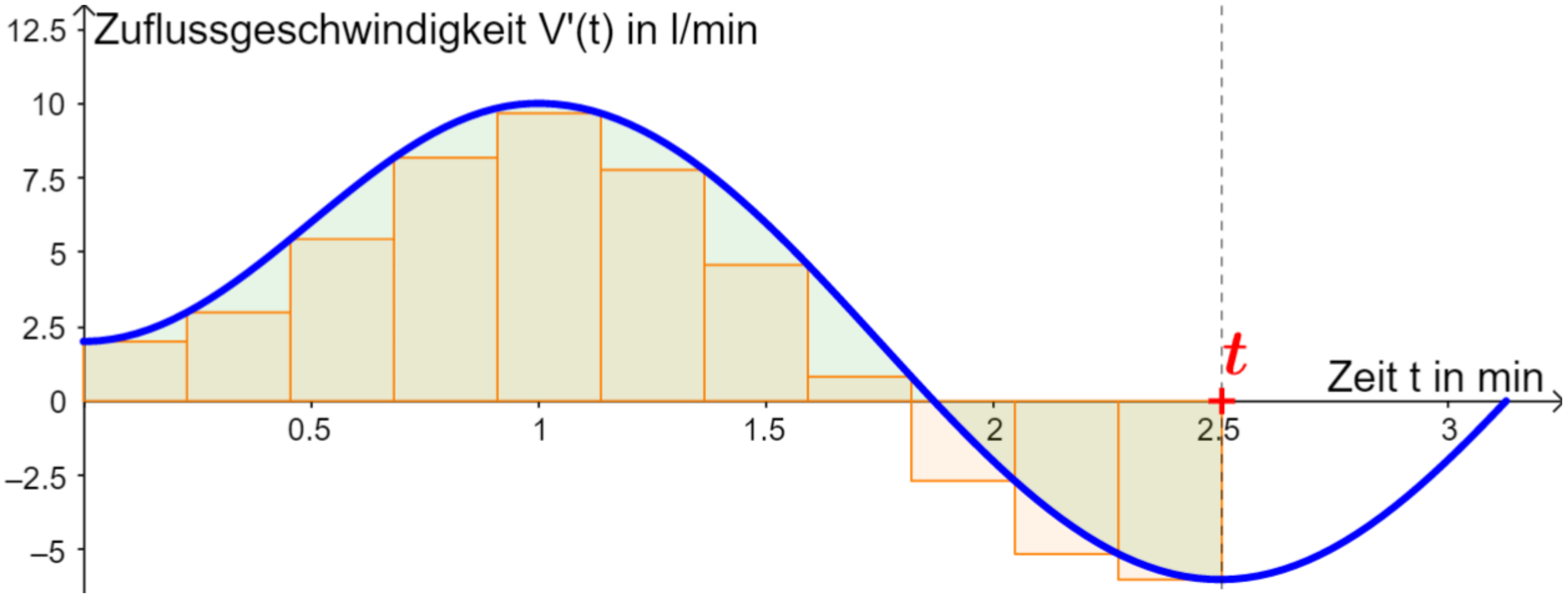
- Dies ist der Zuwachs der Wassermenge im Zeitintervall Δt, geometrisch zu deuten als kleiner (orientierter) Rechteckinhalt.

Integrieren als Rekonstruieren
Nichtlinearer Zufluss



https://www.geogebra.org/m/hacuq7wf

Integrieren als Rekonstruieren
Nichtlinearer Zufluss



Grundvorstellung

Integrieren als Rekonstruieren

Ein bestimmtes Integral rekonstruiert die Gesamtänderung einer Größe (den Gesamteffekt der Änderung) aus ihrer Änderungsrate.

- Zur Rekonstruktion der Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt t sind die Zuwächse über alle Teilintervalle zu summieren, in die das Intervall $[0, t]$ zerlegt wurde.
- Geometrisch gedeutet, ist der rekonstruierte Wert $V(t)$ die Summe aller dieser kleinen (orientierten) Rechteckinhalte.
- Diese unterscheidet sich bei genügend kleiner Streifenbreite beliebig wenig von dem (orientierten) Inhalt der Fläche unter dem Graph von V'.

https://www.geogebra.org/m/hacuq7wf

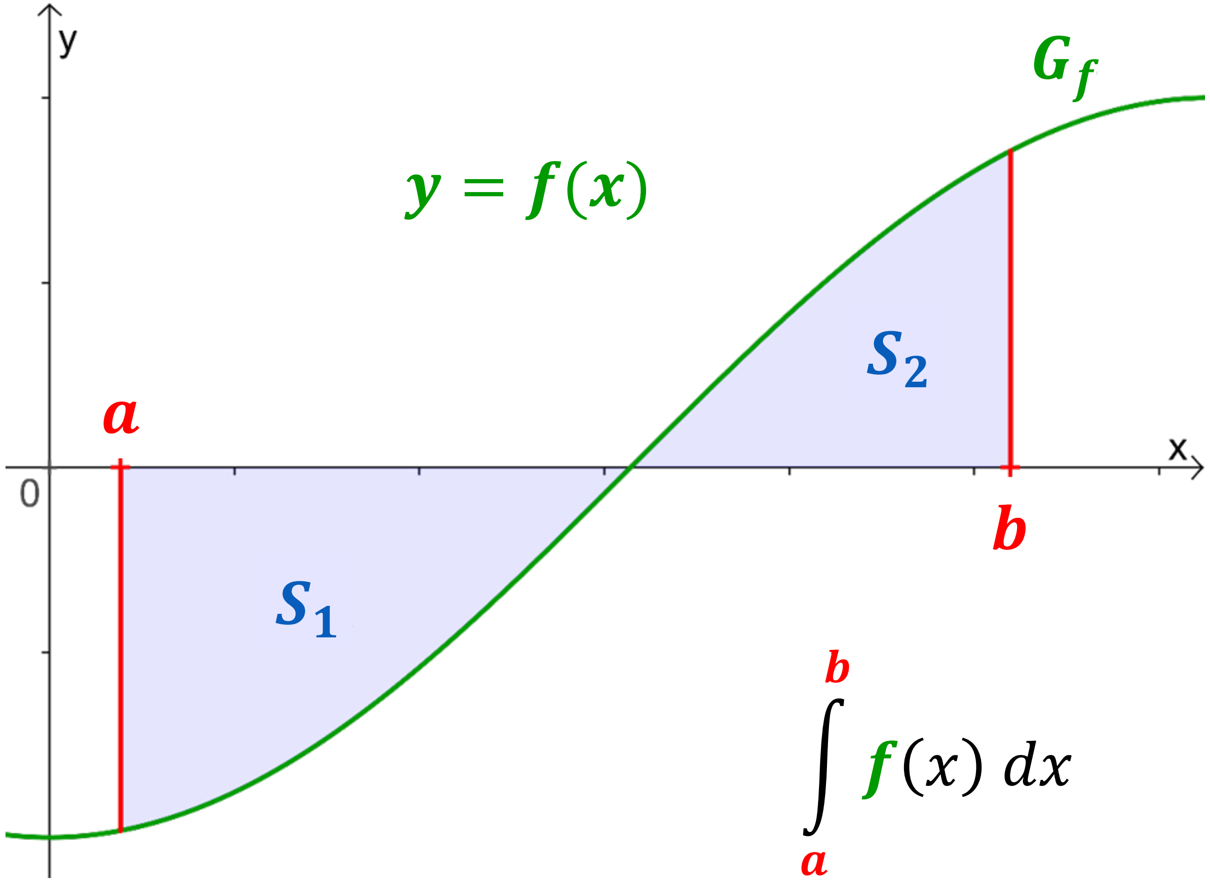
R TU P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$

