MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvorstellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Modul 2:
Grundvorstellungen zum Integral

Jürgen Roth & Susanne Digel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

09.11.2023 Videokonferenz

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

MaTeGnu

Modul 2: GV zum Integral

1. Grundvorstellungen zum Integral im Überblick
2. Integrieren als Rekonstruieren
3. Integrieren als Kumulieren
4. Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts
5. Integrieren als Mitteln
6. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)
7. Grundvorstellungen vernetzen

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

RPTU

MaTeGnu

1 Grundvorstellungen zum Integral im Überblick

Integral-Quiz

Anleitung

- Aneinanderreihen der Kennbuchstaben der richtigen Aussagen ergibt einen Lösungssatz auf sprachlich eher mäßigem Niveau.
- **Wichtig:** Bei jeder Frage sind mehrere richtige Antworten möglich.

Aufgabe 1

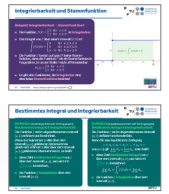
Was bedeutet die Aussage „f ist auf $[a, b]$ integrierbar“?

E f ist im Intervall $[a, b]$ differenzierbar.

K f ist im Intervall $[a, b]$ stetig.

O f hat im Intervall $[a, b]$ eine Stammfunktion.

M Obersummengrenzwert = Untersummengrenzwert



Arndt, K.-D. (1995). Integral-Quiz. Die etwas andere Aufgabe. *Mathematik lehren 72*, 67 • https://www.geogebra.org/m/nvkmwxna

Integral-Quiz

Aufgabe 2

Unter welchen Bedingungen gilt folgendes?

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

A Es ist $a \leq b$ und $f(x) \leq g(x)$ auf $[a, b]$.

Z Es ist $a > b$ und $f(x) \leq g(x)$ auf $[a, b]$.

D Es ist $a < b$ und $f(x) \geq g(x)$ auf $[a, b]$.

T Es ist $a > b$ und $f(x) \geq g(x)$ auf $[a, b]$.

Arndt, K.-D. (1995). Integral-Quiz. Die etwas andere Aufgabe. *Mathematik lehren 72*, 67

Integral-Quiz

Aufgabe 3

f sein integrierbar.
Unter welchen Bedingungen gilt dann folgendes?

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

H Falls $f(x) \equiv 0$ auf $[a, b]$ ist.

E Falls $a = b$ ist.

I Falls f eine ungerade Funktion und $a = -b$ ist.

T Falls f eine gerade Funktion und $a = -b$ ist.

Arndt, K.-D. (1995). Integral-Quiz. Die etwas andere Aufgabe. *Mathematik lehren 72*, 67

Integral-Quiz

Aufgabe 4

f sein integrierbar und $a \neq 0$.
Unter welchen Bedingungen gilt dann folgendes?

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

A Falls $f(x) = x^2$ ist.

Z Falls $f(x) = \frac{1}{x}$ ist.

S Falls $f(x) \equiv 0$ ist.

M Falls f eine gerade Funktion ist.

Arndt, K.-D. (1995). Integral-Quiz. Die etwas andere Aufgabe. *Mathematik lehren 72*, 67

Integral-Quiz

Aufgabe 5

f sein integrierbar und $a > 0$.
Unter welchen Bedingungen gilt dann folgendes?

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$$

T Falls $f(x) \equiv 0$ auf $[-a, a]$ ist.

G Falls f auf $[-a, a]$ eine gerade Funktion ist.

O Falls f auf $[-a, a]$ eine ungerade Funktion ist.

E Falls $f(x) = |x|$ auf $[-a, a]$ ist.

Arndt, K.-D. (1995). Integral-Quiz. Die etwas andere Aufgabe. *Mathematik lehren 72*, 67

Integral-Quiz

Aufgabe 6

Berechnen Sie

$$\int_{L}^{I} du$$

und ersetzen Sie das Fragezeichen in den roten Kästen jeweils durch den Buchstaben, der den Satz richtig vervollständigt.

? ist der Minuend des Ergebnisses.

? ist der Subtrahend des Ergebnisses.

Arndt, K.-D. (1995). Integral-Quiz. Die etwas andere Aufgabe. *Mathematik lehren 72*, 67

Verständnisanker

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle für das Verständnis des mathematischen Sachverhalts wesentlichen Strukturelemente in der Situation vorkommen und gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, auf den Verständnisanker zurückgreifen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

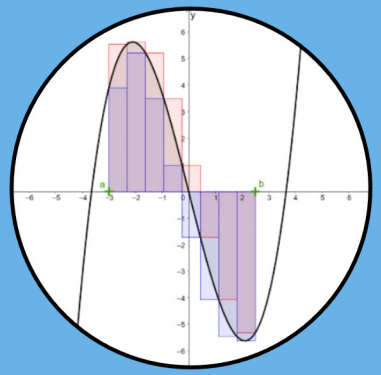
Beispiel

- Ein möglicher **Verständnisanker** für Grundvorstellungen zum Integral ist die Frage nach der Füllmenge eines Waschbeckens bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.
- Anhand der Waschbeckensituation können die Grundvorstellungen „Integrieren als Rekonstruieren“ des Gesamteffekts und „Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts“ inhaltlich durchschaut werden.

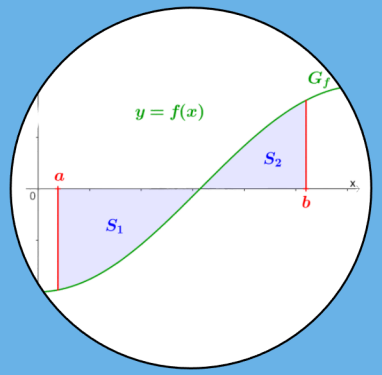
Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. Mathematik lehren, 236, S. 6-9.

Grundvorstellungen zum Integralbegriff

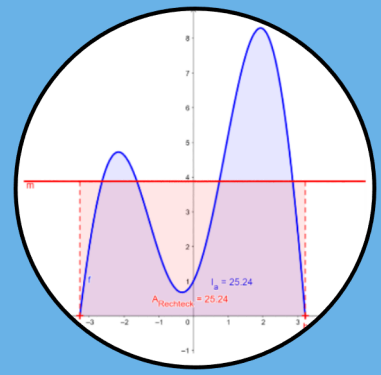
Rekonstruieren



Kumulieren



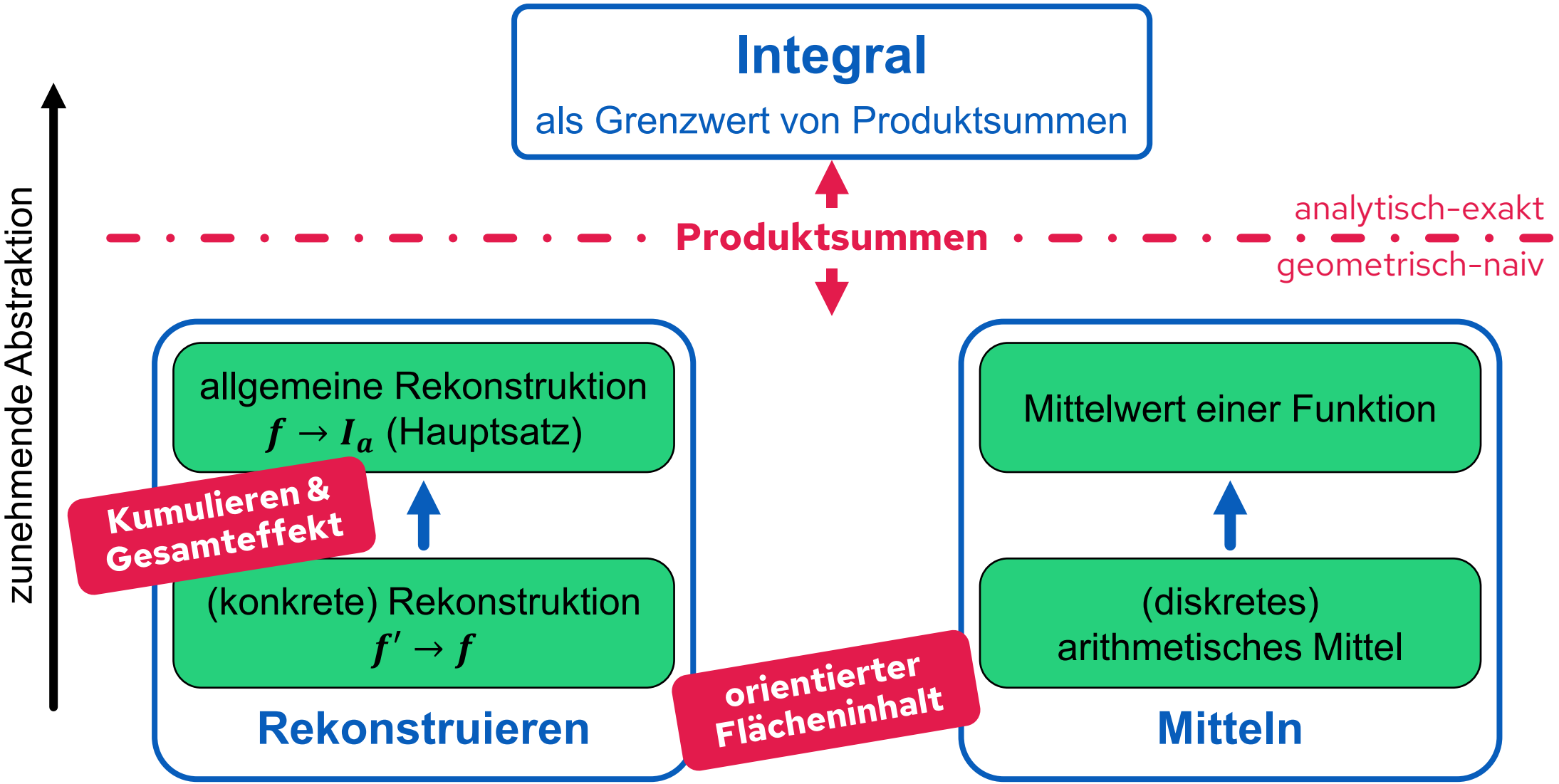
Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



Mitteln

Greefrath, G. & Ulm, V. (2021). Integral: Grundvorstellungen dynamisch visualisieren. Mathematik lehren 224, S. 36-40
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Entwicklung des Integralbegriffs



 Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Wiesbaden: Spektrum Akademischer Verlag, S. 125f

MaTeGnu

2

Integrieren als Rekonstruieren

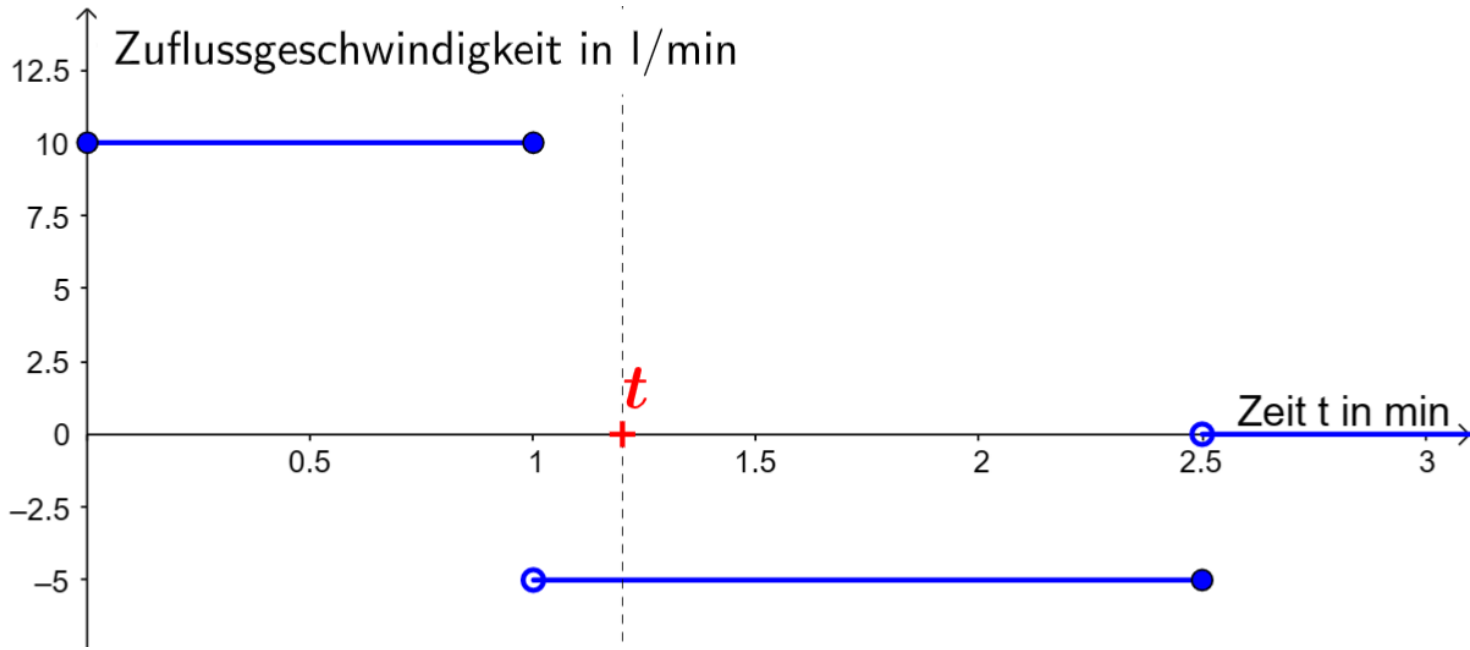
Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren

Verständnisanker: Waschbecken

In ein leeres Waschbecken wird 1 Minute lang Wasser mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit von 10 Litern pro Minute eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, aus dem das Wasser mit einer Abflussgeschwindigkeit von 5 Litern pro Minute abfließt. Nach weiteren 1,5 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen.

Frage

Wie lässt sich aus der Zufluss- bzw. Abfluss-geschwindigkeit $V'(t)$ auf die Wassermenge $V(t)$ im Waschbecken zum Zeitpunkt t schließen?



Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren

Zufluss-Phase

$10\,\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot t\ \text{min} = 10 \cdot t\ \text{Liter}$

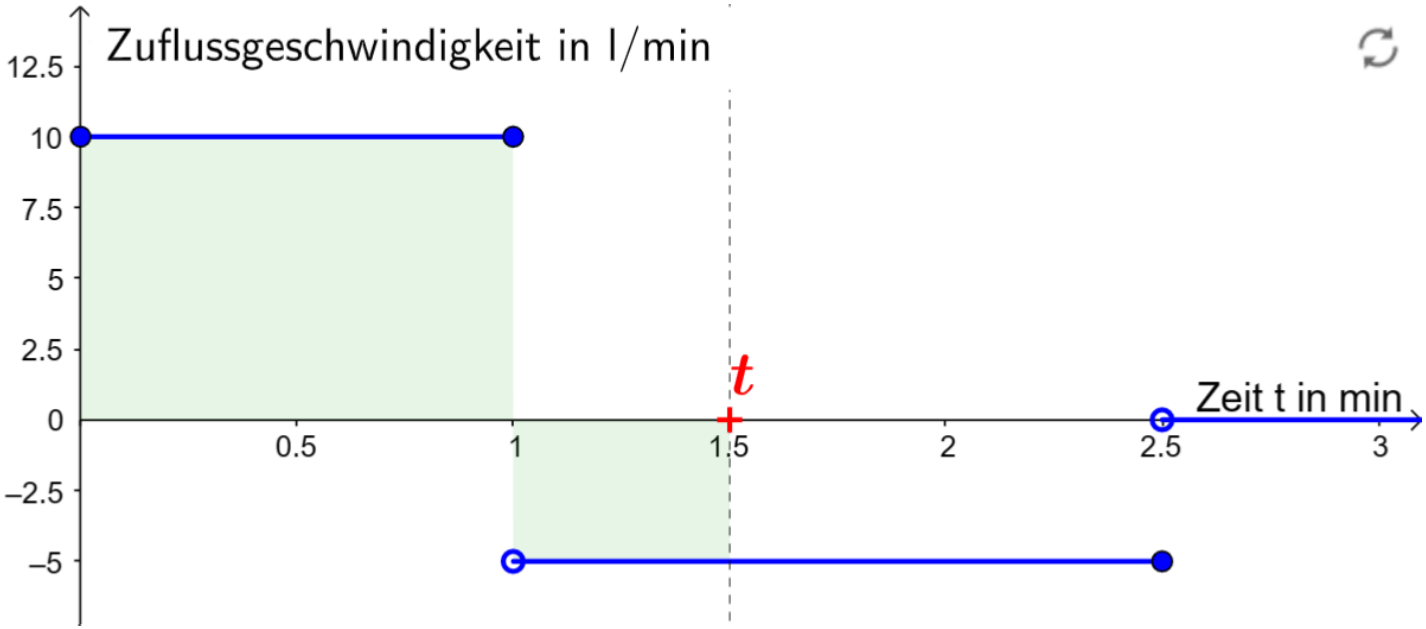
$V(t) = 10 \cdot t$ für $0 \leq t \leq 1$

Nach einer Minute sind also

$10\,\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot 1\ \text{min} = 10\ \text{Liter}$

im Waschbecken.

Die Produkte $10 \cdot t$ und $5 \cdot (t-1)$ können als Flächeninhalte von Rechtecken gedeutet werden. $V(t)$ ist die Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte von Rechtecken, also ein **orientierter Flächeninhalt**.



Abfluss-Phase

$10 - 5 \cdot (t-1)\ \text{Liter}$

$V(t) = 10 - 5 \cdot (t-1)$ für $1 < t \leq 2{,}5$

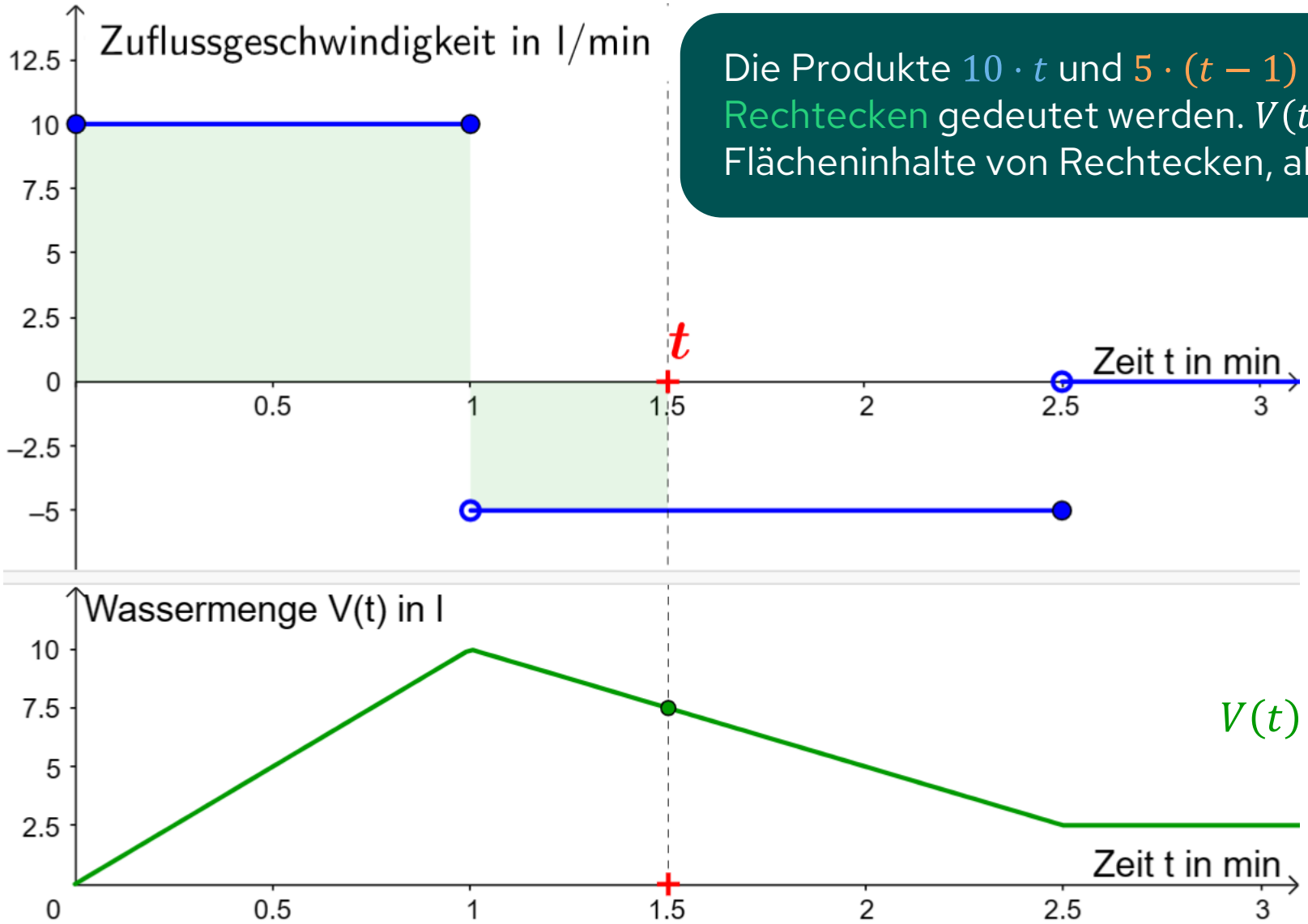
Nach zweieinhalb Minuten sind also

$10 - 5 \cdot (2{,}5 - 1)\ \text{Liter} = 2{,}5\ \text{Liter}$

im Waschbecken.

$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad 1 < t \leq 2{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für} \quad t > 2{,}5 \end{cases}$$

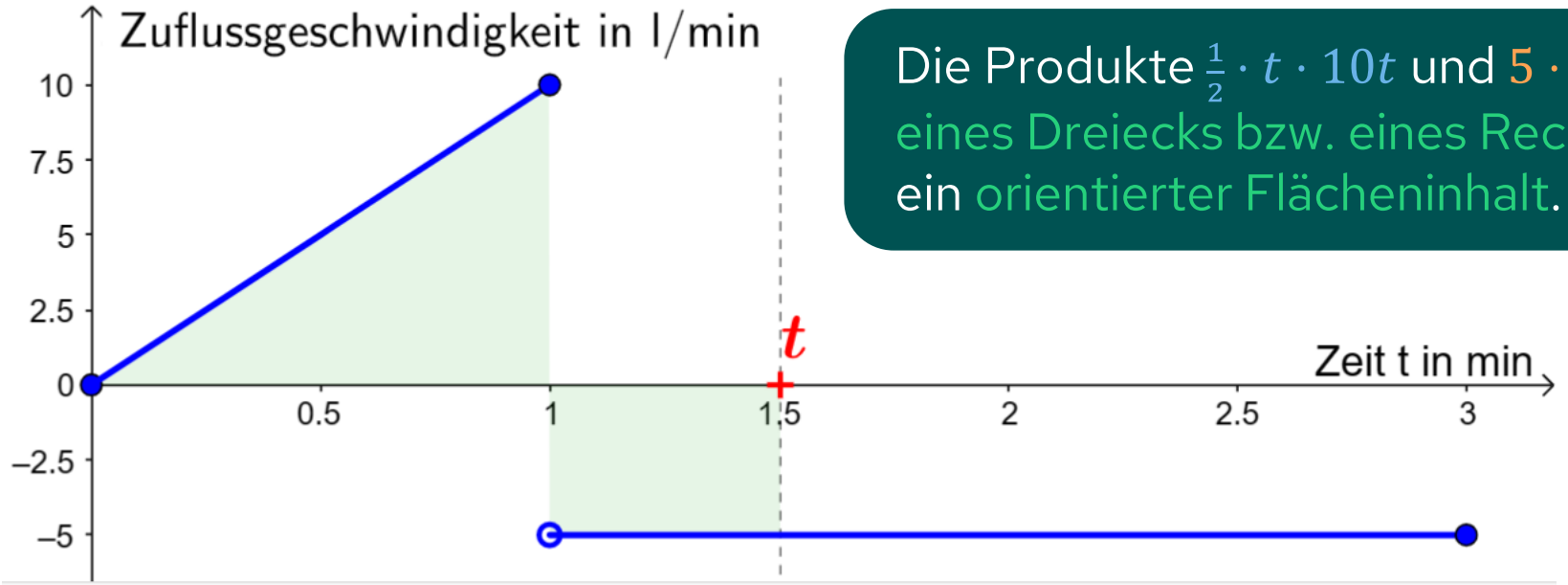
Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren



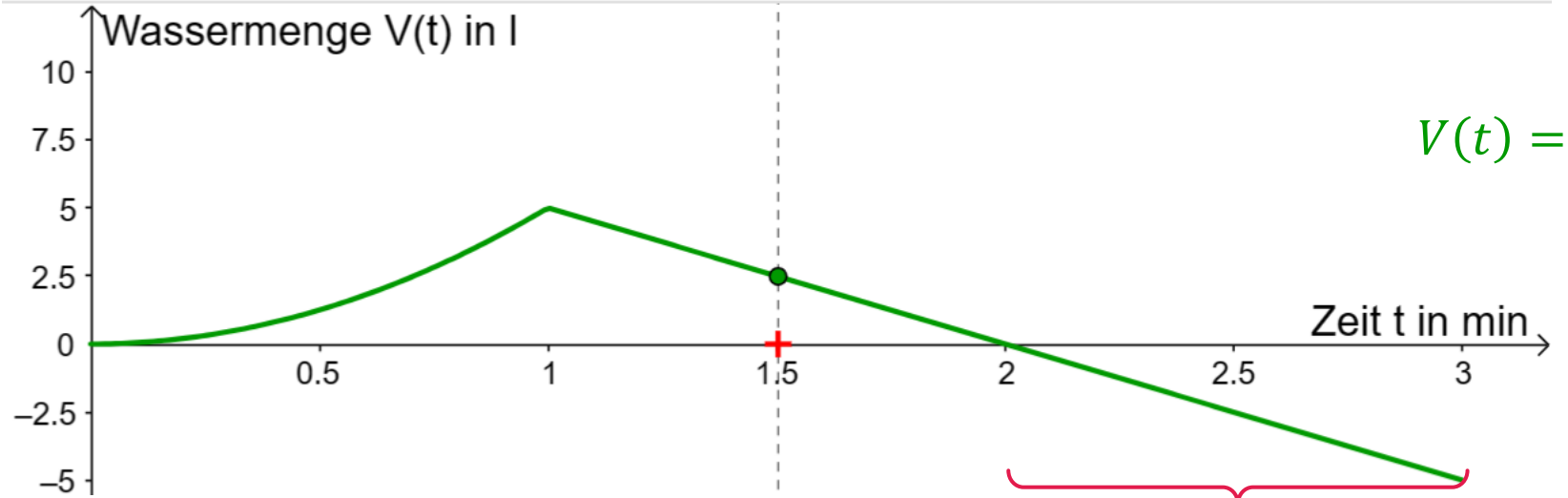
Die Produkte $10 \cdot t$ und $5 \cdot (t-1)$ können als Flächeninhalte von Rechtecken gedeutet werden. $V(t)$ ist die Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte von Rechtecken, also ein **orientierter Flächeninhalt**.

$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad 1 < t \leq 2{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für} \quad t > 2{,}5 \end{cases}$$

Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren



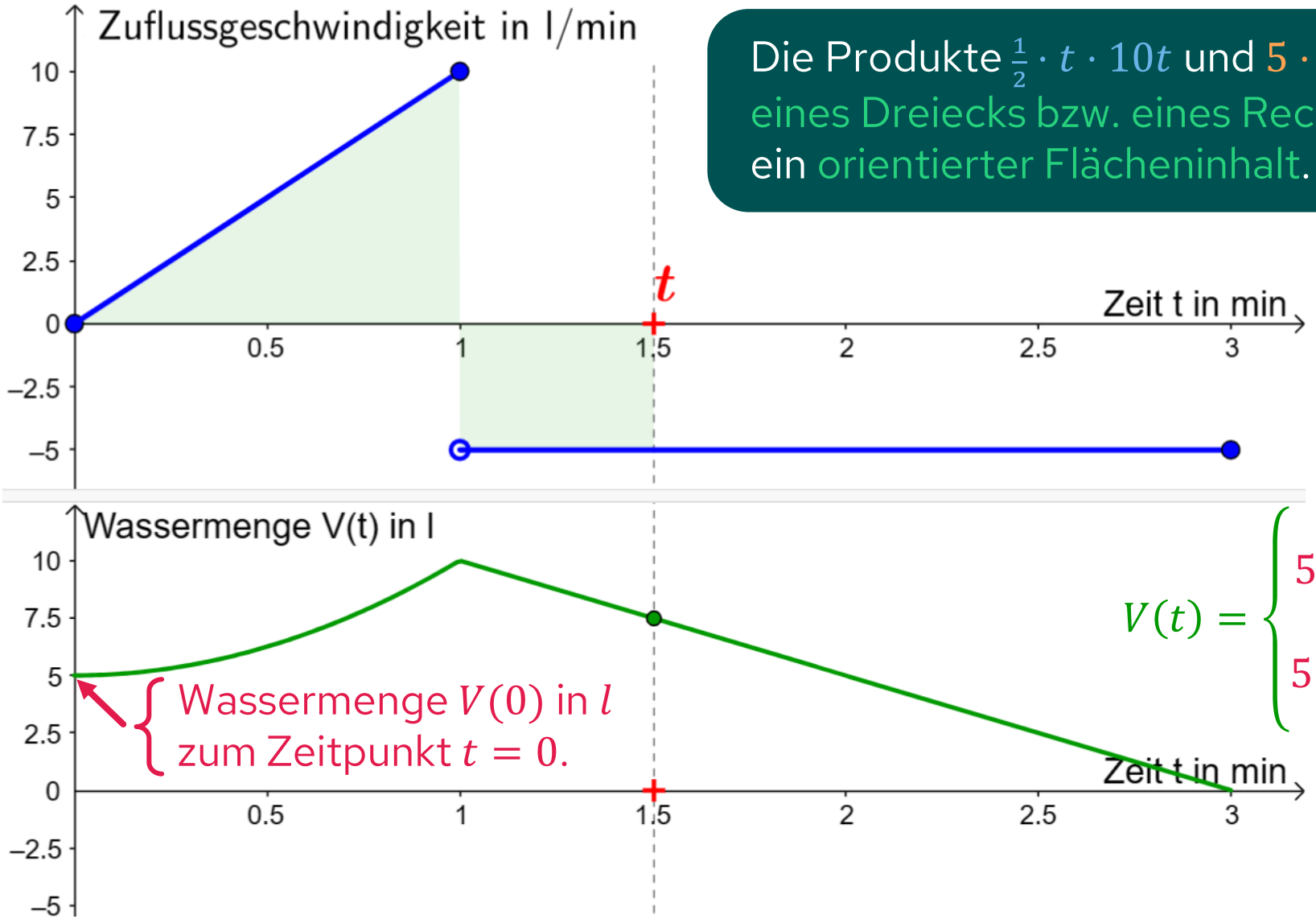
Die Produkte $\frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t$ und $5 \cdot (t-1)$ können als Flächeninhalte eines Dreiecks bzw. eines Rechtecks gedeutet werden. $V(t)$ ist ein orientierter Flächeninhalt.



$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad t > 1 \end{cases}$$

 https://www.geogebra.org/m/cdybkcgk

Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren



Die Produkte $\frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t$ und $5 \cdot (t-1)$ können als Flächeninhalte eines Dreiecks bzw. eines Rechtecks gedeutet werden. $V(t)$ ist ein orientierter Flächeninhalt.

$$V(t) = \begin{cases} 5 + \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad t > 1 \end{cases}$$

Wassermenge $V(0)$ in l zum Zeitpunkt $t = 0$.

Grundvorstellung: Integrieren als Rekonstruieren

Rückblick

- Aus der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers zu jedem Zeitpunkt wurde die Wassermenge $V(t)$ zu jedem Zeitpunkt rekonstruiert.
- Die Zuflussgeschwindigkeit ist die (momentane) Änderungsrate der Wassermenge im Waschbecken.
- Aus der Änderungsrate wurde die Funktion V wiederhergestellt. [wiederherstellen = integrare (lat.)]

Vorteile des Waschbecken-Beispiels

- Fokussiert auf die Grundvorstellung Integrieren als Rekonstruieren.
- Unterstützt die Grundvorstellung Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts.

Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren

Ein bestimmtes Integral rekonstruiert die Gesamtänderung einer Größe (den Gesamteffekt der Änderung) aus ihrer Änderungsrate.

Bemerkung

Der aktuelle Bestand ergibt sich aus dem rekonstruierten Gesamteffekt der Änderung und dem Anfangs-bestand zu Beginn der betrachteten Änderungen.

Dürreproblematik in Spaniens Stauseen

https://www.youtube.com/watch?v=OOSLxFvBAfk

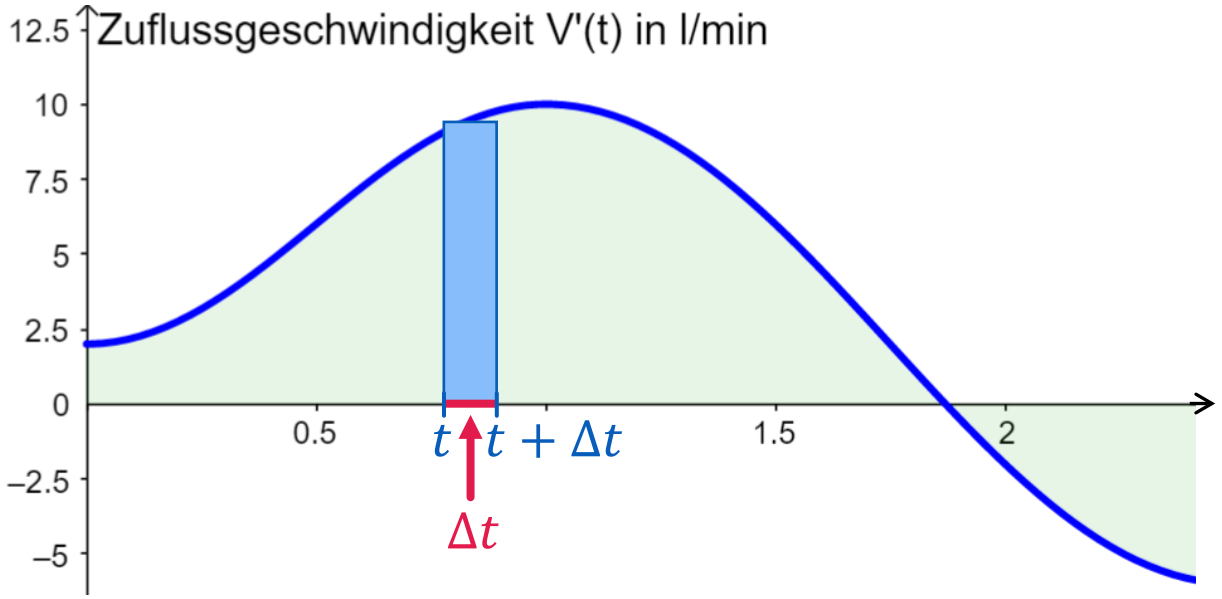
Von joan ggk - panta_sau_1_octubre_2005_ 038, CC BY 2.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2841770

MaTeGnu

3 Integrieren als Kumulieren

Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren
Nichtlinearer Zufluss

Frage
Wie kann man den Gesamteffekt aus den Änderungsraten rekonstruieren, wenn der Zufluss bzw. Abfluss nichtlinear ist?



Idee

- Die Zuflussgeschwindigkeit ist bei genügend kleinen Zeitintervallen $[t, t + \Delta t]$ nahezu konstant.
- In jedem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ kann man vorgehen, wie in der Abbildung dargestellt.