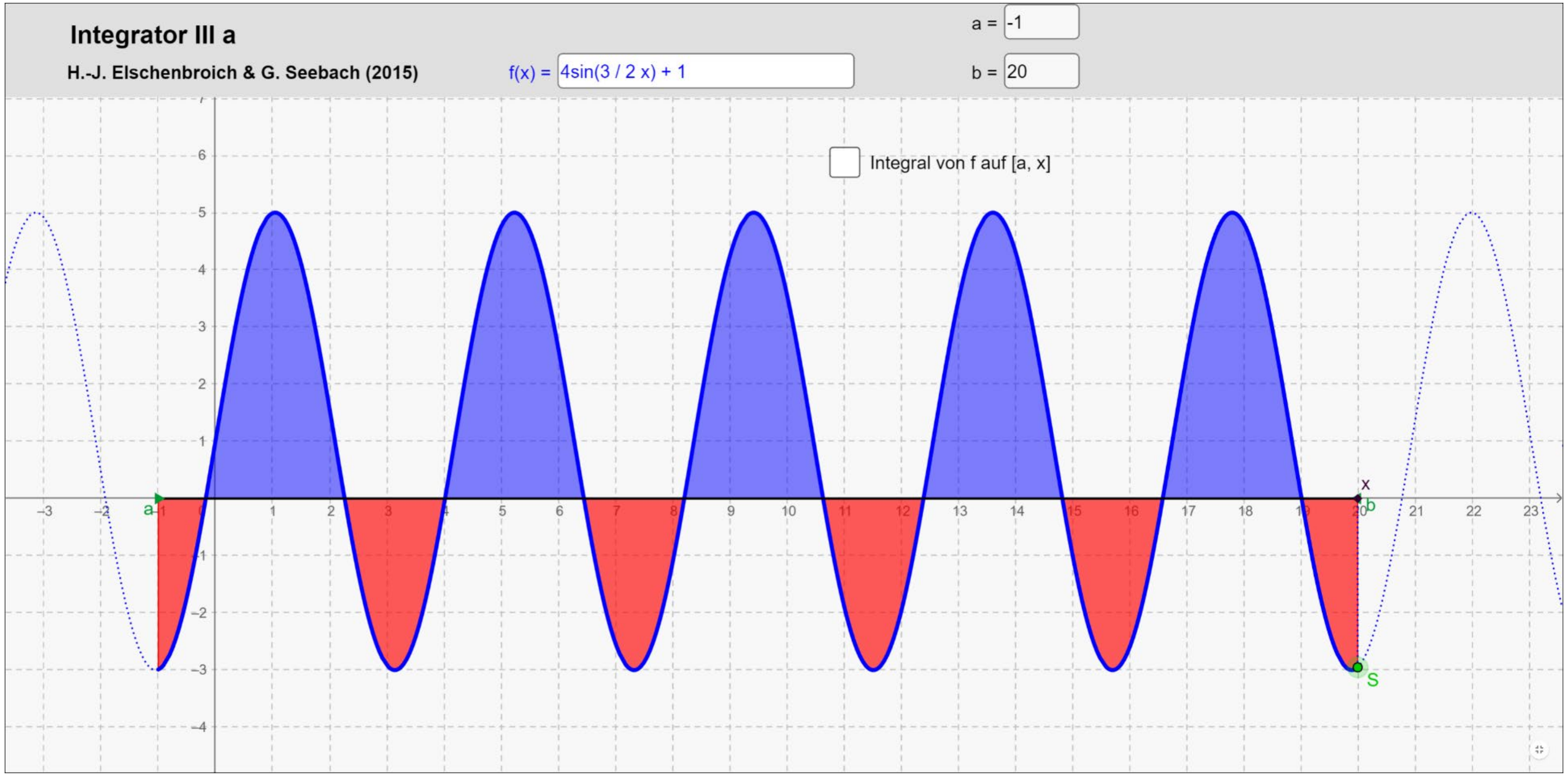


- S_1 ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen G_f der Funktion f, von der x-Achse und der Geraden $x = a$ eingeschlossen wird.
- S_2 ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen G_f der Funktion f, von der x-Achse und der Geraden $x = b$ eingeschlossen wird.
- Es ist $a < b$ und $0 < S_2 < S_1$.
- Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist dann:

  a) $S_1 + S_2$
  b) $S_1 - S_2$
  c) $S_2 - S_1$
  d) $|S_1 - S_2|$
  e) $\frac{1}{2} \cdot (S_1 + S_2)$

Baumert et al. (Hrsg.) (1999). Testaufgaben zu TIMSS/III. Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Grundvorstellung:
Integral als orientierter Flächeninhalt

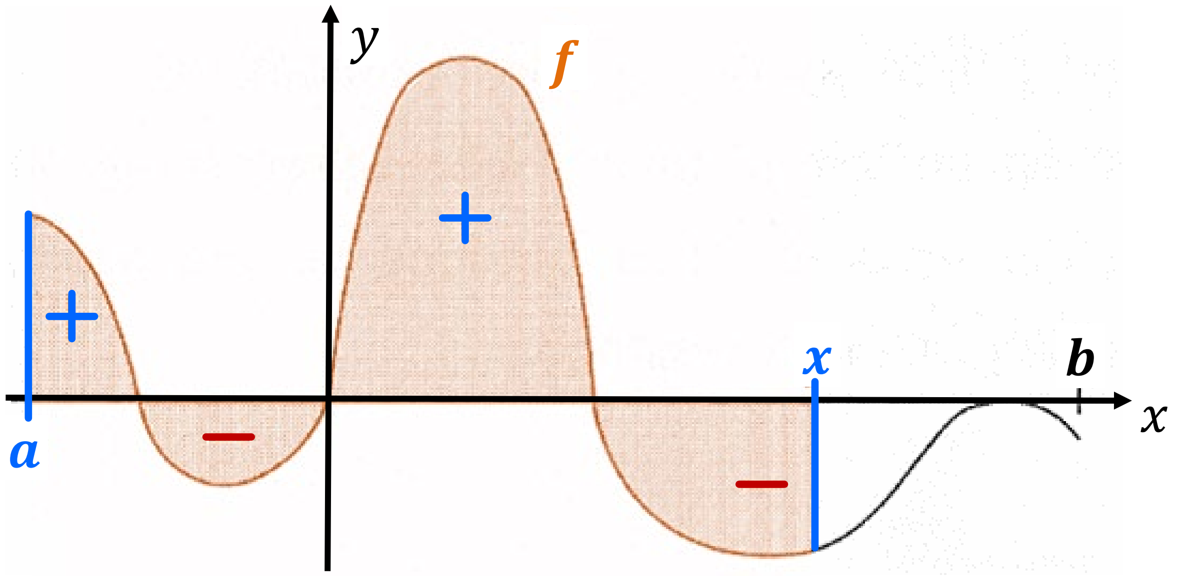


Grundvorstellung
Integrieren als Bilden der Bilanz von Flächeninhalten
Ein bestimmtes Integral ist eine Bilanz von Flächeninhalten.

Integralfunktion

Bemerkung

- Der Übergang zum orientierten Flächeninhalt hängt nicht davon ab, dass die Berandungsfunktion (Berandung) Ableitung einer anderen Funktion ist.
- Es liegt nahe, den Übergang von dieser Voraussetzung zu lösen.

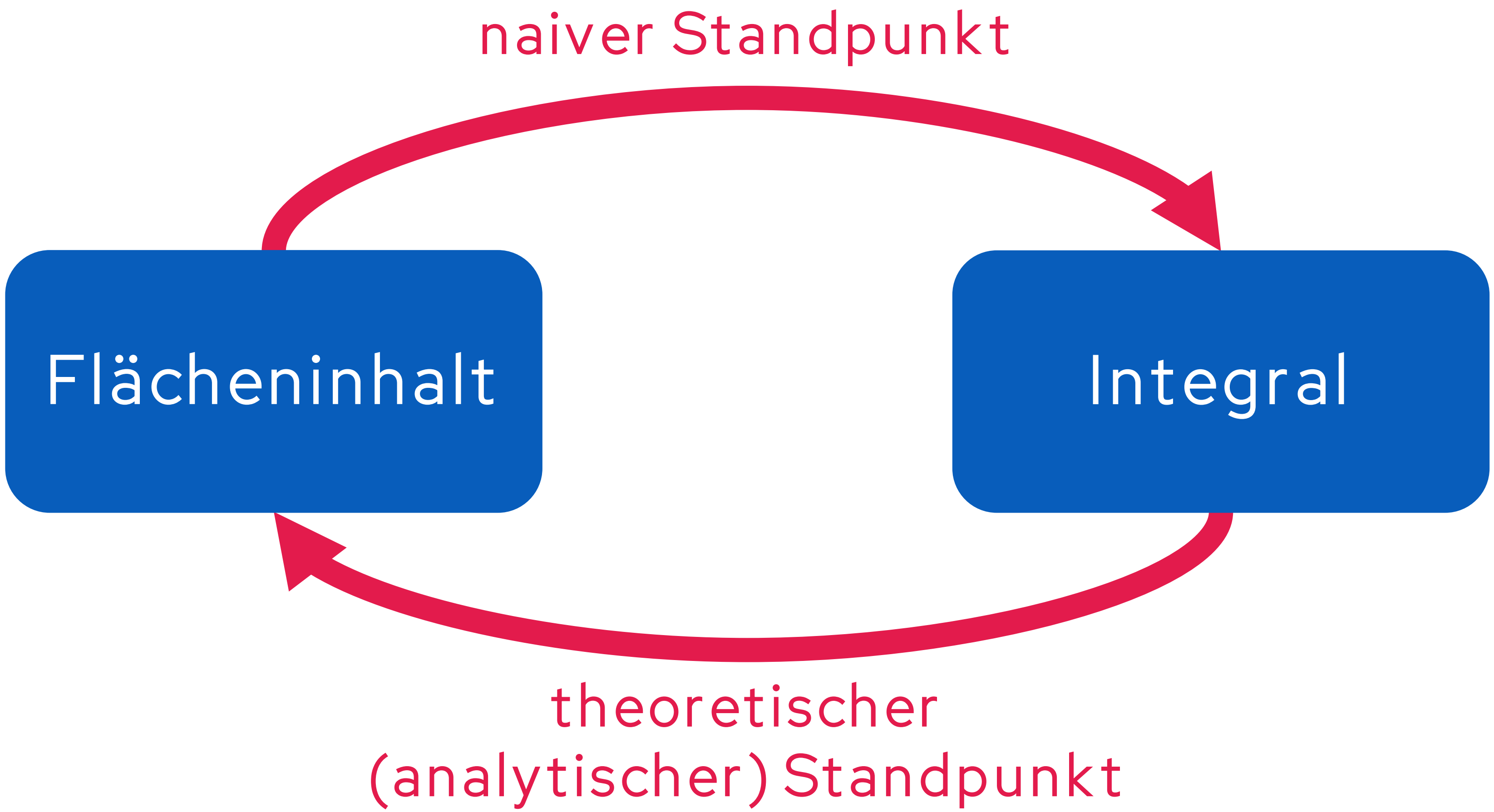


$$\boldsymbol{I_a(x)} := (\text{Summe der Inhalte aller oberhalb der } x\text{-Achse liegenden Flächenstücke zwischen } a \text{ und } x)$$
$$- (\text{Summe der Inhalte aller unterhalb der } x\text{-Achse liegenden Flächenstücke zwischen } a \text{ und } x)$$

Definition

- Zu einer Berandung $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ gehört die **Integralfunktion** $\boldsymbol{I_a}$, die jedem $x \in [a, b]$ den orientierten Inhalt der Flächen zuordnet, die f mit der x-Achse zwischen a und x einschließt.
- Die Funktionswerte der Integralfunktion heißen **Integrale**.