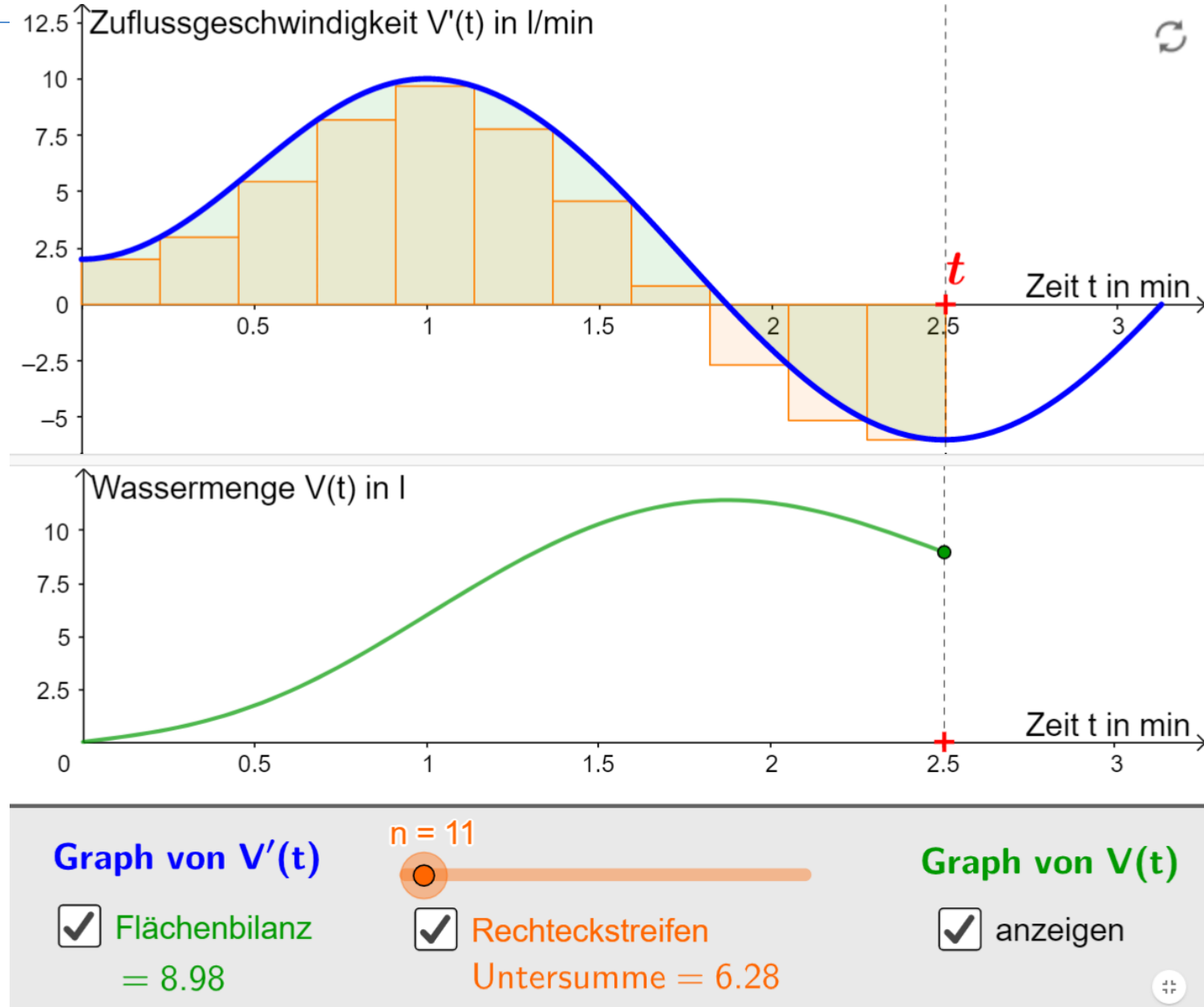
Was trägt V' im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ zum Gesamteffekt bei?

- Da V' die momentane Änderungsrate von V ist, gilt für kleine Δt in guter Näherung:
  $V'(t) \approx \frac{\Delta V}{\Delta t}$ also $\Delta V \approx V'(t) \cdot \Delta t$
- Dies ist der Zuwachs der Wassermenge im Zeitintervall Δt, geometrisch zu deuten als kleiner (orientierter) Rechteckinhalt.

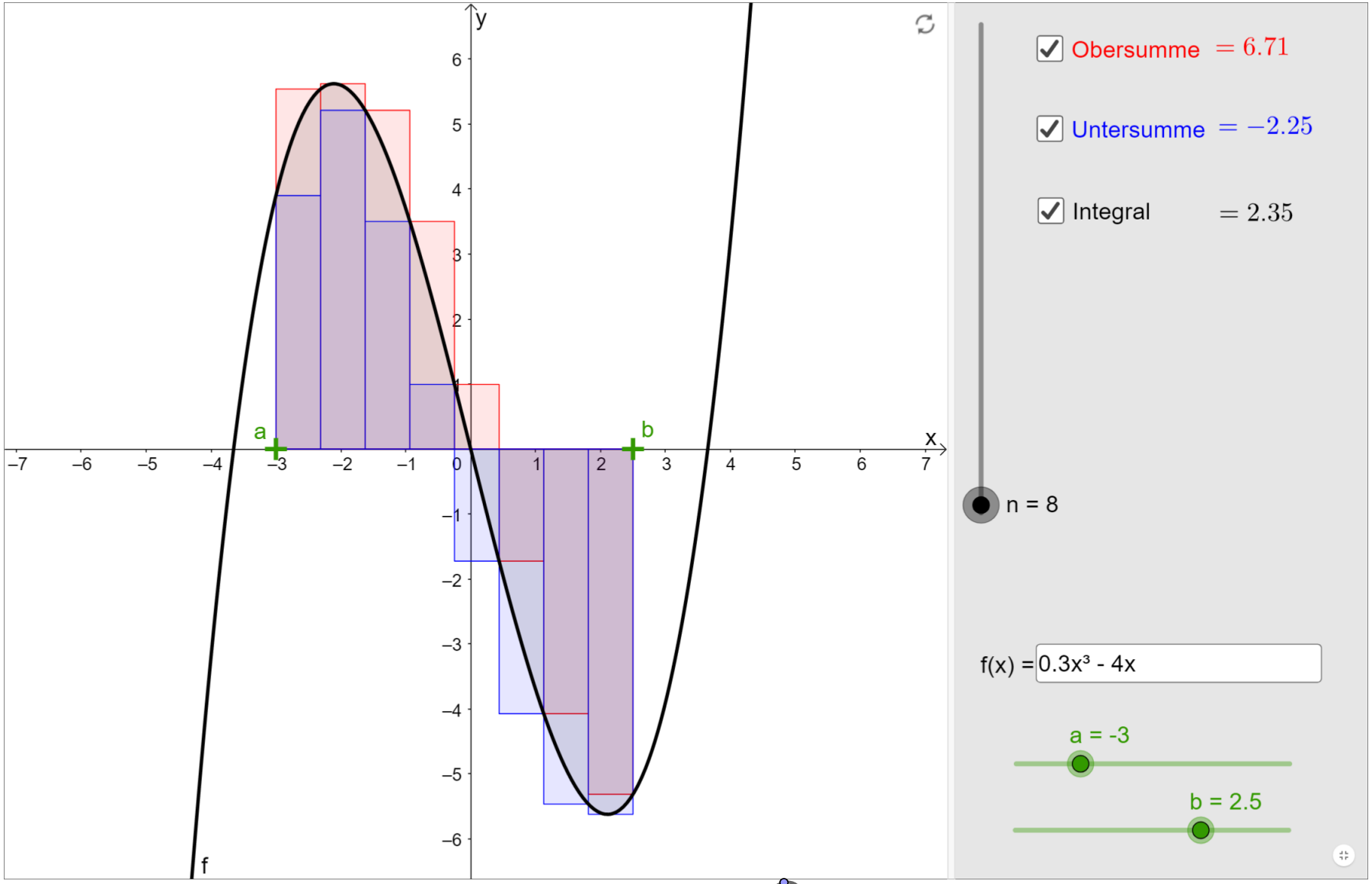
Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren
Nichtlinearer Zufluss

Erkenntnis

- Zur Rekonstruktion der Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt t sind die Zuwächse über alle Teilintervalle zu summieren, in die das Intervall $[0; t]$ zerlegt wurde.
- Geometrisch gedeutet, ist der rekonstruierte Wert $V(t)$ die Summe aller dieser kleinen (orientierten) Rechteckinhalte.
- Diese unterscheidet sich bei genügend kleiner Streifenbreite beliebig wenig von dem (orientierten) Inhalt der Fläche unter dem Graph von V'.



Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren



Grundvorstellung
Integrieren als Kumulieren

Ein bestimmtes Integral ist das Ergebnis des Aufsummierens kleiner Summanden mit Produktstruktur.

 https://www.geogebra.org/m/ypmc35yh

Ober- und Untersumme

Infimum := größte untere Schranke
Supremum := kleinste obere Schranke

Definition (beliebige Zerlegungen des Intervalls)
Ober- und Untersumme
Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt,

$$Z = [a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b]$$

sei eine Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ sowie M_i das Supremum und m_i das Infimum der Funktionswerte im Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$. Dann heißen

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

die **Obersumme** und

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

die **Untersumme** von f zur Zerlegung Z.

Satz (Verfeinerung von Zerlegungen)

(1) **D**ie Zerlegung Z_2 sei eine Verfeinerung der Zerlegung Z_1, d.h. Z_2 enthält die Zerlegungsstellen von Z_1 und noch beliebig viele weitere.

Dann ist die

- Obersumme zu Z_2 kleiner als die oder höchstens gleich der Obersumme zu Z_1,
- Untersumme zu Z_2 größer als die oder höchstens gleich der Untersumme zu Z_1.

(2) **D**as Supremum der Menge aller Untersummen ist kleiner als das oder höchstens gleich dem Infimum der Menge aller Obersummen.

Ober- und Untersumme

Infimum := größte untere Schranke
Supremum := kleinste obere Schranke

Definition (äquidistante Intervall-Zerlegungen)
Ober- und Untersumme

Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt. Für ein $n \in \mathbb{N}$ wird das Intervall $[a; b]$ durch

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots < x_n = b$$

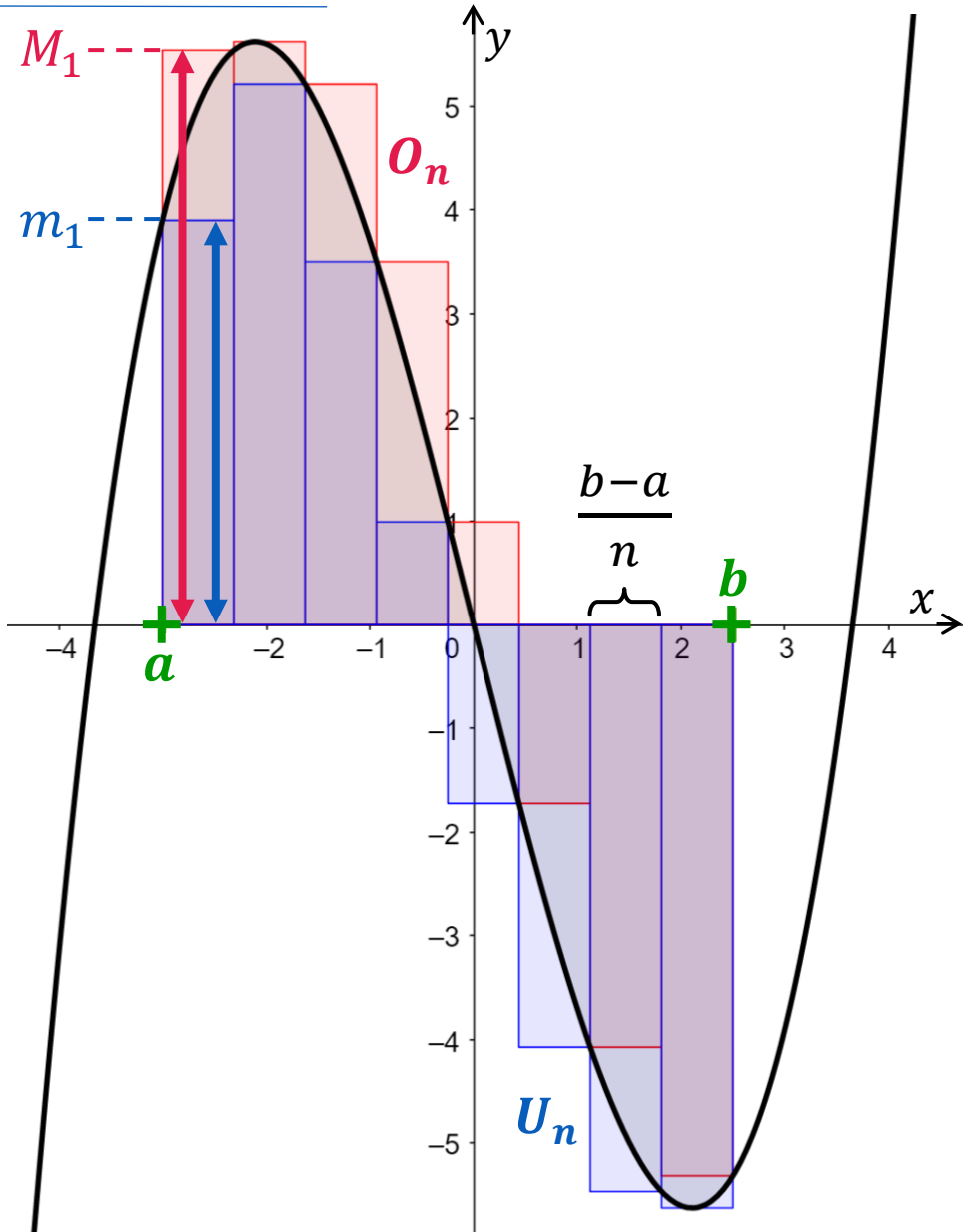
mit $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, \ldots, n$ in n gleich große Teile zerlegt. M_i sei das Supremum und m_i das Infimum der Funktionswerte im Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$. Dann heißen

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

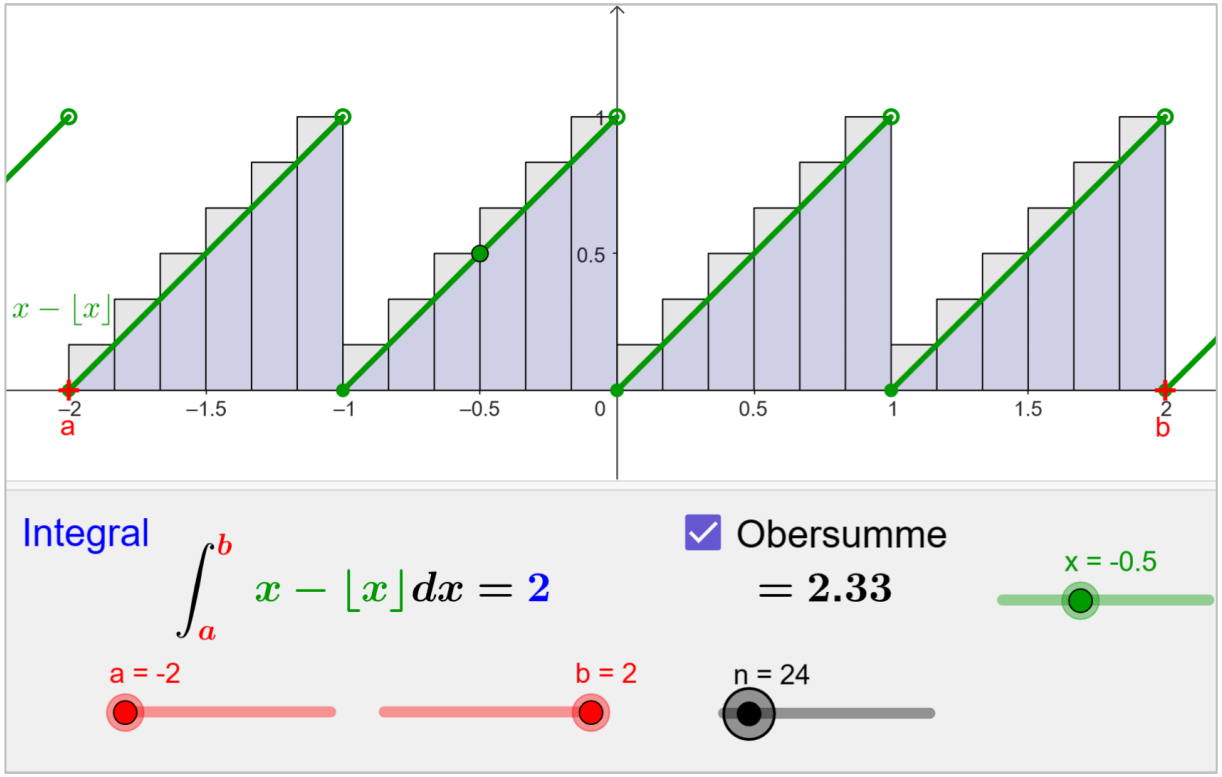
die **Obersumme** und

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

die **Untersumme** von f zu dieser Zerlegung.



Integralfunktion, Obersumme und Supremum



Bemerkungen

- Für die Integrierbarkeit reicht als Voraussetzung, an die Funktion f, dass sie in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ beschränkt ist.
- Dann kann es bei nicht-stetigen Funktionen aber vorkommen, dass f in $[a; b]$ das **Maximum** (größter Funktionswert) und / oder **Minimum** (kleinster Funktionswert) nicht annimmt.
- Deswegen wird in der Definition der Integrierbarkeit das **Supremum** (kleinste obere Schranke für die Funktionswerte) bzw. das **Infimum** (größte untere Schranke für die Funktionswerte) genutzt.
- Da Funktionen, die in einem Intervall $[a; b]$ stetig oder monoton sind, dort ihr Maximum und Minimum auch annehmen, kann man für diese Funktionen das Maximum bzw. Minimum nutzen.

Bestimmtes Integral und Integrierbarkeit

Definition (beliebige Intervall-Zerlegungen)
Bestimmtes Integral & Integrierbarkeit

Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt.

Wenn das Supremum $\boldsymbol{S}$ aller über dem Intervall $[a; b]$ gebildeten Untersummen gleich dem Infimum $\boldsymbol{I}$ aller über dem Intervall $[a; b]$ gebildeten Obersummen ist, so heißt

- diese Zahl **bestimmtes Integral** von f über dem Intervall $[a; b]$, und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet,
- die Funktion f **integrierbar** über dem Intervall $[a; b]$.

Definition (äquidistante Intervall-Zerlegungen)
Bestimmtes Integral & Integrierbarkeit

Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt.

Wenn für eine äquidistante Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots < x_n = b$$

von $[a; b]$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$, dann heißt

- diese Zahl **bestimmtes Integral** von f über dem Intervall $[a; b]$, und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} O_n$$

- die Funktion f **integrierbar** über dem Intervall $[a; b]$.

Bestimmtes Integral und Integrierbarkeit

Definition für Schülerinnen und Schüler

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition: Bestimmtes Integral & Integrierbarkeit

Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt. Für eine Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ in $n \in \mathbb{N}$ gleichlange Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ sind

$m_1, \ldots, m_n$ die **minimalen** und $M_1, \ldots, M_n$ die **maximalen** **Funktionswerte** von f im Teilintervall 1, ... bzw. n. Dann heißen

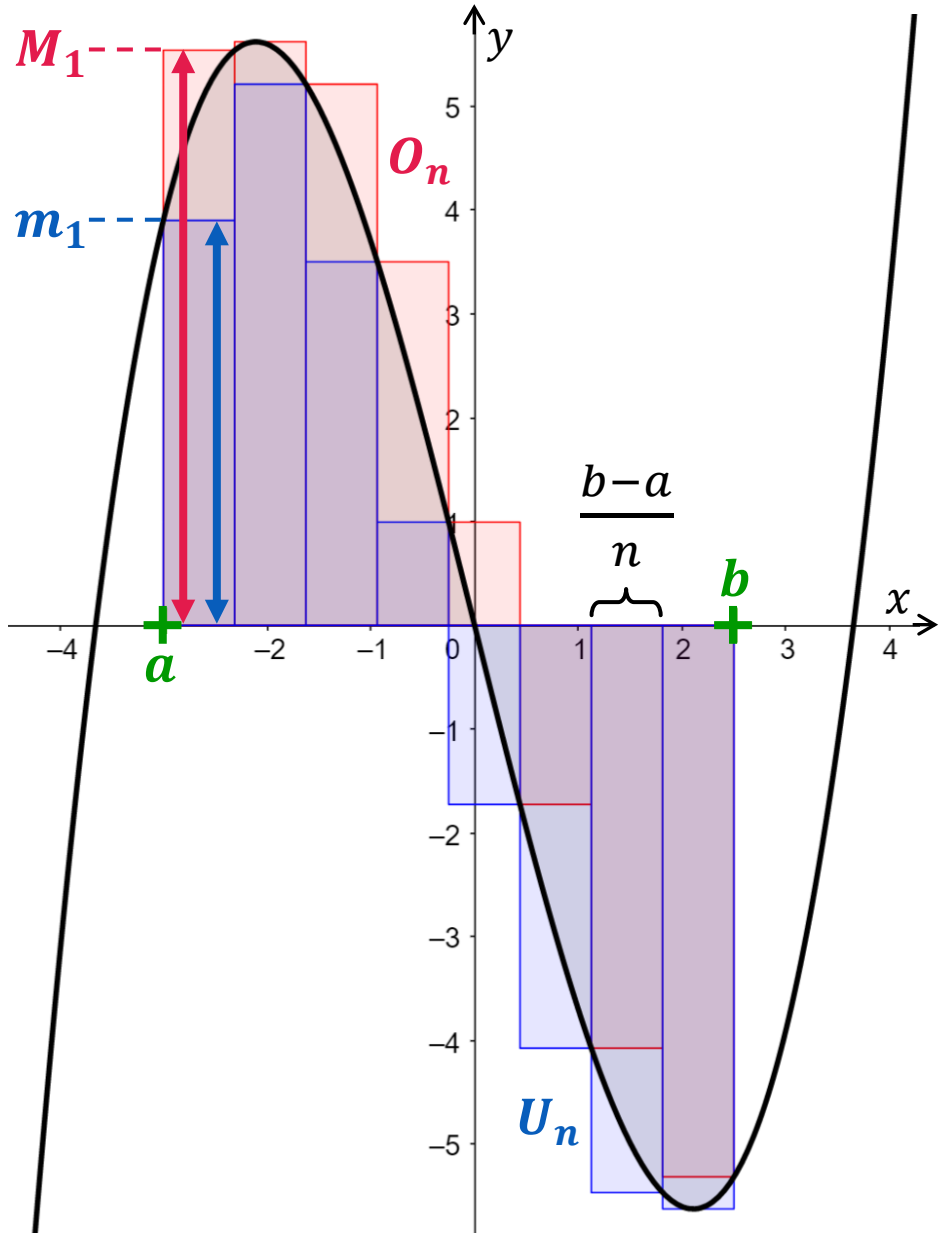
- $U_n = m_1 \cdot \frac{b-a}{n} + \cdots + m_n \cdot \frac{b-a}{n}$ die **Untersumme**
- $O_n = M_1 \cdot \frac{b-a}{n} + \cdots + M_n \cdot \frac{b-a}{n}$ die **Obersumme**

von f zu dieser Zerlegung. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$, dann heißt

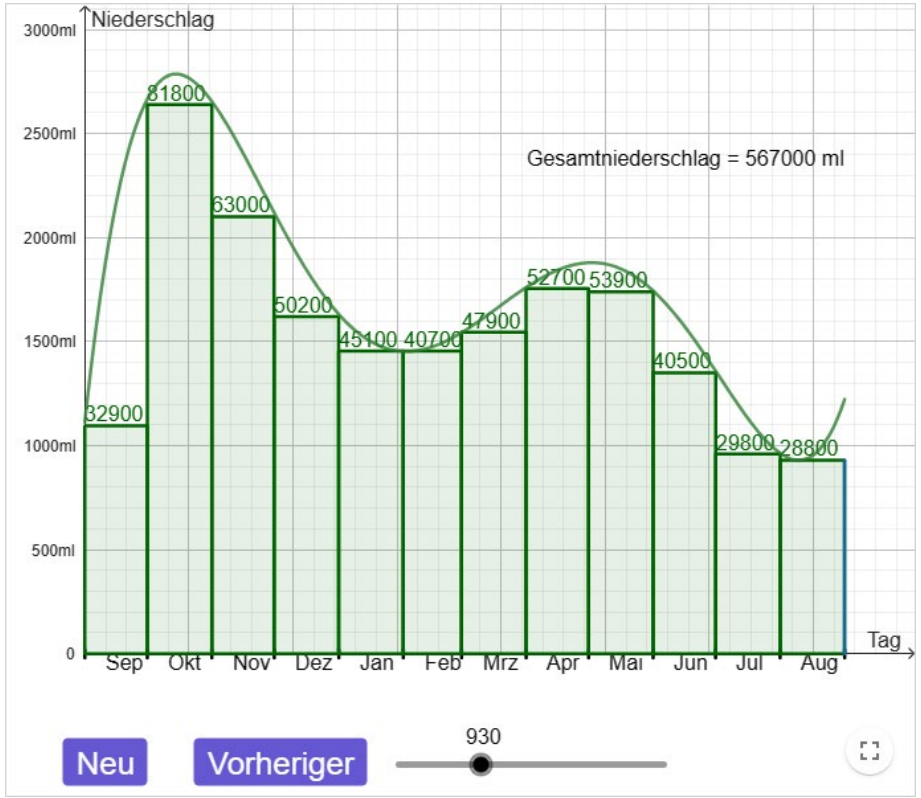
(1) **d**iese Zahl **bestimmtes Integral** von f über dem Intervall $[a; b]$, und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet:

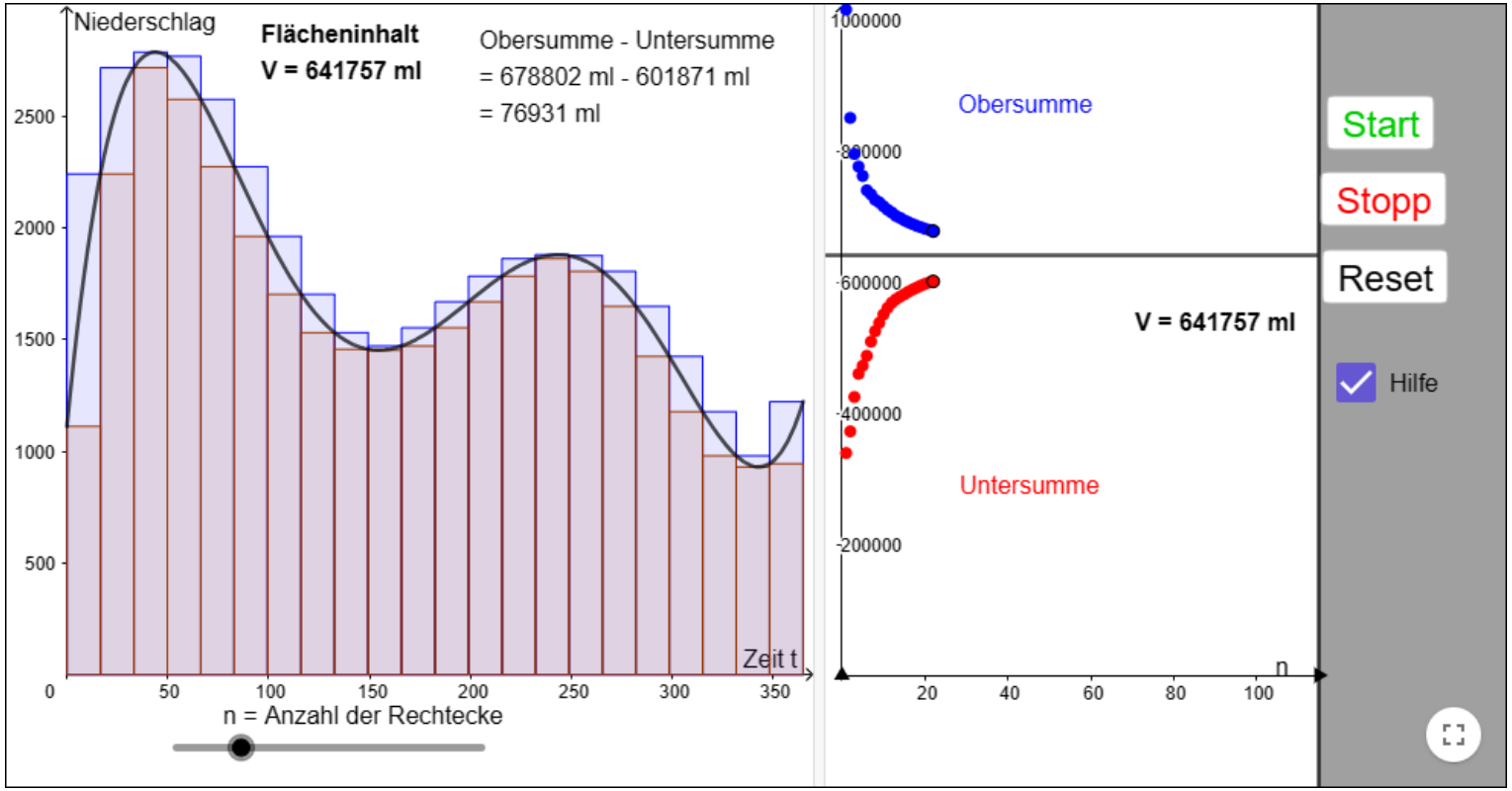
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} O_n$$

(2) **d**ie Funktion f **integrierbar** über dem Intervall $[a; b]$.



Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren
MaTeGnu-Materialien





https://www.geogebra.org/m/ywsqmmwb#material/gvmsyq4c

https://www.geogebra.org/m/ywsqmmwb#material/zqf4aknx

Integralfunktion, Integrierbarkeit & Stammfunktion

Definition (Integralfunktion)

Wenn eine Funktion f für alle $x \in [a;b]$ über $[a;x]$ integrierbar ist, so heißt

$$I_a: x \mapsto I_a(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{für} \quad x \in [a;b]$$

Integralfunktion (zur Integrandenfunktion f mit der unteren Grenze a und der oberen Grenze x).

Für das triviale Integral gilt: $\int_a^a f(t)dt := 0$

Bemerkungen:

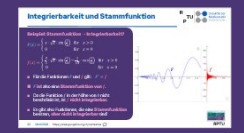
- Für die Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ gilt:
  Das bestimmte Integral $I_a(b) = \int_a^b f(t)dt$ ist der Funktionswert von $I_a(x)$ an der Stelle b.
- Es gilt: $\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b f(t)dt$

Definition (Stammfunktion)

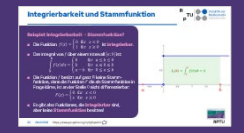
Eine im Definitionsbereich der Funktion f differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ **Stammfunktion von** f.

Bemerkungen

- Eine **Stammfunktion** besitzen und **Integrierbarkeit** sind zwei verschiedene Eigenschaften einer Funktion.
- Es gibt Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht integrierbar sind.



- Daneben gibt es Funktionen die integrierbar sind, aber keine Stammfunktion besitzen.



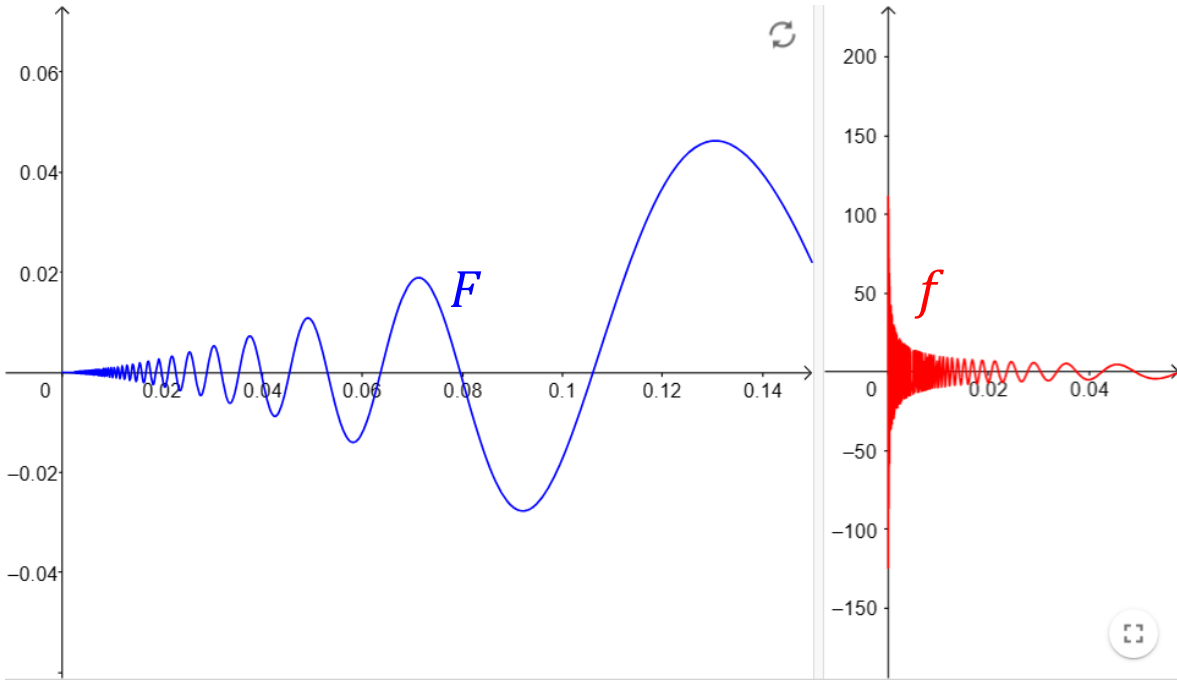
Integrierbarkeit und Stammfunktion

Beispiel: Stammfunktion → Integrierbarkeit?

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

- Für die Funktionen F und f gilt: $F' = f$
- **F ist** also eine **Stammfunktion von f**.
- Da die Funktion f in der Nähe von 0 nicht beschränkt ist, ist **f nicht integrierbar**.
- Es gibt also Funktionen, die eine **Stammfunktion** besitzen, **aber nicht integrierbar** sind!



RPTU

Integrierbarkeit und Stammfunktion

Beispiel: Integrierbarkeit → Stammfunktion?

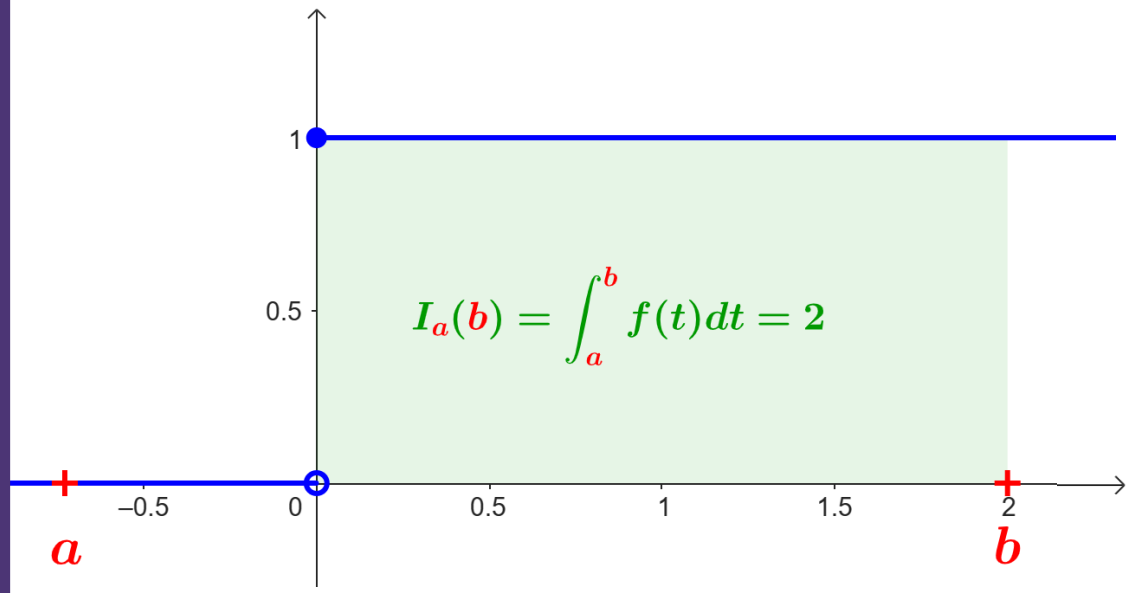
- Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ ist **integrierbar**.
- Das Integral von f über einem Intervall $[a; b]$ ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{für } a \leq b \leq 0 \\ b & \text{für } a \leq 0 \leq b \\ a - b & \text{für } 0 \leq a \leq b \end{cases}$$

- Die Funktion f besitzt auf ganz $\mathbb{R}$ keine Stammfunktion, denn die Funktion F die als Stammfunktion in Frage käme, ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

- Es gibt also Funktionen, die **integrierbar** sind, aber keine **Stammfunktion** besitzen!