Komplementarität:
Flächeninhalt ↔ Integral



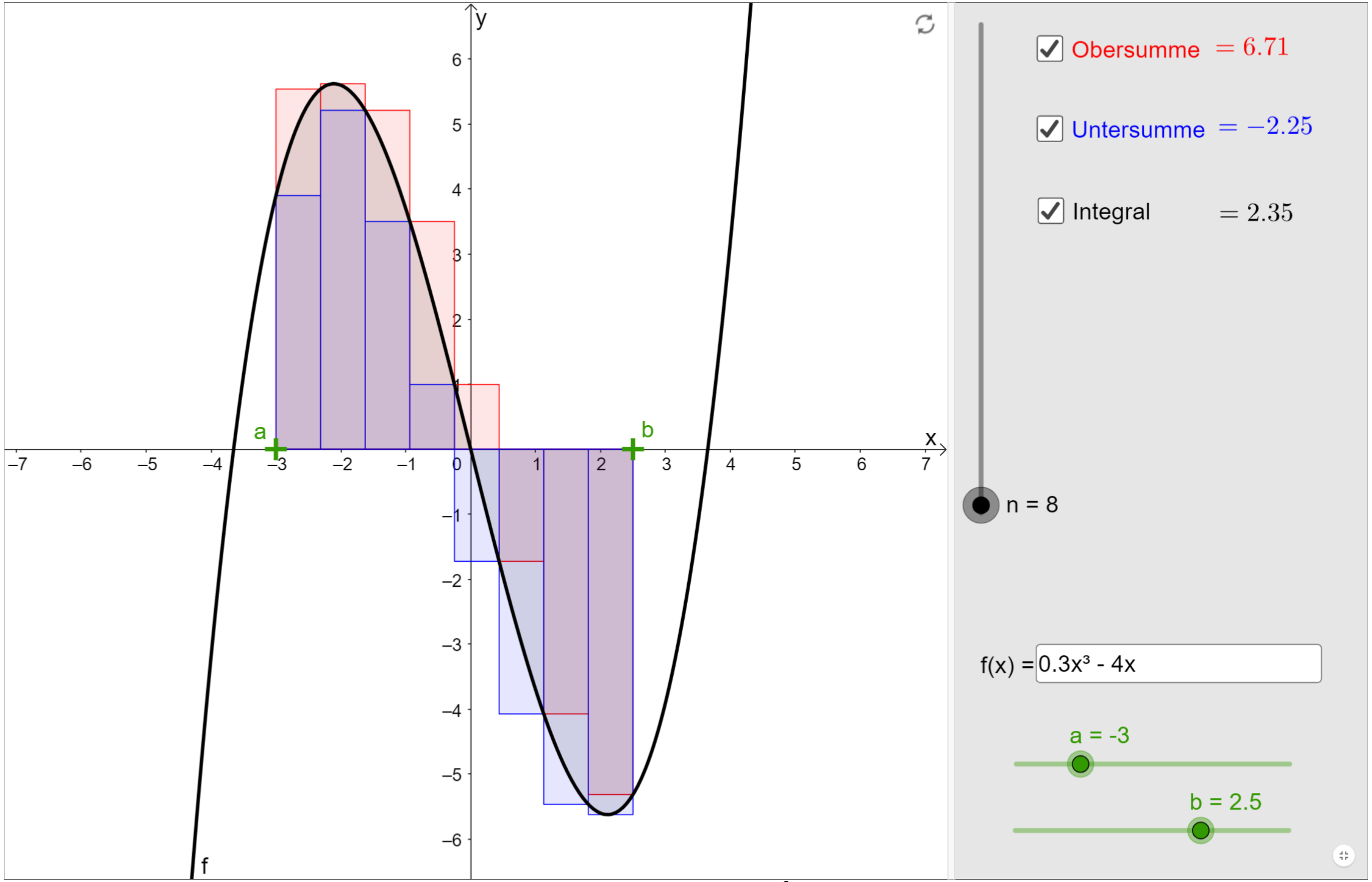
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

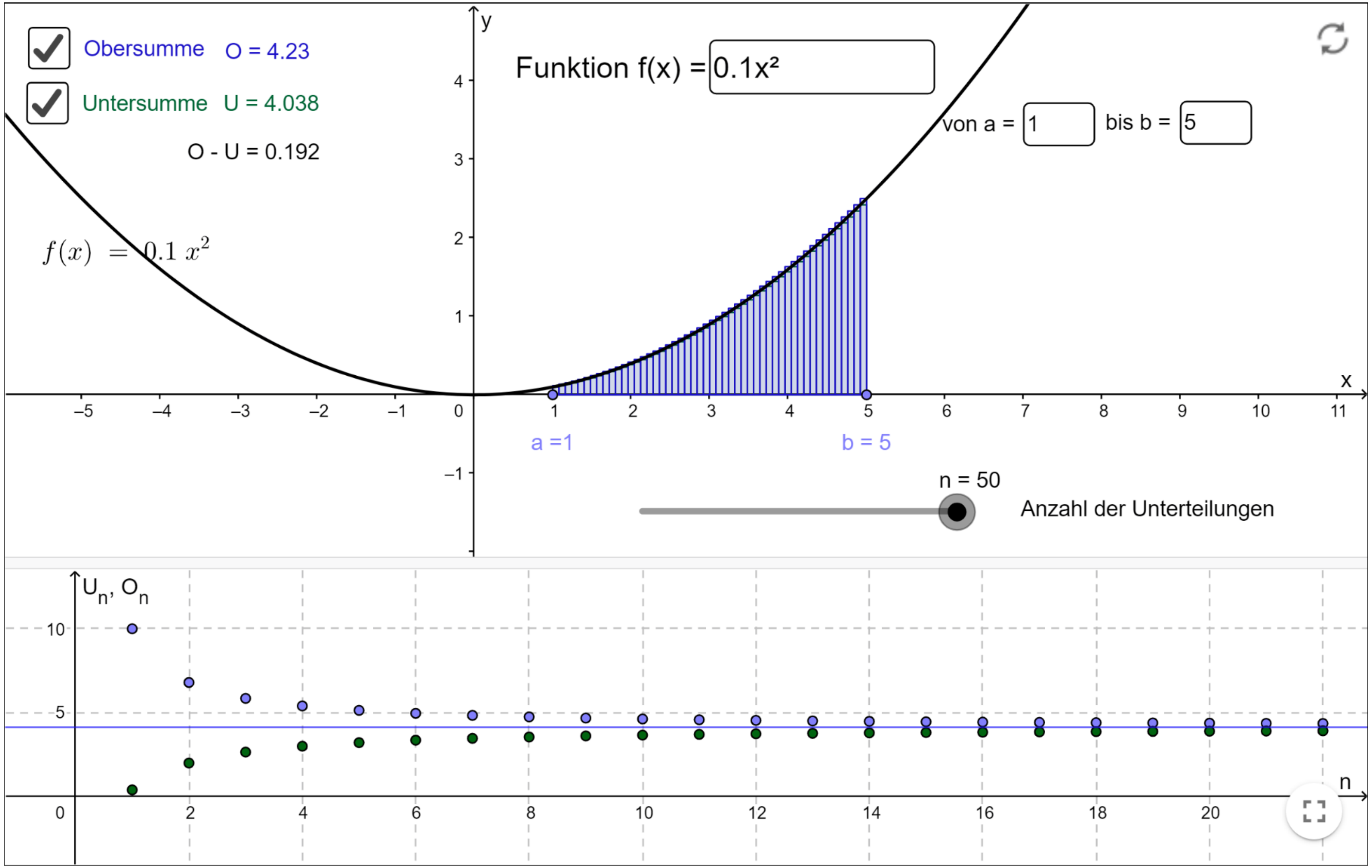
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis"
https://roth.tel/analysis

Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren



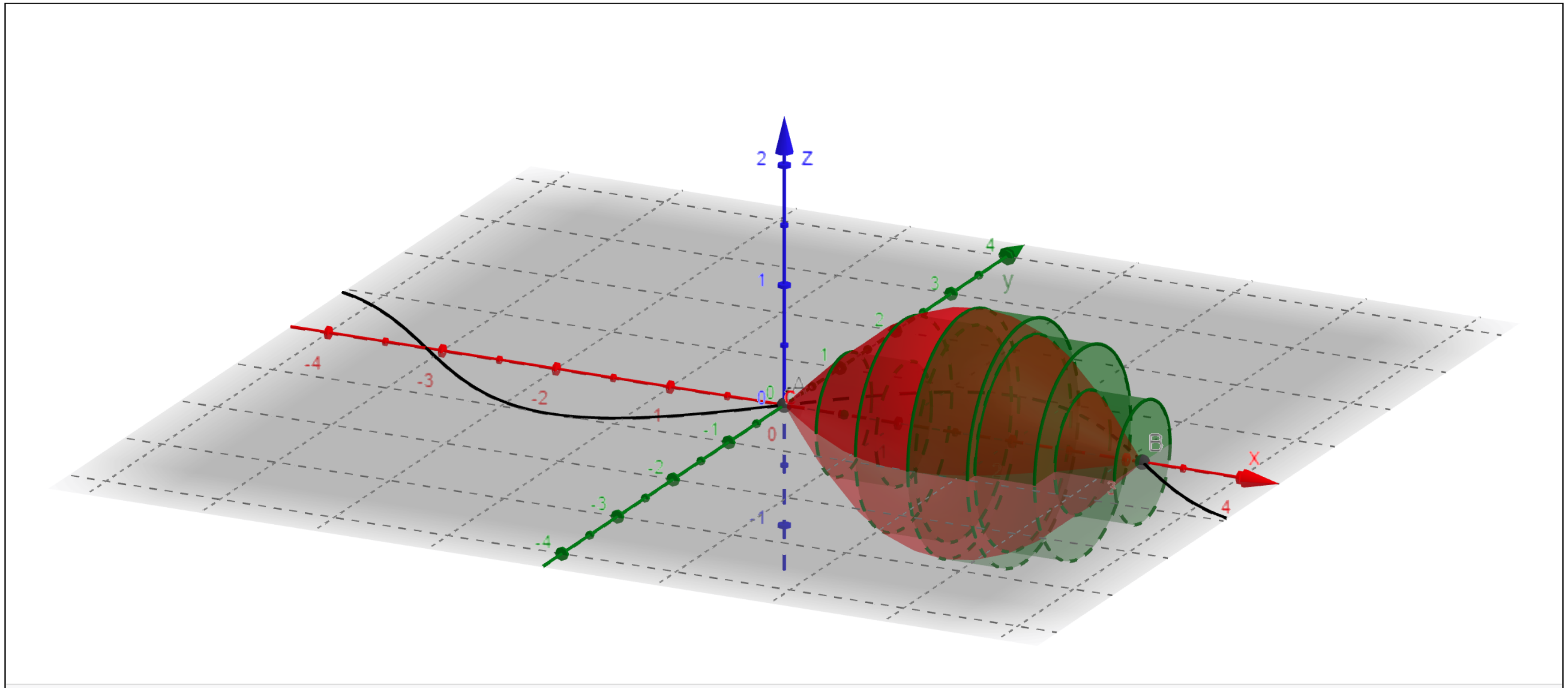
Grundvorstellung
Integrieren als Kumulieren
Ein bestimmtes Integral ist das Ergebnis des Aufsummierens kleiner Summanden mit Produktstruktur.

Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren



 https://www.geogebra.org/m/QKQg6arS

Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren



n = 6

Anzahl der Unterteilungen

Funktion f(x) = sin(x)

von a = 0 bis b = π

$$V_K = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x = 4.93$$

$$V = \pi \cdot \int_0^{\pi} (f(x))^2 \, dx \approx 4.93$$

☑ Zylinder ein/aus

☑ Rotationskörper ein/aus

 https://www.geogebra.org/m/Avgeb3xd

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

3.1 Integrieren als Rekonstruieren

3.2 Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts

3.3 Integrieren als Kumulieren

3.4 Integrieren als Mitteln

3.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

3.6 Grundvorstellungen vernetzen

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

dms.nuw.rptu.de

RPTU

Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln
Mittelwertbildung bei linearen Funktionen

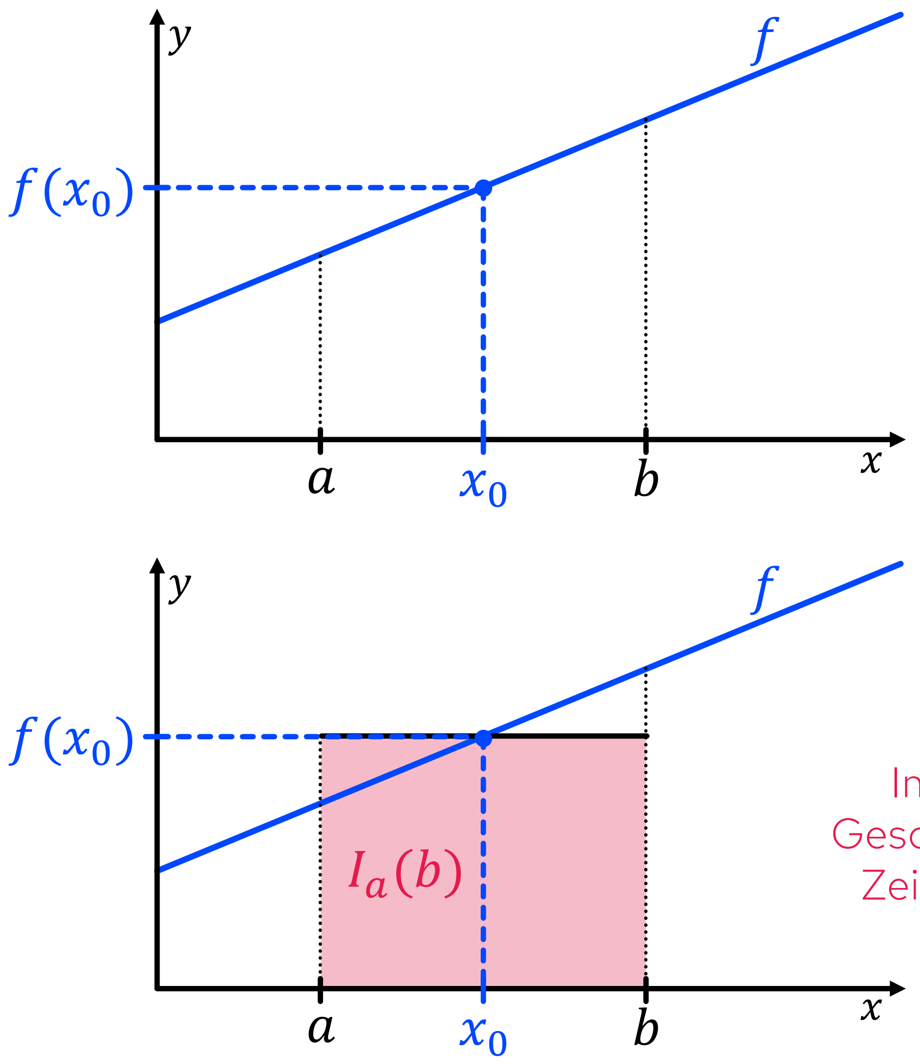
Gesucht

- Mittelwert $f(x_0)$ einer linearen Funktion in einem Intervall $[a, b]$.
- Der Mittelwert wird in der Mitte des Intervalls angenommen.
- Der mittlere Funktionswert kann genutzt werden, um den Flächeninhalt $I_a(b)$ unter dem Graph von f als Rechteck zu realisieren.
- Damit gilt:

  $$I_a(b) = (b - a) \cdot f(x_0)$$

- Für den Mittelwert $f(x_0)$ folgt:

  $$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$



Inhaltlich als Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm deuten

Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln
Mittelwertbildung bei linearen Funktionen

Gesucht: Mittelwert einer Messreihe aus n Messwerten $y_1, y_2, \dots, y_n$ zu äquidistanten Zeitpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$.