Grundvorstellung: Integrieren als Kumulieren

Satz (Existenz des Integrals)

Die Funktion f sein im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$

- monoton wachsend (bzw. monoton fallend)

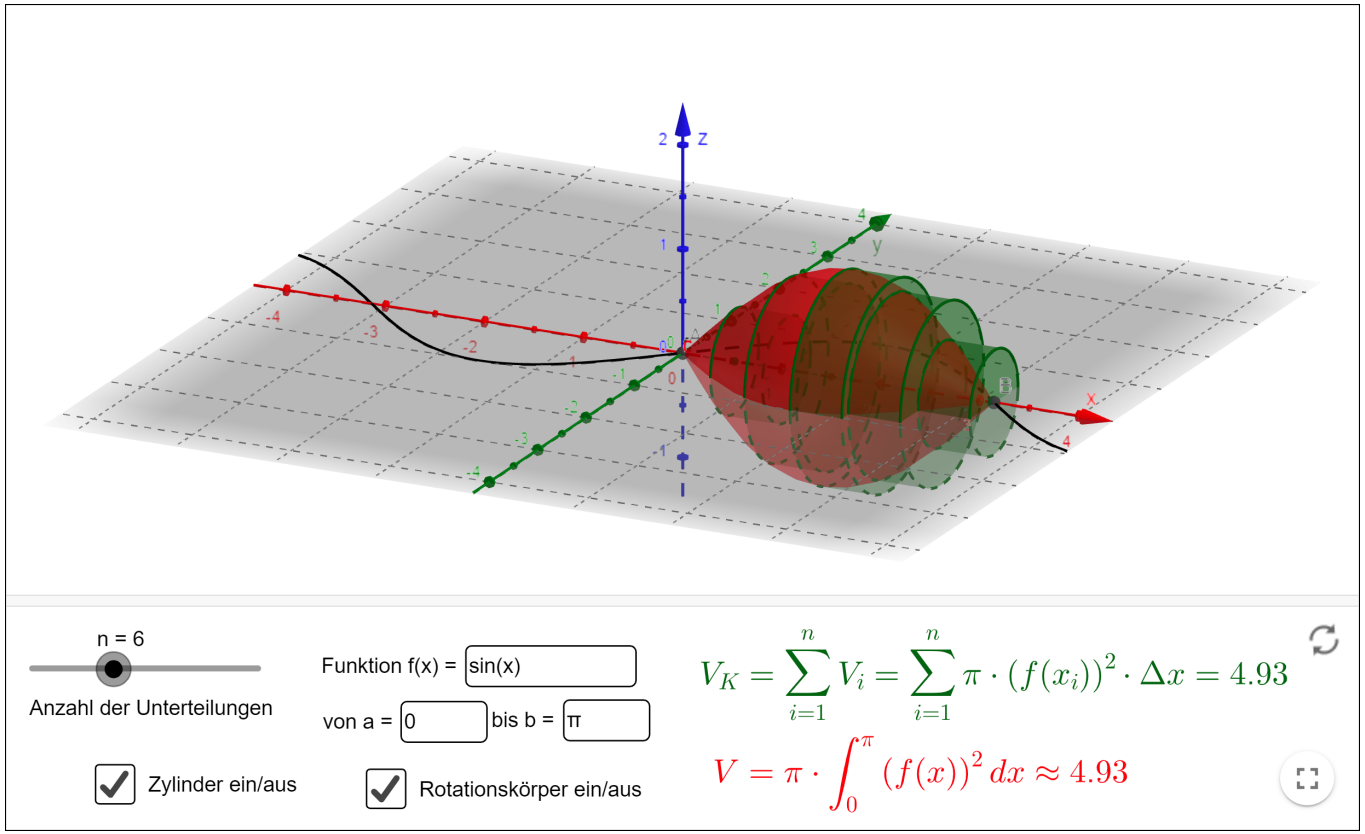
  oder

- stetig.

Dann ist die Funktion f auf $[a; b]$ beschränkt und integrierbar.

Bemerkung

Alle Erkenntnisse zu Ober- und Untersumme, Integrierbarkeit, Integral und Integralfunktion lassen sich direkt auf Volumenintegrale von Rotationskörpern anwenden!

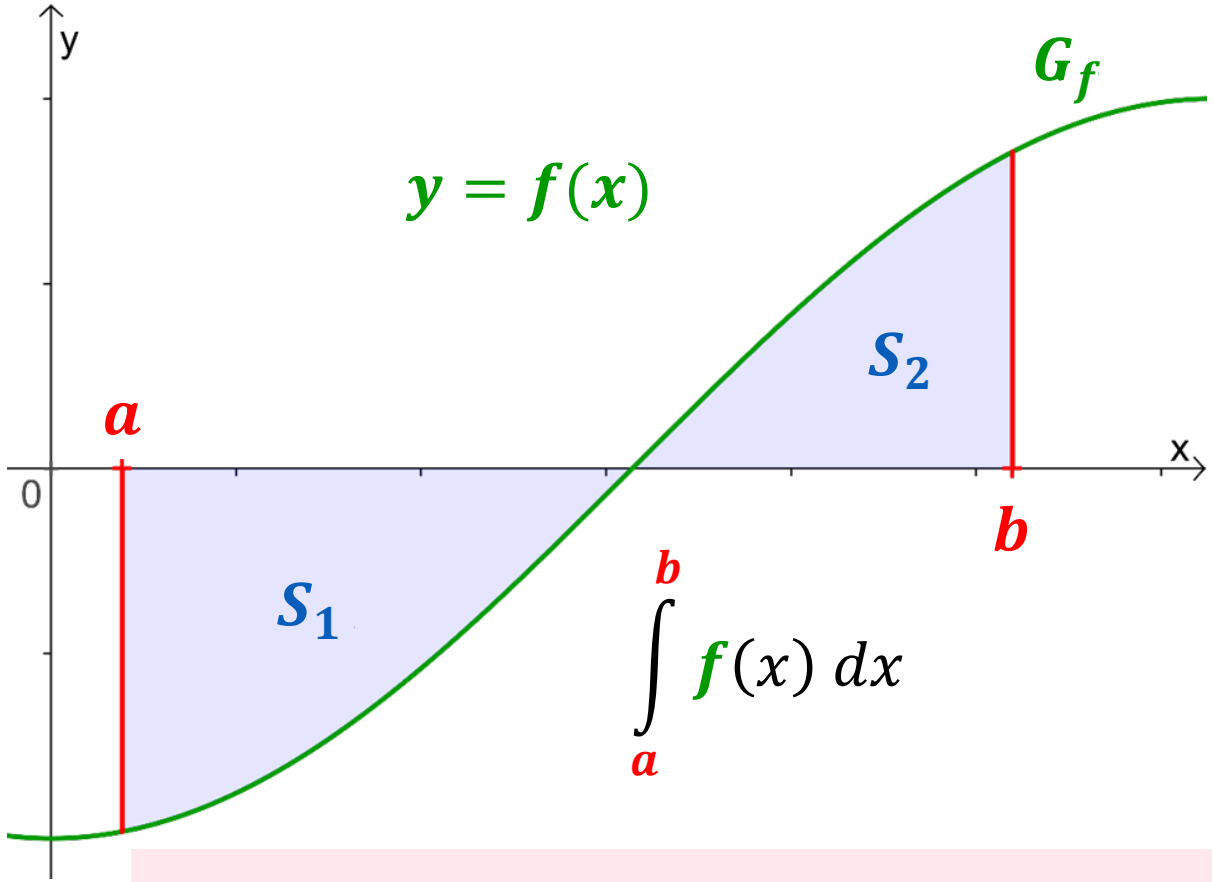


MaTeGnu

4

Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts

Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$



Durchschnittliche Lösungswahrscheinlichkeiten:

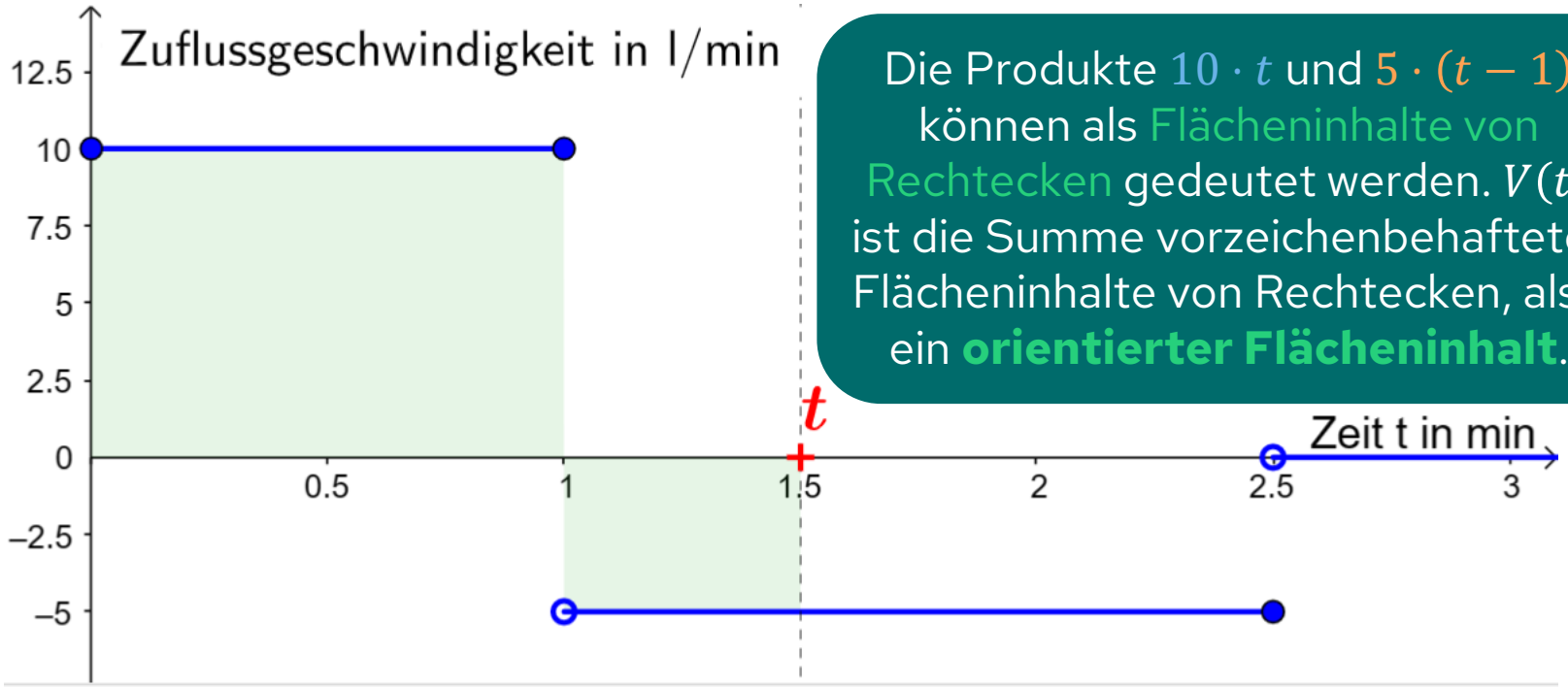
- International: 35%
- Deutschland: 23%
  (Grundkurse: 18%; Leistungskurse: 36%)

- S_1 ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen G_f der Funktion f, von der x-Achse und der Geraden $x = a$ eingeschlossen wird.
- S_2 ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen G_f der Funktion f, von der x-Achse und der Geraden $x = b$ eingeschlossen wird.
- Es ist $a < b$ und $0 < S_2 < S_1$.
- Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist dann:

a) $S_1 + S_2$
b) $S_1 - S_2$
c) $S_2 - S_1$
d) $|S_1 - S_2|$
e) $\frac{1}{2} \cdot (S_1 + S_2)$

Baumert et al. (Hrsg.) (1999). Testaufgaben zu TIMSS/III. Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Grundvorstellung: Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts

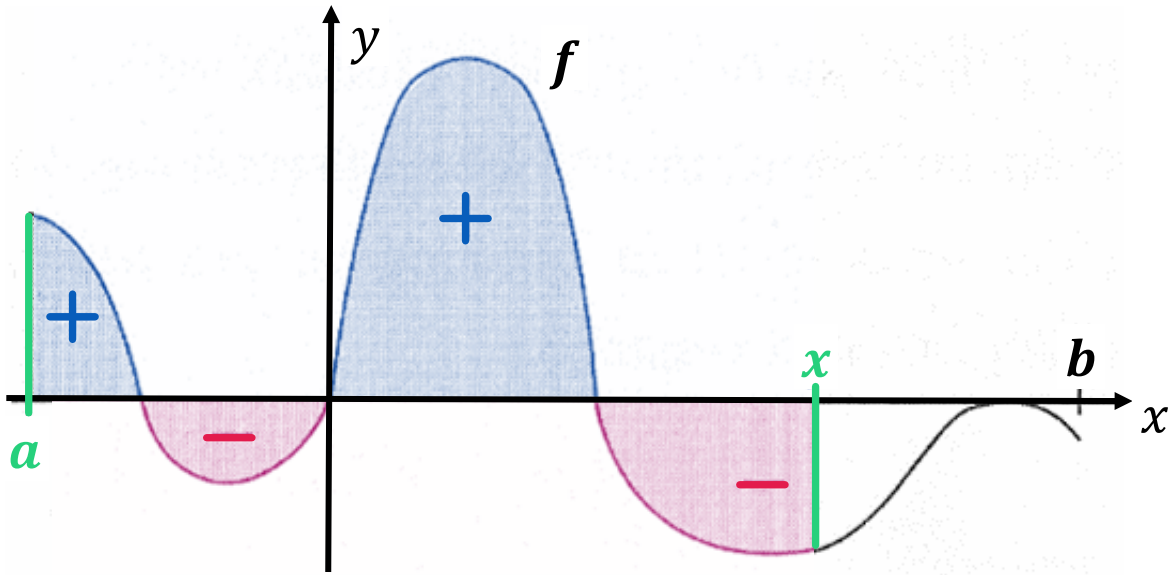


Die Produkte $10 \cdot t$ und $5 \cdot (t - 1)$ können als Flächeninhalte von Rechtecken gedeutet werden. $V(t)$ ist die Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte von Rechtecken, also ein **orientierter Flächeninhalt**.

Waschbecken

In ein leeres Waschbecken wird 1 Minute lang Wasser mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit von 10 Litern pro Minute eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, aus dem das Wasser mit einer Abflussgeschwindigkeit von 5 Litern pro Minute abfließt. Nach weiteren 1,5 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen.

Grundvorstellung: Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



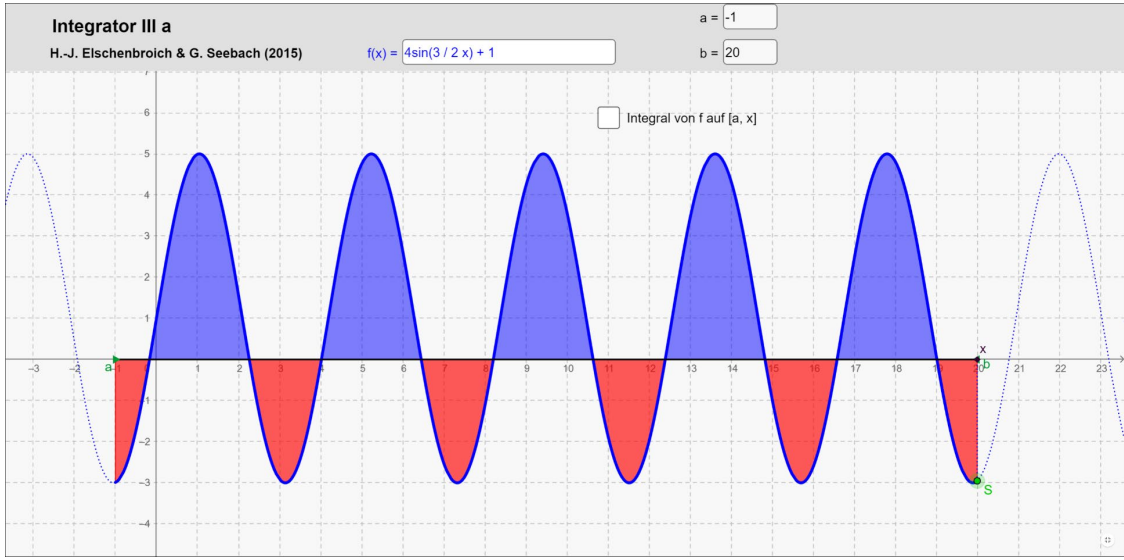
Grundvorstellung

Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts

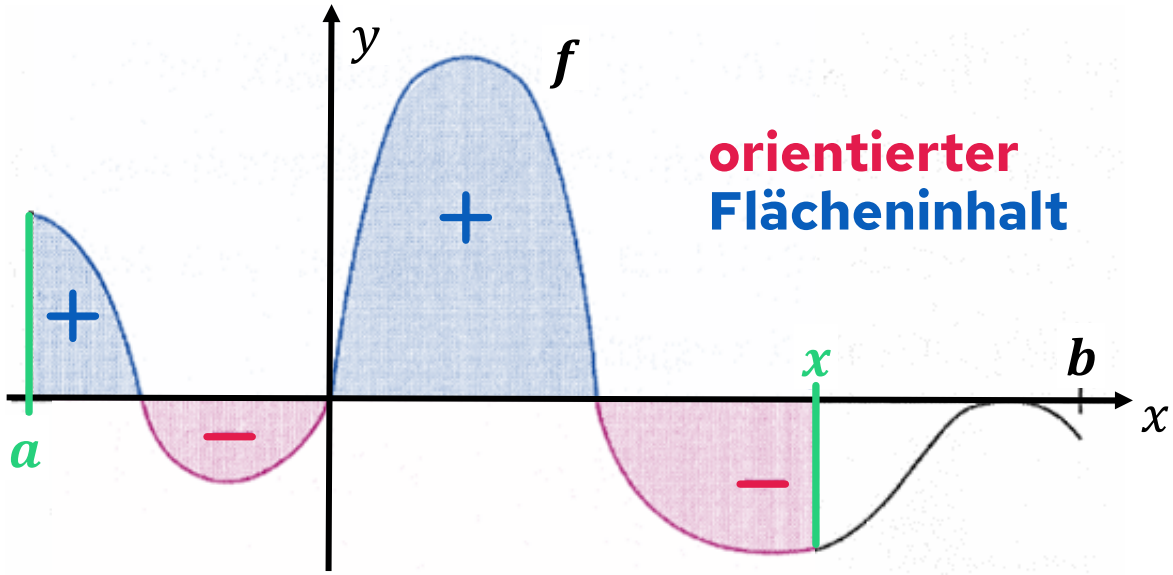
Ein bestimmtes Integral ist eine Bilanz von Flächeninhalten.

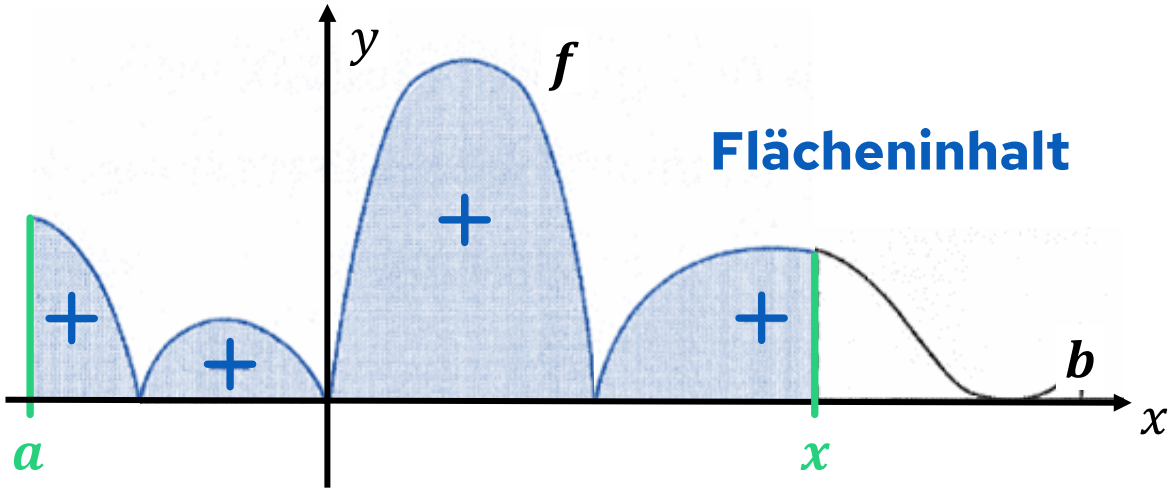
$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

= (Summe der Inhalte aller oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke zwischen a und x)
− (Summe der Inhalte aller unterhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke zwischen a und x)



Grundvorstellung: Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts





Orientierter Flächeninhalt ↔ Flächeninhalt

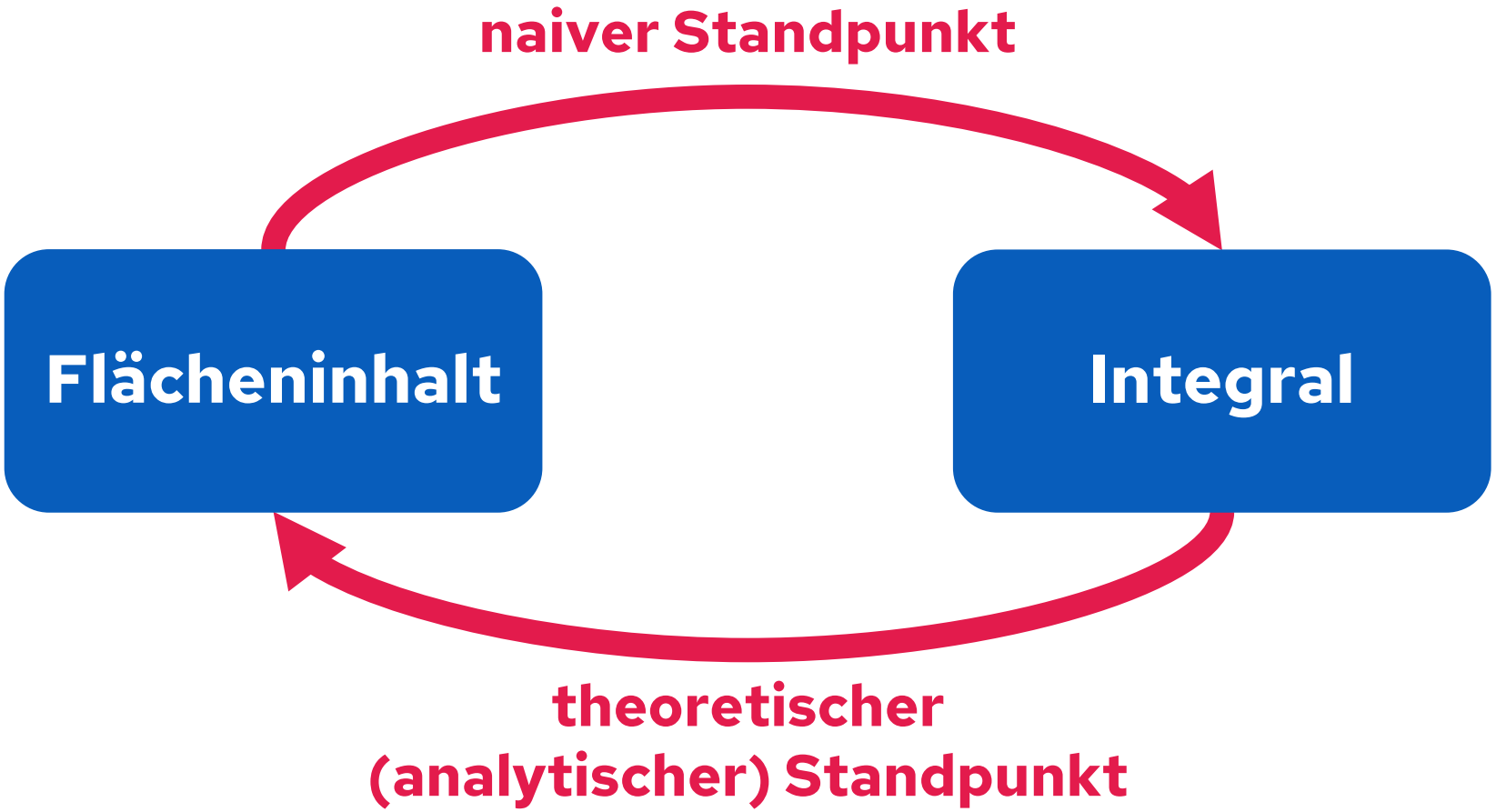
- Der **orientierte Flächeninhalt** der im Intervall $[a; x]$ vom Graph von f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche beträgt $\int_a^x f(t)dt$.
- Der **Flächeninhalt** der im Intervall $[a; x]$ vom Graph der Funktion f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche beträgt $\int_a^x |f(t)|dt$.

Satz (Integral-Additivität)

Es sei $c \in [a; b]$. Wenn die folgenden drei Integrale existieren, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Komplementarität: Flächeninhalt ↔ Integral



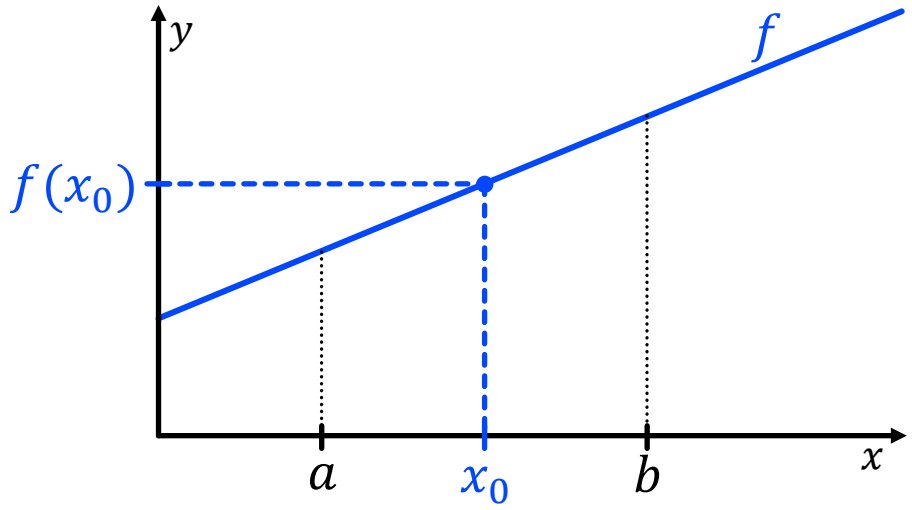
MaTeGnu

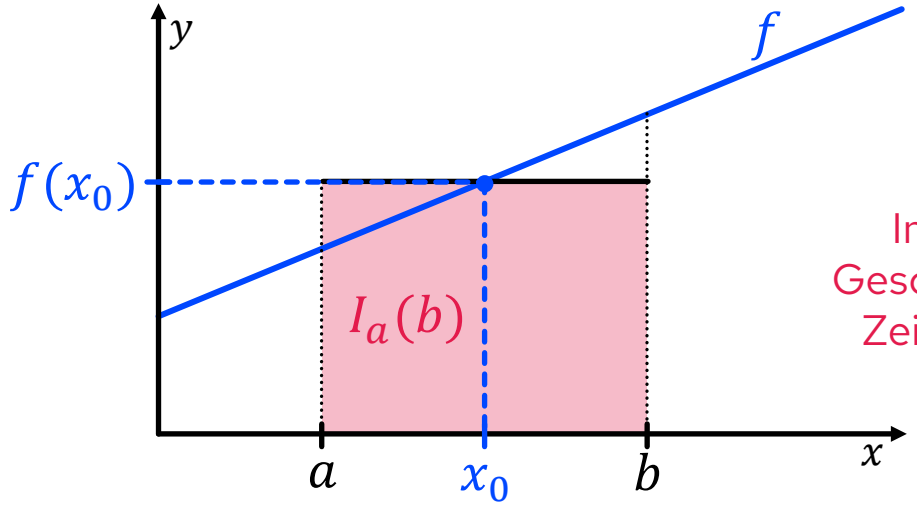
5 Integrieren als Mitteln

Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln
Mittelwertbildung bei linearen Funktionen

Gesucht

- Mittelwert $f(x_0)$ einer linearen Funktion in einem Intervall $[a, b]$.
- Der Mittelwert wird in der Mitte des Intervalls angenommen.
- Der mittlere Funktionswert kann genutzt werden, um den Flächeninhalt $I_a(b)$ unter dem Graph von f als Rechteck zu realisieren.
- Damit gilt:
  $$I_a(b) = (b - a) \cdot f(x_0)$$
- Für den Mittelwert $f(x_0)$ folgt:
  $$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$





Inhaltlich als Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm deuten

Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln

Gesucht: Mittelwert einer Messreihe aus n Messwerten $y_1, y_2, \dots, y_n$ zu äquidistanten Zeitpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$.

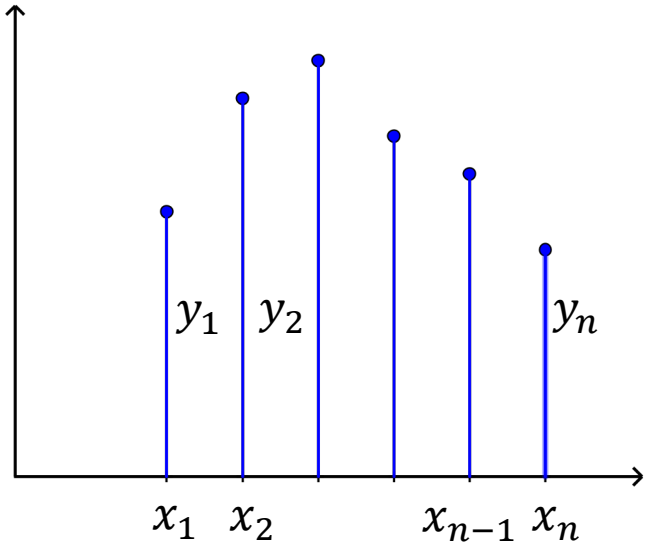
Ergebnis: Der gesuchte Mittelwert ist das arithmetische Mittel der Messwerte $y_1, y_2, \dots, y_n$

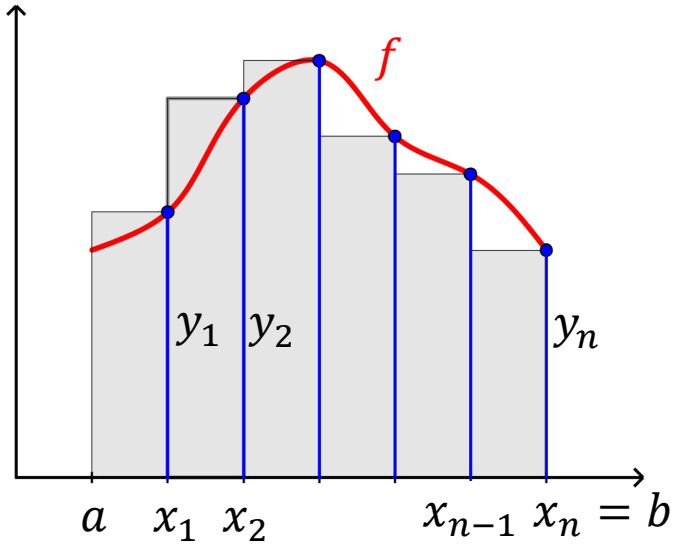
$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + \cdots + y_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \,.$$

- Messwerte werden als diskrete Realisierung eines stetigen Funktionsverlaufs f betrachtet.
- Algebraische Umformung des Terms für das arithmetische Mittel liefert:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \;= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$\approx \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$





RPTU

Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln
Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$

Bemerkung

- Aus den Beispielen folgt, dass es sinnvoll ist, unter der Zahl

$$m_{[a;b]}(f) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$

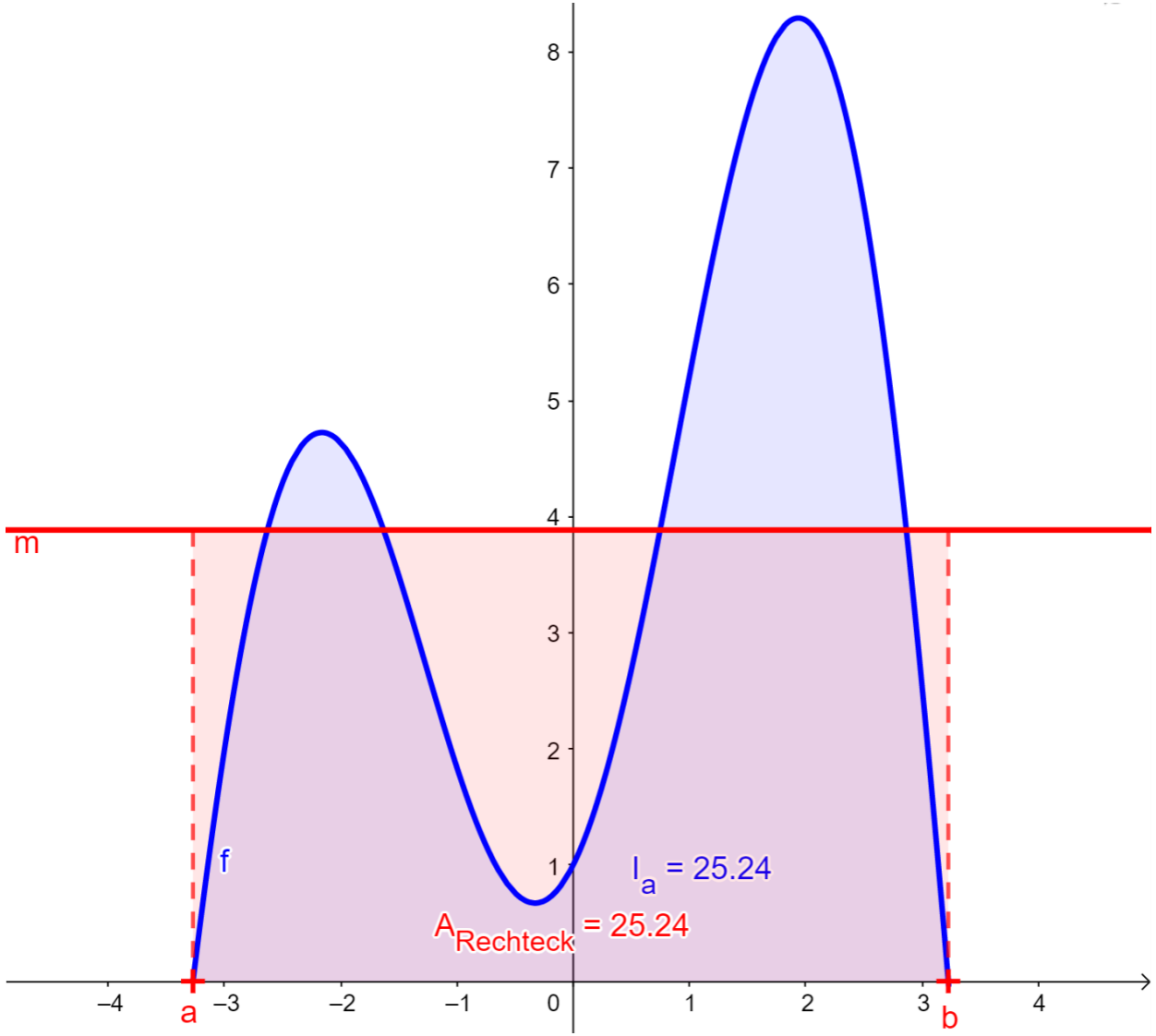
den Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ zu verstehen.