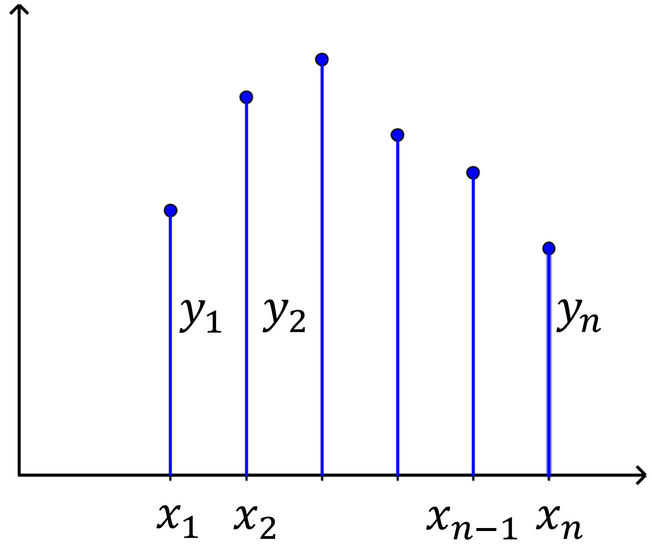
Ergebnis: Der gesuchte Mittelwert ist das arithmetische Mittel der Messwerte $y_1, y_2, \dots, y_n$

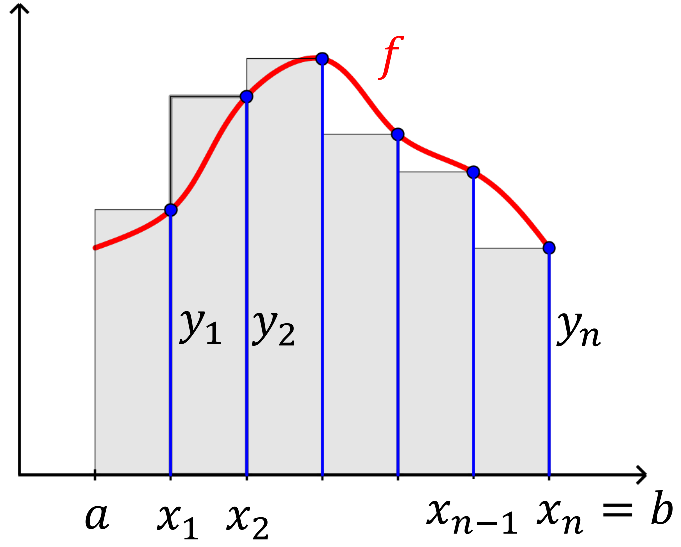
$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + \dots + y_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \,.$$

- Messwerte werden als diskrete Realisierung eines stetigen Funktionsverlaufs f betrachtet.
- Algebraische Umformung des Terms für das arithmetische Mittel liefert:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$\approx \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$





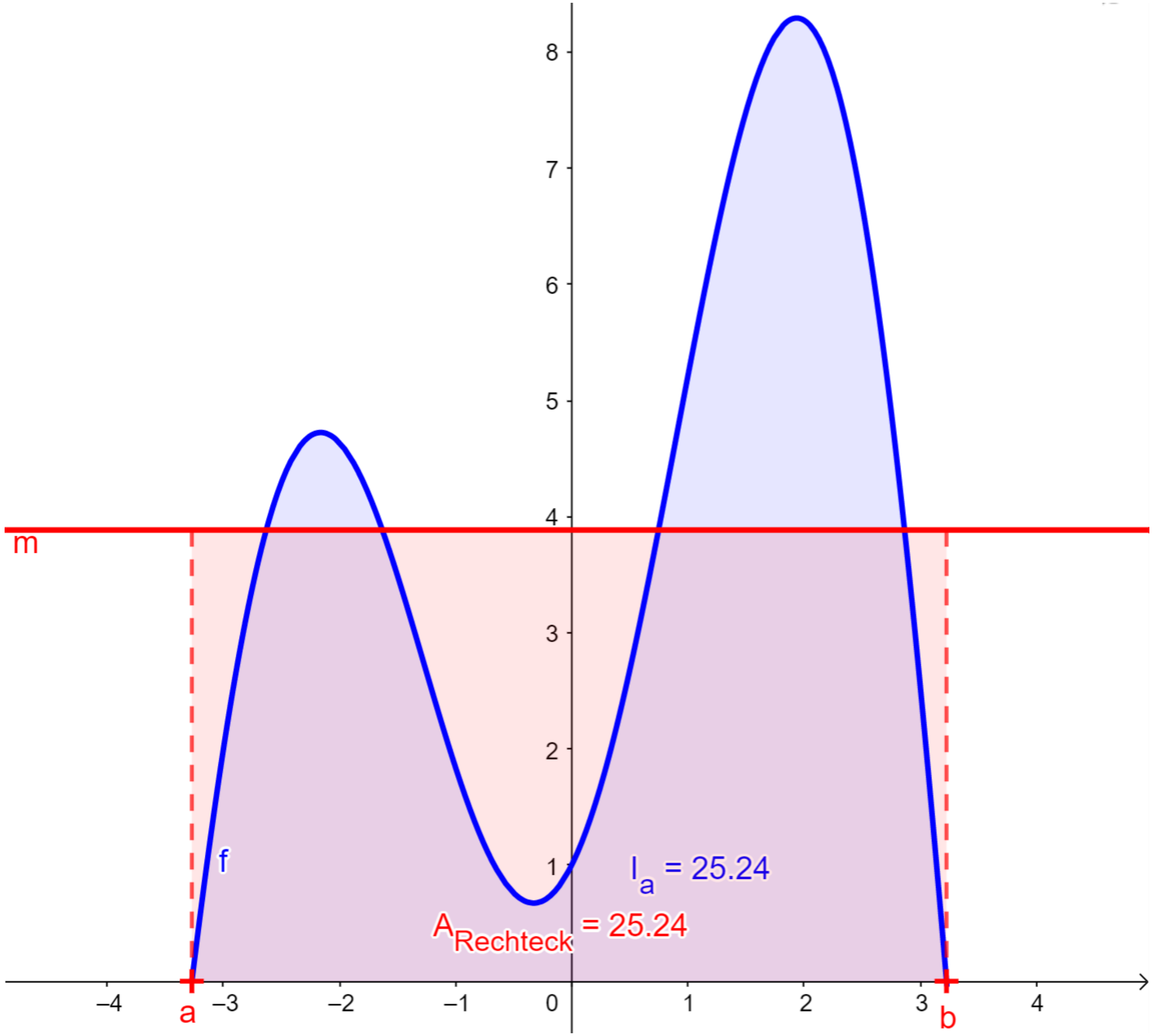
Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln
Mittelwertbildung bei linearen Funktionen

Bemerkung

- Aus den Beispielen folgt, dass es sinnvoll ist, unter der Zahl
$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$
den Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$ zu verstehen.

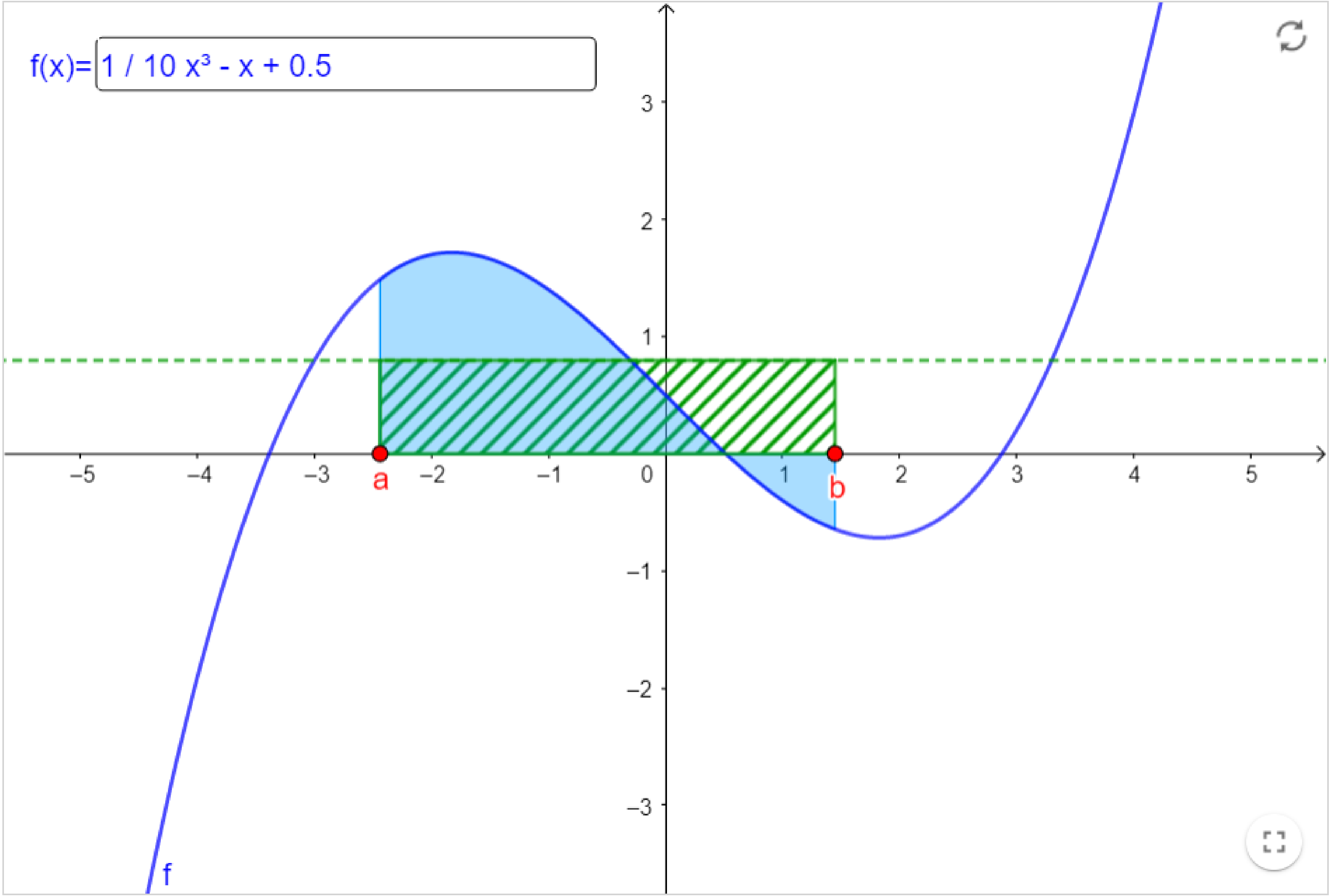
- Es gilt:
$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

- Speziell:
$$I_a(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$



Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln
Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Grundvorstellung
Integrieren als Mitteln
Ein bestimmtes Integral mittelt Funktionswerte.

 https://www.geogebra.org/m/cumrvz4m

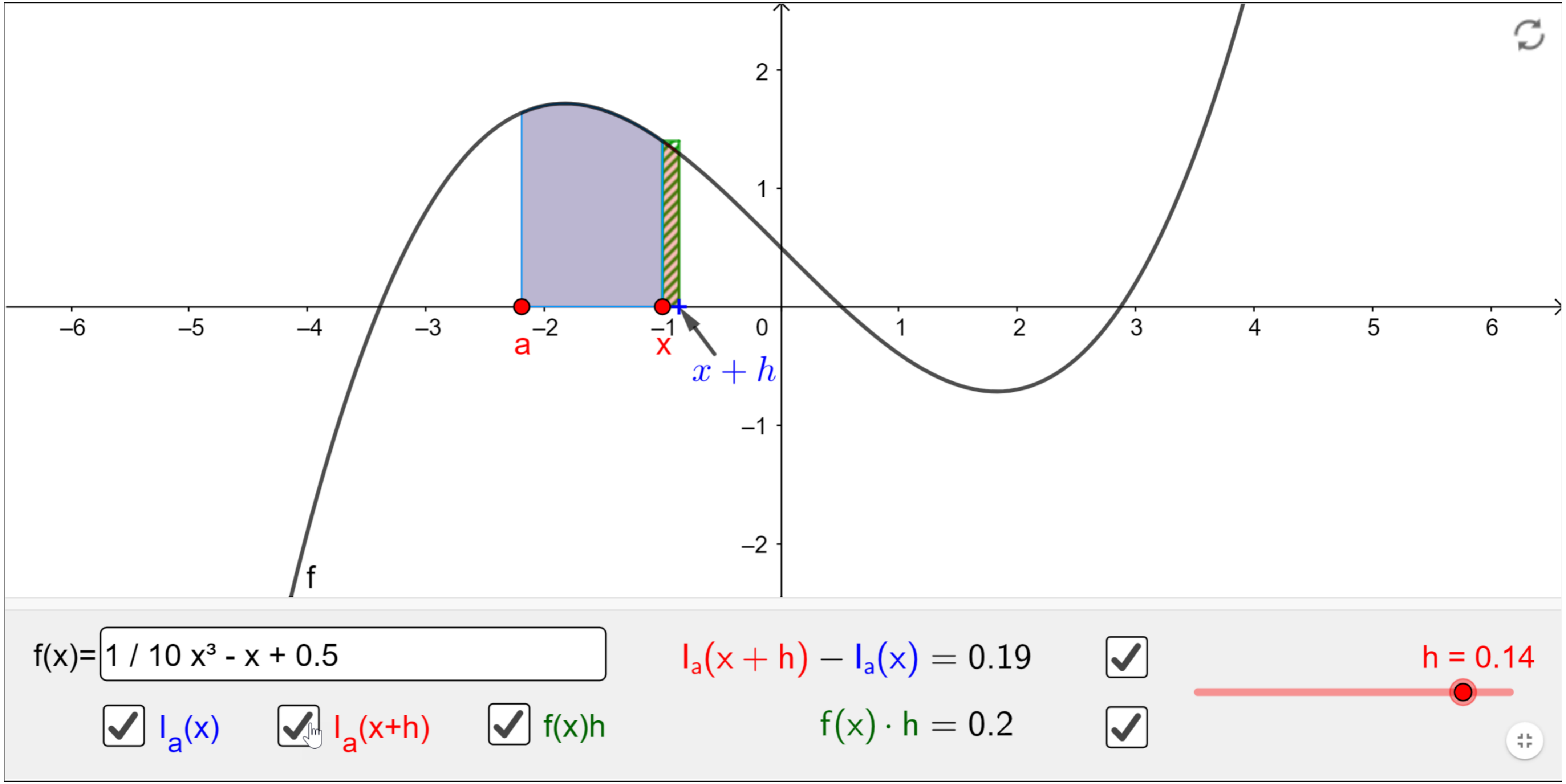
RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

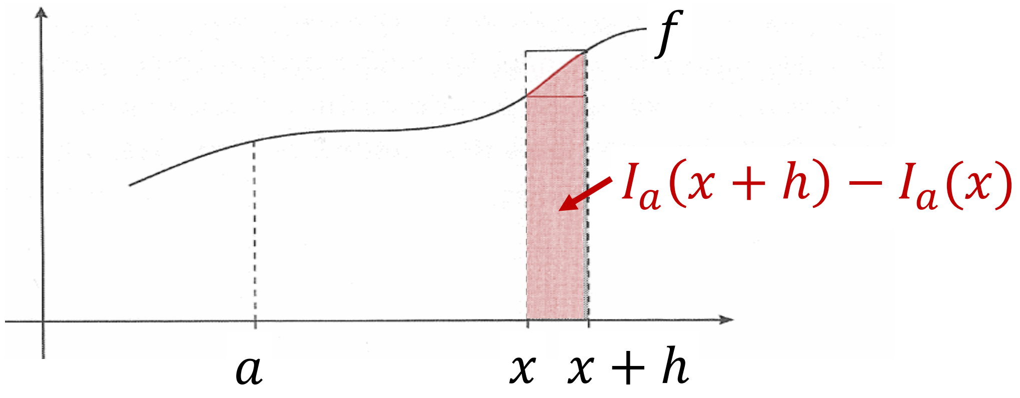


Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Behauptung

- Die Ableitung der Integralfunktion ist die Berandungsfunktion.



Begründung

- Der absolute Zuwachs von I_a, das Flächenstück $I_a(x+h) - I_a(x)$, lässt sich durch Rechteckflächen abschätzen:

$$f(x) \cdot h \leq I_a(x+h) - I_a(x) \leq f(x+h) \cdot h$$

- Für den relativen Zuwachs von I_a (mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta I_a}{h}$) folgt:

$$f(x) \leq \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leq f(x+h) \qquad (*)$$

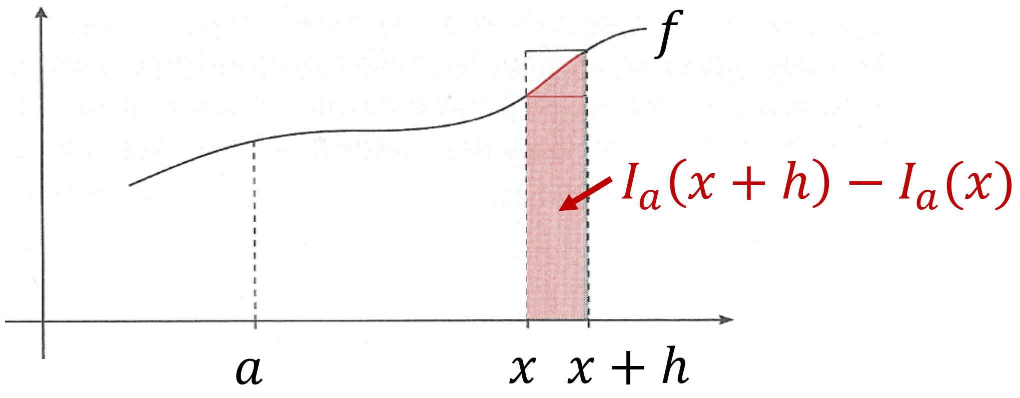
- Die Integralfunktion I_a hat an der Stelle x die Eigenschaft $I_a' = f$, wenn $f(x+h)$ für $h \to 0$ gegen $f(x)$ strebt (d. h. f stetig in x ist). Dann folgt aus (*):

$$f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leq f(x) \quad \Rightarrow \quad I_a'(x) = f(x)$$

Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Behauptung

- Die Ableitung der Integralfunktion ist die Berandungsfunktion.



Begründung

- Der absolute Zuwachs von I_a, das Flächenstück $I_a(x+h) - I_a(x)$, lässt sich durch Rechteckflächen abschätzen:

$$\min\big(f(x), f(x+h)\big) \cdot h \leq I_a(x+h) - I_a(x) \leq \max\big(f(x), f(x+h)\big) \cdot h$$

- Für den relativen Zuwachs von I_a (mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta I_a}{h}$) folgt:

$$\min\big(f(x), f(x+h)\big) \leq \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leq \max\big(f(x), f(x+h)\big) \qquad (*)$$

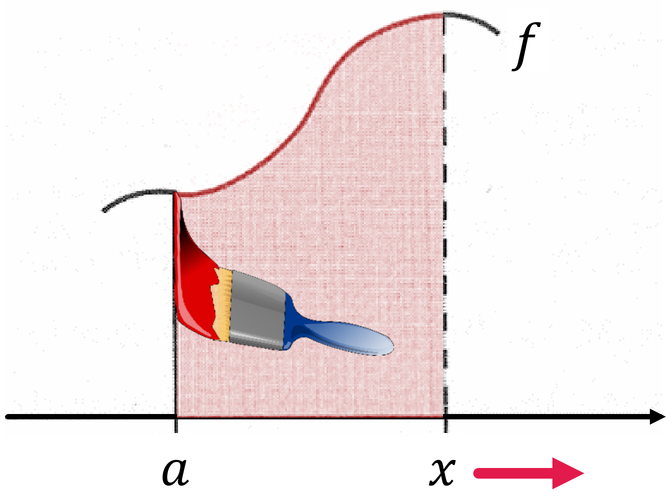
- Die Integralfunktion I_a hat an der Stelle x die Eigenschaft $I_a' = f$, wenn $f(x+h)$ für $h \to 0$ gegen $f(x)$ strebt (d. h. f stetig in x ist). Dann folgt aus (*):

$$f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leq f(x) \quad \Rightarrow \quad I_a'(x) = f(x)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Vorstellung

Wenn man die von f berandete Fläche mit Farbe streicht und dabei gleichmäßig von a nach rechts läuft, dann ist der Verbrauch an Farbe proportional zum Funktionswert von f an der Stelle, an der man sich gerade befindet.



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x \in [a, b]$ stetig, dann ist die Integralfunktion I_a dort differenzierbar und es gilt:

$$I_a'(x) = f(x)$$

- Kurz: Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Berandungsfunktion.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Bemerkung

- Die auf der vorherigen Folie angegebene Formulierung des HDI, kann nur voll durchschaut werden, wenn Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit als analytisch definierte Begriffe verfügbar sind.
- Dies wird im Analysis-Unterricht der Oberstufe nicht erreicht.
- Die schulische Bedeutung des HDI liegt darin, dass er
  (1) ein Instrument zur Berechnung von Integralen zur Verfügung stellt und
  (2) einen Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren aufzeigt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Integralfunktionen I_a zu einer Funktion f lassen sich finden, wenn man irgendeine Stammfunktion F von f sucht und die Differenz

$$I_a(x) = F(x) - F(a) \quad \text{mit} \quad x \in [a, b]$$

berechnet.

Differenzieren und Integrieren als Umkehroperationen

$$g \xrightarrow[\text{Differenzieren}]{\text{Übergang zur lokalen Änderungsrate}} g' \xrightarrow[\text{Integrieren („Rekonstruieren")}]{\text{Übergang zur Integralfunktion}} I_a = g$$

$$f \xrightarrow[\text{Integrieren („Rekonstruieren")}]{\text{Übergang zur Integralfunktion}} I_a \xrightarrow[\text{Differenzieren}]{\text{Übergang zur lokalen Änderungsrate}} I_a' = f$$

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

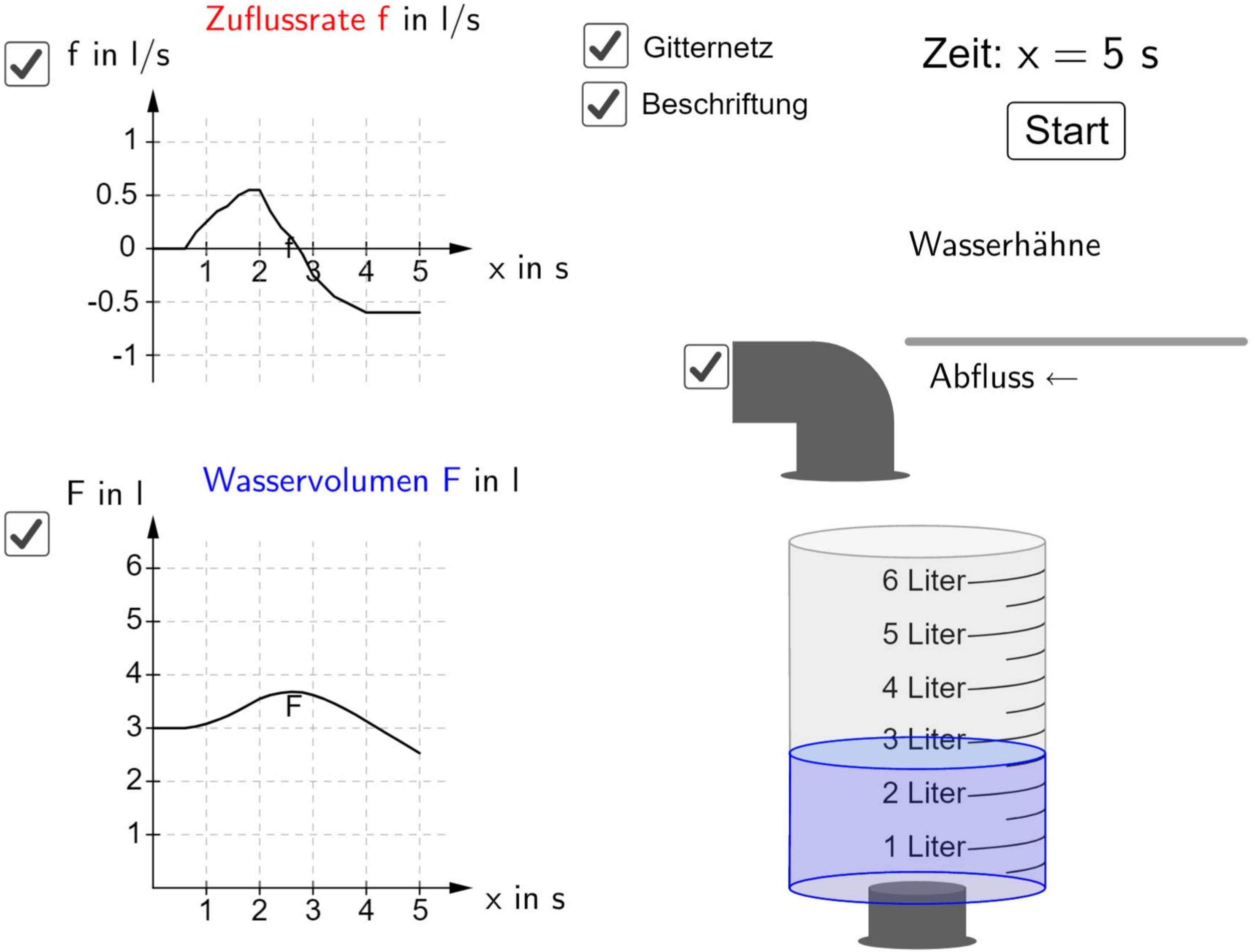
3 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

dms.nuw.rptu.de

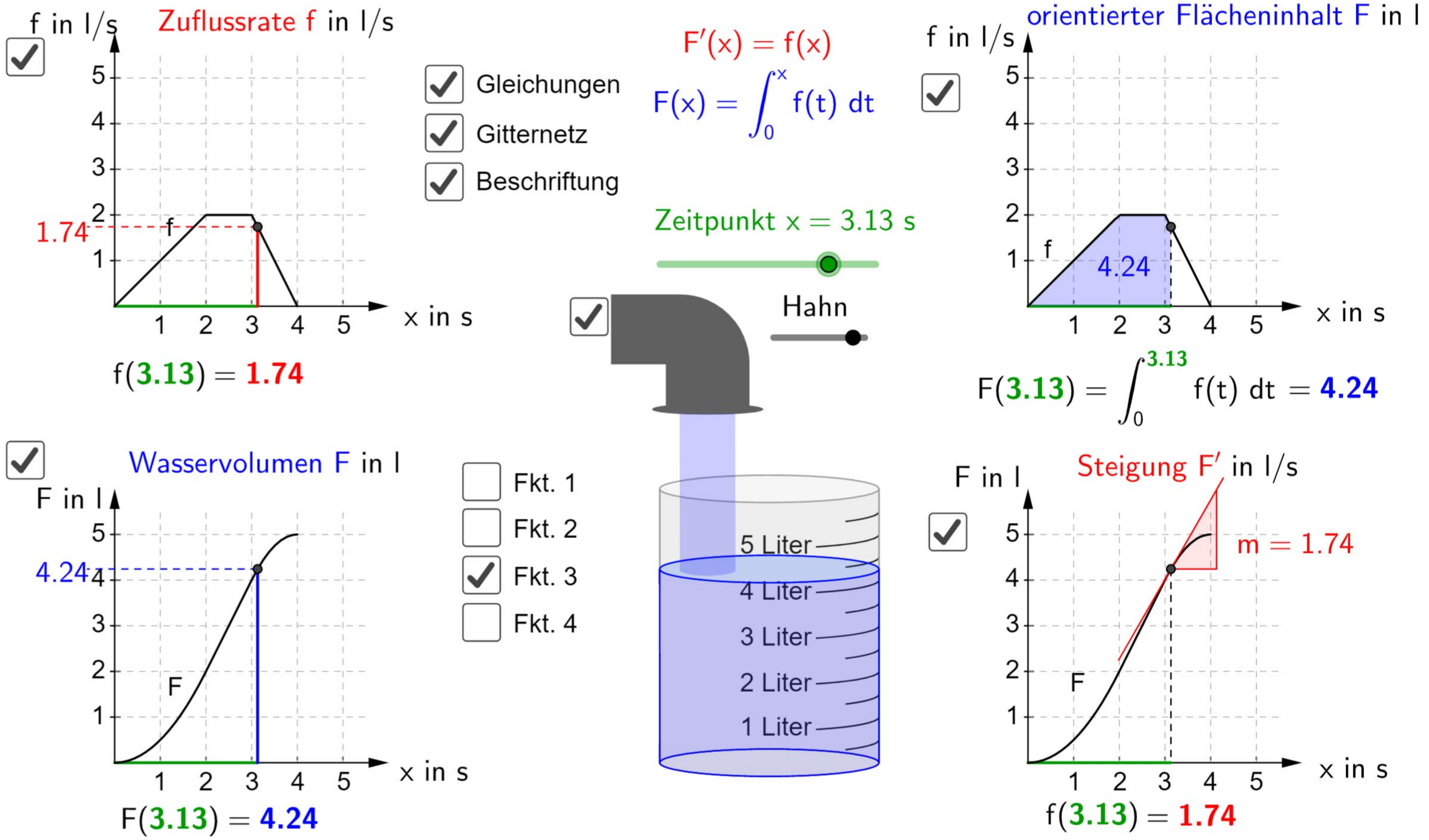
RPTU

Wasserhahn-Applet 1:
Grundvorstellungen vernetzen



GeoGebra-Buch: Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung
https://geogebra.org/m/dzg7waaf

Wasserhahn-Applet 2: Grundvorstellungen vernetzen

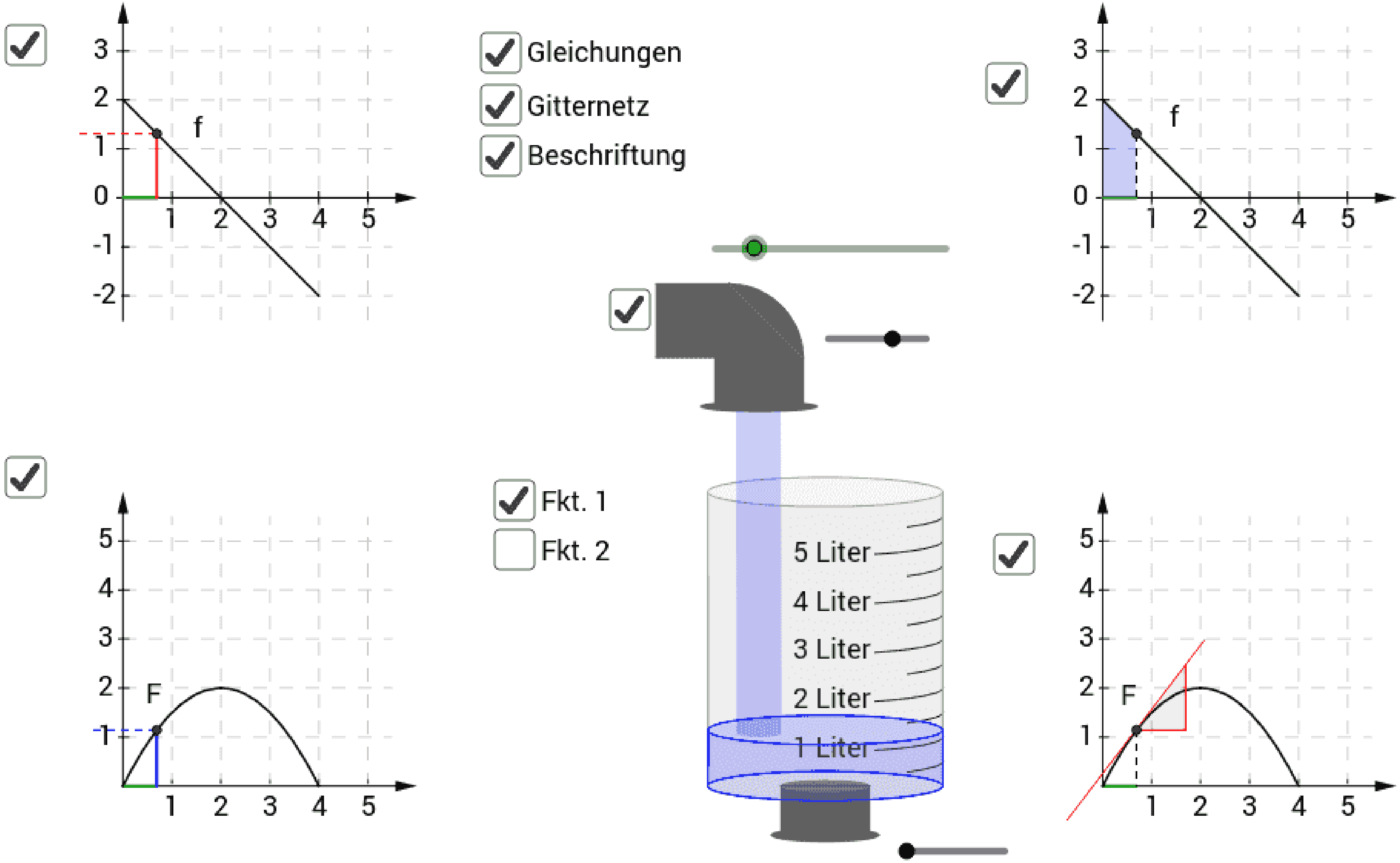


Becher, A. & Ossmann, H. (2016). Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung – Grundvorstellungen vernetzt in fünf Bildern. *Mathematik lehren, 199*, 33-36

GeoGebra-Buch: Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung
https://geogebra.org/m/dzg7waaf

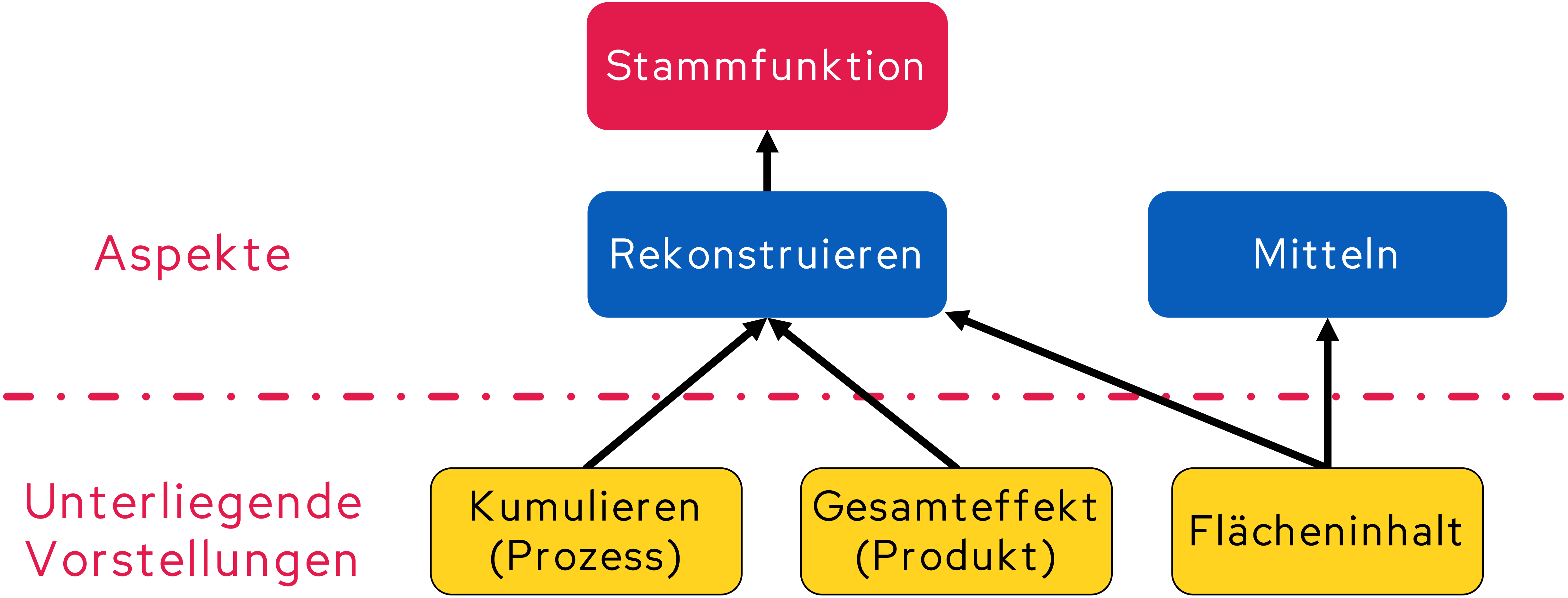
Wasserhahn-Applet 3:
Grundvorstellungen vernetzen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen



GeoGebra-Buch: Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung
https://geogebra.org/m/dzg7waaf

Integralbegriff:
Inhaltliche Aspekte und Vorstellungen



4 Abschlussrunde und Veranstaltungsevaluation

Feedback

Veranstaltungsfeedback

- https://roth.tel/feedback

Fragen (Es sind mehrere Antworten möglich.)

- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)
- Was wünschen Sie sich für die Veranstaltung?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de