- Es gilt:

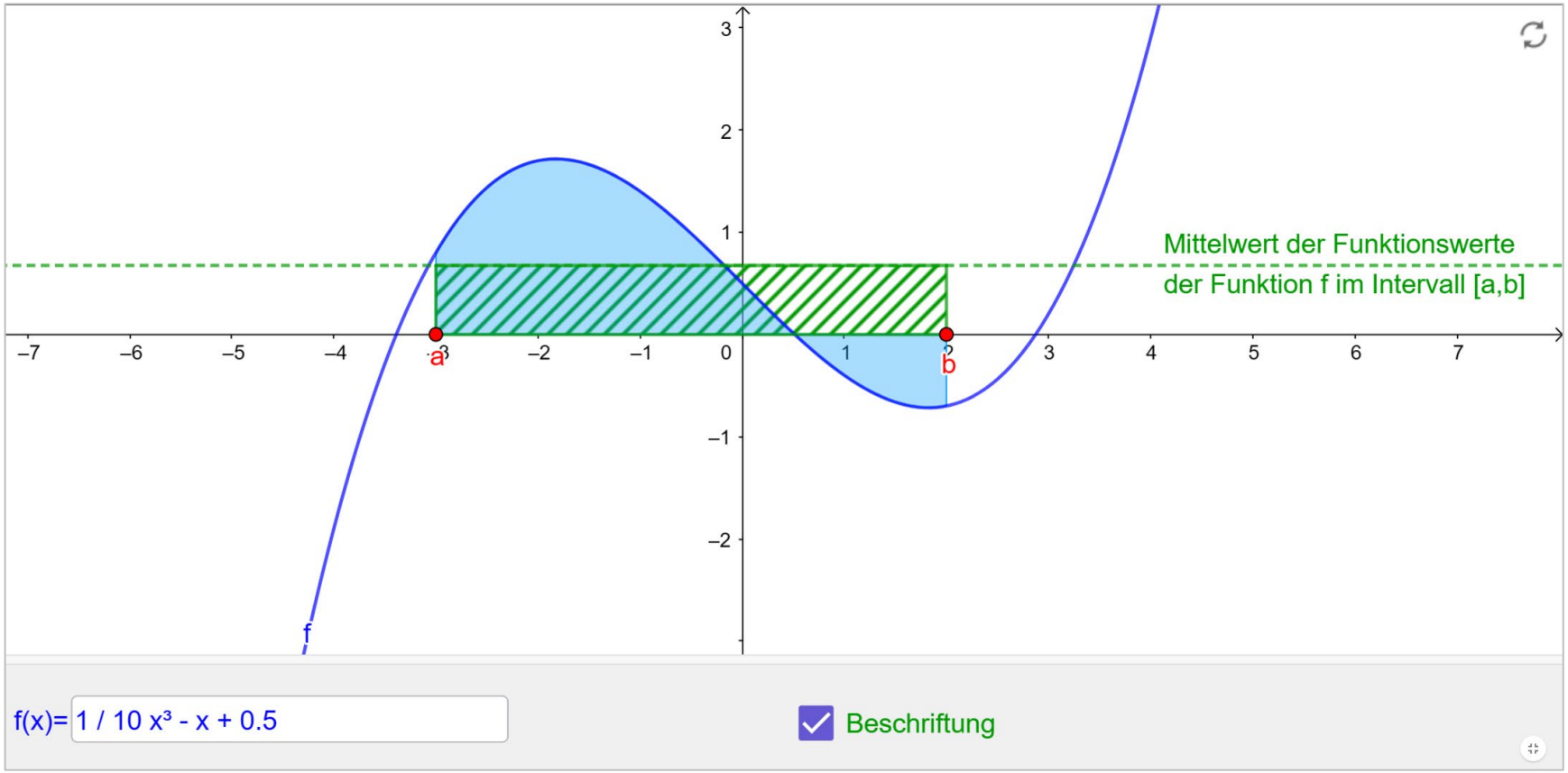
$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

- Speziell:

$$I_a(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$



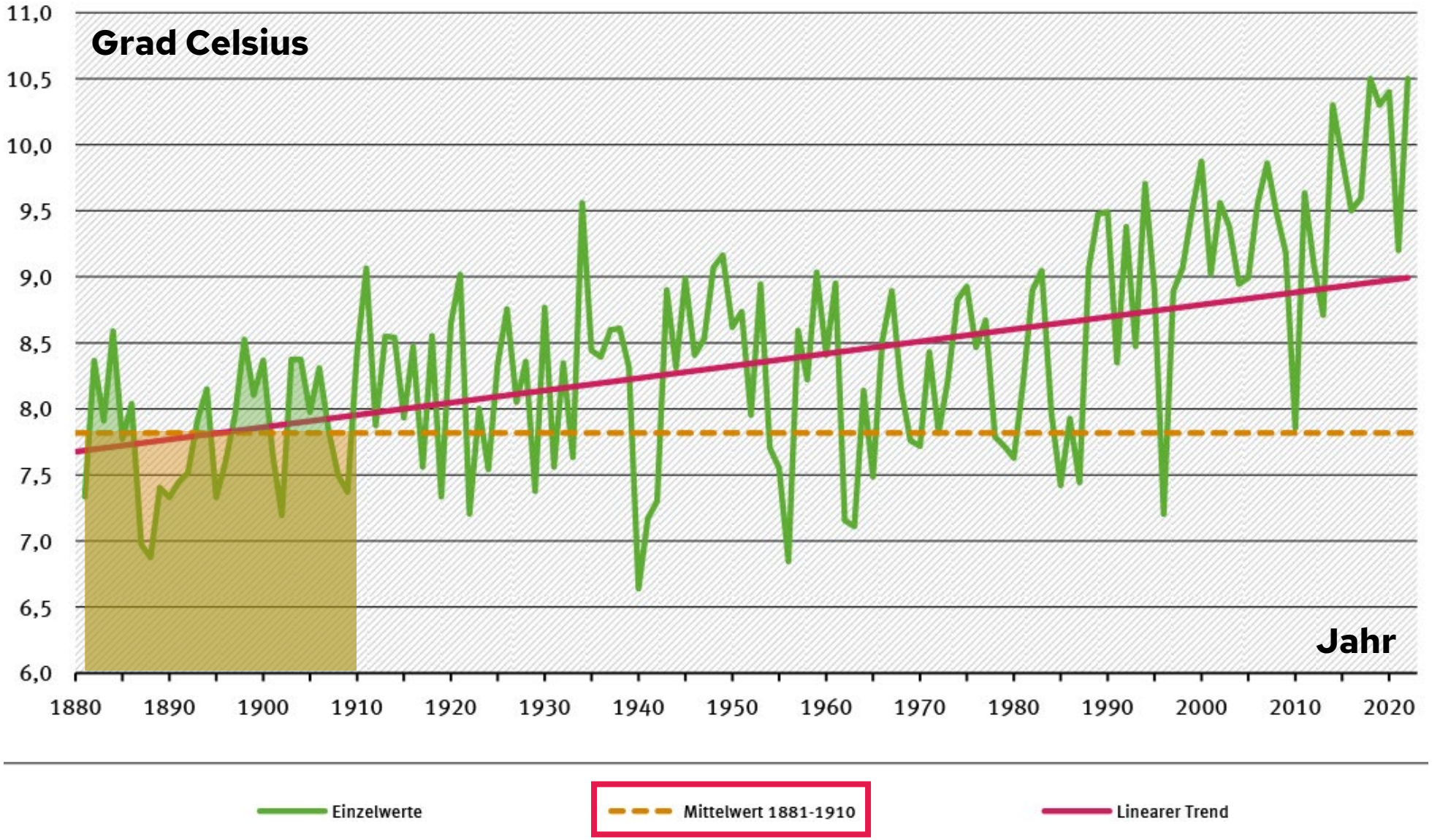
Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln
Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$



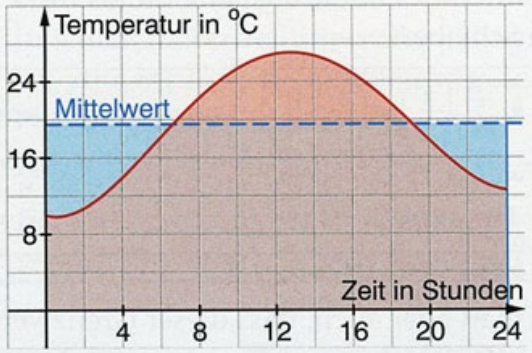
Grundvorstellung
Integrieren als Mitteln

Ein bestimmtes Integral mittelt die Funktionswerte der Integrandenfunktion im Integrationsintervall.

Jährliche mittlere Tagesmitteltemperatur in Deutschland 1881 bis 2022



C Mit dem Integral lässt sich der Mittelwert bei einer sich kontinuierlich verändernden Größe berechnen, z. B. die mittlere Tagestemperatur aus einer aufgezeichneten Temperaturkurve.



Schmidt, G, Körner, H., Lergenmüller, A. (Hrsg.) (2011). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien, Analysis II. Braunschweig: Westermann, Schroedel, Diesterweg, Schöningh, Winklers, S. 162

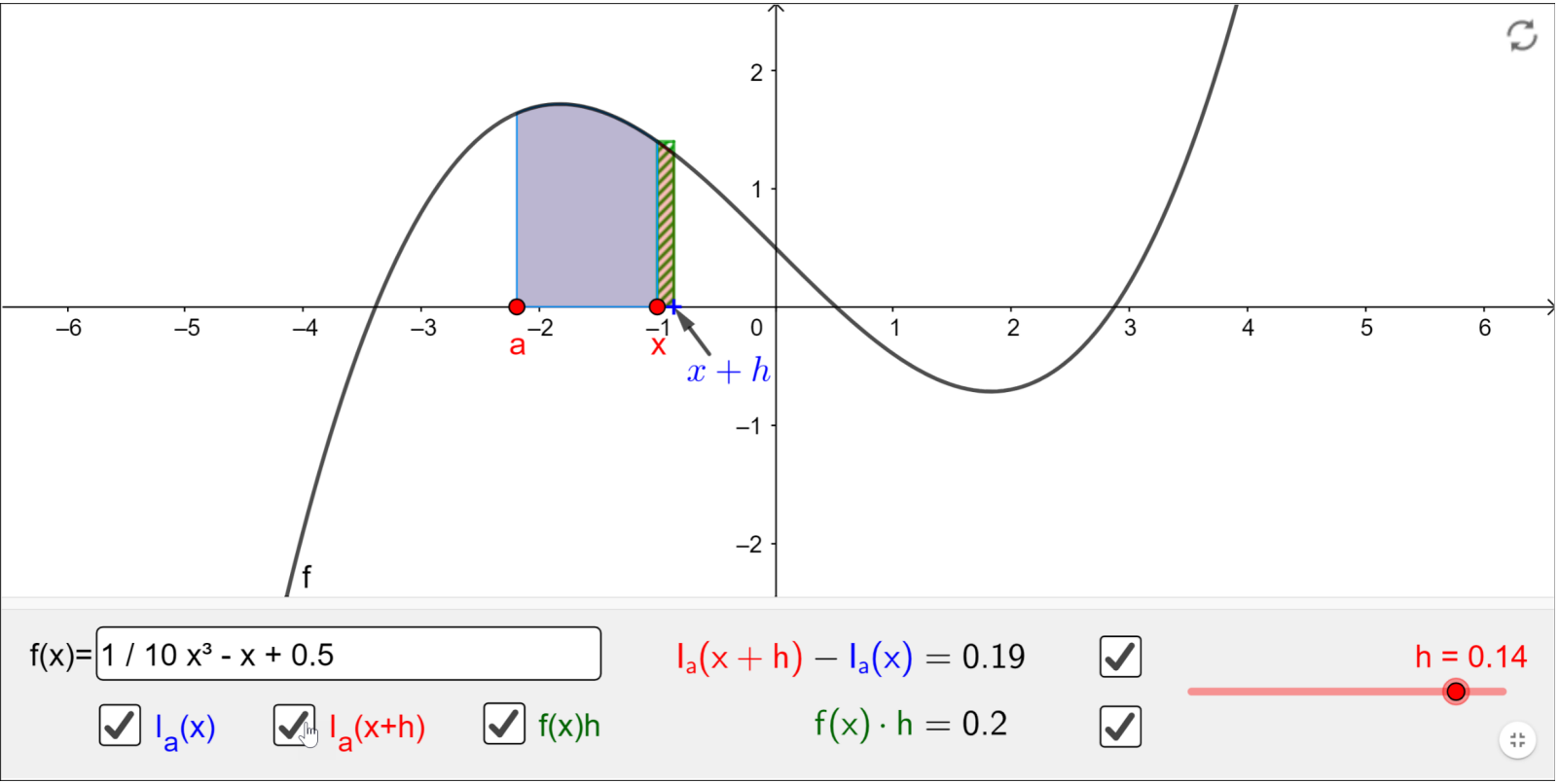
https://www.umweltbundesamt.de/bild/jaehrliche-mittlere-tagesmitteltemperatur-in

Quelle: Deutscher Wetterdienst (DWD), 08.03.2023

MaTeGnu

6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)



Anschauliche Überlegung

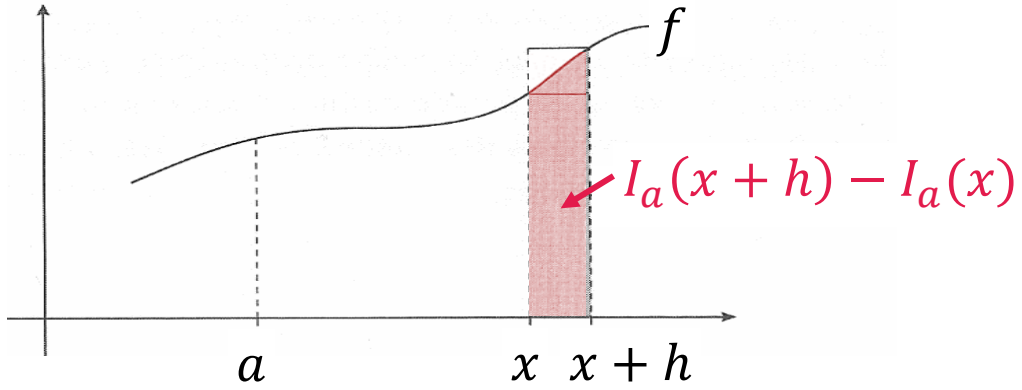
O. B. d. A. verlaufe der Graph von f im Intervall I oberhalb der x-Achse und es sei $h > 0$ mit $a \in I$ und $x + h \in I$.

Die Differenz $I_a(x+h) - I_a(x)$ entspricht dem Inhalt des schraffierten Rechtecks. Es hat die Breite h und näherungsweise die Höhe $f(x)$, d. h.:
$I_a(x+h) - I_a(x) \approx f(x) \cdot h$

Für $h \to 0$ konvergiert also $\frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h}$ gegen $f(x)$.

Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Behauptung: Die Ableitung der Integralfunktion ist die Berandungsfunktion / Integrandenfunktion.



Begründung

- Der absolute Zuwachs von I_a, das Flächenstück $I_a(x+h) - I_a(x)$, lässt sich durch Rechteckflächen abschätzen:

$$f(x) \cdot h \leq I_a(x+h) - I_a(x) \leq f(x+h) \cdot h$$

- Für den relativen Zuwachs von I_a (mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta I_a}{h}$) folgt:

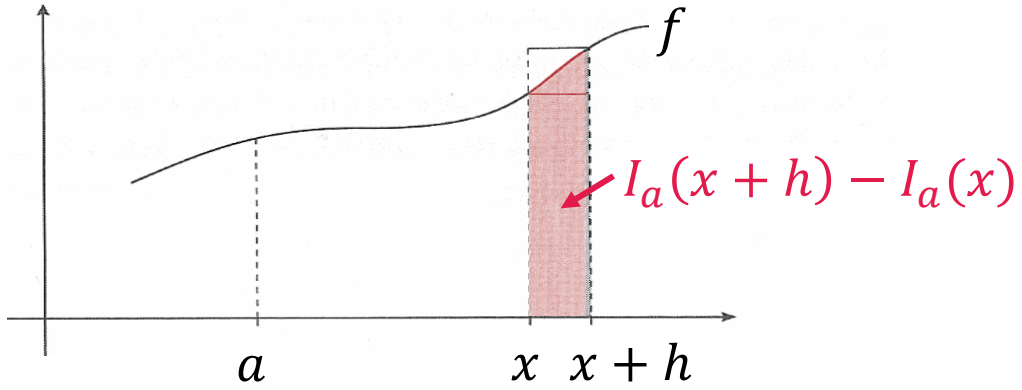
$$f(x) \leq \frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h} \leq f(x+h) \qquad (*)$$

- Die Integralfunktion I_a hat an der Stelle x die Eigenschaft $I_a' = f$, wenn $f(x+h)$ für $h \to 0$ gegen $f(x)$ strebt (d. h. f stetig in x ist). Dann folgt aus (*):

$$f(x) \leq \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h}}_{I_a'(x)} \leq f(x) \quad \Rightarrow \quad I_a'(x) = f(x)$$

Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Behauptung: Die Ableitung der Integralfunktion ist die Berandungsfunktion / Integrandenfunktion.



Begründung

- Der absolute Zuwachs von I_a, das Flächenstück $I_a(x+h) - I_a(x)$, lässt sich durch Rechteckflächen abschätzen:

$$\min\big(f(x), f(x+h)\big) \cdot h \leq I_a(x+h) - I_a(x) \leq \max\big(f(x), f(x+h)\big) \cdot h$$

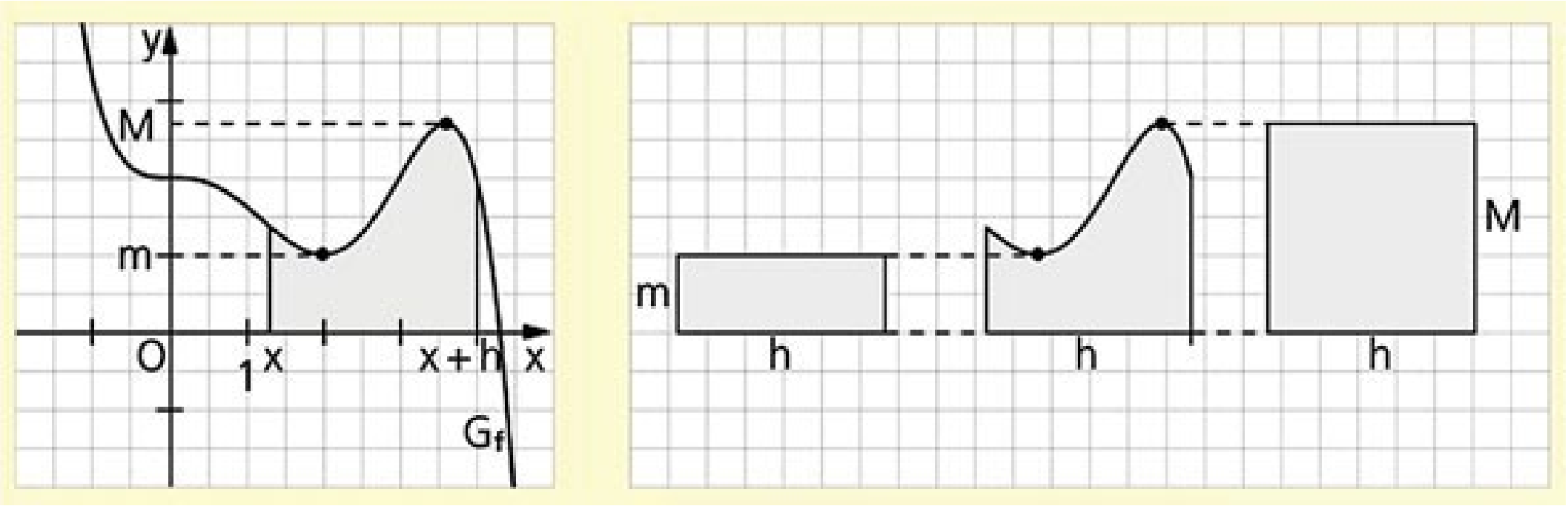
- Für den relativen Zuwachs von I_a (mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta I_a}{h}$) folgt:

$$\min\big(f(x), f(x+h)\big) \leq \frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h} \leq \max\big(f(x), f(x+h)\big) \qquad (*)$$

- Die Integralfunktion I_a hat an der Stelle x die Eigenschaft $I_a' = f$, wenn $f(x+h)$ für $h \to 0$ gegen $f(x)$ strebt (d. h. f stetig in x ist). Dann folgt aus (*):

$$f(x) \leq \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h}}_{I_a'(x)} \leq f(x) \quad \Rightarrow \quad I_a'(x) = f(x)$$

Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)



m ≔ Kleinster Funktionswert von f im Intervall $[x; x+h]$

M ≔ Größter Funktionswert von f im Intervall $[x; x+h]$

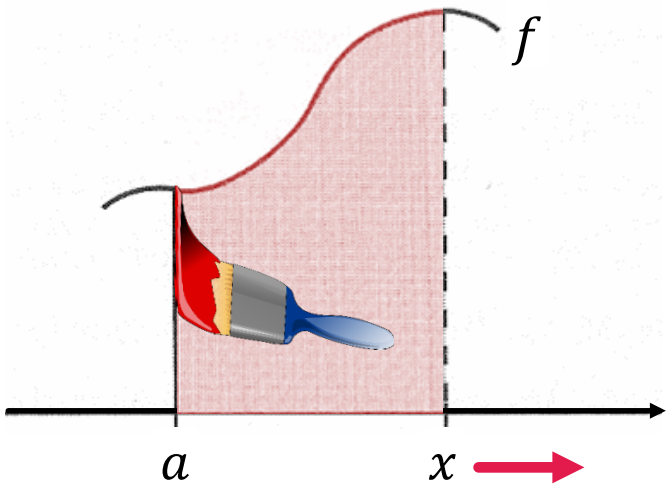
$$m \cdot h \leq I_a(x+h) - I_a(x) \leq M \cdot h$$

 Abbildung aus Schätz, U. & Eisentraut, F. (Hrsg.) (2013). delta 12. Mathematik für Gymnasien. Bamberg: Buchners, S. 34

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Vorstellung

Wenn man die von f berandete Fläche mit Farbe streicht und dabei gleichmäßig von a nach rechts läuft, dann ist der Verbrauch an Farbe proportional zum Funktionswert von f an der Stelle, an der man sich gerade befindet.



1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI 1)

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I stetige Funktion und $a \in I$.
Dann ist die Integralfunktion I_a auf I differenzierbar und sie ist eine Stammfunktion von f, d.h. es gilt:

$$I_a'(x) = f(x)$$

Kurz: Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion (Berandungsfunktion).

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Bemerkungen

- HDI 1 kann nur durchschaut werden, wenn Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit inhaltlich verstanden wurden.
- Schulische Bedeutung des HDI:
  (1) Der HDI zeigt einen Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren (HDI 1).
  (2) Der HDI stellt ein Instrument zur Berechnung von Integralen zur Verfügung (HDI 2).

2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI 2)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I **stetige** Funktion und F eine **Stammfunktion** von f.

Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung: HDI 2 kann aus HDI 1 gefolgert werden.
Nach HDI 1 gilt $\boldsymbol{I_a'(x) = f(x)}$, die Integralfunktion ist bei stetiger Integrandenfunktion f eine Stammfunktion von f.
$I_a(x)$ unterscheidet sich von einer beliebigen Stammfunktion F von f nur durch eine additive Konstante c, d. h. $F(x) = I_a(x) + c$ für alle $x \in I$.

Einsetzen von a und b ergibt:
(I) $F(a) = I_a(a) + c = c$
(II) $F(b) = I_a(b) + c \overset{(I)}{=} I_a(b) + F(a)$
Daraus folgt:
$\int_a^b f(x)dx = I_a(b) \overset{(II)}{=} F(b) - F(a)$

Differenzieren und Integrieren als Umkehroperationen

g —(Übergang zur lokalen Änderungsrate)→ g' —(Übergang zur Integralfunktion)→ $I_a = g$

(Differenzieren)

(Integrieren („Rekonstruieren“))

f —(Übergang zur Integralfunktion)→ I_a —(Übergang zur lokalen Änderungsrate)→ $I_a' = f$

(Integrieren („(Re-)Konstruieren“))

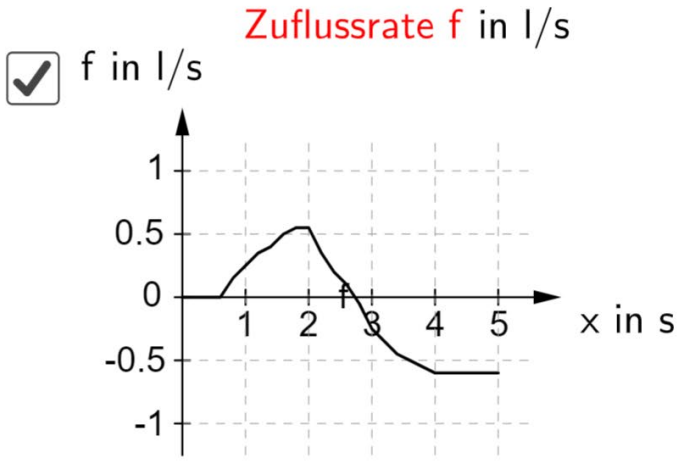
(Differenzieren)

MaTeGnu

7

Grundvorstellungen vernetzen

Wasserhahn-Applet 1: Grundvorstellungen vernetzen



Gitternetz

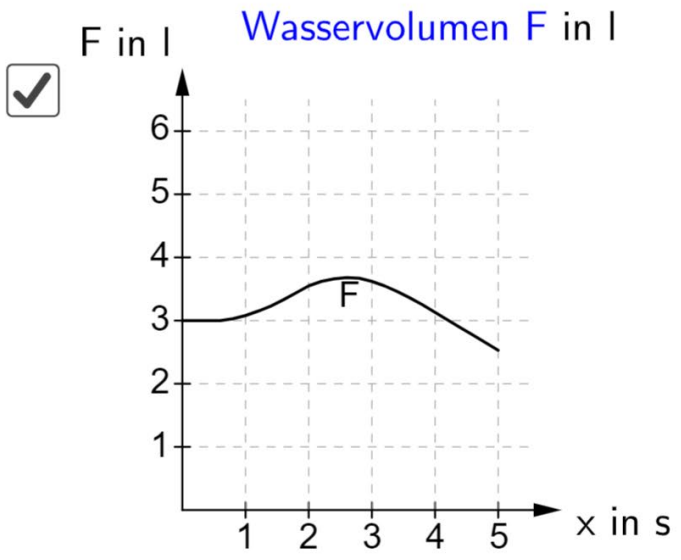
Beschriftung

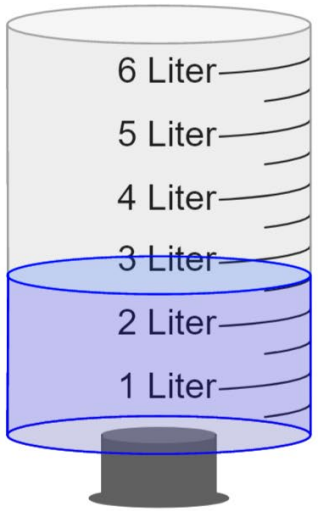
Zeit: x = 5 s

Start

Wasserhähne

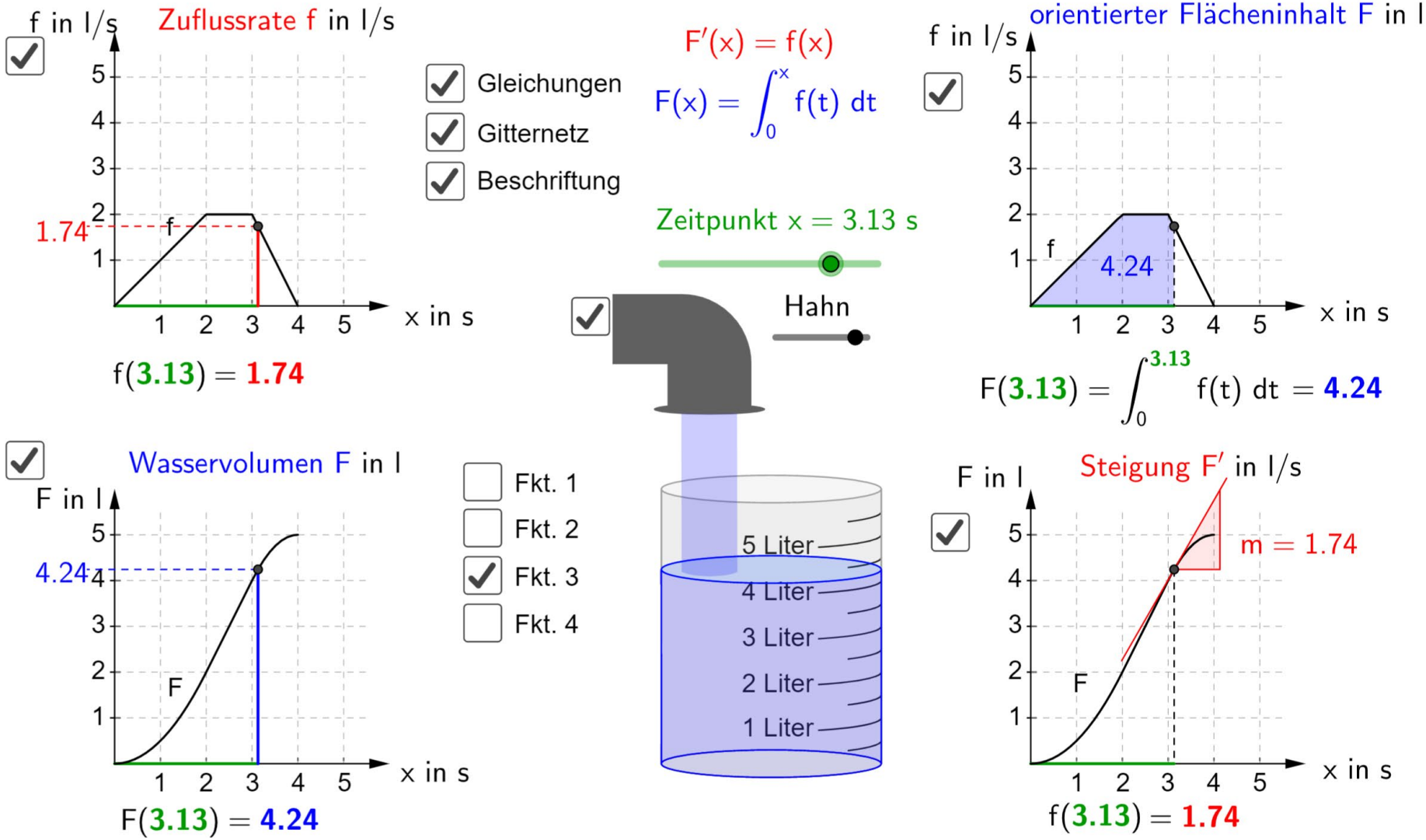
Abfluss ←





GeoGebra-Buch: Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung
https://geogebra.org/m/dzg7waaf

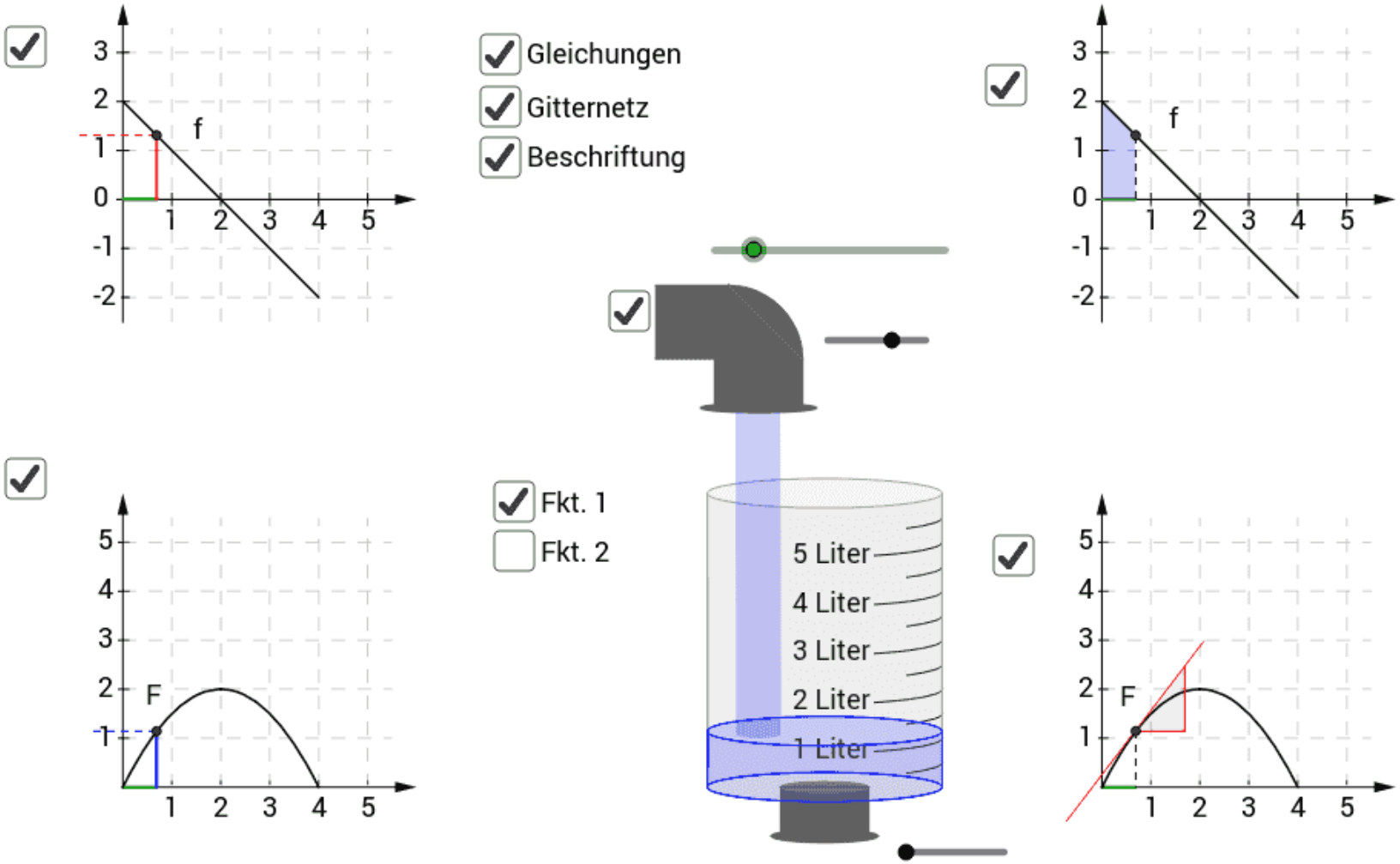
Wasserhahn-Applet 2: Grundvorstellungen vernetzen



Becher, A. & Ossmann, H. (2016). Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung – Grundvorstellungen vernetzt in fünf Bildern. *Mathematik lehren, 199*, 33-36

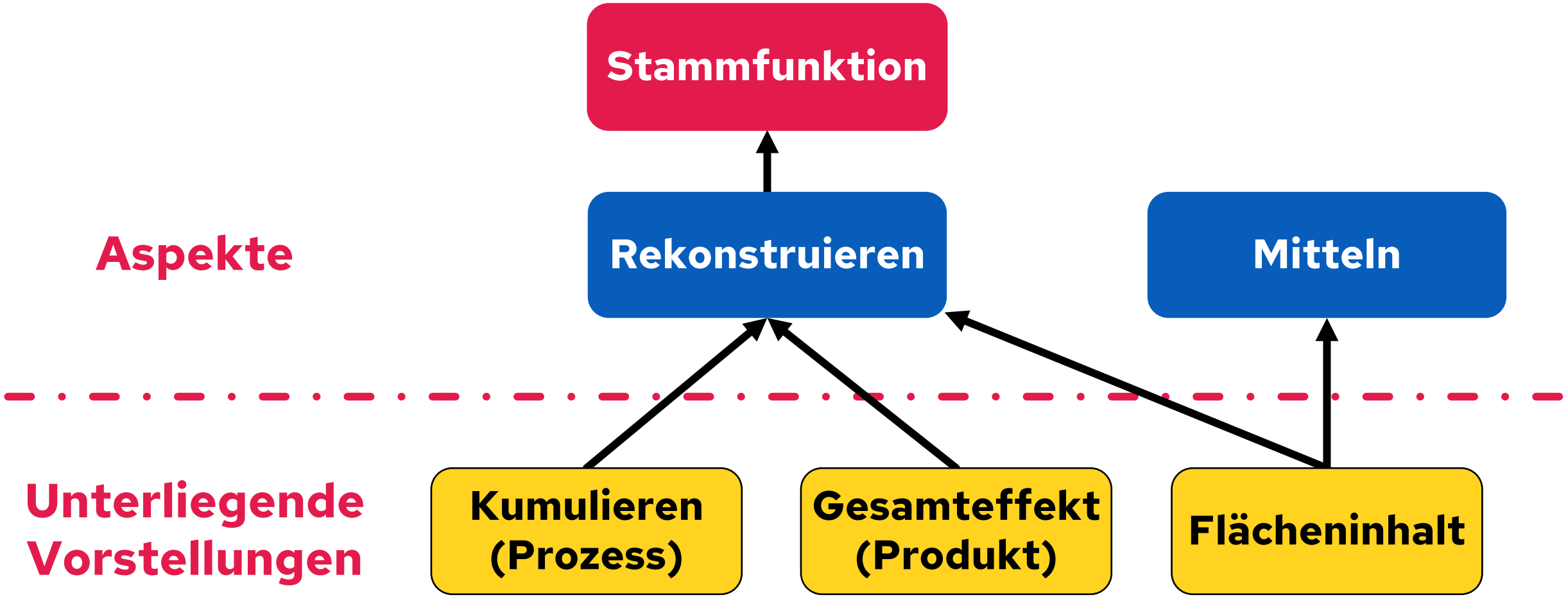
GeoGebra-Buch: Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung
https://geogebra.org/m/dzg7waaf

Wasserhahn-Applet 3:
Grundvorstellungen vernetzen



GeoGebra-Buch: Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung
https://geogebra.org/m/dzg7waaf

Integralbegriff: Inhaltliche Aspekte und Vorstellungen



Veranstaltungsfeedback

Umfragen: Veranstaltungsfeedback

- http://feedback.roth.tel

Fragen (Es sind mehrere Antworten möglich.)

- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)
- Was wünschen Sie sich für die Veranstaltung?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth & Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de; s.digel@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU