MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie an **G**rundvor-
stellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Modul 1:
Grundvorstellungen zur Ableitung

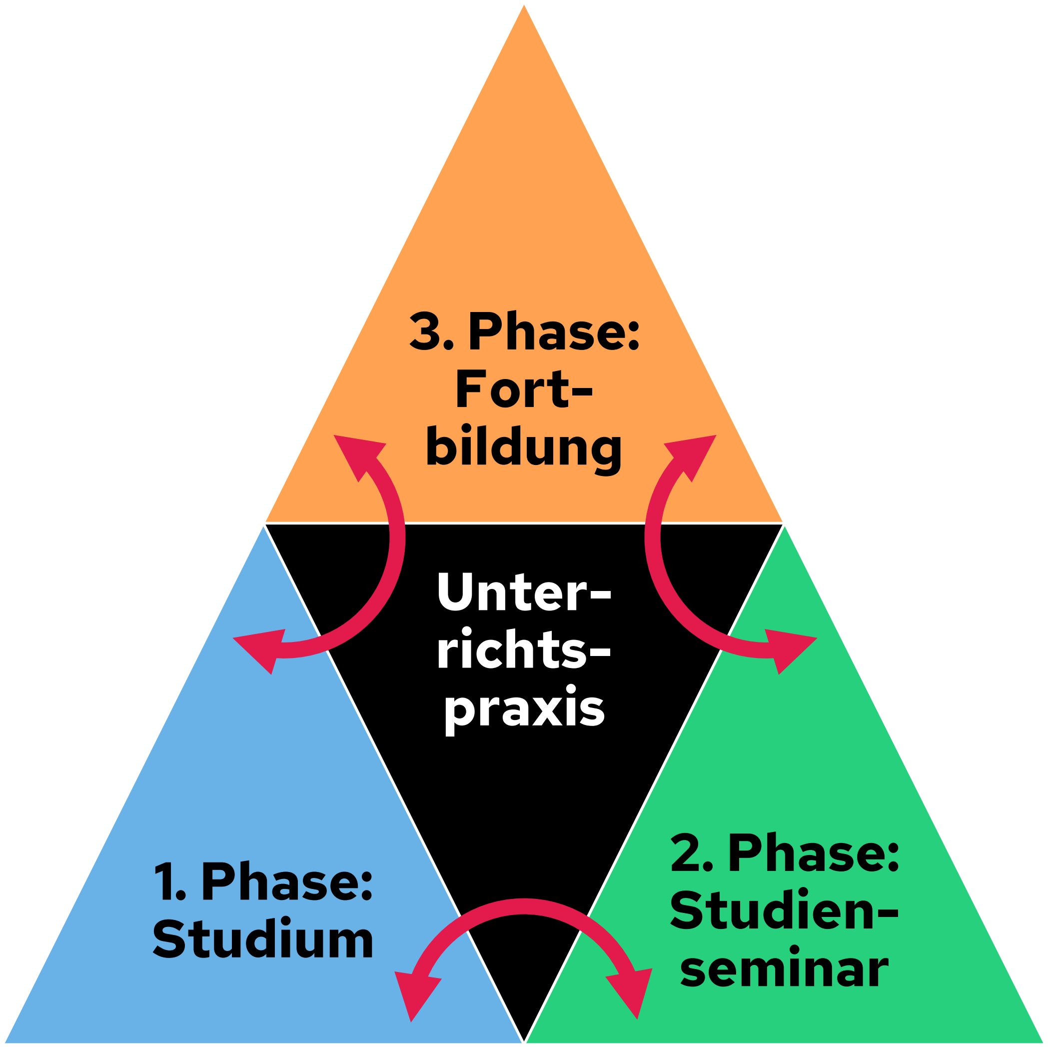
Jürgen Roth & Susanne Digel

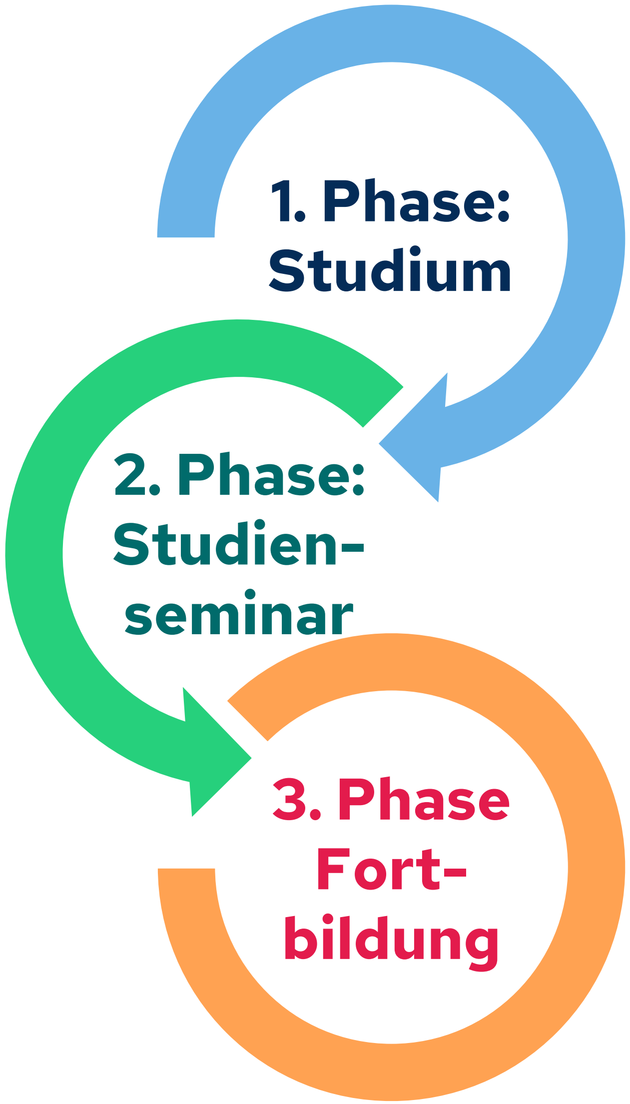
15.11.2023 Bad Kreuznach

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

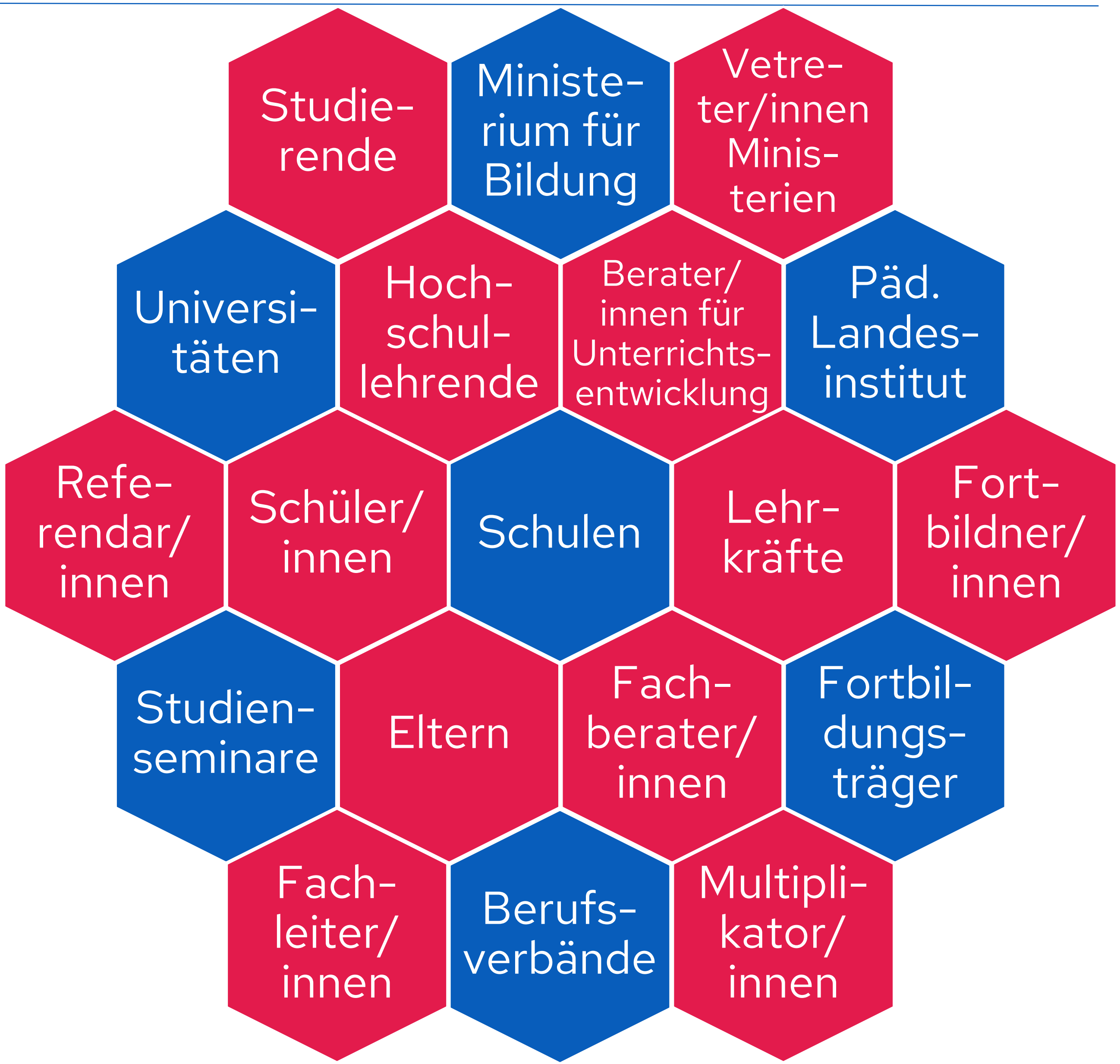
RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Lehrkräftebildung

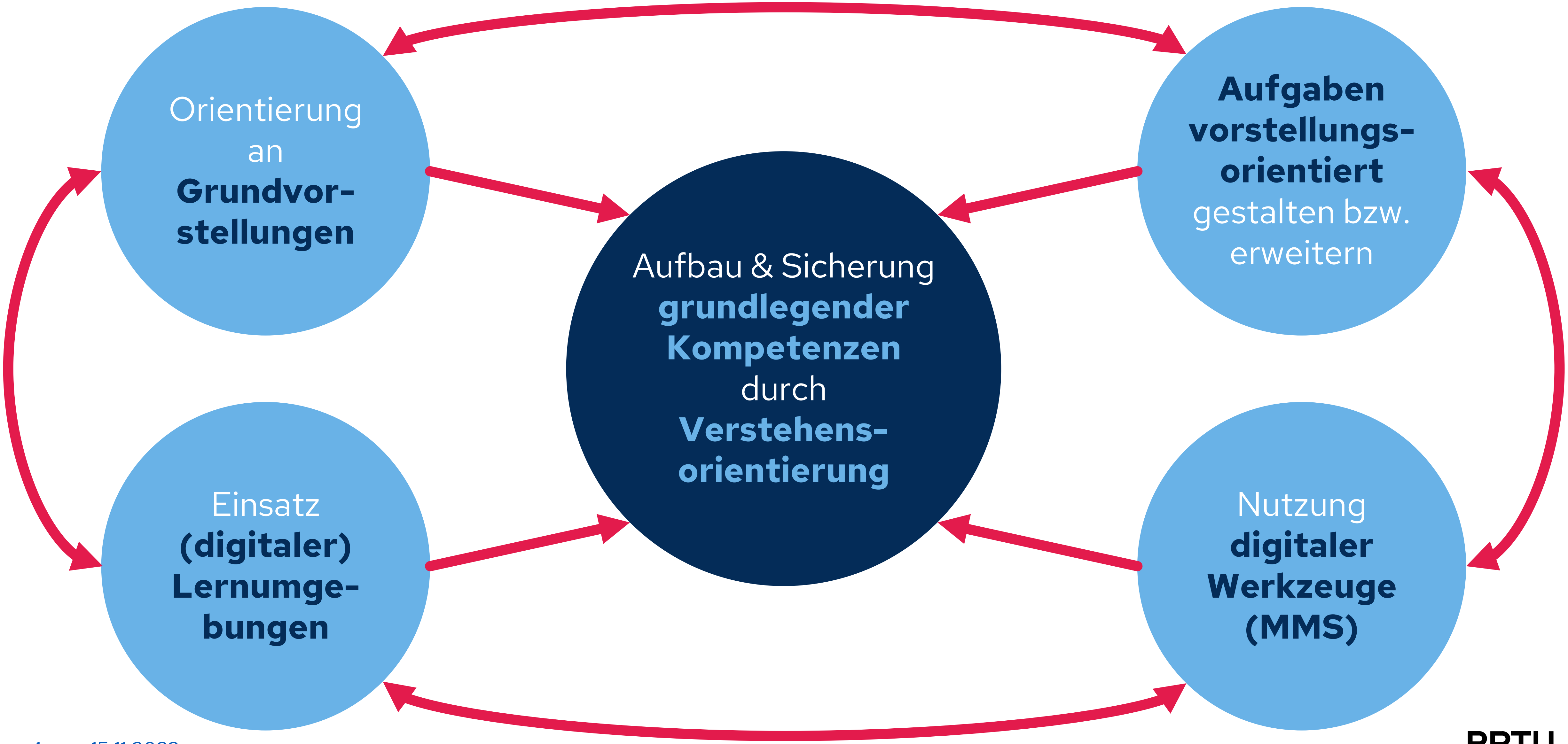




Institutionen und Handelnde Personen



MaTeGnu Ziele



Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

MaTeGnu

Modul 1: GV zur Ableitung

1. Organisatorisches / MaTeGnu
2. Grundvorstellungen (GV)?!
3. Grundvorstellungen zur Ableitung
4. Lernumgebungen reflektieren
5. Aufgabengestaltung und GV
6. Digitale Werkzeuge & Lernumgebungen
7. Aufgabenperspektiven (Prüfungen)

Anhang:
- A_1 Ziele des Oberstufenunterrichts
- A_2 Folgen und Konvergenz
- A_3 Exponentialfunktion
- A_4 Testhefte

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

RPTU

1 Organisatorisches / MaTeGnu

MaTeGnu

Regionalsets

Nord

Armin Baeger	(RFB)	Juliane Brauer	(BfU)
Stefanie Hecker	(BfU)	Silvia Heimermann	(BfU)
Peter Wojke	(RFB)		

Mitte

David Bittner	(BfU)	Martin Dexheimer	(BfU)
Karin Ewert	(RFB)	Christian Fahse	(RFB)
Anna Noll	(BfU)	Elisabeth Weber	(BfU)

Süd

Anja Becher	(BfU)	Christina Bauer	(PL)
Ellen Müller	(BfU)	Katalin Retterath	(BfU)
Claudia Tschepke-Fröhlich			(BfU)
Susanne Weißmann			(BfU)

Fachleiter/innen

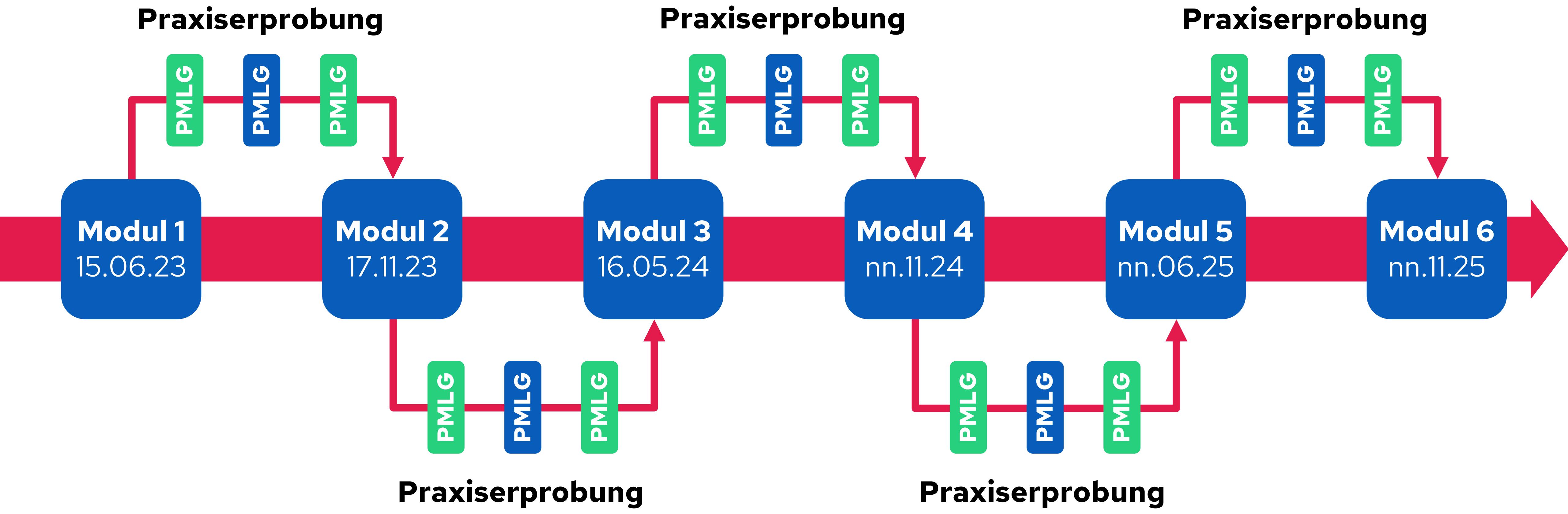
Katrin Baun   Micha Liebendörfer   Bärbel Schneider

Support PL

Birgit Lachner   Nina Kühn

Multiplikator:innen-Qualifikation

Gesamter MSS-Durchlauf



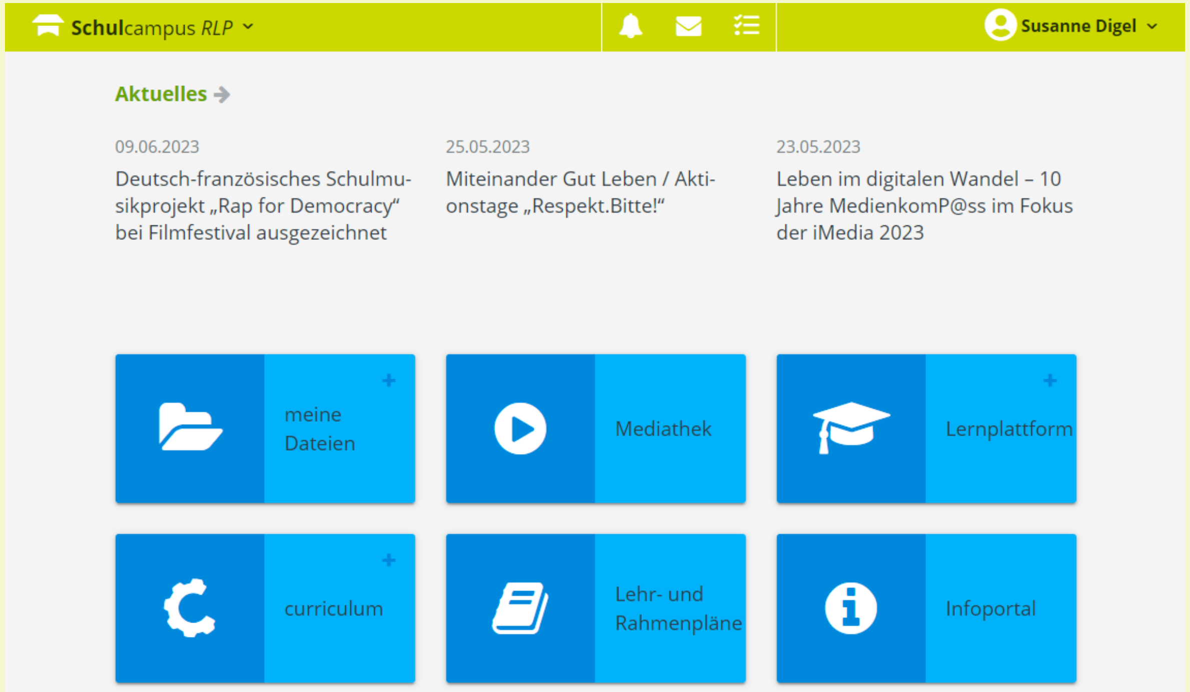
Alle

In den drei Regionalsets **Nord**, **Mitte** und **Süd**

Tagesablauf

Zeit	Inhalt
9:30-9:45	1. Begrüßung und Organisatorisches
9:45-10:45	2. / 3. Einführung Grundvorstellungen zur Ableitung
10:45-11:15	4. Erkundung und Reflexion von Lernumgebungen
11:15-11:30	Kaffeepause
11:30-12:30	5. Aufgabengestaltung und Grundvorstellungen
12:30-14:00	Mittagspause
14:00-14:30	**PMLG:** Eigene Aufgabe im Hinblick auf Grundvorstellungen adaptieren
14:30-15:00	6. Digitale Lernumgebungen und Werkzeuge
15:00-15:45	7. Aufgabenperspektiven – Auch mit Blick auf Prüfungen
15:45-16:00	Kaffeepause
16:00-17:00	**PMLG:** Anhand der Grobplanung Themen- & Rückmeldungsverantwortliche identifizieren Eigene Aufgabe zum Thema mit MMS-Einsatz konzipieren
17:00-17:30	Evaluation, Hausaufgabe: Thema ausarbeiten, Arbeitsweise in PMLGs, Tagesabschluss

Schulcampus RLP Materialien zum MaTeGnu



Zentrale Plattform Schulcampus RLP

- **edu-sharing (Cloud-Speicher):**
  meine Dateien
  ⇒ Gemeinsame Inhalte
  ⇒ SC Fortbildung
  ⇒ MaTeGnu

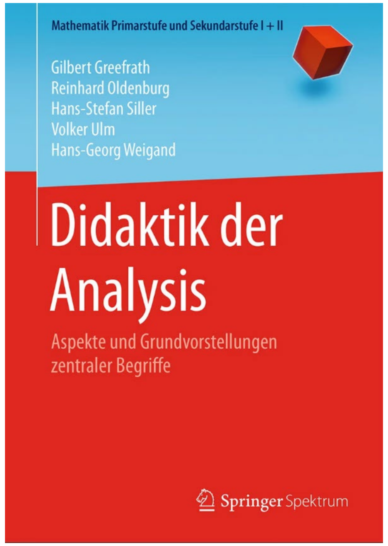
- **LMS (Moodle-Instanz):**
  Lernplattform
  ⇒ SC Fortbildung
  ⇒ MultiplikatorInnen MaTeGnu

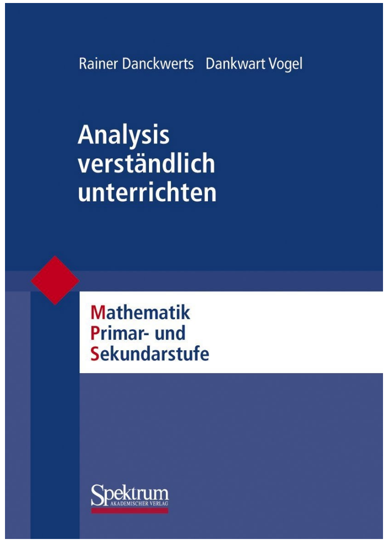
Dynamische Mathematik-Systeme (DMS)
[Multi-Repräsentations-Systeme,
modulare Mathematiksysteme (MMS)]

- MMS-Prüfungsmodus: roth.tel/mms
- Nutzer: **MaTeGnu → Folgen!**
  www.geogebra.org/u/mategnu

GeoGebra

Ergänzende Materialien





- **Internetseiten und Skripte**
  - Vorlesung Didaktik der Algebra → Funktionen
    juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/ ⇒ Material
  - Vorlesung Didaktik der Analysis
    juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-analysis/ ⇒ Material
- **Zeitschriften**
  juergen-roth.de/zeitschriften → Listen der Themenhefte
- **Buchempfehlungen**
  - Greefrath, G.; Oldenburg, R.; Siller, H.-S.; Ulm, V.; Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis. Heidelberg: Springer Spektrum
  - Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Wiesbaden: Spektrum Akademischer Verlag

2 Grundvorstellungen?!

Begriffsklärungen

Kompetenz
Wissen und Können, sowie die Fähigkeit und Bereitschaft diese flexibel und erfolgreich einzusetzen.

- Inhaltsbezogene Kompetenzen
- Prozessbezogene Kompetenzen

Grundvorstellung
- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

Fundamentale Ideen
- Weite (logische Allgemeinheit)
- Fülle (vielfältige Anwendbarkeit)
- Sinn (im Alltagsleben verankert)

Grundfertigkeit
- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

Grundwissen
- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Formeln, Sätze, ...)
- sollte auswendig gewusst werden

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
  haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
  werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

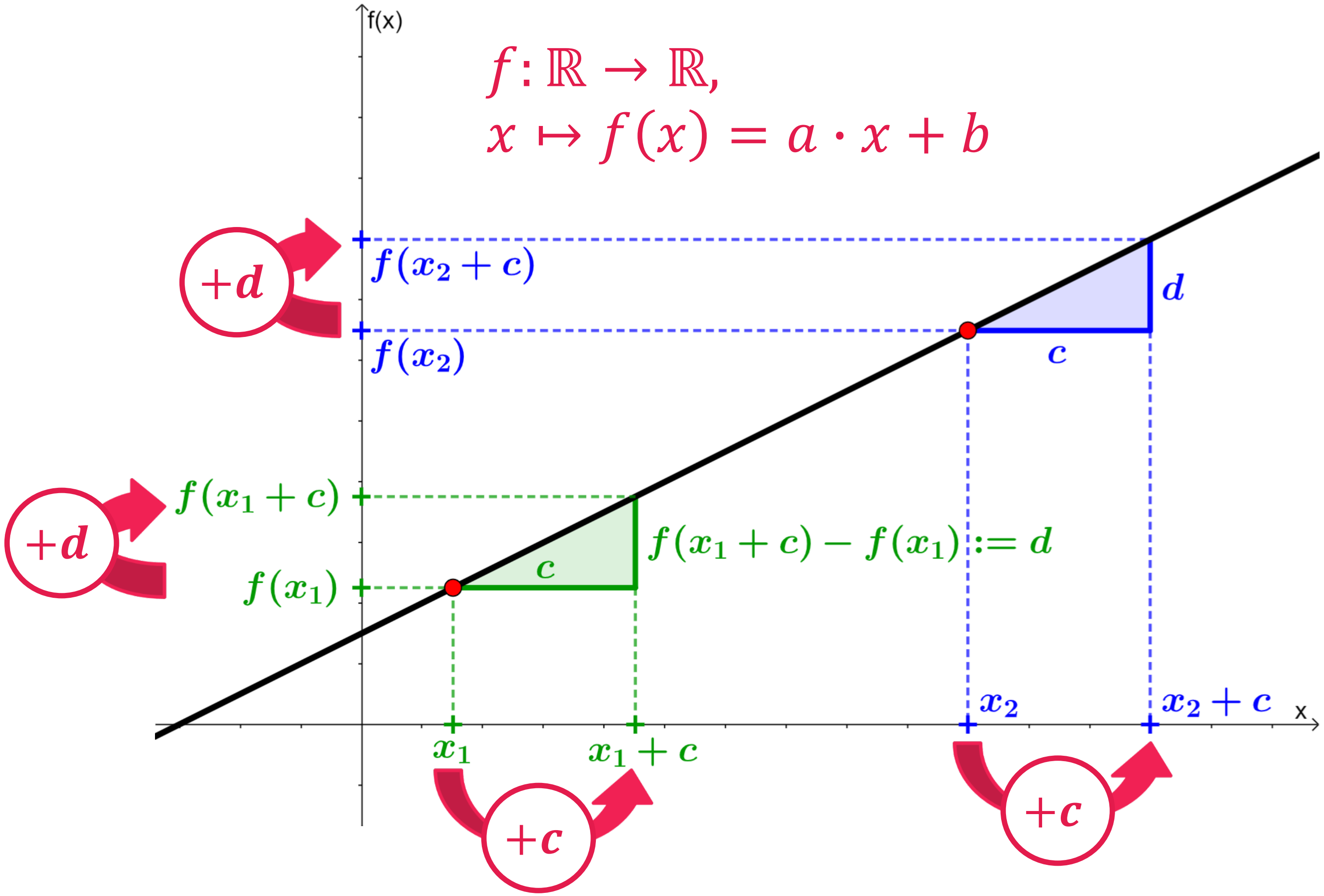
 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9

Primäre Grundvorstellungen
Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$
\begin{aligned}
& f(x + c) \\
& = a \cdot (x + c) + b \\
& \overset{DG}{\triangleq} a \cdot x + a \cdot c + b \\
& \overset{KG}{\triangleq} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d} \\
& = f(x) + d
\end{aligned}
$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Ausbilden von Grundvorstellungen: Ziele

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

 Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4-8

Verständnisanker

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle für das Verständnis des mathematischen Sachverhalts wesentlichen Strukturelemente in der Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, auf den Verständnisanker zurückgreifen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

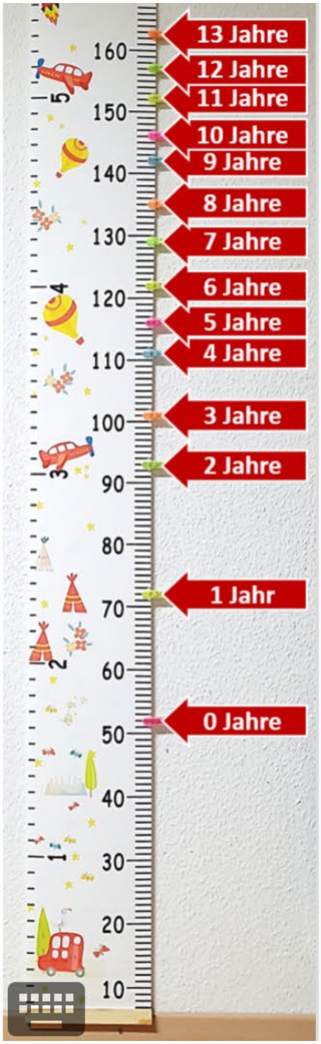
Beispiel

- Ein möglicher **Verständnisanker** für Grundvorstellungen zum Integral ist die Frage nach der Füllmenge eines Waschbeckens bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.
- Anhand der Waschbeckensituation können die Grundvorstellungen „Integral als Rekonstruieren des Gesamteffekts“ und „Integral als orientierter Flächeninhalt“ inhaltlich durchschaut werden.

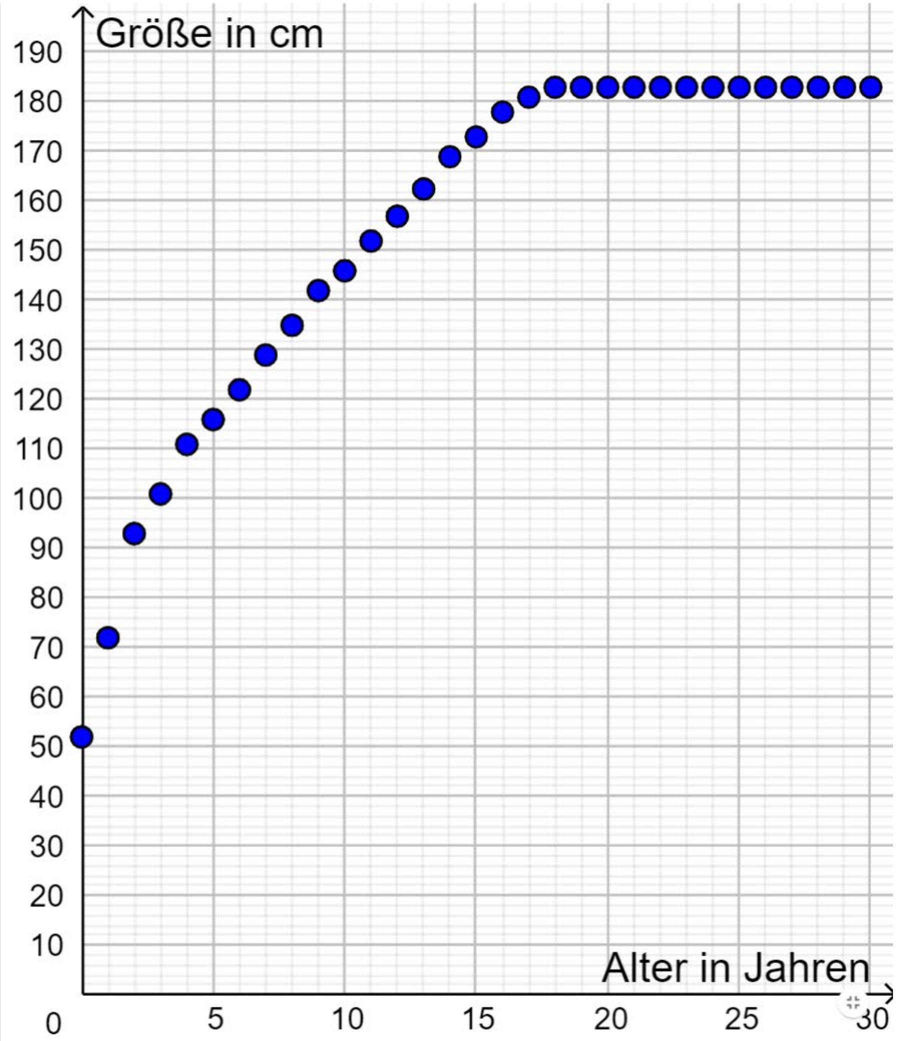
Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. Mathematik lehren, 236, S. 6-9.

Verständnisanker für GV zu Funktionen

Zusammenhang: Alter ↦ Körpergröße



	A	B
1	Alter in Jahren	Größe in cm
2	0	52
3	1	72
4	2	93
5	3	101
6	4	111
7	5	116
8	6	122
9	7	129
10	8	135
11	9	142
12	10	146
13	11	152
14	12	157
15	13	162.5



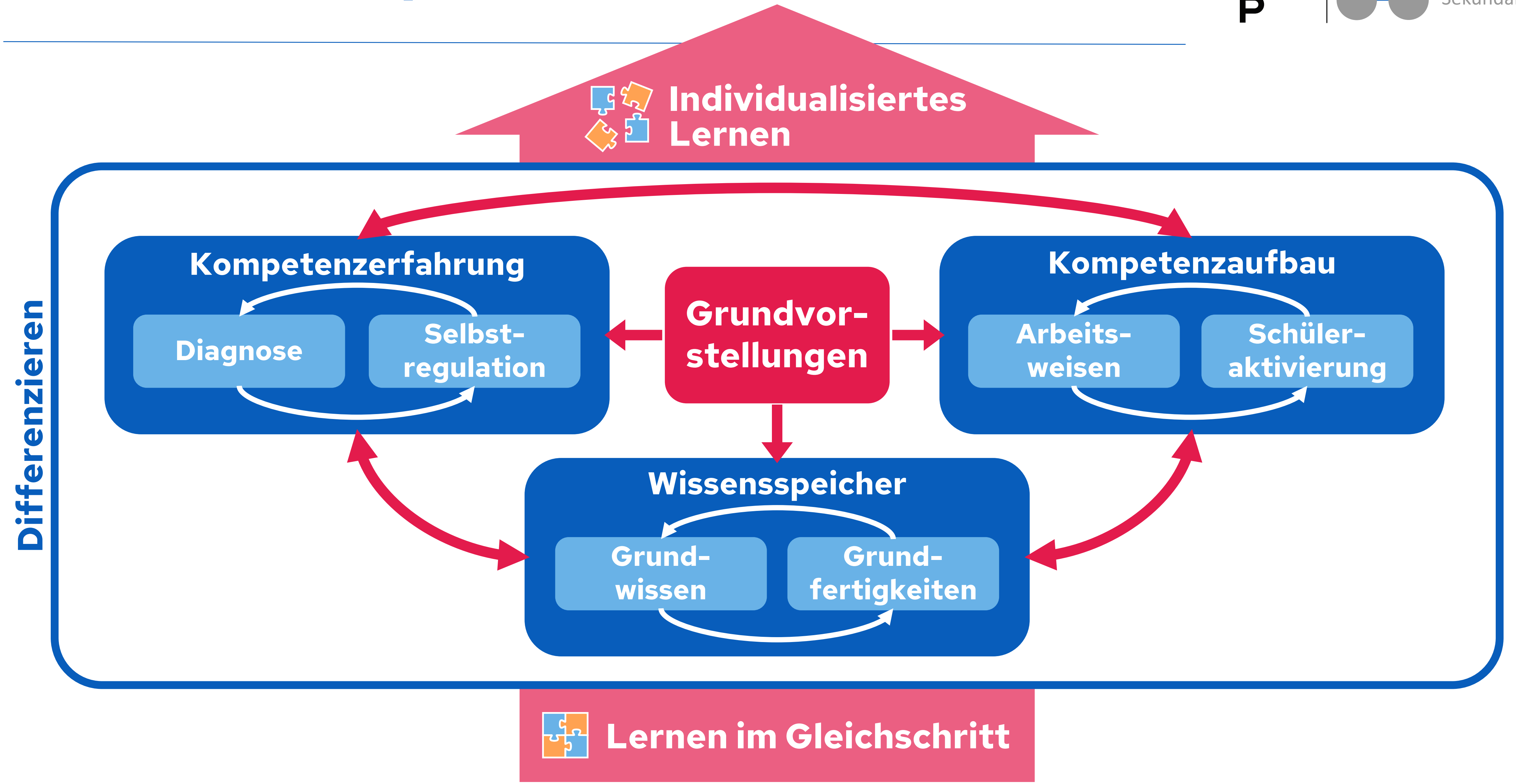
Grundvorstellung **Zuordnung**

Grundvorstellung **Kovariation**

Grundvorstellung **Funktion als Ganzes**

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

HeMaS-Konzept



Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis & Bezugsnorm – das Beispiel Terme. Praxis der Mathematik in der Schule, 70, 2-8

Grundvorstellungen in der Analysis

Ableitung als

- lokale Änderungsrate
- lokale lineare Approximation
- Tangentensteigung (geometrisch gedeutet)

Integral als

- Rekonstruktion des Gesamteffekts
- Mittelung
- Orientierter Flächeninhalt (geometrisch gedeutet)

Extrem- & Wendestellen als

- markante Punkte in funktionalen Zusammenhängen, bei denen sich Änderungsverhalten ändert
- begriffliche Werkzeuge zur Lösung von Optimierungsproblemen

 Hußmann, Prediger (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM, 52(31)*, 35-38

Vorstellungsorientierte Fähigkeiten (1)

- **absolute & relative Änderungsmaße** unterscheiden und angemessen verwenden können

- **Zusammenhang zwischen mittlerer (Differenzenquotient) & momentaner Änderungsrate (Differenzialquotient)** kennen, auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes beschreiben & in verschiedenen Situationen anwenden können

- **Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion)** in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können

- **Unterschied zwischen Bestand und Änderung** in Anwendungssituationen erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

Hußmann, Prediger (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM, 52*(31), 35-38

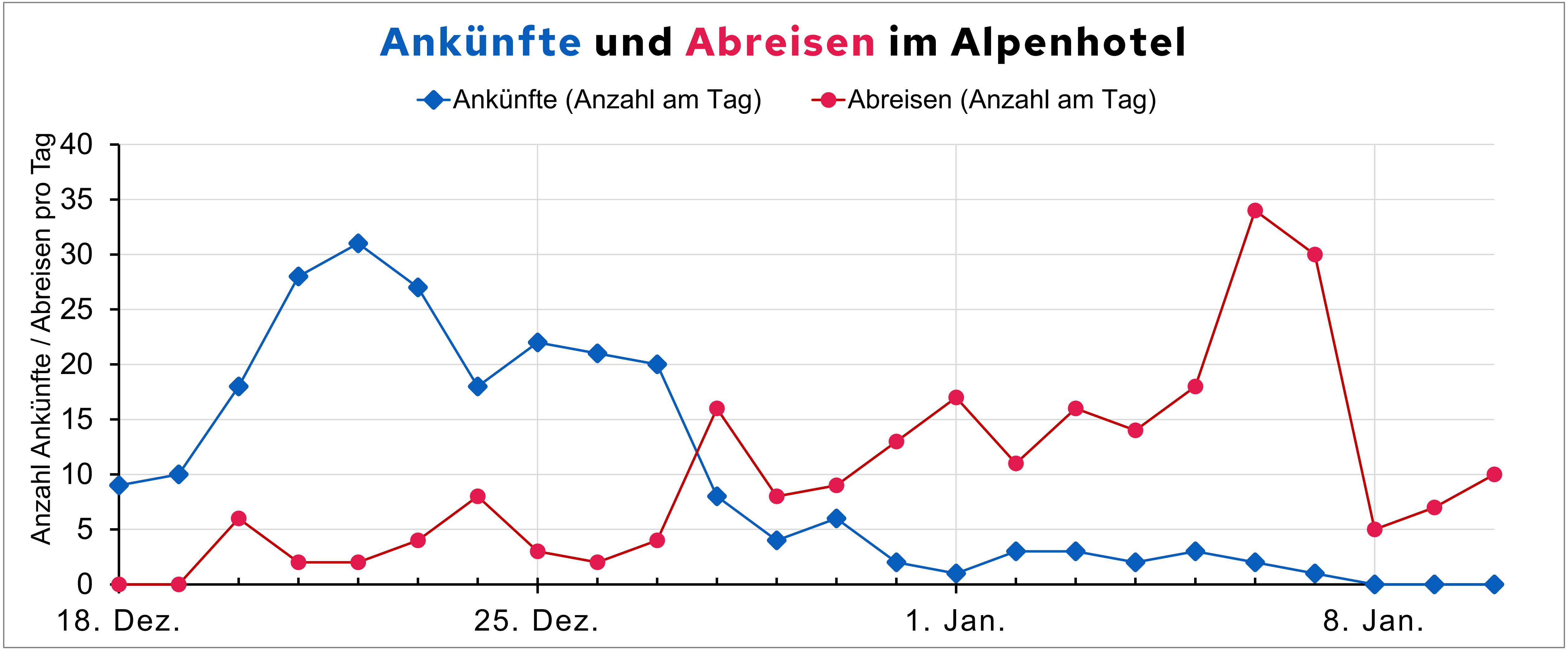
Bestand und Änderung

Bestandsgröße	**Zuflüsse**	**Abflüsse**
Anzahl der Studierenden einer Universität	Immatrikulationen	Exmatrikulationen, Ausscheiden aus der Universität
Benzinmenge im Tank	Tanken an der Tankstelle	Benzinverbrauch, Verdunstung
Kontostand	Zubuchungen	Abbuchungen
Anzahl der Gäste eines Hotels	ankommende Gäste	abreisende Gäste
Staatsverschuldung	Staatseinnahmen	Staatsausgaben

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

Bestand und Änderung

Wann waren die meisten Gäste im Hotel?



Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9

Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

https://www.geogebra.org/m/eg5dwnjy

Vorstellungsorientierte Fähigkeiten (2)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- **Eigenschaften von funktionalen Zusammenhängen mit Hilfe der Ableitung beschreiben können:** Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen
- **Bestimmtes Integral in Kontexten** deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können
- **Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten** deuten und beschreiben können
- **Unterschied zwischen Änderungs-funktion & Wirkung bzw. Gesamteffekt** erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

Hußmann, Prediger (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM, 52(31)*, 35-38

MaTeGnu

3 Grundvorstellungen zur Ableitung

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 3: GV zur Ableitung

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Analysis“
https://roth.tel/analysis

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

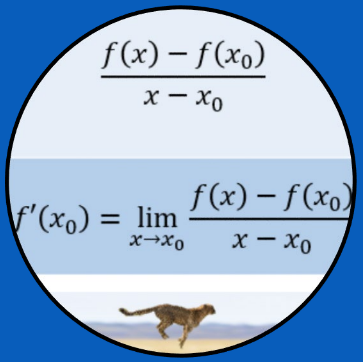
Kapitel 3: GV zur Ableitung

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

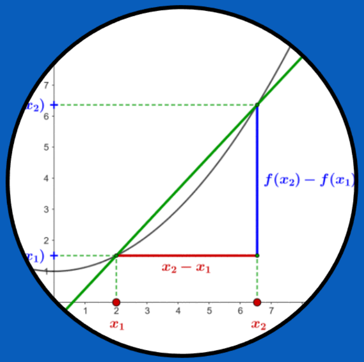
dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

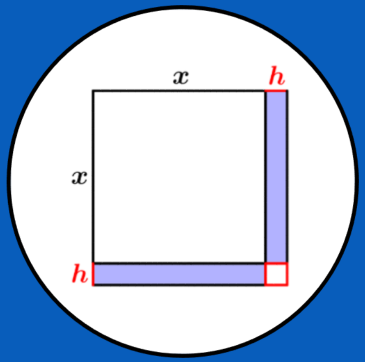
Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff



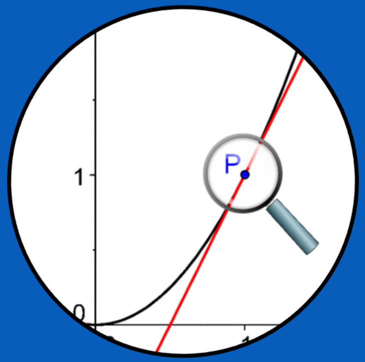
Lokale Änderungsrate



Tangenten-steigung



Verstärkungs-faktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

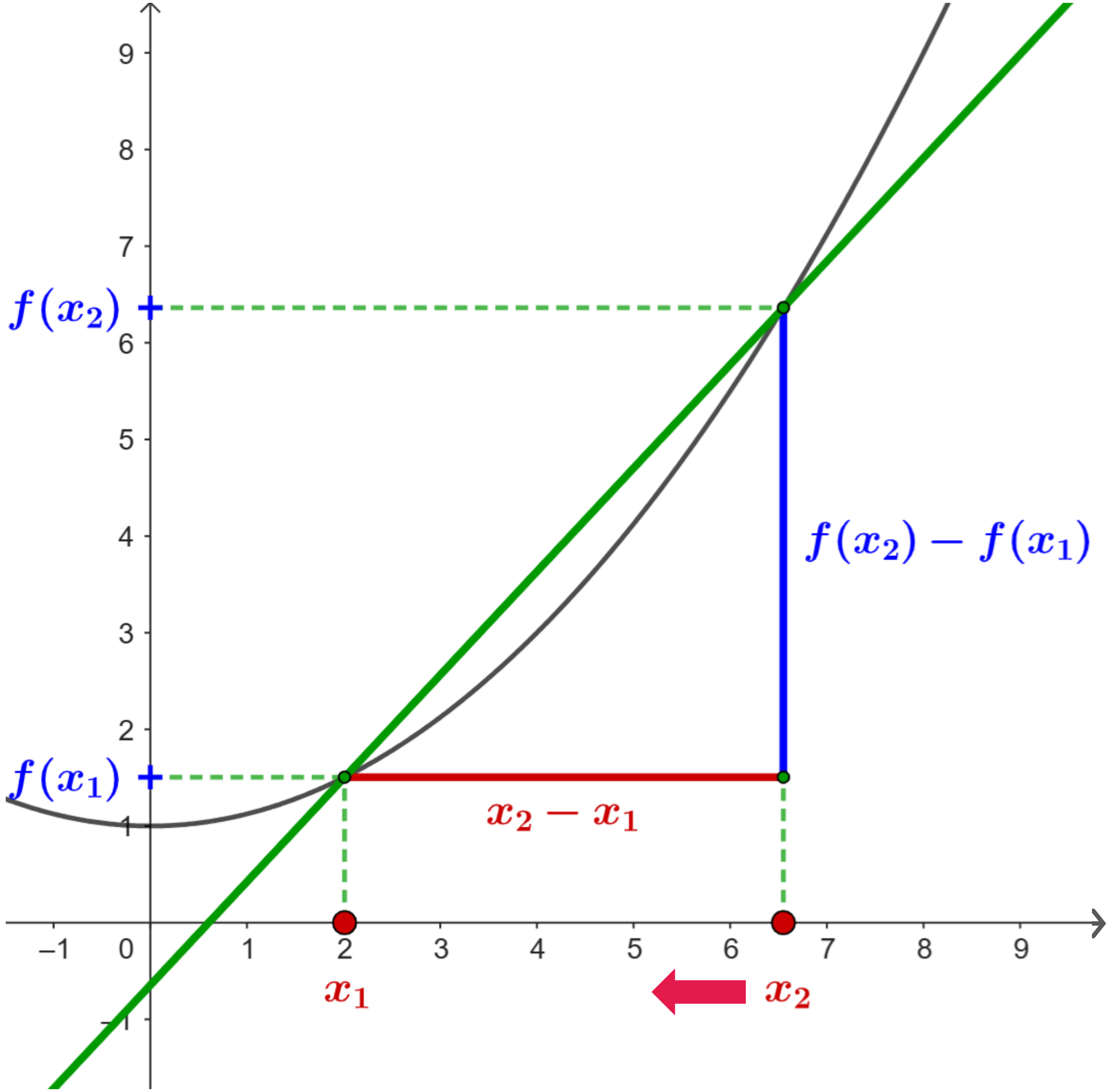
Ableitung als lokale Änderungsrate

Beschreibungsebene	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
formal	$f(x_0)$	$f(x) - f(x_0)$	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
inhaltlich	**Bestand** zum Zeitpunkt x_0	***absoluter* Zuwachs** in der Zeit von x_0 bis x	***relativer* Zuwachs** im Zeitintervall $[x_0, x]$ (***mittlere* Änderungsrate**)	momentane (***lokale***) **Änderungsrate** zum Zeitpunkt x_0
terminologisch	Funktionswert	Differenz der Funktionswerte	Differenzenquotient	Ableitung

algebraisch | **analytisch**

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

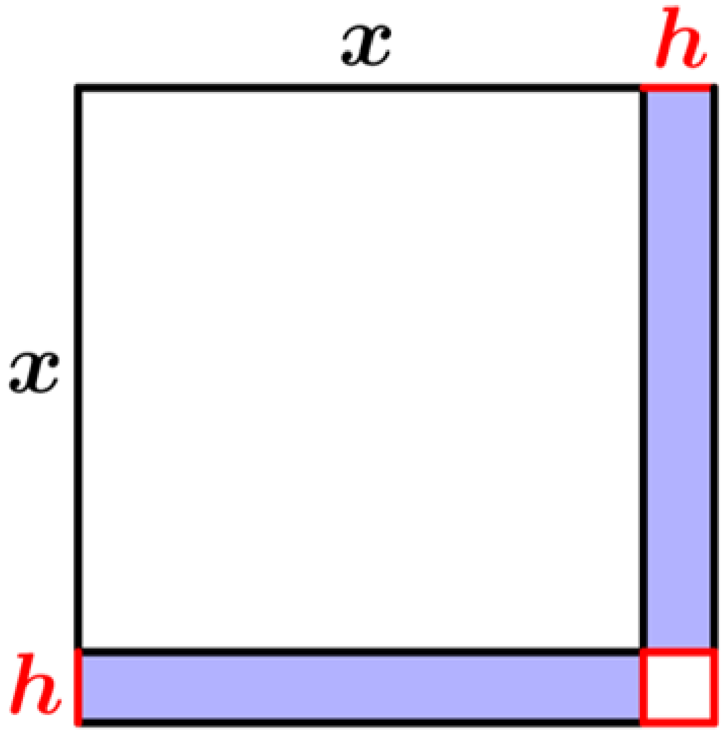
Ableitung als Tangentensteigung



- **Schritt 1**
  Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P
- **Schritt 2**
  Tangente als Grenzlage von Sekanten
- **Schritt 3**
  Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Ableitung als Verstärkungsfaktor

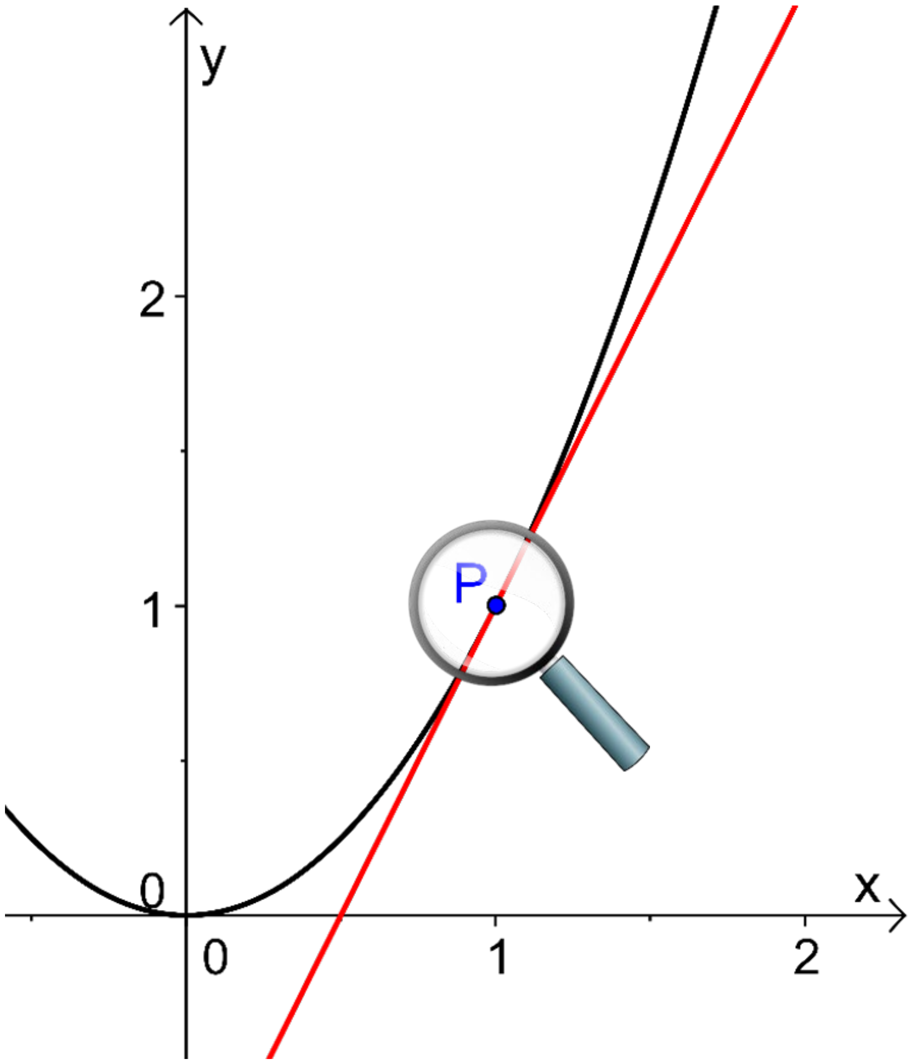


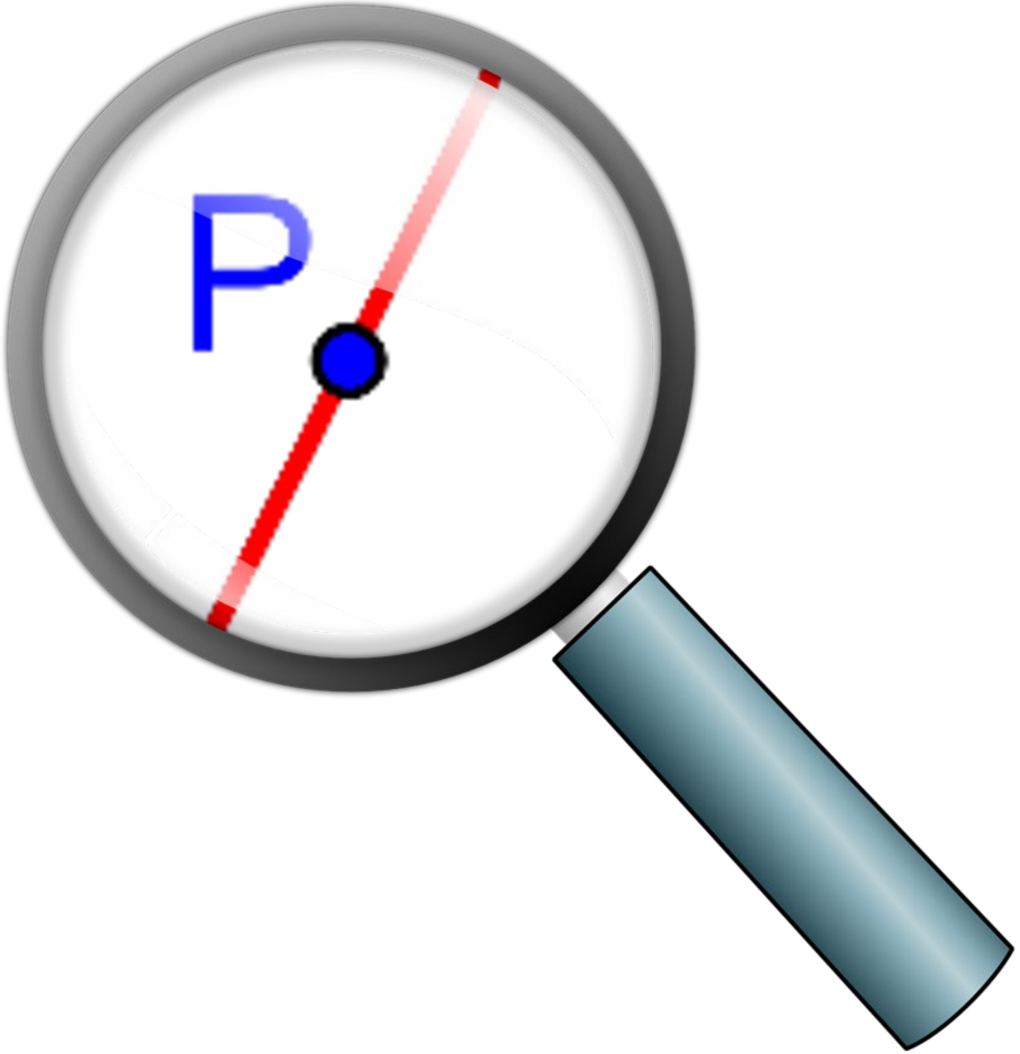
- Die Ableitung gibt an, wie stark sich die Änderung der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable auswirkt.
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderung der Funktionswerte.
- Für kleine Änderungen Δx gilt:

$$\begin{aligned}\Delta y &\approx f'(x)\cdot\Delta x\\ &= \boxed{2x\cdot h}\end{aligned}$$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Ableitung als lokale lineare Approximation





Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
www.funktionenlupe.de • https://www.geogebra.org/m/QxeVkgpf https://www.geogebra.org/m/tejWrTyU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 3: GV zur Ableitung

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- Geparden erreichen über längere Strecken eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und sind mit einer momentanen Spitzengeschwindigkeit von $93\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die schnellsten Landtiere.
- In Versuchen wurden Hochgeschwindigkeitskameras und am Boden installierte Kraftmessplatten eingesetzt.

Wilson, A. M. et al. (2013). Locomotion dynamics of hunting in wild cheetahs, Nature, doi:10.1038/nature12295

Kernfrage

- Wie bestimmt man mit den Videoaufnahmen die Geschwindigkeiten?
- Ein Applet simuliert die Videoaufnahmen.

https://www.geogebra.org/m/sw7exvjk#material/xtsx9wnv

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Absolute Änderung (Zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegter Weg $\boldsymbol{w(t_2) - w(t_1)}$)

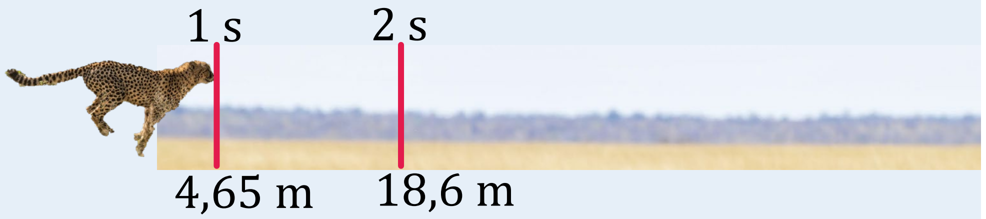
Bewegungen: Die Weg-Zeit-Funktion $t \mapsto w(t)$ ordnet jedem Zeitpunkt t den bis dahin zurückgelegten Weg w zu.

- Erste Sekunde

  $w(1\text{ s}) - w(0\text{ s}) = 4{,}65\text{ m} - 0\text{ m} = 4{,}65\text{ m}$

- Zweite Sekunde

  $w(2\text{ s}) - x(1\text{ s}) = 18{,}6\text{ m} - 4{,}65\text{ m} = 13{,}95\text{ m}$



- Dritte Sekunde

  $w(3\text{ s}) - w(2\text{ s}) = 41{,}85\text{ m} - 18{,}6\text{ m} = 23{,}25\text{ m}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Absolute Änderung (Zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegter Weg $\boldsymbol{w(t_2) - w(t_1)}$)

- In den 2 Sekunden von $t_1 = 1\ \mathrm{s}$ bis $t_2 = 3\ \mathrm{s}$ zurückgelegter Weg:

$$w(t_2) - w(t_1)$$
$$= w(3\ \mathrm{s}) - w(1\ \mathrm{s})$$
$$= 41{,}85\ \mathrm{m} - 4{,}65\ \mathrm{m} = 37{,}2\ \mathrm{m}$$

Zeit-punkt t	zurückgelegter Weg w
$0\ \mathrm{s}$	$0\ \mathrm{m}$
$1\ \mathrm{s}$	$4{,}65\ \mathrm{m}$
$2\ \mathrm{s}$	$18{,}6\ \mathrm{m}$
$3\ \mathrm{s}$	$41{,}85\ \mathrm{m}$

Zeitänderung $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta w = 4{,}65\ \mathrm{m}$

Zeitänderung $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta w = 13{,}95\ \mathrm{m}$

Zeitänderung $\Delta t = 2\ \mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta w = 37{,}2\ \mathrm{m}$

Zeitänderung $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta w = 23{,}25\ \mathrm{m}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Relative Änderung / Änderungsrate (Durchschnittsgeschwindigkeit)

- Um die mittleren Geschwindigkeiten in unterschiedlich langen Zeitintervallen $[t_1, t_2]$ und $[t_3, t_4]$ vergleichen zu können, muss man die Wegdifferenz $w(t_2) - w(t_1)$ auf die zugehörige Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ beziehen:

$$\frac{w(t_2) - w(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- Im Zeitintervall $[1\ \mathrm{s}, 2\ \mathrm{s}]$ werden im Mittel $\frac{18{,}6\ \mathrm{m} - 4{,}65\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{s} - 1\ \mathrm{s}} = \frac{13{,}95\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = 13{,}95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, also $13{,}95\ \mathrm{m}$ pro Sekunde zurückgelegt.

- Im Zeitintervall $[1\ \mathrm{s}, 3\ \mathrm{s}]$ werden im Mittel $\frac{41{,}85\ \mathrm{m} - 4{,}65\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{s} - 1\ \mathrm{s}} = \frac{37{,}2\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{s}} = 18{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, also $18{,}6\ \mathrm{m}$ pro Sekunde zurückgelegt.

- Im Zeitintervall $[1\ \mathrm{s}, 3\ \mathrm{s}]$ ist die *mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit)* mit $18{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ also höher als im Zeitintervall $[1\ \mathrm{s}, 2\ \mathrm{s}]$ mit $13{,}95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Lokale Änderungsrate (Momentangeschwindigkeit)

- Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit (lokale Änderungsrate) zu einem Zeitpunkt $t_0 = 2\text{ s}$?
- **Idee**
  Mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen betrachten, die $t_0 = 2\text{ s}$ als Intervallgrenze besitzen.

Zeitintervall $[t_1, t_0]$	Mittlere Geschw. $\frac{w(t_0)-w(t_1)}{t_0-t_1}$ im Zeitintervall $[t_1, t_0]$
$[1\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 4{,}65\text{ m}}{2\text{ s} - 1\text{ s}} = 13{,}95\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1{,}9\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 16{,}7865\text{ m}}{2\text{ s} - 1{,}9\text{ s}} = 18{,}135\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1{,}99\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 18{,}41447\text{ m}}{2\text{ s} - 1{,}99\text{ s}} = 18{,}553\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1{,}999\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 18{,}5814046\text{ m}}{2\text{ s} - 1{,}999\text{ s}} = 18{,}5954\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zeitintervall $[t_0, t_2]$	Mittlere Geschw. $\frac{w(t_2)-w(t_0)}{t_2-t_0}$ im Zeitintervall $[t_0, t_2]$
$[2\text{ s}; 3\text{ s}]$	$\frac{41{,}85\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{3\text{ s} - 2\text{ s}} = 23{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[2\text{ s}; 2{,}1\text{ s}]$	$\frac{20{,}065\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{2{,}1\text{ s} - 2\text{ s}} = 19{,}065\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[2\text{ s}; 2{,}01\text{ s}]$	$\frac{18{,}78647\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{2{,}01\text{ s} - 2\text{ s}} = 18{,}647\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[2\text{ s}; 2{,}001\text{ s}]$	$\frac{18{,}61860465\text{ m} - 18{,}6\text{ m}}{2{,}001\text{ s} - 2\text{ s}} = 18{,}6065\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

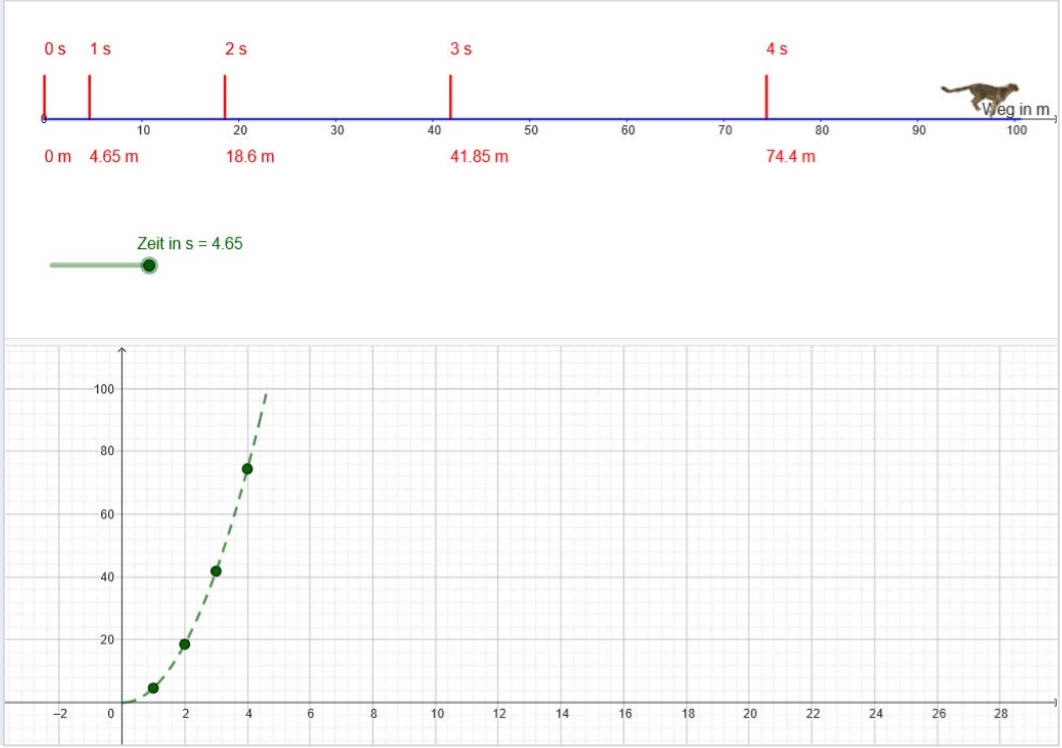
Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Momentangeschwindigkeit

- Je kleiner das Intervall $[t_0, t]$ wird, je näher also t an $t_0 = 2\ \mathrm{s}$ heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit dem Wert 18,6 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Sie kommt ihm beliebig nahe.
- Jede andere Annäherung an den Zeitpunkt $t_0 = 2\ \mathrm{s}$ führt zur selben Momentangeschwindigkeit.

Modellierung des Zusammenhangs

- Messwerte in Graph darstellen und Trendlinie einzeichnen lassen
- Vermutung: Parabelast, also quadratischer Zusammenhang $w(t) = a \cdot t^2$
- Setze a als unbekannten Parameter



Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Momentangeschwindigkeit

$w(t) = a \cdot t^2$

- Ist t ein benachbarter Zeitpunkt von $t_0 = 2\text{ s}$, dann ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[2\text{ s}, t]$ der Wert:

$$\frac{w(t) - w(2\text{ s})}{t - 2\text{ s}} = \frac{a \cdot (t^2 - (2\text{ s})^2)}{t - 2\text{ s}} = a \cdot \frac{(t + 2\text{ s}) \cdot (t - 2\text{ s})}{t - 2\text{ s}} = a \cdot (t + 2\text{ s})$$

- $a \cdot (2\text{ s} + t)$ kommt dem Wert $18{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beliebig nahe, wenn t genügend nahe bei 2 s liegt

Lokale Änderungsrate

- Damit ist die *Momentangeschwindigkeit* (lokale Änderungsrate) zum Zeitpunkt $t_0 = 2\text{ s}$ bestimmt. Sie beträgt hier $18{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Der Parameter a lässt sich damit bestimmen zu $a = \frac{18{,}6\,\frac{m}{s}}{2\,s + 2\,s} = 4{,}65\,\frac{m}{s^2}$.
- Überprüfen durch Eingeben der Funktionsgleichung in GeoGebra.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Verbalisierungen für Grenzprozesse

Konvergenz von $\frac{w(t) - w(2\,\mathrm{s})}{t - 2\,\mathrm{s}}$ für $t \to 2\,\mathrm{s}$

Sprechweisen

(1) „$\frac{w(t) - w(2\,\mathrm{s})}{t - 2\,\mathrm{s}}$ kommt dem Wert $18{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beliebig nahe, wenn t gegen 2 s läuft."

(2) „$\frac{w(t) - w(2\,\mathrm{s})}{t - 2\,\mathrm{s}}$ strebt gegen$18{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ für t gegen 2 s."

(3) „$\frac{w(t) - w(2\,\mathrm{s})}{t - 2\,\mathrm{s}}$ kommt dem Wert $18{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ immer näher, wenn t gegen 2 s läuft."

(4) „$\frac{w(t) - w(2\,\mathrm{s})}{t - 2\,\mathrm{s}}$ kommt dem Wert $18{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ immer näher, ohne ihn jemals zu erreichen."

Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung

Welche Sprechweisen sind geeignet?

(1) Ohne Einschränkung geeignet.

(2) Ohne Einschränkung geeignet.

(3) Problematisch! $\frac{w(t) - w(2\,\mathrm{s})}{t - 2\,\mathrm{s}}$ kommt auch der 17 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. (1))!

(4) Grenze zur inhaltlichen Verfälschung deutlich überschritten! Auch bei konstanten Funktionen konvergiert der Differenzenquotient (gegen 0).

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Vorteile

des Zugangs zum Ableitungsbegriff als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate:

- Kinematischer Kontext ist Teil der Alltagserfahrungen von Jugendlichen. (Straßenverkehr, Computerspiele, Sport, …)
- Zeitliche Änderung von Geschwindigkeiten → Zugang zum Begriff Momentanbeschleunigung
- Das Beispiel ist als universelles Modell überall tragfähig, wo ein Änderungsverhalten punktuell beschrieben werden soll.
- Anschlussfähig an anderen Grundvorstellungen

Geparden beschleunigen auch am besten und können innerhalb eines einzelnen Schrittes knapp $11\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ an Tempo hinzugewinnen.

Unterrichtsreihe zur Einführung in die Differentialrechnung als Moodle-Kurs, der vor allem die beiden Grundvorstellungen *Tangentensteigung* und *lokale Änderungsrate* berücksichtigt und mehrfach im Unterricht erprobt wurde. Er kann online genutzt, sowie heruntergeladen und in die eigene Moodle-Plattform eingebunden werden.

Schulcampus RLP

https://dms.nuw.rptu.de/akmss/

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, 2-8

Zusammenfassung: Ableitung als lokale Änderungsrate

Formale Darstellung	Inhaltliche Erläuterung	
$f(x_0)$	Bestand	Bis zum Zeitpunkt x_0 zurückgelegter Weg.
$f(x) - f(x_0)$	absolute Änderung	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg.
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	relative Änderung / (mittlere) Änderungsrate	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg bezogen auf die Zeitspanne $x - x_0$. (**Durchschnittsgeschwindigkeit** im Zeitintervall $[x_0, x]$)
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	momentane / lokale Änderungsrate	**Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt x_0.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Grippewelle

Die Funktion f beschreibt die Anzahl $f(t)$ der an Grippe erkrankten Menschen in Anhängigkeit von der Zeit t.

a) Erläutern Sie die Bedeutung der Funktion $f'(t)$.

b) Erklären Sie, was der Funktionswert $f'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 inhaltlich bedeutet.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 3: GV zur Ableitung

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

Ableitung als Tangentensteigung

Schritte bei diesem Zugang

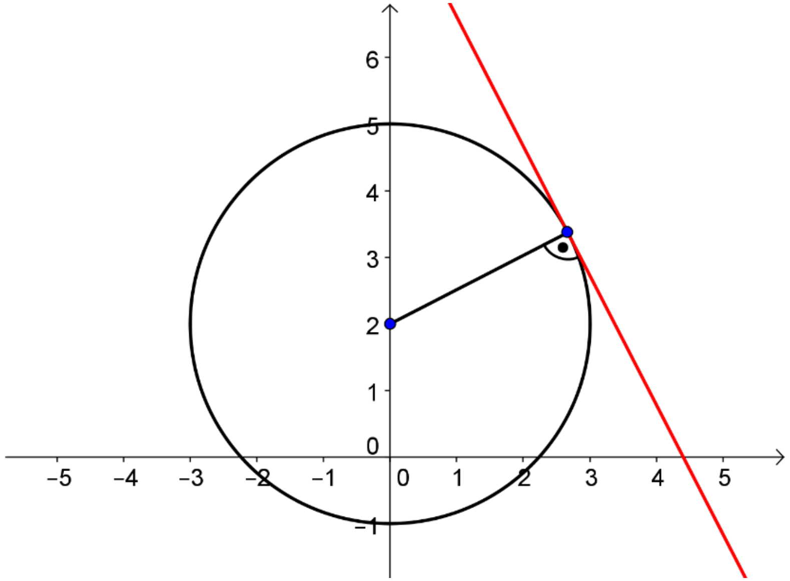
- **1. Schritt:**
  Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P
- **2. Schritt:**
  Tangente als Grenzlage von Sekanten
- **3. Schritt:**
  Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Zu beachten ist:

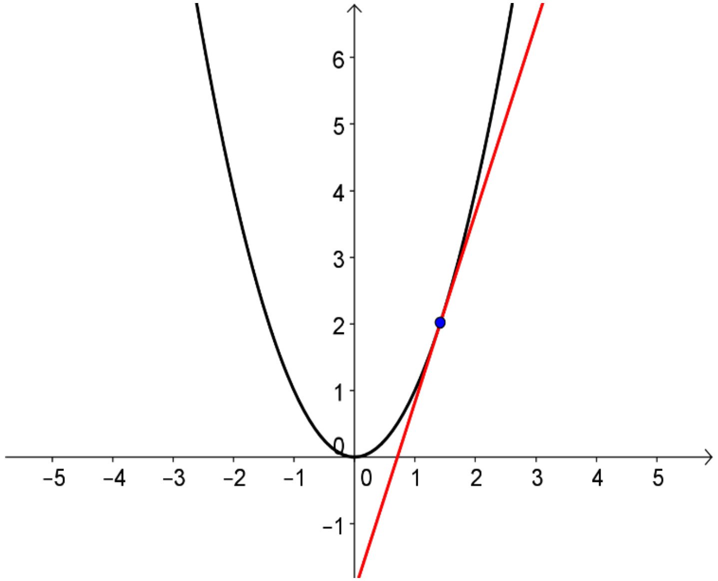
- **1. Schritt:**
  Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff

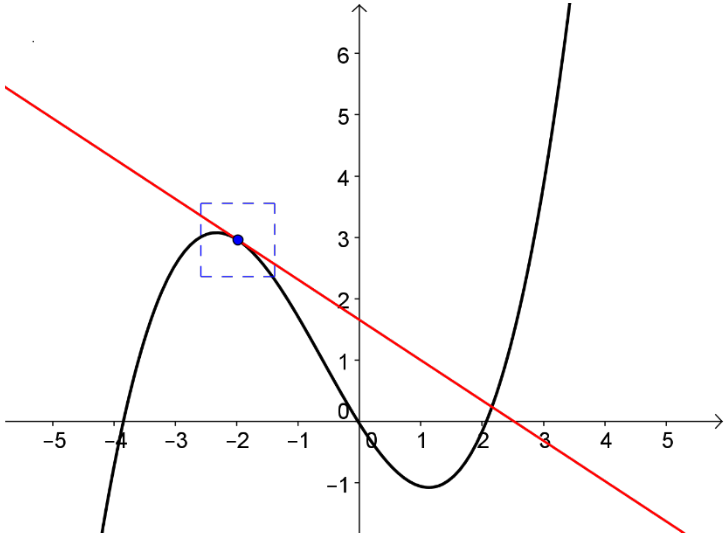
 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren* 199, 2-8

Was ist eine Tangente?



Geometrische Sichtweise:
Tangente als globale Stützgerade





Analytische Sichtweise:
Tangente als lokale Schmieggerade

https://www.geogebra.org/m/sw7exvjk#material/JQAzj4Eu

Tangentensteigung

Schritte bei diesem Zugang

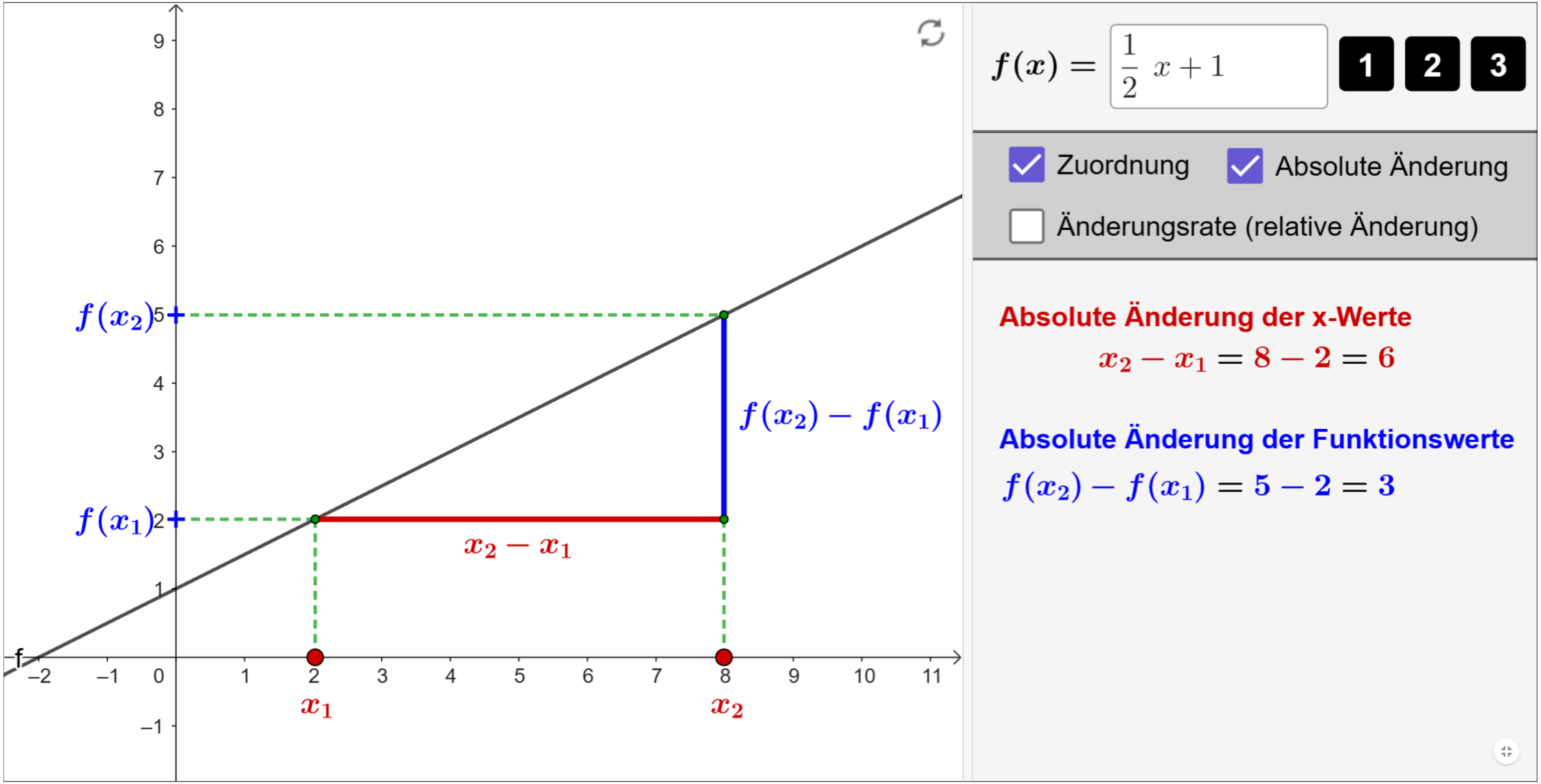
- **1. Schritt:**
  Definition der Steigung der Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P
- **2. Schritt:**
  Tangente als Grenzlage von Sekanten
- **3. Schritt:**
  Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Zu beachten ist:

- **1. Schritt:**
  Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff
- **2. Schritt:**
  Liegt quer zur Schmieg-Vorstellung der Tangente
- **3. Schritt:**
  Gibt es überhaupt einen Grenzfall von Sekanten? Eine Gerade durch einen Punkt ist gar nicht eindeutig festgelegt.

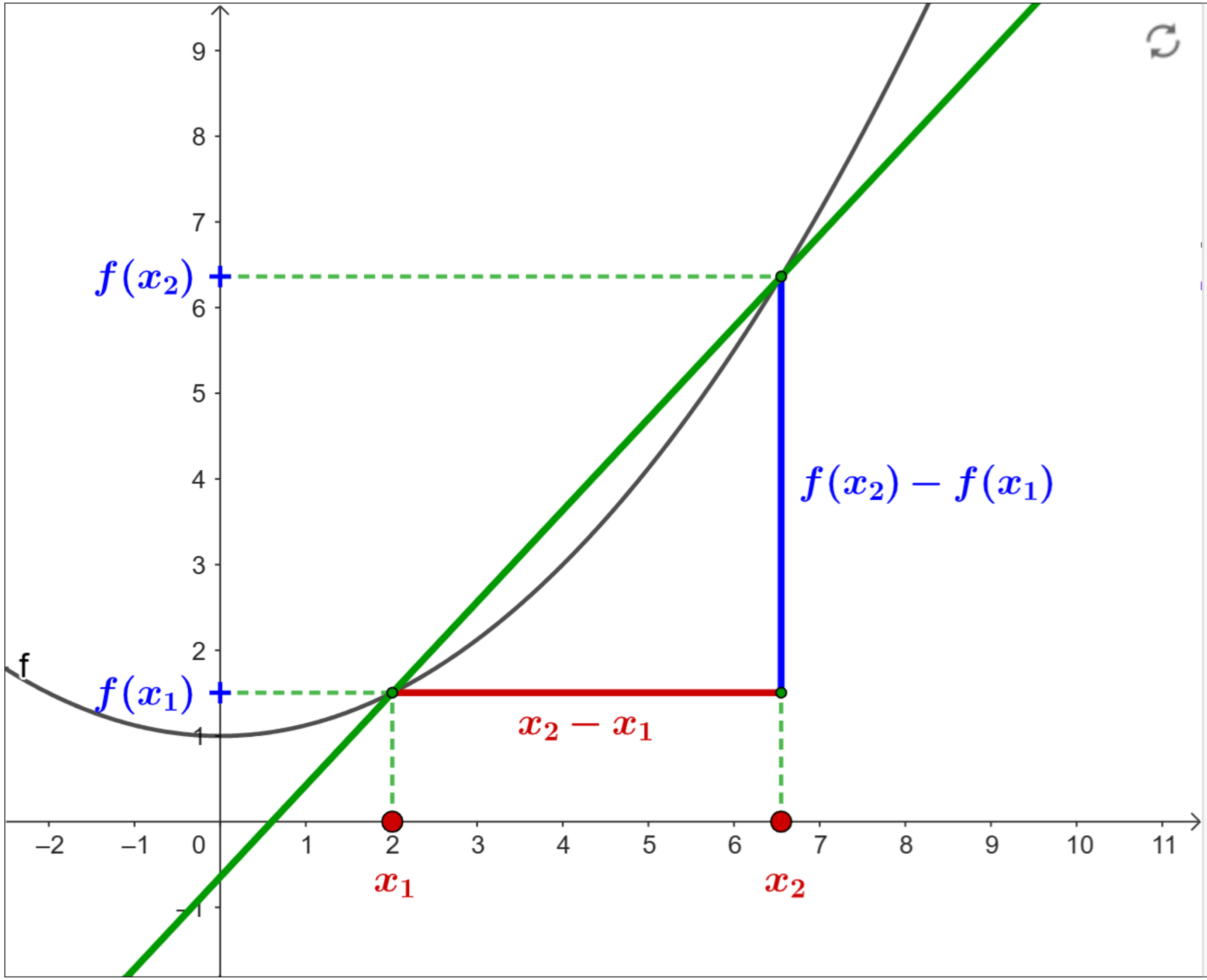
 Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Vorwissen reaktivieren: Geradensteigung



https://www.geogebra.org/m/sw7exvjk#material/xwhaewwx

Lokale Steigung als Tangentensteigung



$f(x) = \frac{1}{8} x^2 + 1$ **1** **2** **3**

☑ Zuordnung ☑ Absolute Änderung

☑ Änderungsrate (relative Änderung)

Absolute Änderung der x-Werte

$$x_2 - x_1 = 6.6 - 2 = 4.5$$

Absolute Änderung der Funktionswerte

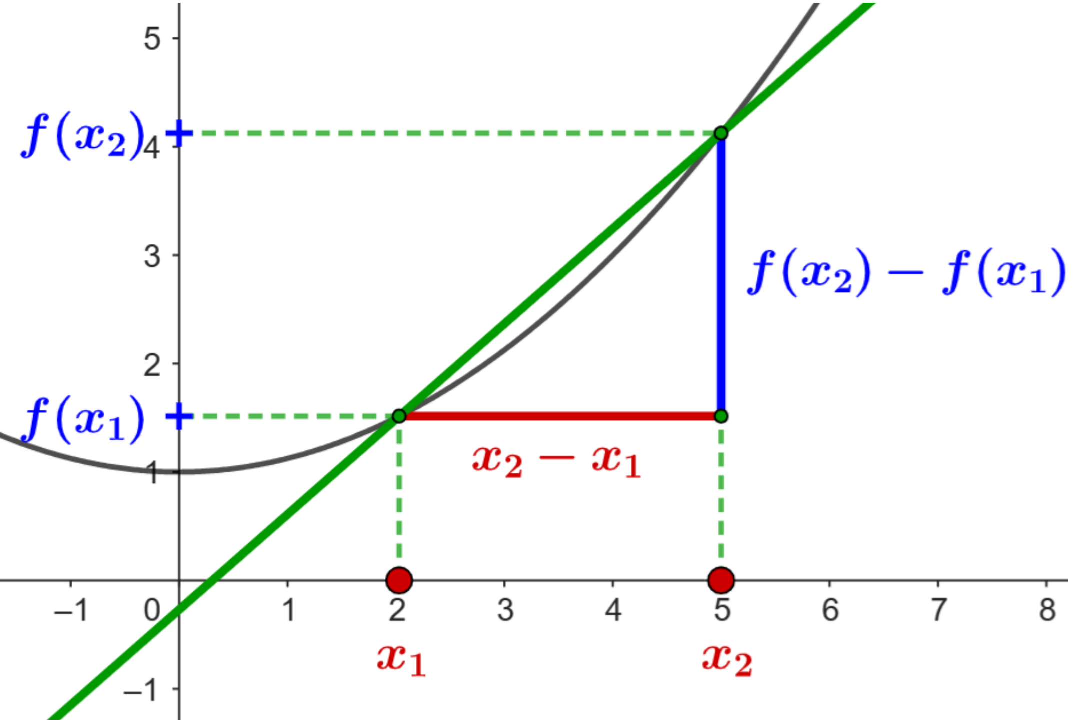
$$f(x_2) - f(x_1) = 6.4 - 1.5 = 4.9$$

Änderungsrate (Relative Änderung)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{6.4 - 1.5}{6.6 - 2} = 1.1$$

☑ Sekante ☐ Tangente

Tangente als Grenzlage von Sekanten



Beispiel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+, x\mapsto \frac{1}{8}x^2+1$

- **Gesucht: Tangentensteigung** an der Stelle $x_1=2$
- **Sekantensteigung:**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{8}\cdot x_2^2+1-\left(\frac{1}{8}\cdot 2^2+1\right)}{x_2-2}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\cdot(x_2^2-4)}{x_2-2}=\frac{\frac{1}{8}\cdot(x_2+2)\cdot(x_2-2)}{x_2-2}$$

$x_2\neq 2$

$$=\frac{1}{8}\cdot(x_2+2)$$

- **Tangentensteigung:**

$$\lim_{x_2\to 2}\frac{f(x_2)-f(2)}{x_2-2}=\lim_{x_2\to 2}\frac{\frac{1}{8}\cdot(x_2+2)\cdot(x_2-2)}{x_2-2}$$

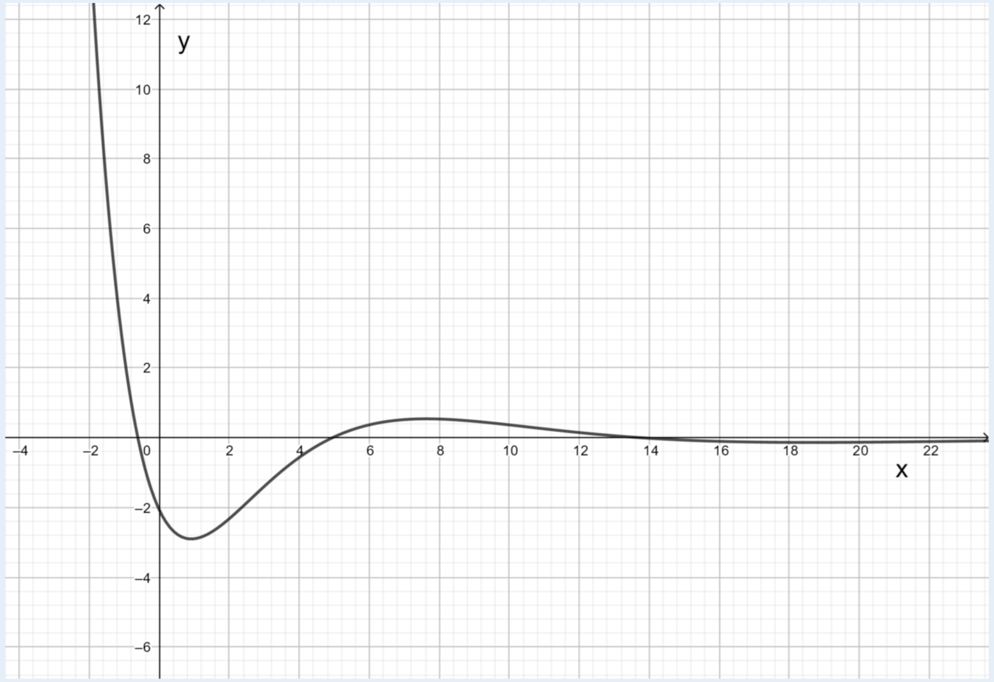
$$=\lim_{x_2\to 2}\frac{1}{8}\cdot(x_2+2)=\frac{1}{2}$$

Sprechweise

Die Sekantensteigung kommt der Zahl $\frac{1}{2}$ beliebig nahe, wenn x_2 gegen $x_1=2$ strebt.

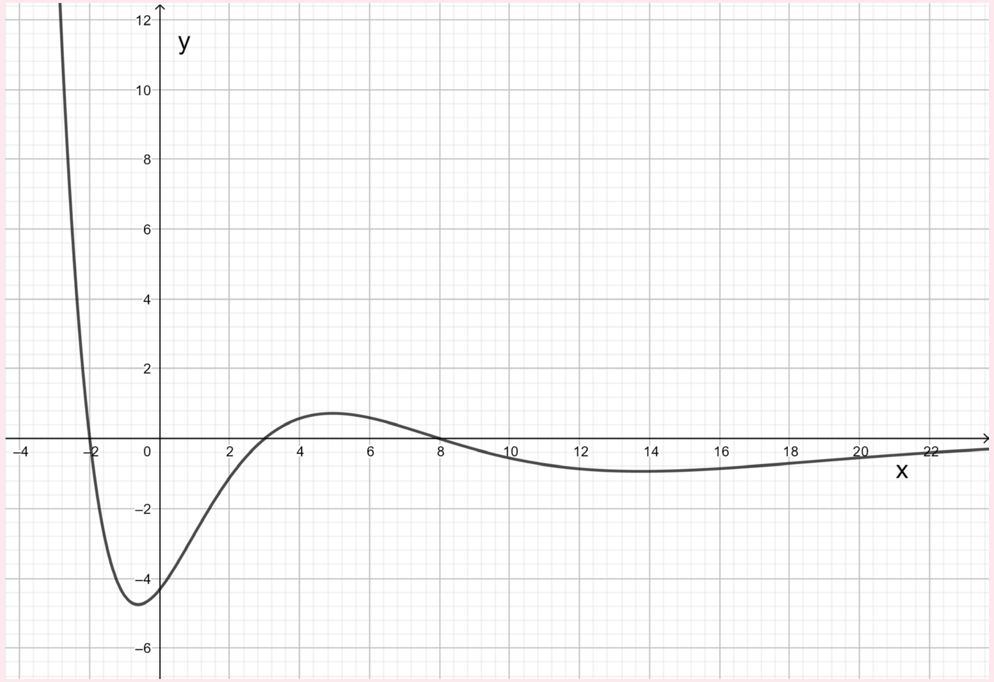
Graph von f' und f ↔ Grundvorstellung?

Aufgabe 5
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

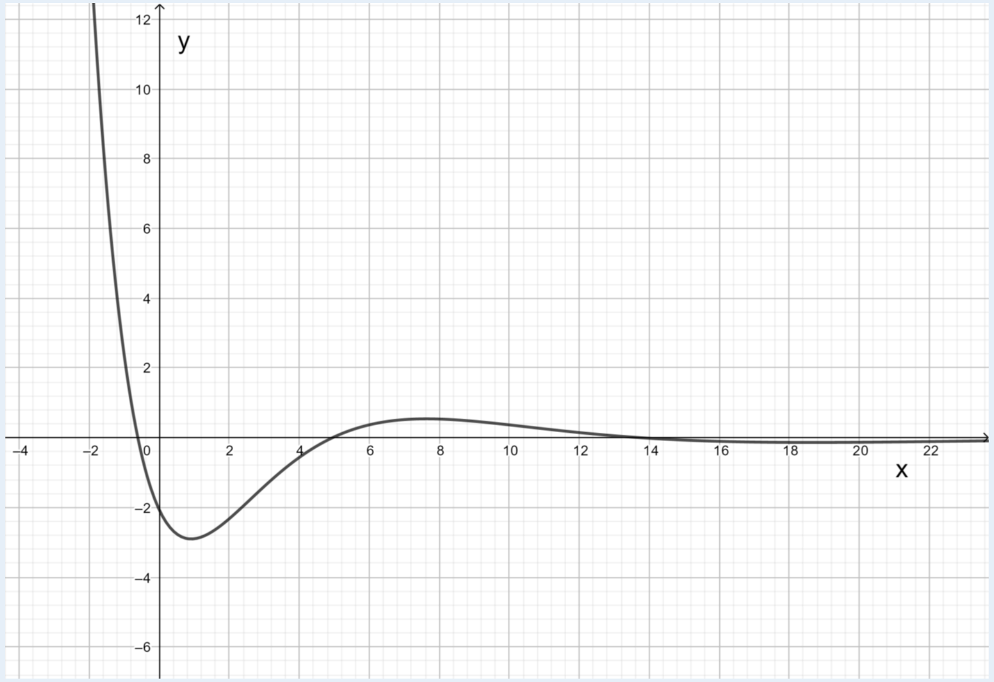
☐ Ja ☐ Nein



 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

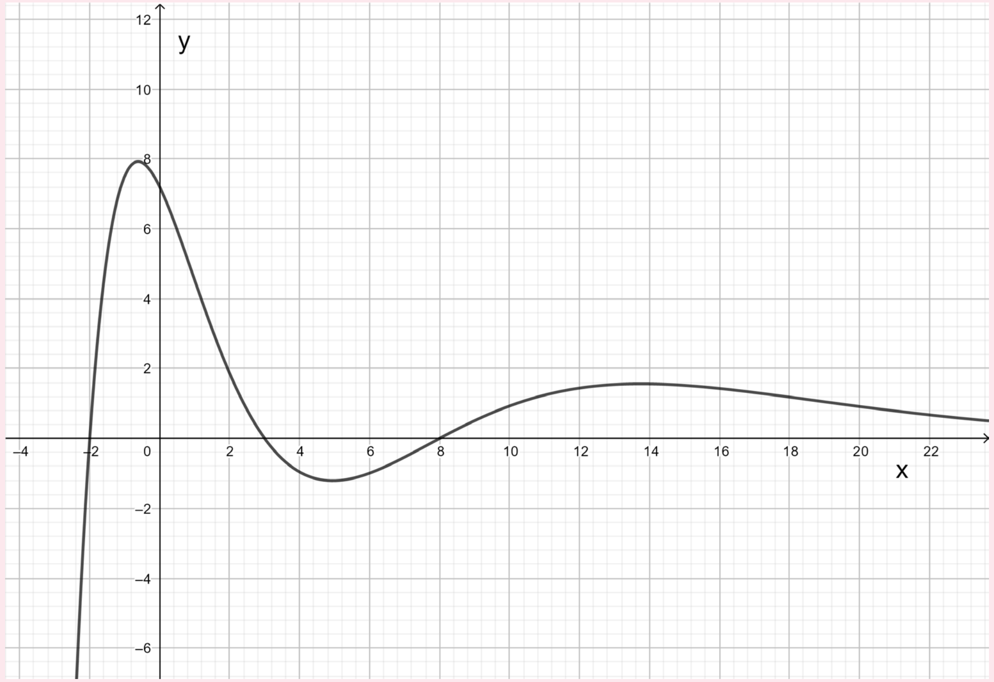
Graph von f' und f ↔ Grundvorstellung?

Aufgabe 5
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein

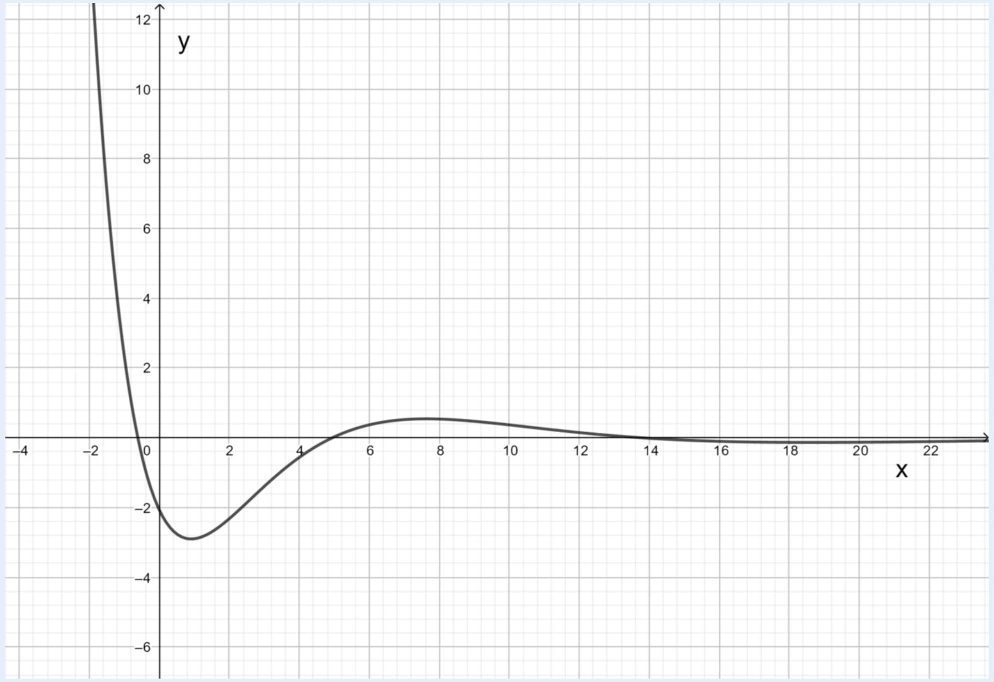


 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und f ↔ Grundvorstellung?

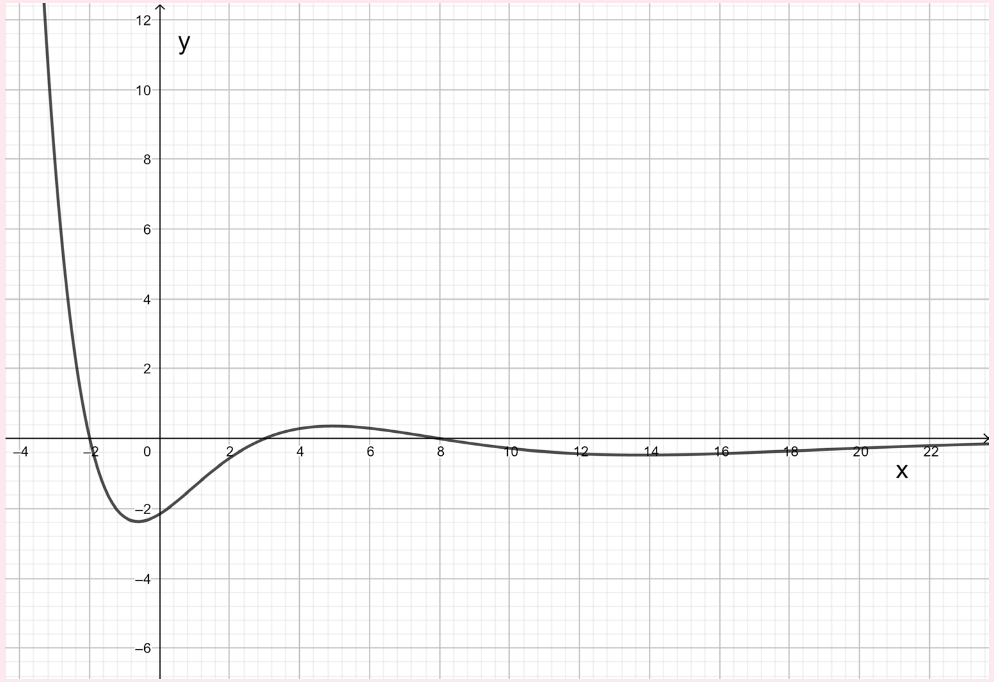
Aufgabe 5

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein

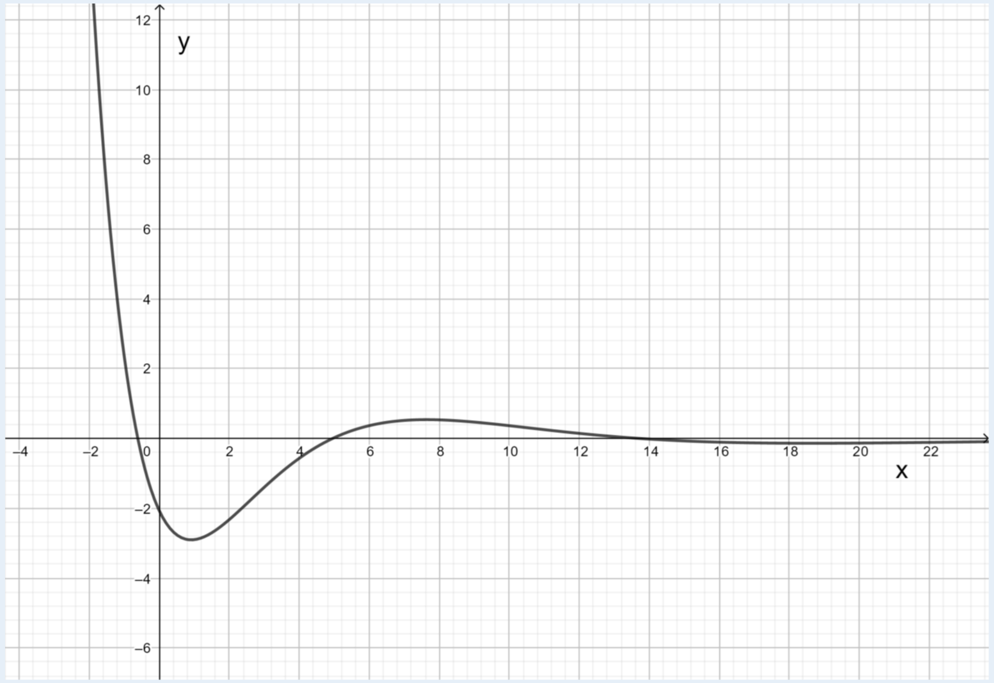


 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und f ↔ Grundvorstellung?

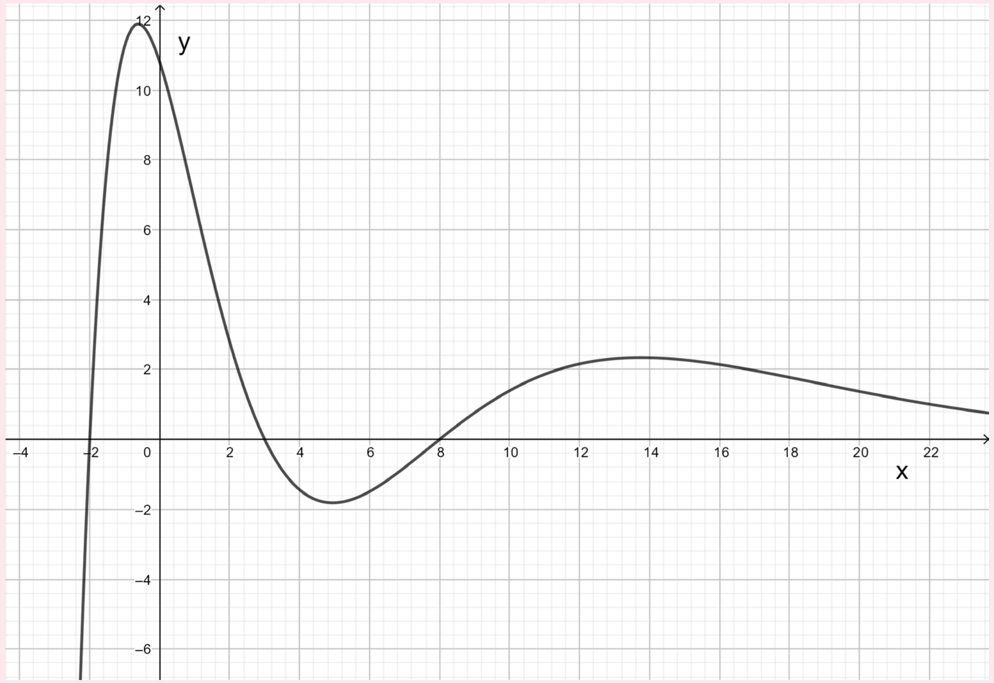
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe 5
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein



 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

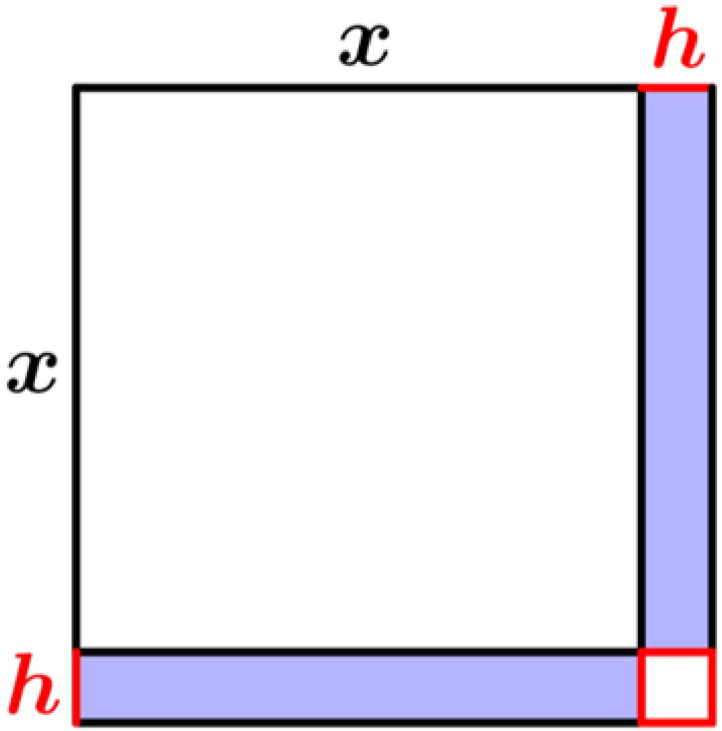
Kapitel 3: GV zur Ableitung

GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Ableitung als Verstärkungsfaktor



Wichtige Aspekte der Grundvorstellung Ableitung als Verstärkungsfaktor

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen Größe auf die abhängige Größe auswirkten.
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle bzw. starke Änderung der Funktionswerte.
- Für kleine Änderungen Δx ist der Zusammen-hang von Δx und Δy multiplikativ:

$$\Delta y \approx \underbrace{f'(x)}_{\text{Verstärkungsfaktor}} \cdot \Delta x$$

Greefrath, G. et al. (2016). Didaktik der Analysis – Aspekte & Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Spektrum, 151ff
https://www.geogebra.org/m/rtqcnjrr

Ableitung als Verstärkungsfaktor

Inhaltlicher Zugang zur Ableitungsregel $\left(x^2\right)' = 2x$

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Analog für $\left(x^3\right)' = 3x^2$

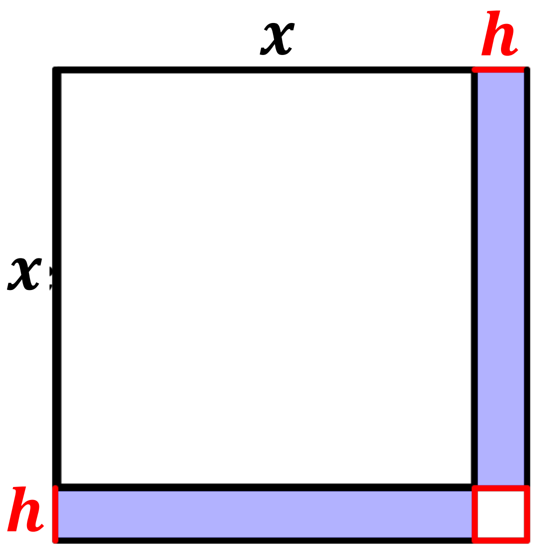
$\left(x^2\right)' = 2x$ wird oft rein syntaktisch verstanden.

Inhaltlich

- „Warum ist die lokale Änderungsrate des Flächeninhalts eines Quadrats der Kantenlänge x gleich seinem halben Umfang?"

Absolute Änderung des Flächeninhalts

- Für kleine h im Wesentlichen die schattierten Rechtecke.



Relative Änderung des Flächeninhalts (mittlere Änderungsrate)

- Folgende Näherung ist beliebig gut, wenn h hinreichend klein ist:

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h \approx 2x$$

- Das ist im Wesentlichen der halbe Umfang des Quadrats.

Für kleine Änderungen Δx gilt:
$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x = 2x \cdot h$

Greefrath, G. et al. (2016). Didaktik der Analysis – Aspekte & Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Spektrum, 151ff
https://www.geogebra.org/m/rtqcnjrr

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 3: GV zur Ableitung

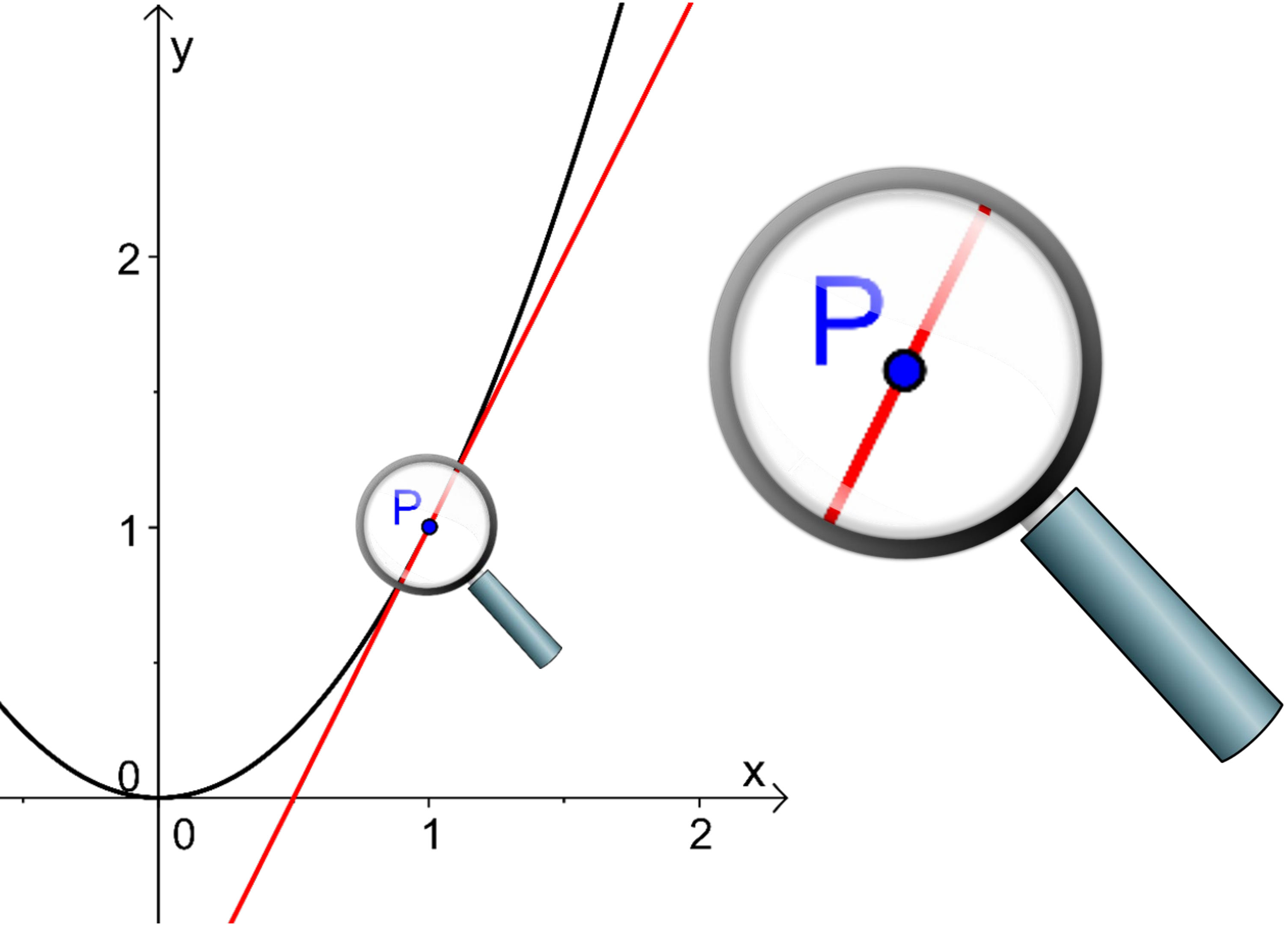
GeoGebra-Buch „Didaktik der Analysis“ https://roth.tel/analysis

dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU

Ableitung als lokale lineare Approximation

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 68-91

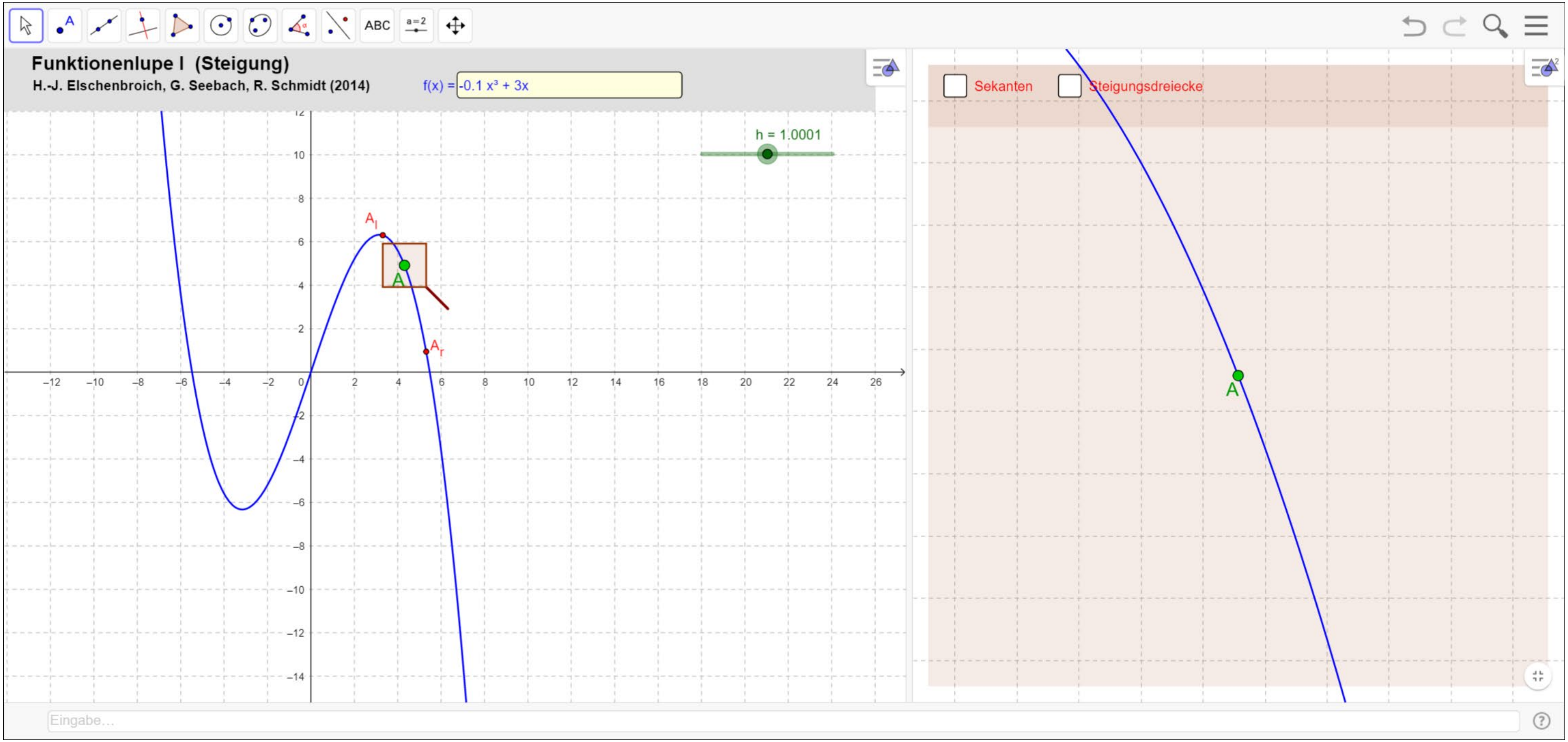


Wichtige Aspekte der Grundvorstellung Ableitung als lokale lineare Approximation

- Bei starker Vergrößerung der Umgebung eines Punktes des Funktionsgraphen, sieht man ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der x-Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also näherungsweise durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
www.funktionenlupe.de • https://www.geogebra.org/m/QxeVkgpf https://www.geogebra.org/m/tejWrTyU

Funktionenlupe

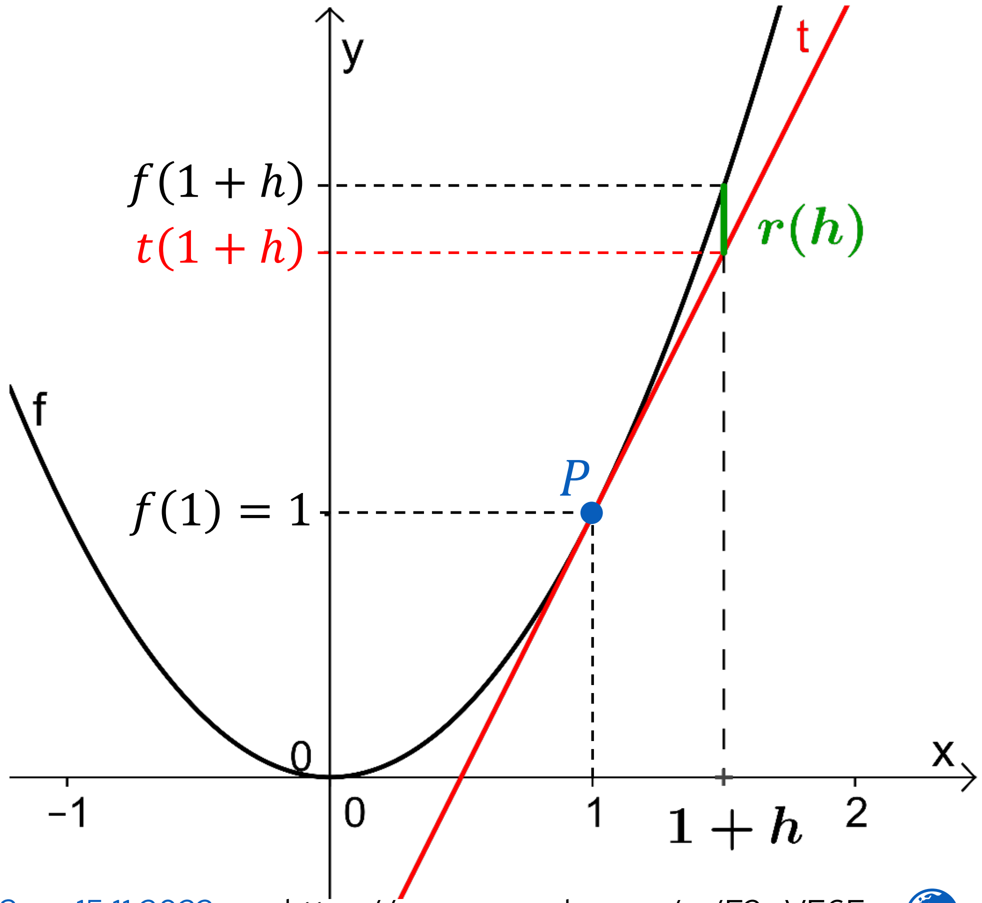


Welche Gerade ist beste lokale Approximation des Graphen?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Schmieg-Effekt der Tangente

Unterschied von Parabel $x \mapsto x^2$ und Tangente im Punkt $P(1,1)$ in der Nachbarschaft von $P(1,1)$



- Wie groß ist die Abweichung $r(h)$?
- Funktionsgleichung: $f(x) = x^2$
- Tangentengleichung:

$$t(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0)$$
$$t(x) = 1 + 2 \cdot (x - 1)$$

- Abweichung

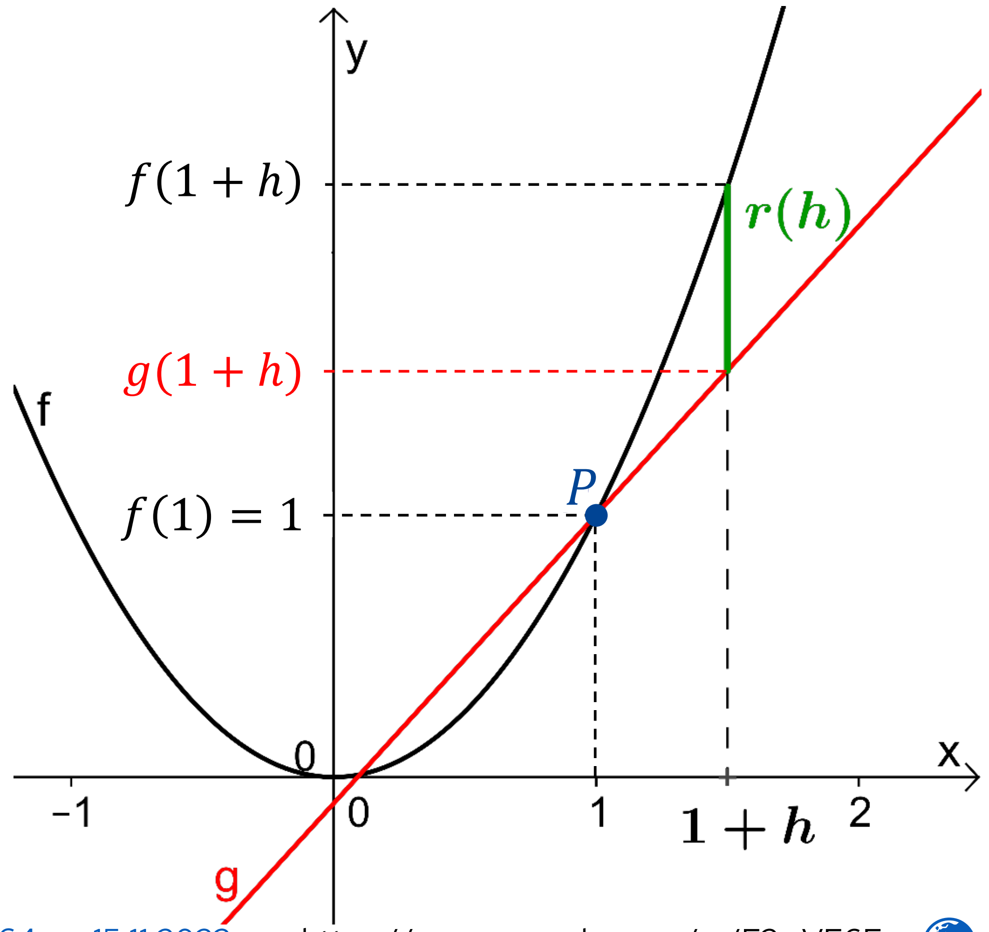
$$\begin{aligned} r(h) &= f(1+h) - t(1+h) \\ &= (1+h)^2 - (1+2h) \\ &= 1 + 2h + h^2 - 1 - 2h \\ &= h^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r(h) = h^2}$$
$$\rightarrow \mathbf{0} \text{ für } \boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

 https://www.geogebra.org/m/F3wVF6Eq

Welche Gerade ist beste lokale Approximation des Graphen?

Schmieg-Effekt anderer Geraden durch $P(1,1)$ bzgl. $x \mapsto x^2$



- Wie groß ist die Abweichung $\boldsymbol{r(h)}$?
- Funktionsgleichung: $f(x) = x^2$
- Geradengleichung:

$$g(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) \qquad m \neq 2$$
$$g(x) = \quad 1 \quad + \; m \cdot (x - 1) \qquad m \neq 2$$

- Abweichung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r(h)} &= f(1+h) - g(1+h) \\ &= (1+h)^2 - (1+mh) \\ &= 1 + 2h + h^2 - 1 - mh \\ &= h^2 + (2-m) \cdot \mathrm{h} \qquad (**) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r(h) = h^2 + (2-m) \cdot h}$$
$$\rightarrow \mathbf{0} \text{ für } \boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

https://www.geogebra.org/m/F3wVF6Eq

Grundverständnis: Schmieg-Effekt

- **Absolute Abweichung**
  - Tangente in P

    $\boldsymbol{r(h)} = h^2$ $(*)$

    $r(h) \to 0$ für $h \to 0$
  - Andere Gerade durch P

    $\boldsymbol{r(h)} = h^2 + (2-m)\cdot h$ $(**)$

    $r(h) \to 0$ für $h \to 0$
- **Relative Abweichung**
  - Tangente in P

    $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} = h \to 0$ für $h \to 0$
  - Andere Gerade durch P

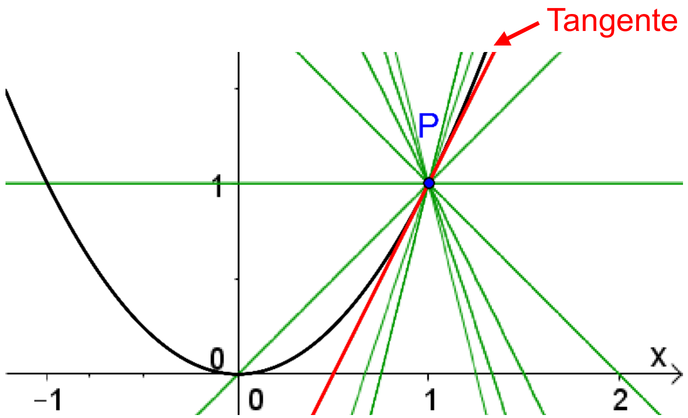
    $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} = h + (2-m)$ mit $m \neq 2$

    $\frac{\boldsymbol{r(h)}}{\boldsymbol{h}} \to 2 - m \neq 0$ für $h \to 0$

- Offensichtlich ist die Bedingung

  $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$

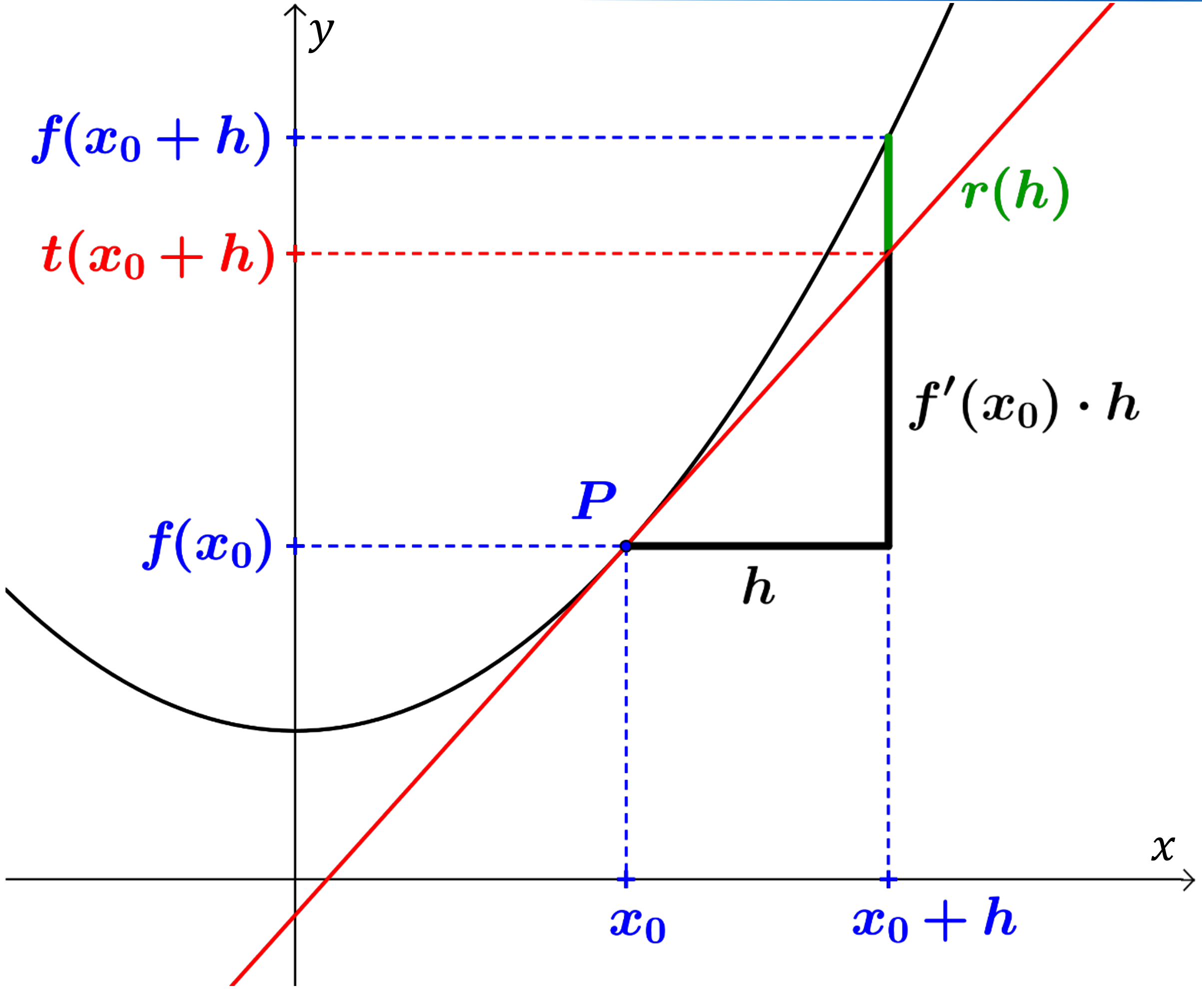
  ein analytischer Ausdruck für die Schmieg-Eigenschaft der Tangente.



- Die gegenüber $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$ verschärfte Restbedingung $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ charakterisiert die Tangente als bestapproximierende Gerade.

 https://www.geogebra.org/m/ufFeCFDJ

Zusammenfassung:
Ableitung als lokale lineare Approximation



Ableitung als lokale lineare Approximation

Der Graph von f lässt sich in der Nähe von x_0 durch die Tangente in x_0 so annähern, dass der Fehler $r(h)$ der Approximation besonders gut, nämlich schneller als h, gegen null geht:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h)& \\
&= t(x_0+h) + r(h) \\
&= f(x_0) + \quad m \cdot h + r(h)
\end{aligned}
$$

mit $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$

Tangentengleichung

$t(x) = f(x_0) + \quad m \cdot (x - x_0)$

Anwendungen: Num. Näherungen; Fehlerrechnung; Taylor-Abschätzung; Leibniz'sche Differenziale; Newton-Verfahren; Beweis von Ableitungsregeln; Verallgemeinerbar in höhere Dimensionen

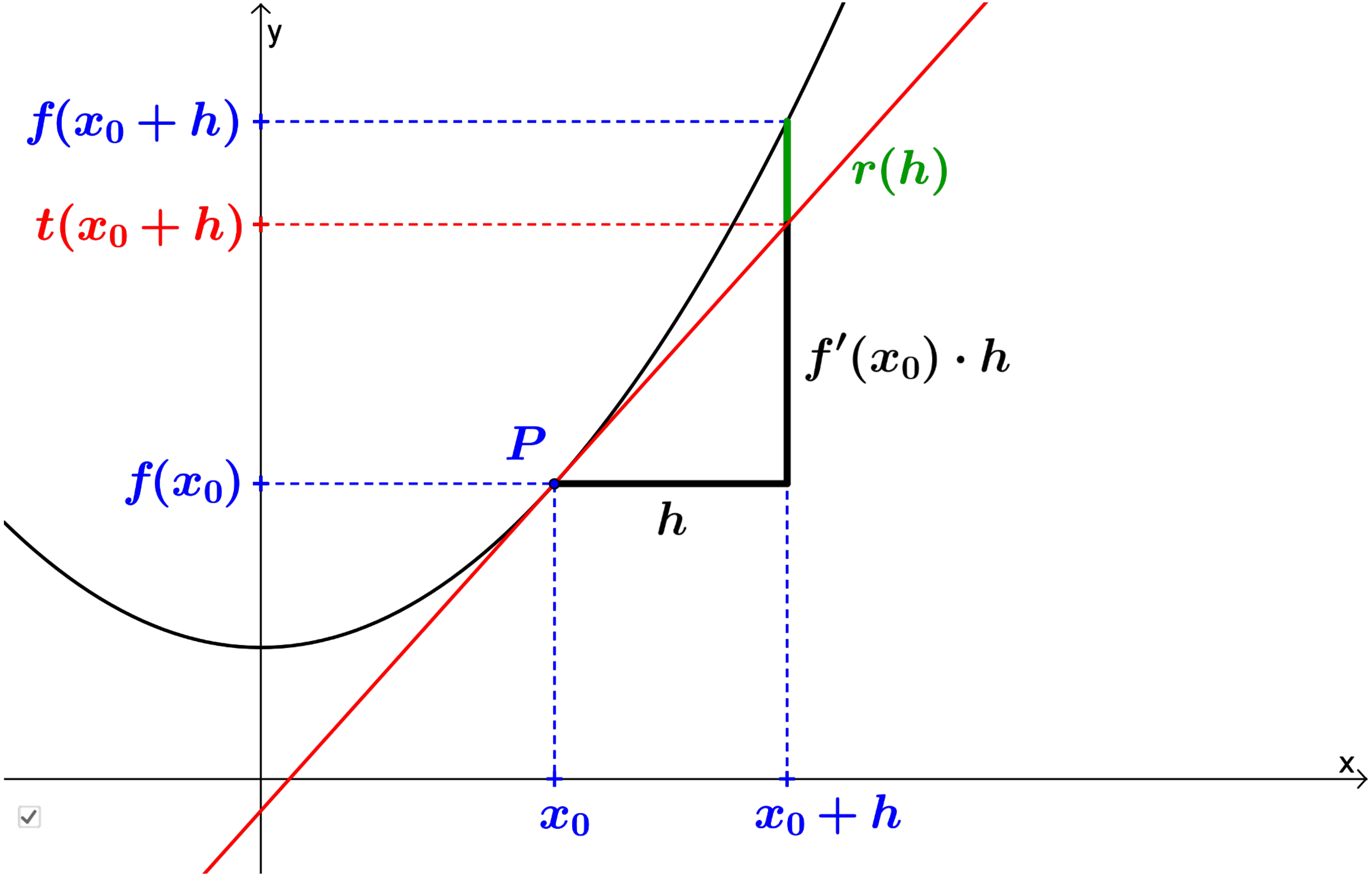
Zusammenfassung: Ableitung als lokale lineare Approximation

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Werte der Funktion nahe x_0	werden genähert durch	**Werte** der Tangente nahe x_0	**Fehler** der Näherung	**Güte** der Näherung für $h \to 0$
$f(x_0 + h)$	$\approx$	$t(x_0 + h)$ $= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$	$r(h) = f(x_0 + h) - t(x_0 + h)$ $= f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$	$\frac{r(h)}{h} \to 0$
Zuwächse der Funktion nahe x_0	werden genähert durch	**Zuwächse** der Tangente nahe x_0	**Fehler** der Näherung	**Güte** der Näherung für $h \to 0$
$f(x_0 + h) - f(x_0)$ (Differenz Δy)	$\approx$	$f'(x_0) \cdot h$ (Differenzial dy)	$r(h)$	$\frac{r(h)}{h} \to 0$

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
https://www.geogebra.org/m/dfUDB4N3

Zusammenfassung:
Ableitung als lokale lineare Approximation



Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
https://www.geogebra.org/m/dfUDB4N3

Analytische Definitionen der Ableitung

Definition (über lokale Änderungsrate)

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Der Grenzwert heißt **Ableitung von f an der Stelle x_0** und wird mit

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bezeichnet.

Definition (über lokale lineare Approximation)

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar,

wenn es eine Gerade t_{x_0} durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gibt, so dass der Approximationsfehler

$$r(h) := f(x_0 + h) - t_{x_0}(x_0 + h) \quad \text{mit} \quad x_0 + h \in \mathbb{D}$$

der Bedingung $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ genügt.

Die Steigung von t_{x_0} heißt **Ableitung von f an der Stelle x_0** und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkung: Der Grenzwert muss derselbe sein, unabhängig davon, ob man sich der Stelle x_0 von links oder von rechts nähert. Nur in diesem Fall ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91

Exkurs: Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an G_f

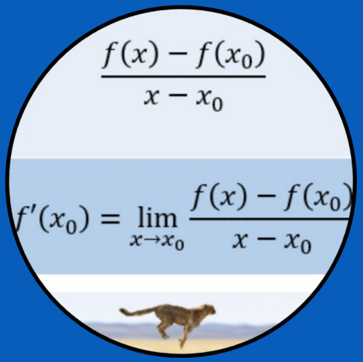
Berechnung der Tangentengleichung

- Funktionsgleichung einer Geraden: $y = m \cdot x + t$
- m ist die Steigung der Geraden. Für eine Tangente, die sich im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an G_f anschmiegt, gilt: $m = f'(x_0)$
- Da die Tangente durch $P(x_0, f(x_0))$ verläuft, erfüllen dessen Koordinaten die Funktionsgleichung. Es gilt also: $f(x_0) = m \cdot x_0 + t$

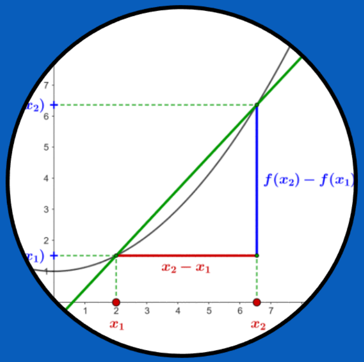
Im Beispiel: $f(x) = x^2$

- Mit $f'(x) = 2x$ folgt: $m = 2 \cdot x_0$
- Mit $P(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0^2)$ ergibt sich: $x_0^2 = 2x_0 \cdot x_0 + t$
  $\Rightarrow t = -x_0^2$
- Damit ergibt sich die Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ zu: $y = 2x_0 \cdot x - x_0^2$

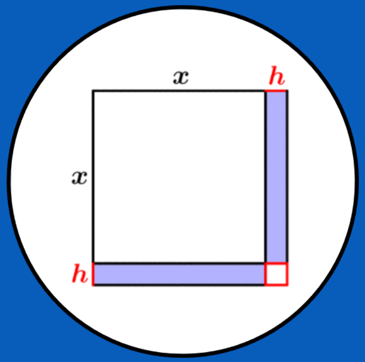
Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff
Welche würden Sie für die Einführung nutzen?



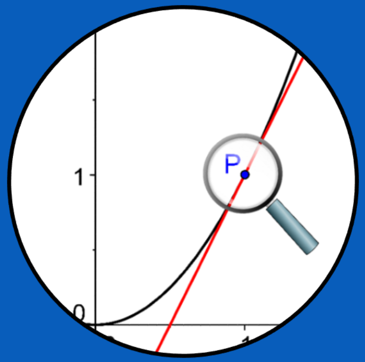
Lokale Änderungsr ate



Tangenten-steigung



Verstärkung s-faktor

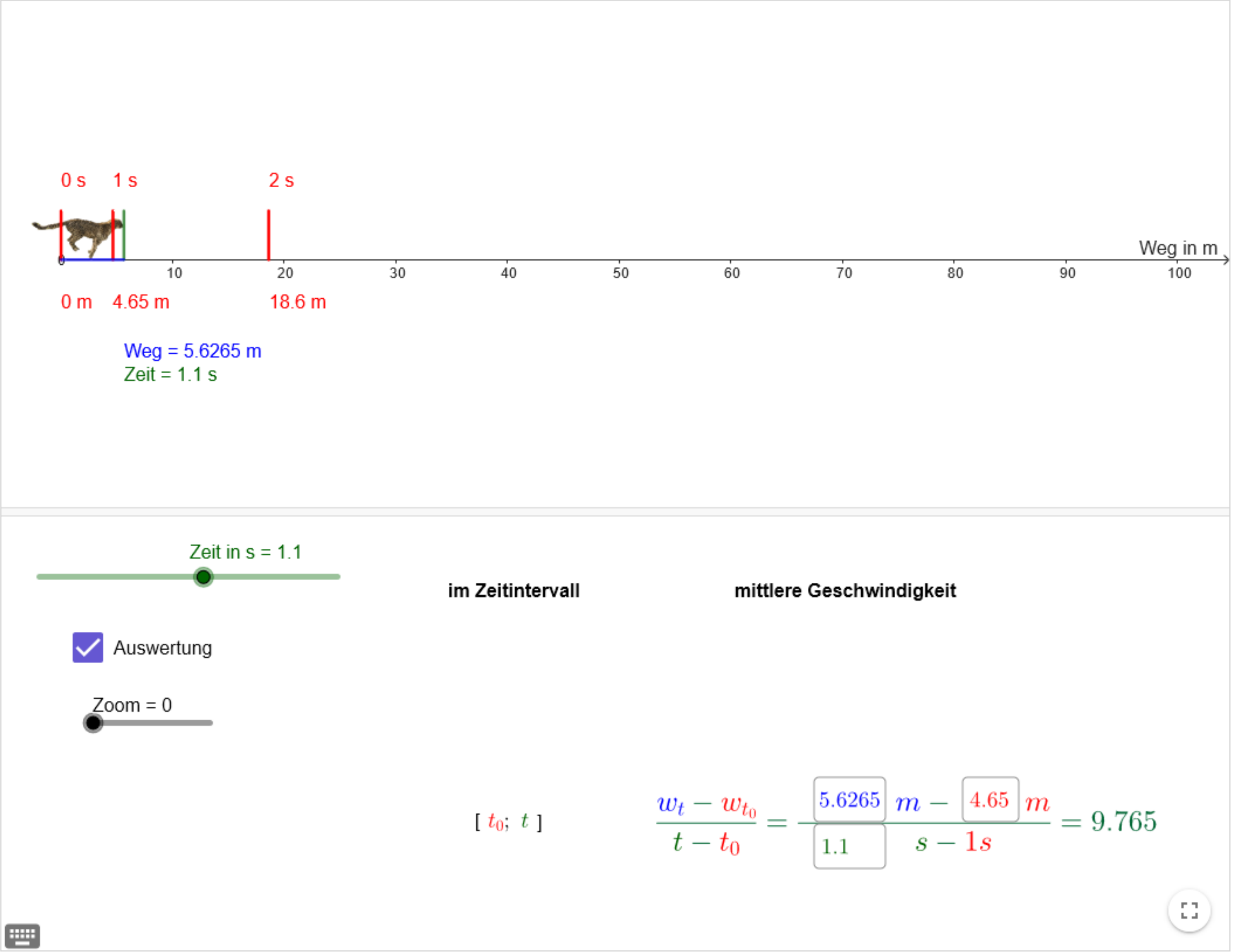


lokale lineare Approximati on

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

4 Lernumgebungen reflektieren

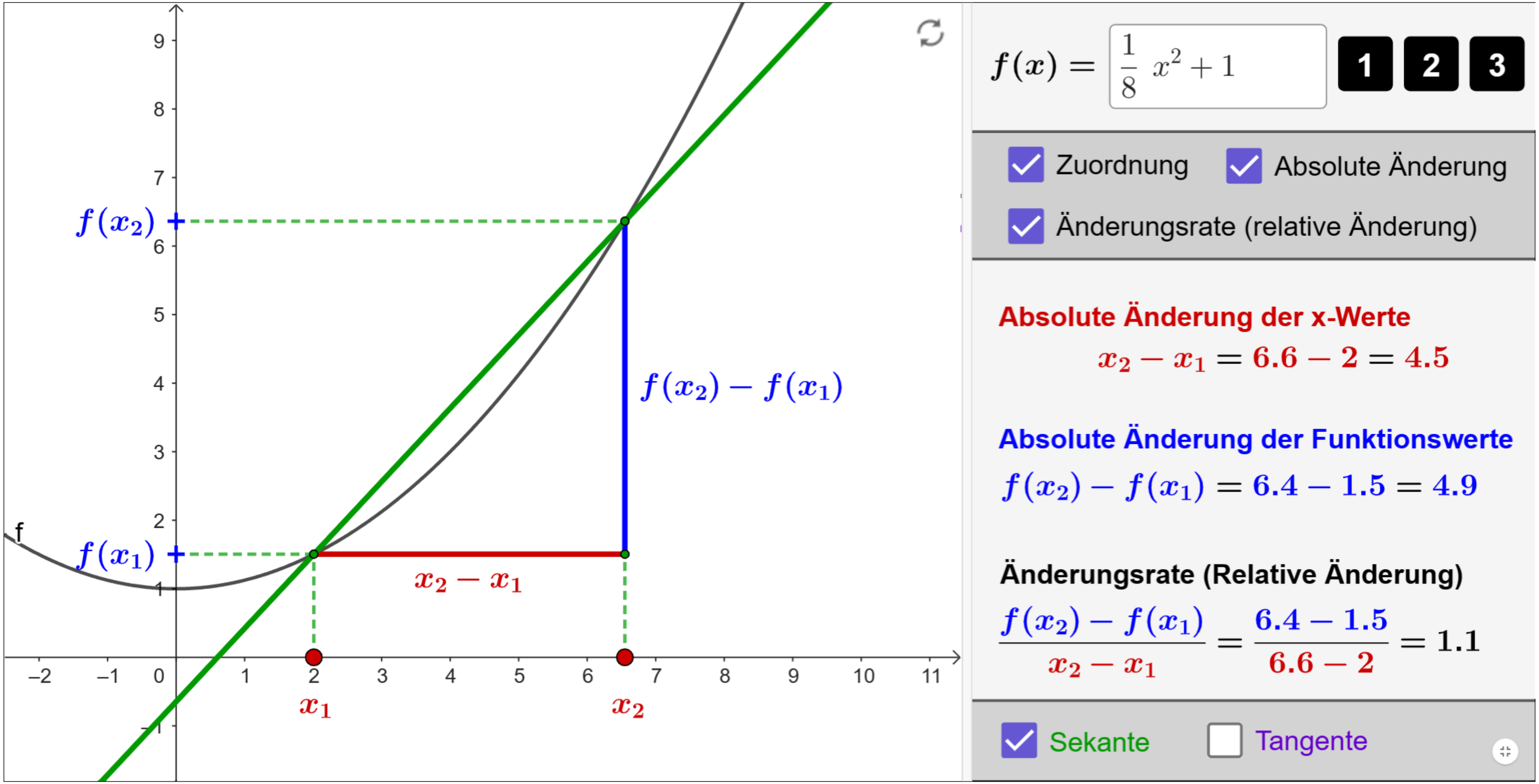
Ableitung als Änderungsrate



Zeitintervall $[t_1, t_0]$	Mittlere Geschw. $\frac{w(t_0)-w(t_1)}{t_0-t_1}$ im Zeitintervall $[t_1, t_0]$
$[0\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{4{,}65\text{ m} - 0\text{ m}}{1\text{ s} - 0\text{ s}} = 4{,}65\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[0{,}9\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{\text{m} - \text{m}}{1\text{ s} - \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[0{,}99\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{\text{m} - \text{m}}{1\text{ s} - \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[0{,}999\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{\text{m} - \text{m}}{1\text{ s} - \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zeitintervall $[t_0, t_2]$	Mittlere Geschw. $\frac{w(t_2)-w(t_0)}{t_2-t_0}$ im Zeitintervall $[t_0, t_2]$
$[1\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{18{,}6\text{ m} - 4{,}65\text{ m}}{2\text{ s} - 1\text{ s}} = 13{,}95\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1\text{ s}; 1{,}1\text{ s}]$	$\frac{\text{m} - \quad \text{m}}{\text{s} - 1\text{ s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1\text{ s}; 1{,}01\text{ s}]$	$\frac{\text{m} - \text{m}}{\text{s} - 1\text{ s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1\text{ s}; 1{,}001\text{ s}]$	$\frac{\text{m} - \text{m}}{2{,}001\text{ s} - 2\text{ s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ableitung als Tangentensteigung



https://www.geogebra.org/m/xwhaewwx

Lernumgebungen reflektieren

Dynamische Arbeitsblätter

https://roth.tel/analysis → Ableitungsbegriff

→ Lokale Änderungsrate – Gepard
www.geogebra.org/m/xtsx9wnv

→ Steigung einer Funktion
www.geogebra.org/m/xwhaewwx

Sozialform (Ich – Du – Wir)

- Findet euch in Zweiergruppen zusammen.
- Entscheidet, wer von euch sich mit dem dynamischen Arbeitsblatt (DA) „Lokale Änderungsrate – Gepard" bzw. „Steigung einer Funktion" auseinandersetzt.

Arbeitsaufträge

(1) **Ich** (10 min)**:** Bearbeitet euer DA und macht euch Notizen zu folgenden Fragen:

a) Was erarbeiten sich eure SuS daran?

b) Wodurch werden GV explizit adressiert?

c) Welche potentiellen Hürden/Schwierigkeiten könnten bei euren SuS auftreten?

(2) **Du** (10 min)**:** Besprecht mit dem Partner:

a) Was brauchen eure SuS, um mit dem DA zu arbeiten?

b) Was braucht ihr im Unterricht vorher?

c) Wofür braucht ihr die jeweilige GV im weiteren Unterricht? (→ eigene Grobplanung)

Tagesablauf

Zeit	Inhalt
9:30-9:45	1. Begrüßung und Organisatorisches
9:45-10:45	2. / 3. Einführung Grundvorstellungen zur Ableitung
10:45-11:15	4. Erkundung und Reflexion von Lernumgebungen
11:15-11:30	**Kaffeepause**
11:30-12:30	5. Aufgabengestaltung und Grundvorstellungen
12:30-14:00	Mittagspause
14:00-14:30	**PMLG:** Eigene Aufgabe im Hinblick auf Grundvorstellungen adaptieren
14:30-15:00	6. Digitale Lernumgebungen und Werkzeuge
15:00-15:45	7. Aufgabenperspektiven – Auch mit Blick auf Prüfungen
15:45-16:00	Kaffeepause
16:00-17:00	**PMLG:** Anhand der Grobplanung Themen- & Rückmeldungsverantwortliche identifizieren Eigene Aufgabe zum Thema mit MMS-Einsatz konzipieren
17:00-17:30	Evaluation, Hausaufgabe: Thema ausarbeiten, Arbeitsweise in PMLGs, Tagesabschluss

GV im weiteren Verlauf des Unterrichts

Arbeitsauftrag

Wofür braucht ihr die jeweilige GV im weiteren Unterricht? (→ eigene Grobplanung)

https://padlet.com/frdigel/mategnu-modul-1-gv-in-mss1-idky7j2hxganuxtm

5 Aufgabengestaltung und Grundvorstellungen

Aufgabenformate zum Prüfen inhaltlicher Vorstellungen

Was prüfen?	Beispiele für Aufgabentypen
Vorstellungen zur Mathematisierung nutzen	**(1) Eine gegebenen Sachsituation Mathematisieren** z. B.: *Geben Sie eine Funktion für den Gesamteffekt, der im Sachkontext gegebenen Änderungsfunktion an.* **(2) Analysieren einer falschen Mathematisierung** z. B.: *Erläutern Sie, warum die Inflationsrate keine Ableitung der Preisniveau-Funktion ist. Vergleichen Sie dazu die Formel für die Inflationsrate (...) mit dem Differenzenquotienten.*
Vorstellungen zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen	**(3) Zuordnen von Mathematisierung und Sachsituation oder Bild** z. B. ***Aufgabe 5*** **(4) Interpretieren eines mathematischen Ausdrucks im Bild/Sachkontext** z. B.: *Interpretieren Sie die Bedeutung des Integrals in Bezug auf die im Sachzusammenhang gegebene Änderungsfunktion. Siehe auch **Aufgabe 1**.*
Sachverhalte und Rechenverfahren durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen erklären	**(5) Erklären eines Rechenverfahrens unter Rückgriff auf eine geometrische oder inhaltliche Interpretation** z. B. ***Aufgabe 6*** **(6) Erklären komplexer Sachverhalte durch Rückgriff auf inhaltl. Vorstellungen** z. B.: *Erklären Sie die Beziehung zwischen Integrieren und Differenzieren am Beispiel folgenden Sachverhalts ...*

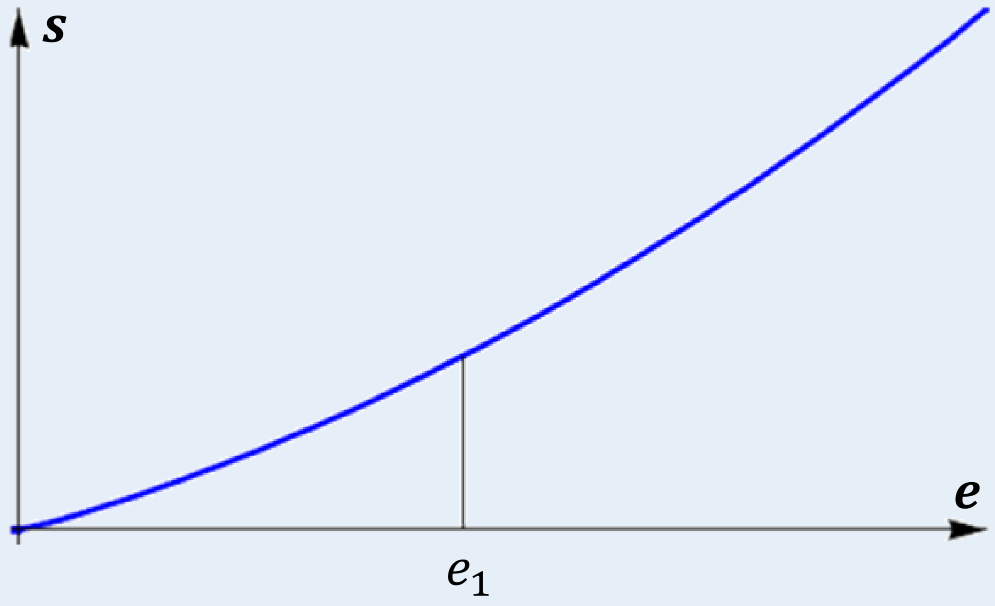
Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten & zentr. Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

Einkommenssteuer

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1: Einkommenssteuer

Es sei $s\colon e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet. e_1 ist das Einkommen von Frau Meier (siehe Grafik, alles in Euro).



a) Interpretieren Sie die Terme $e_1 - s(e_1)$ und $\frac{s(e_1)}{e_1}$.

b) $s'(e_1)$ wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff.

c) Frau Meier erhält eine Gehaltserhöhung um h Euro. Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h}$.

d) Interpretieren Sie die Ungleichung $\frac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h} \geq \frac{s(e_1)}{e_1}$.

e) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze die Beziehung $s''(e) = 0$. Deuten Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang.

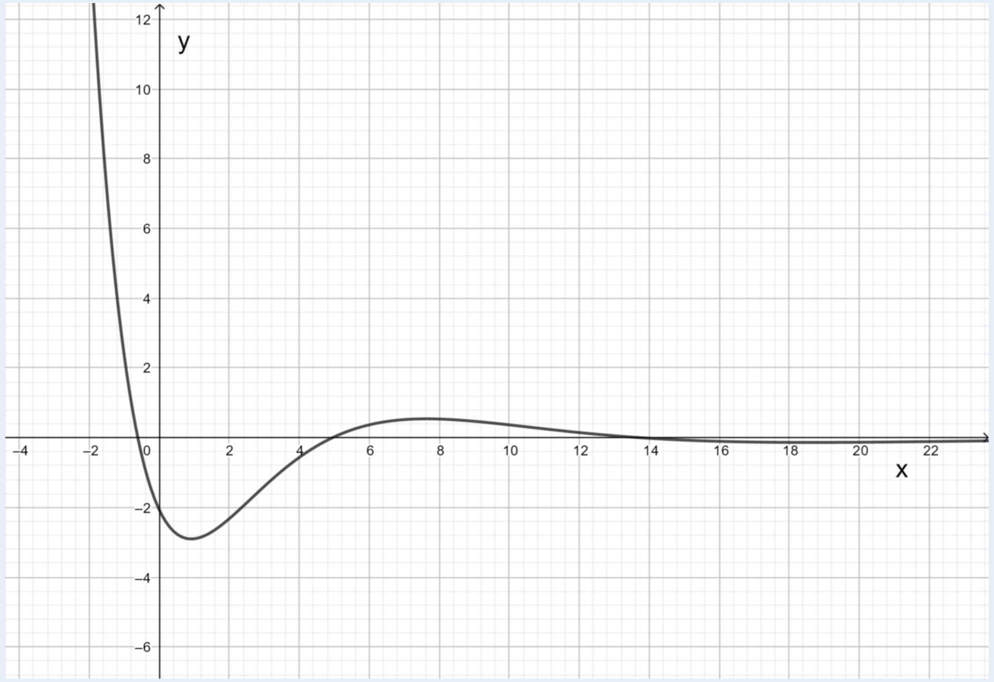
Dangl, M. et al. (2009). Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. Klagenfurt: Universität Klagenfurt, 36
Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

Graph von f' und f

Präsenzaufgabe

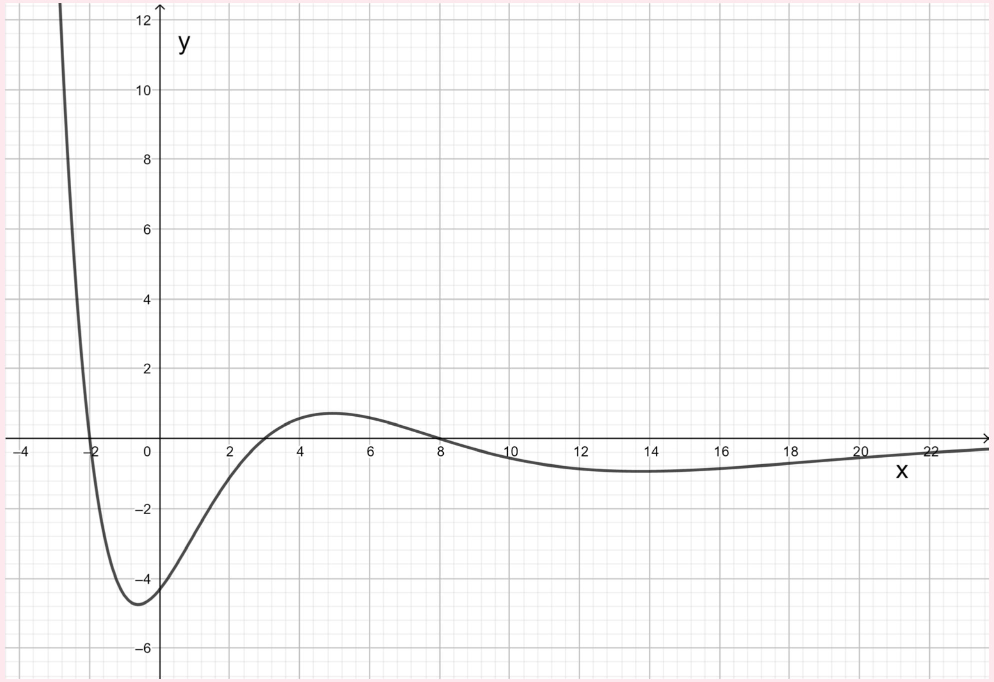
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe 2
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein

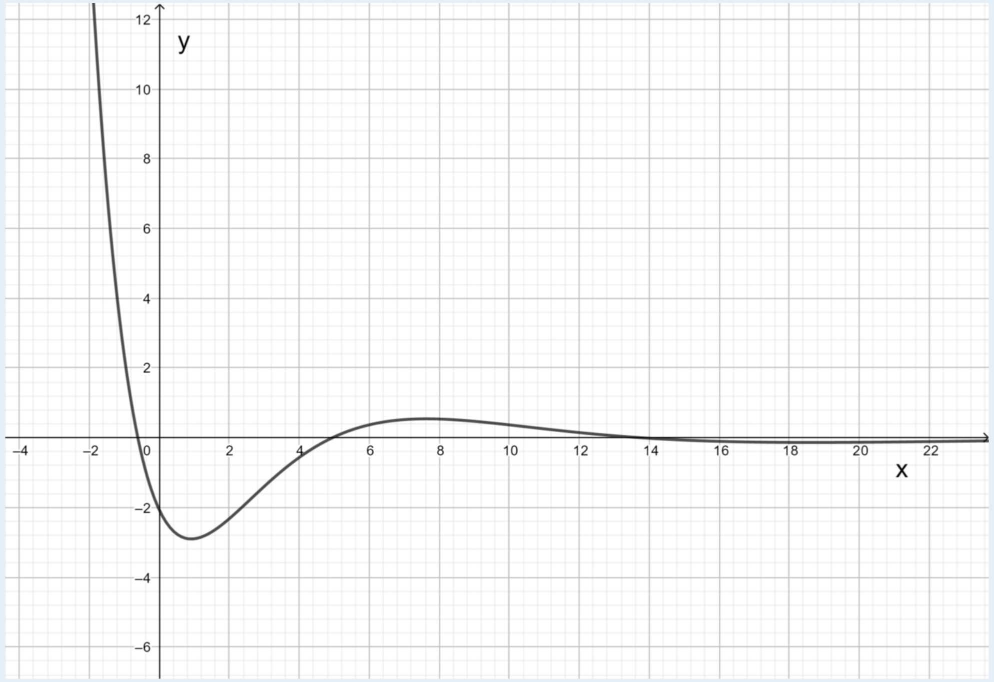


 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und f

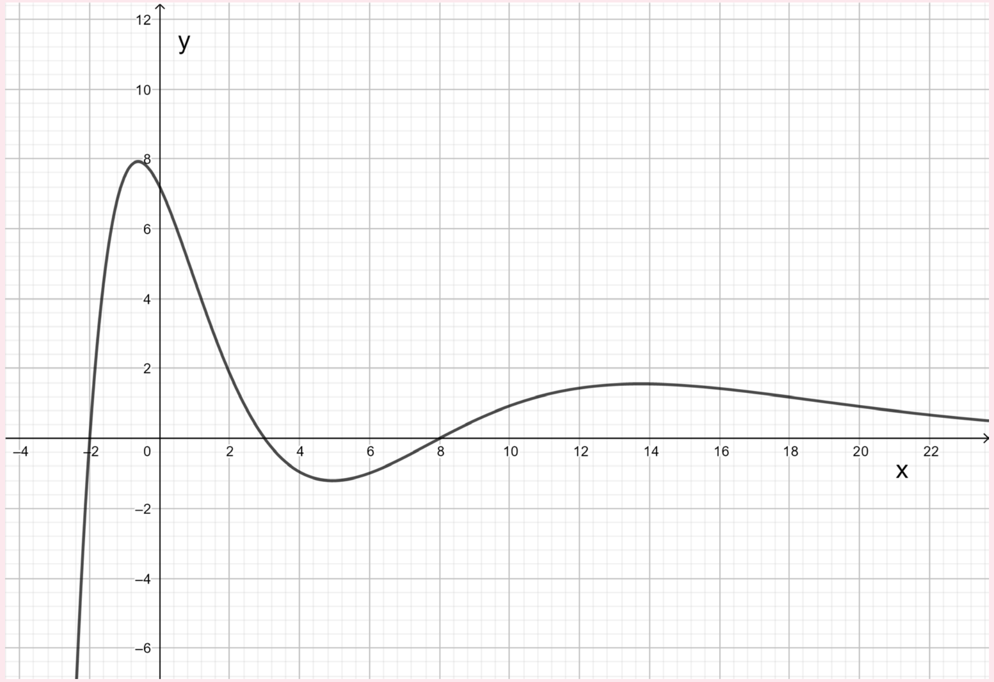
Aufgabe 2

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

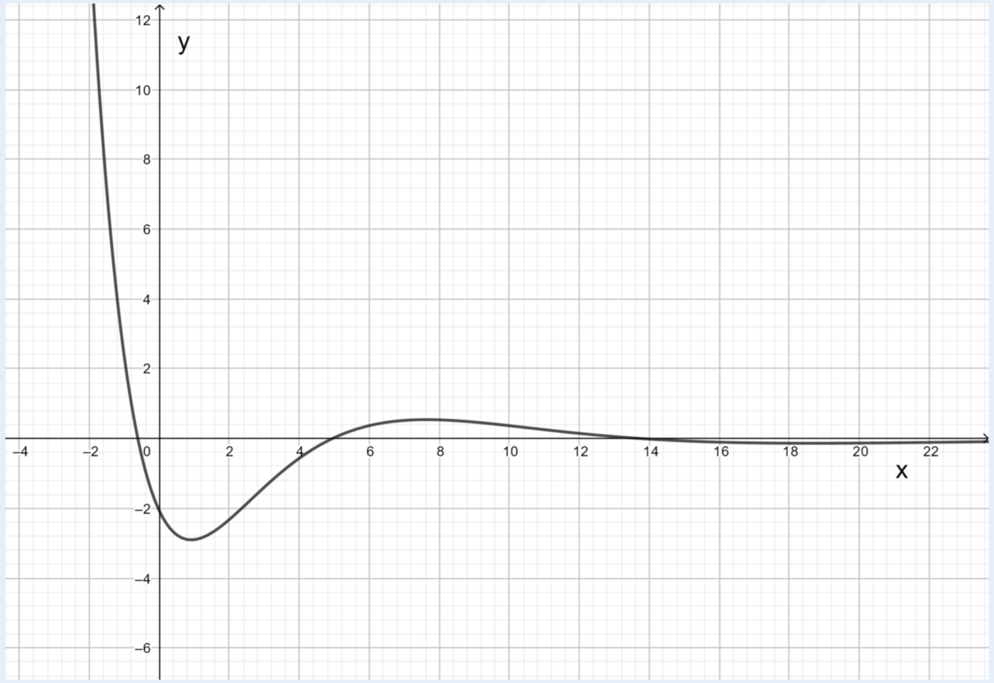
☐ Ja ☐ Nein



Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Graph von f' und f

Aufgabe 2
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



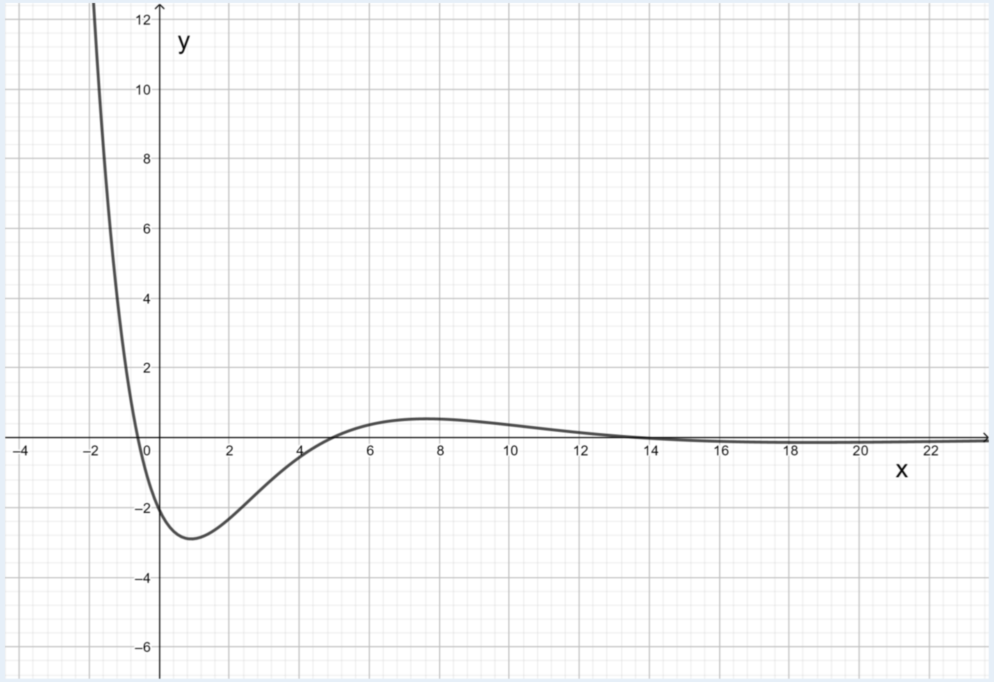
Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein

 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

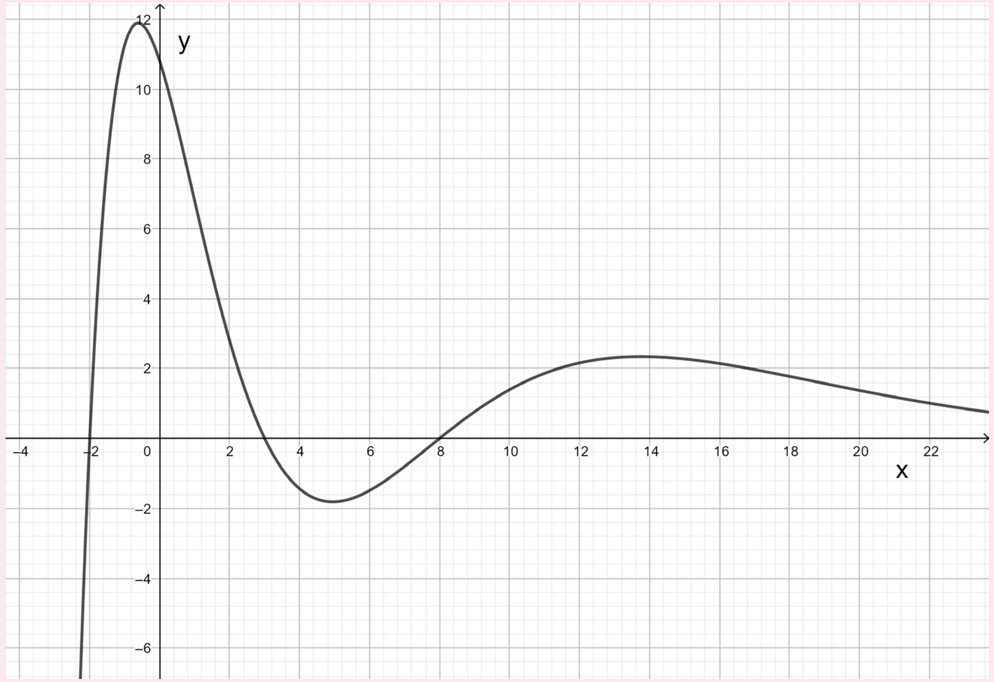
Graph von f' und f

Aufgabe 2
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Kommt folgender Graph als Funktionsgraph der zugehörigen Funktion $f(x)$ in Frage? Kreuzen Sie an.

☐ Ja ☐ Nein



 Schumacher, M. (2019). MaLeMINT-Codebuch. Aufgabe 5.0.6b. S. 149-151

Grippewelle

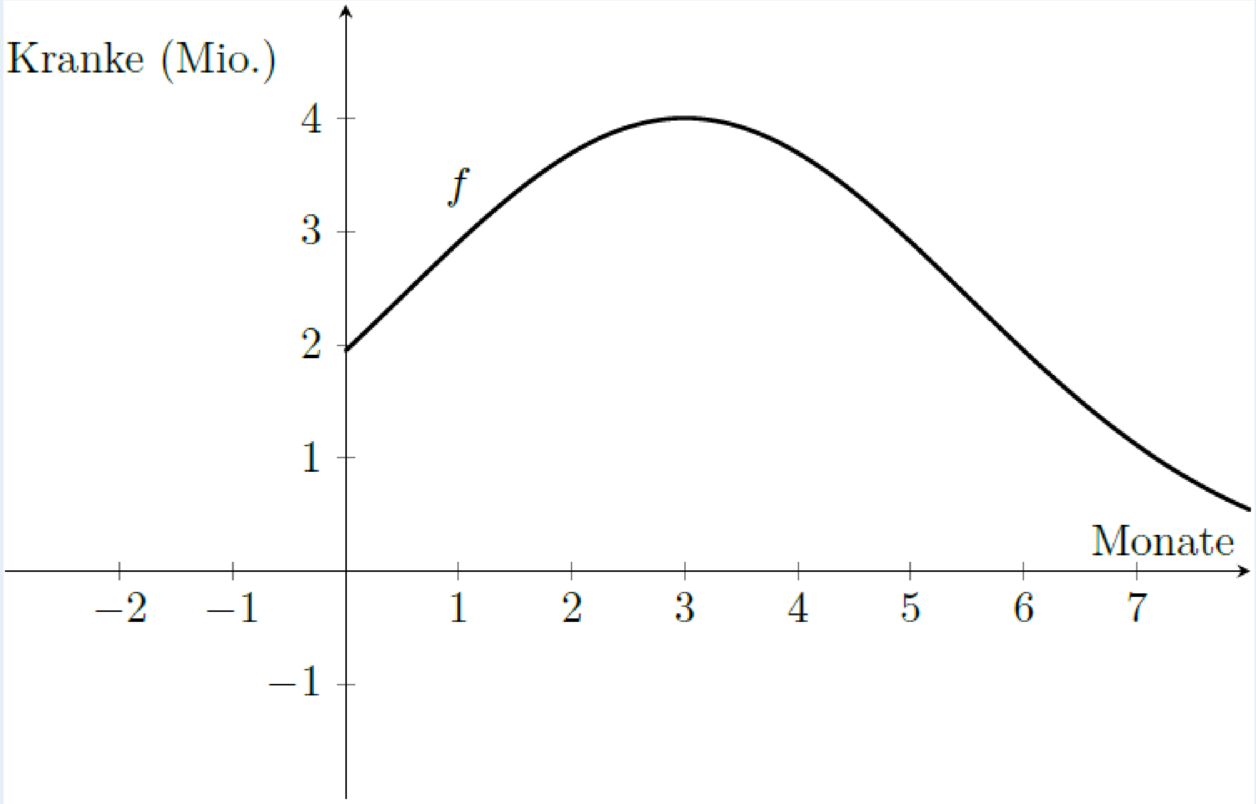
Präsenzaufgabe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe 3

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' und erläutern Sie die Bedeutung der Funktion f' im Sachzusammenhang.



IPN (2022). Mathematische Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium. Aufgabenkatalog – Ergebnisse eines Kooperationsprozesses zwischen Schulen und Hochschulen des Landes Schleswig-Holstein. https://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschung-und-projekte/malemint/2022-12-07_aufgabenkatatlog_malemint-implementation

Grippewelle in zwei Varianten

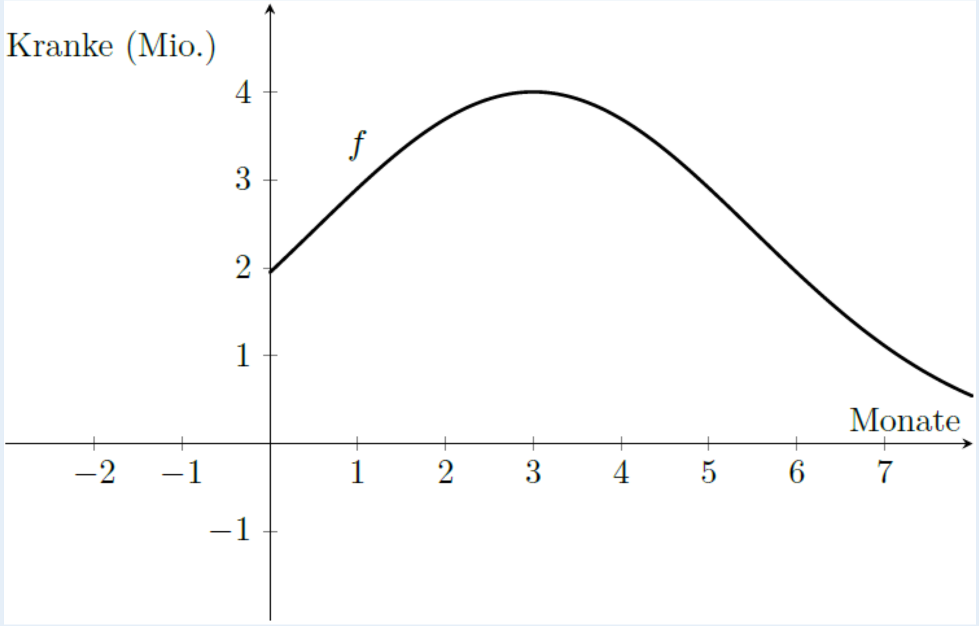
Aufgabe 3
Die Funktion f beschreibt die Anzahl $f(t)$ der an Grippe erkrankten Menschen in Anhängigkeit von der Zeit t.

a) Erläutern Sie die Bedeutung der Funktion $f'(t)$ im Sachzusammenhang.

b) Erklären Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 im Sachzusammenhang.

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' und erläutern Sie die Bedeutung der Funktion f' im Sachzusammenhang.



IPN (2022). Mathematische Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium. Aufgabenkatalog – Ergebnisse eines Kooperationsprozesses zwischen Schulen und Hochschulen des Landes Schleswig-Holstein. https://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschung-und-projekte/malemint/2022-12-07_aufgabenkatatlog_malemint-implementation

Tauchvorgang eines U-Bootes

Präsenzaufgabe

R TU P Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

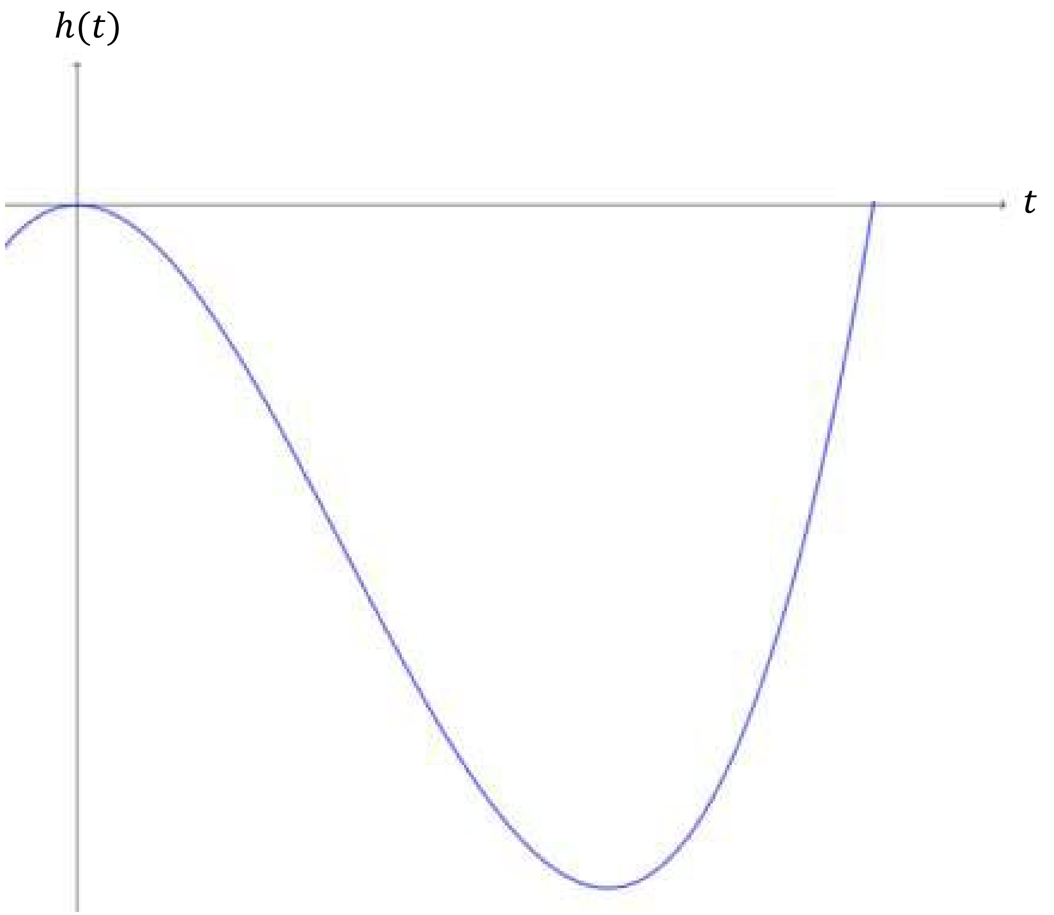
Aufgabe 4

Der Tauchvorgang eines U-Bootes wird durch die Funktion $h(t) = 2t^3 - 12t^2$ beschrieben. Dabei gibt $h(t)$ die Tauchtiefe unter der Oberfläche in Meter an, t die Zeit in Stunden. Die Crew an Land bekommt einen Graphen gesendet – jedoch sind die Angaben auf den Achsen nicht mehr lesbar.

a) Bestimme die Zeitpunkte, zu denen sich das U-Boot an der Oberfläche befindet.

b) Berechne in welcher Tiefe sich das U-Boot nach 3 Stunden befindet. Sinkt oder steigt es gerade (mit Begründung)?

c) Berechne, wann es den tiefsten Punkt erreicht hat. Wie tief es dann getaucht?



Tauchvorgang - Varianten

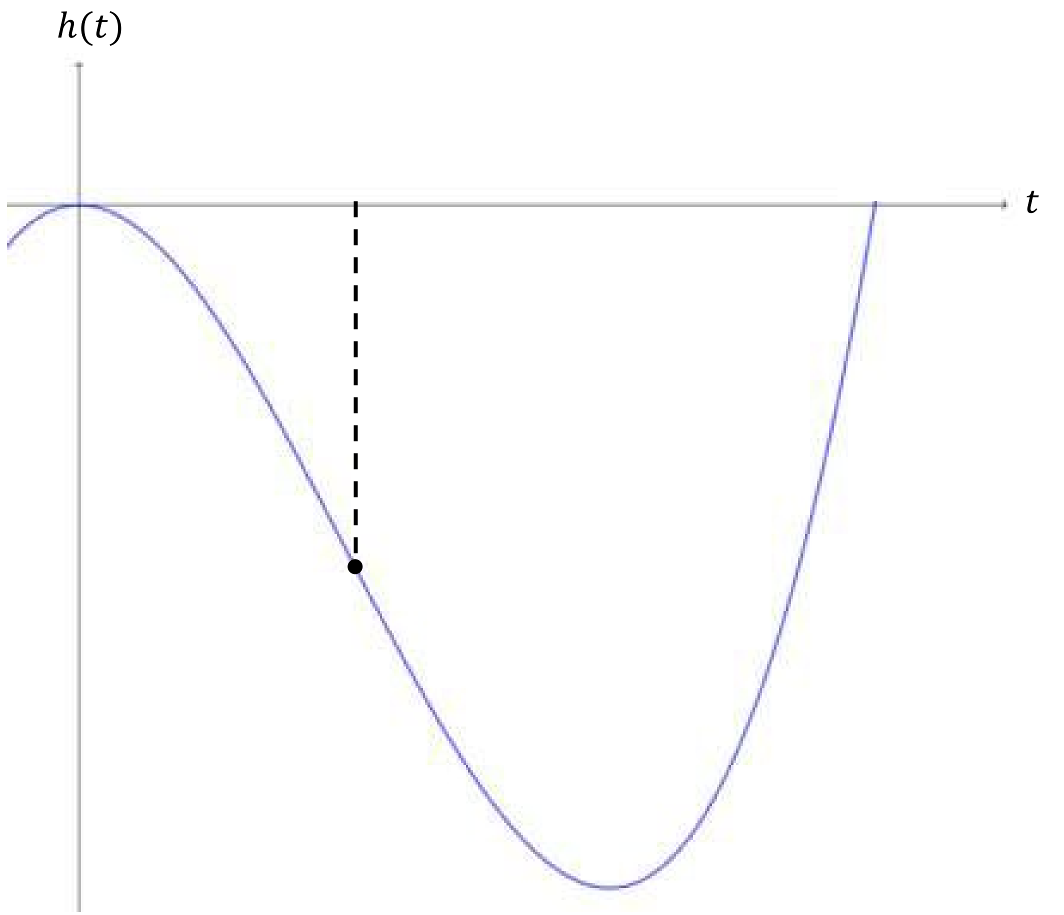
Präsenzaufgabe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe 4
Der Tauchvorgang eines U-Bootes wird durch eine Funktion $h(t)$ beschrieben, deren Graph rechts dargestellt ist. Dabei gibt $h(t)$ die Tauchtiefe unter der Oberfläche in Meter an, t ist die Zeit in Stunden.

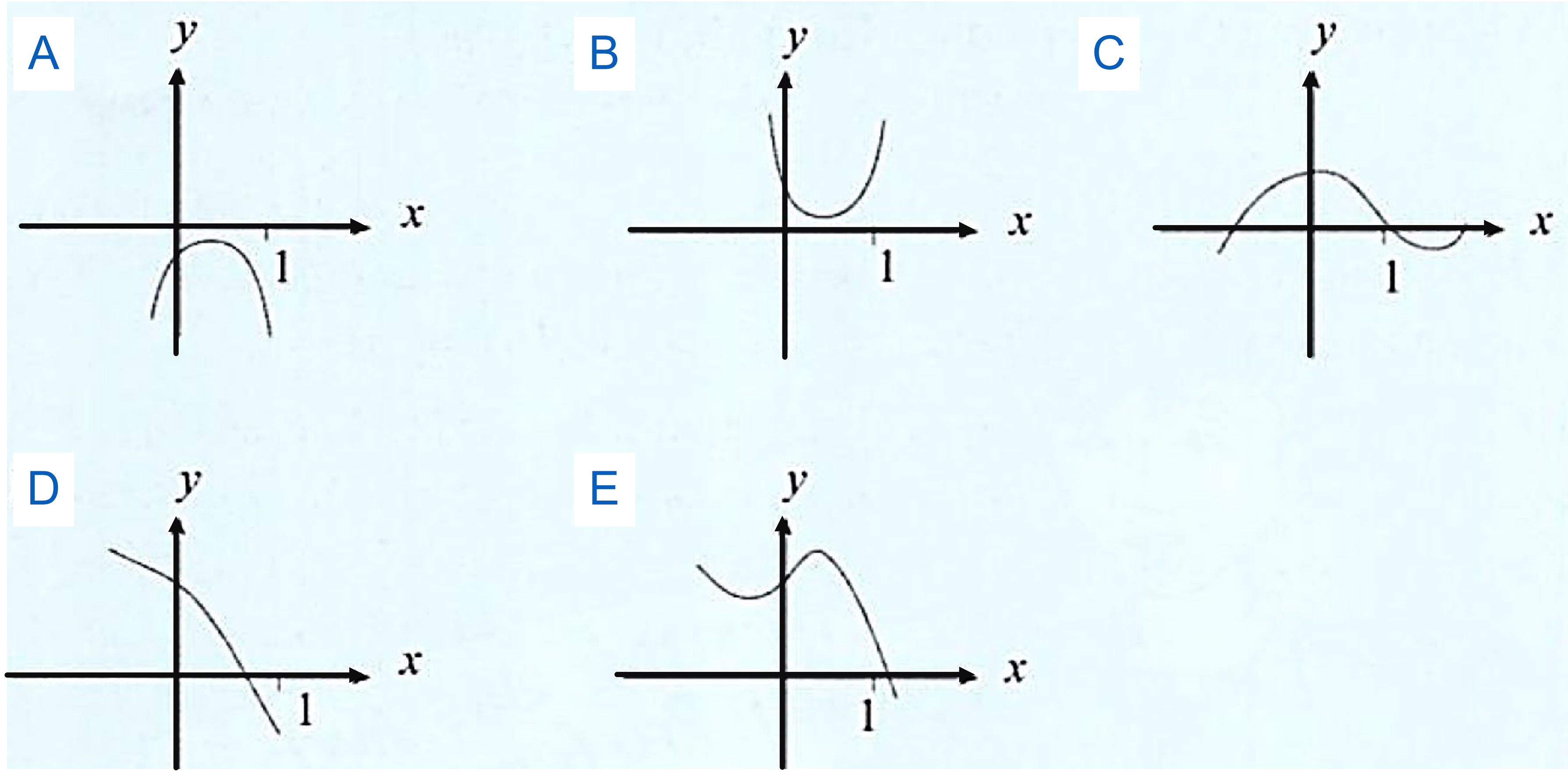
- Beschreibe die Situation zum eingezeichneten Zeitpunkt t im Sachzusammenhang.
- Erkläre mathematisch mithilfe des Graphen, dass das U-Boot zum eingezeichneten Zeitpunkt t am schnellsten sinkt.

→ Finden Sie aus Sicht jeder der vier Grundvorstellungen eine Erklärung!



Graphen analysieren

Aufgabe 5: Welcher der Graphen A, B, C, D bzw. E hat alle folgenden Eigenschaften?
$f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ



 Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten & zentr. Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

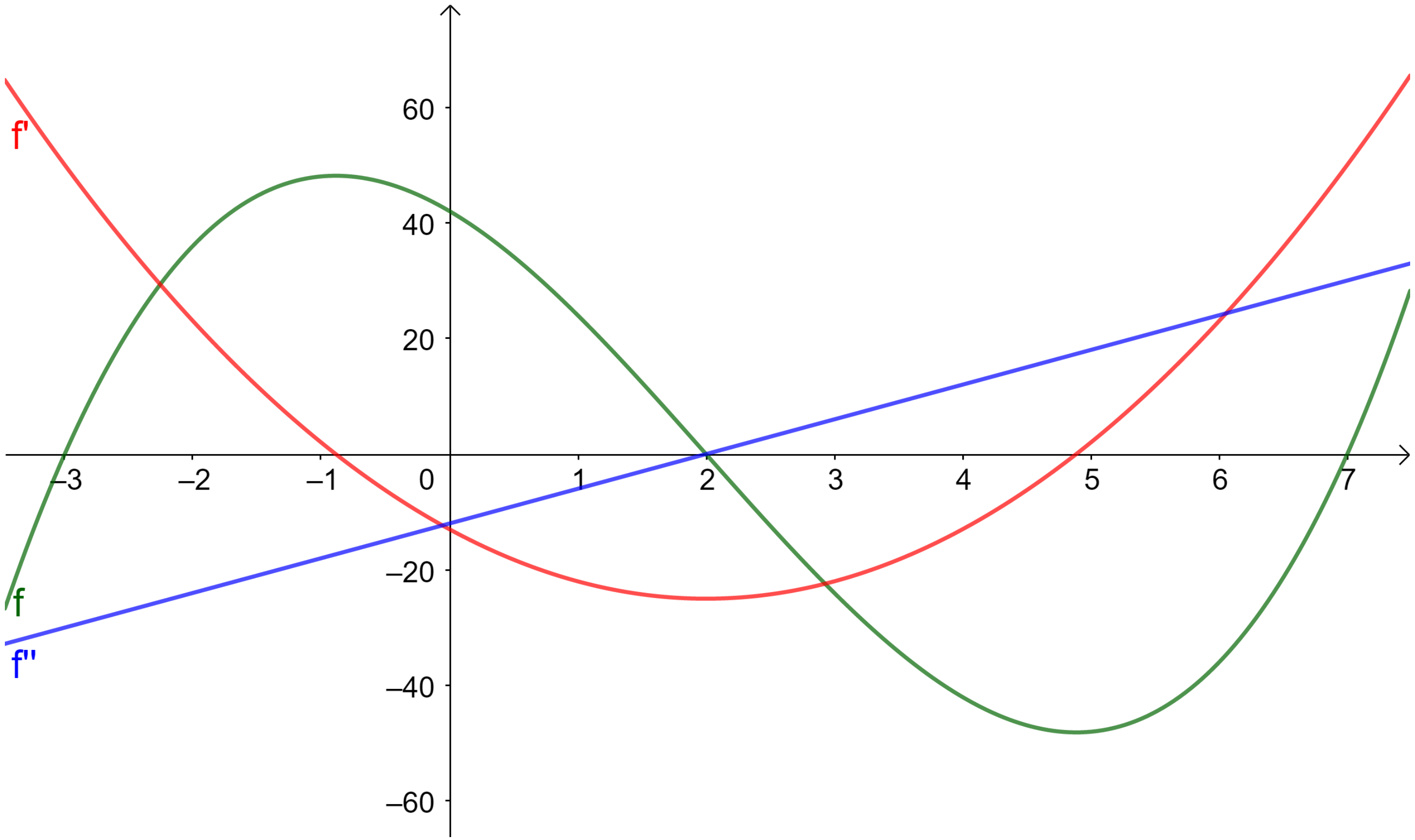
Rechenverfahren erklären

Aufgabe 6:
Rechenverfahren erklären
Um eine Maximalstelle zu bestimmen, sind zwei Schritte notwendig:

(1) Man bestimmt die Nullstelle x_0 der Ableitung und

(2) überprüft, ob $f''(x_0) < 0$ ist.

Erläutern Sie anhand der Graphen, warum man mit den Schritten (1) und (2) eine Maximalstelle erhält.



 Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten & zentr. Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

Hefewachstum

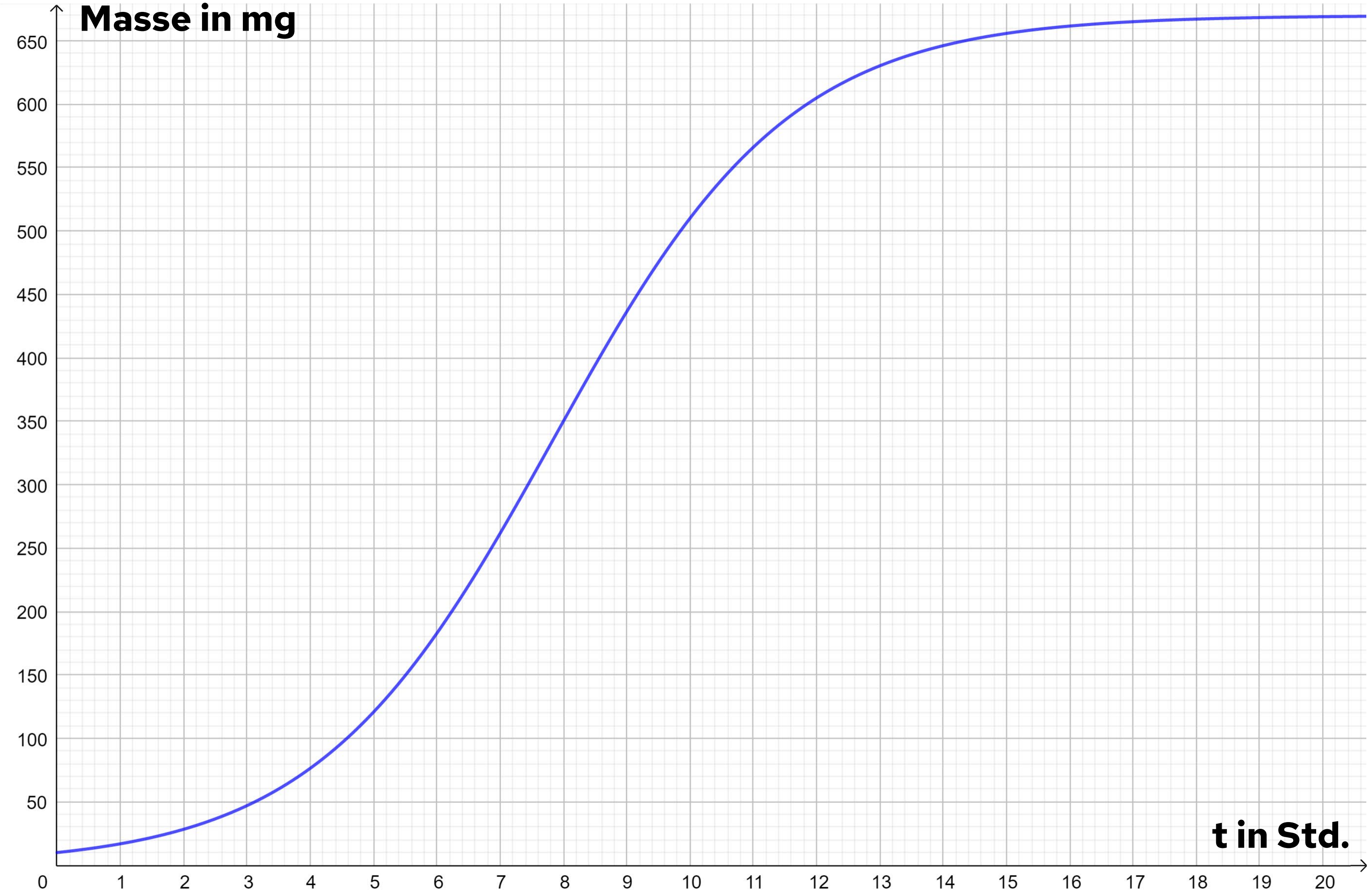
Aufgabe 7: Hefewachstum

In der Grafik ist das Wachstum einer Hefekultur dargestellt (Zeitangabe in Stunden; Hefemasse in mg).

a) Schätzen Sie die ungefähre Lage des Wendepunkts ab und zeichnen Sie ihn in der Grafik ein.

b) Schätzen Sie ab, wie groß die Wachstumsgeschwindigkeit an der Wendestelle ist.

c) Deuten Sie den Wendepunkt im Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit.



Dangl, M. et al. (2009). Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik" – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. Klagenfurt: Universität Klagenfurt, 36

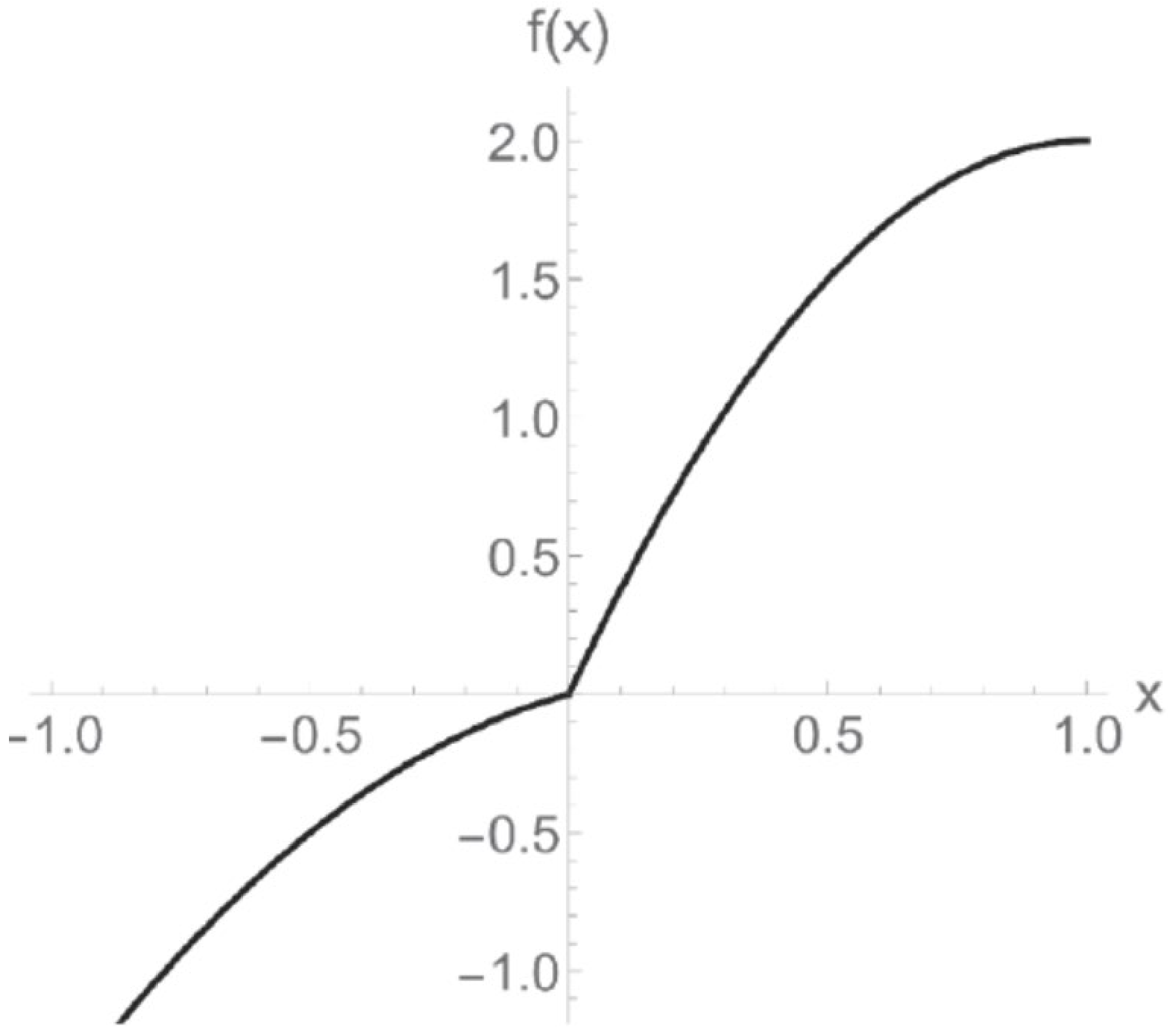
Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

Aus Sicht jeder Grundvorstellung …

Aufgabe 8
Der Graph der Funktion f hat den abgebildeten Verlauf. Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Das kann man unterschiedlich erklären.

Finden Sie aus Sicht jeder der vier GV eine Erklärung.

Veranschaulichen Sie die Erklärung wenn möglich mit einer Skizze.



Gilbert Greefrath, Reinhard Oldenburg, Hans-Stefan Siller, Volker Ulm, Hans-Georg Weigand (2021). Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI), Empirische Erfassung von Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle und zum bestimmten Integral. hal-03103685. https://hal.science/hal-03103685

Tagesablauf

Zeit	Inhalt
9:30-9:45	1. Begrüßung und Organisatorisches
9:45-10:45	2. / 3. Einführung Grundvorstellungen zur Ableitung
10:45-11:15	4. Erkundung und Reflexion von Lernumgebungen
11:15-11:30	Kaffeepause
11:30-12:30	5. Aufgabengestaltung und Grundvorstellungen
12:30-14:00	**Mittagspause**
14:00-14:30	**PMLG:** Eigene Aufgabe im Hinblick auf Grundvorstellungen adaptieren
14:30-15:00	6. Digitale Lernumgebungen und Werkzeuge
15:00-15:45	7. Aufgabenperspektiven – Auch mit Blick auf Prüfungen
15:45-16:00	Kaffeepause
16:00-17:00	**PMLG:** Anhand der Grobplanung Themen- & Rückmeldungsverantwortliche identifizieren Eigene Aufgabe zum Thema mit MMS-Einsatz konzipieren
17:00-17:30	Evaluation, Hausaufgabe: Thema ausarbeiten, Arbeitsweise in PMLGs, Tagesabschluss

MaTeGnu

PMLG

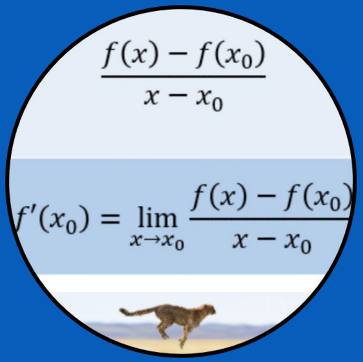
Eigene Aufgabe im Hinblick auf Grundvorstellungen adaptieren

Ziel der Oberstufenmathematik
Grundvorstellung ↔ Kalkülorientierung?

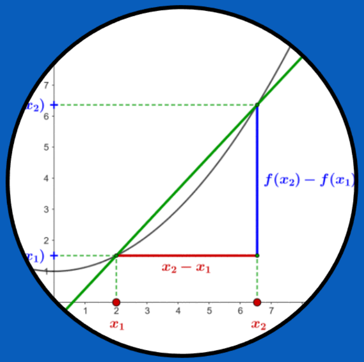
Idee und Bedeutung	Kalkülhaftes Arbeiten
Ableitung als Idee des Übergangs von der mittleren zur lokalen Änderungsrate	Bestimmen von Tangentensteigungen und Ableitungsfunktionen nach syntaktischen Regeln
Integral als Idee der Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Änderungsraten	Integrieren als Bestimmen von Flächeninhalten und Stammfunktionen nach syntaktischen Regeln
Idee der Approximation von Nullstellen durch das Newtonverfahren (oder ein anderes Iterationsverfahren) sowie die Analyse des Konvergenzverhaltens	Newtonverfahrens mit Taschenrechner oder Computer ausführen und Abbruchbedingungen „wenn sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert"
"Kurvendiskussion" als Analyse der Eigenschaften von Funktionen	"Kurvendiskussion" als Anwendung von Kalkülen auf Funktionen und Ableitungen
Geometrische Gebilde mit Hilfe analytischer Methoden darstellen	Formales Lösen von Gleichungssystemen
Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffe auf Alltagssituationen	Algorithmische Behandlung von Aufgaben in Urnenmodellen.

Borneleit, Danckwerts, Henn, Weigand (2001). Expertise zum MU in der gymnasialen Oberstufe. *JMD, 22*(1), 73-90

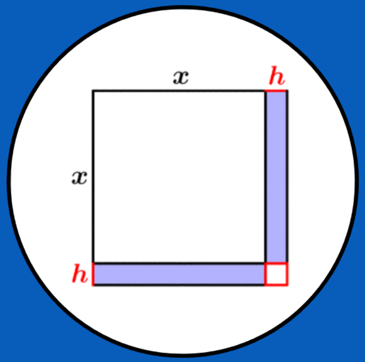
Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff



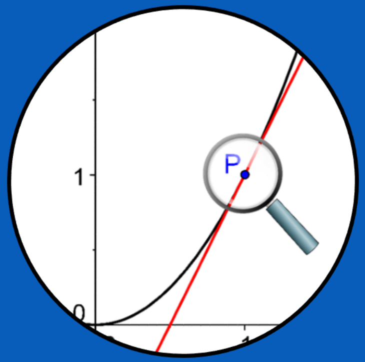
Lokale Änderungsrate



Tangentensteigung



Verstärkungsfaktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

6 Digitale Werkzeuge & Lernumgebungen

Digitale Werkzeuge

Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematikunterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
- Computer-Algebra-Systeme,
- dynamische Geometrie-Systeme

und als deren Integration

- dynamische Mathematik-Systeme [Multi-Repräsentations-Systeme, modulare Mathematiksysteme (MMS)].

Bemerkungen

Im Zusammenhang mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht sind auch auf der Basis von digitalen Werkzeugen gestaltete Applets wesentlich.

Dies gilt unabhängig von der Art des Geräts (Taschenrechner, Smartphone, (Tablet-) Computer…) auf denen diese laufen.

Mit Blick auf den Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht ist zunächst die Frage zu beantworten, inwiefern deren Nutzung das Erreichen der Ziele des Mathematikunterrichts nachhaltig unterstützt.

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis (S. 233-248). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Digitale Werkzeuge ↔ digitale Lernumgebungen

Digitale Werkzeuge

sind Universalwerkzeuge zur mathematischen Problemlösung und müssen durch die Nutzer:in, durch geeignete Ausgestaltung, zu Spezialwerkzeugen für den jeweiligen Zweck gemacht werden.

Digitale Lernumgebungen

setzen einen Rahmen für das selbstständige Mathematik-Lernen. Dazu werden – häufig von Lehrpersonen – unter anderem Applets auf der Basis von digitalen Werkzeugen zur Unterstützung von selbstständigen Lernprozessen von Lernenden in die digitale Lernumgebung integriert.

Wann sollte was genutzt werden?

- **Digitales Werkzeug**
  Primäres Lernziel ist die Ausbildung von Nutzungsexpertise bzgl. des verwendeten digitalen Werkzeugs zur Problemlösung bzw. Aufgabenbearbeitung.
  → Die selbständige Nutzung des digitalen Werkzeugs ist sinnvoll.
- **Digitale Lernumgebungen**
  Primäres Lernziel besteht darin, einen mathematischen Inhalt zu durchschauen und zu verstehen.
  → Die Einbindung in eine digitale Lernumgebung ist sinnvoll.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Inhalts- und Unterstützungsdimension

Grad der Fokussierungshilfe / Zweck des DMS-Einsatzes	Fertig vorgegebene Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)	Veränderbare Konfiguration mit einzelnen Fokussierungshilfen	Leeres, unstrukturiertes DMS
Bewegliche Argumentation kommunizieren	☑		(☑)
Beweisidee vermitteln	☑		(☑)
Verständnisgrundlage für Begriffe und ihre Eigenschaften schaffen	☑	☑	(☑)
Experimentelles Arbeiten ▪ Entdecken von Zusammenhängen	☑	☑	☑
▪ Finden von Ideen im Problemlöseprozess		☑	☑
Reflexion von Problemlöseprozessen	☑		☑

Roth, J. (2008). Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen?
In U. Kortenkamp et al. (Hrsg.), Informatische Ideen im MU. (S. 131-138). Franzbecker.

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

RPTU
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lernumgebungen

... regen Lernende zu Prozessen aktiver Wissenskonstruktion an

... organisieren und regulieren den Lernprozess über ein Netzwerk von Aufgaben

- durch Leitgedanken inhaltlich aufeinander bezogen
- hinreichend offen, um differenzierend zu wirken
- sinnvoll strukturiert bzgl. Inhalt und intendierten Lernprozessen
- enthalten Aufforderungen zur Dokumentation (Ergebnisse & Vorgehensweisen)

... bilden den Rahmen für selbstständiges Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden

... sind von einem unterrichtlichen Gesamtsetting gerahmt, in dem die Lernenden durch eine Lehrperson auf die Arbeit mit der Lernumgebung vorbereitet, wieder daraus abgeholt und insbesondere beim Systematisieren ihrer gewonnenen Erkenntnisse unterstützt werden

... umfassen geeignete Medien und Materialien für aktive und vielfältige Auseinandersetzung mit einem Phänomen

... fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus

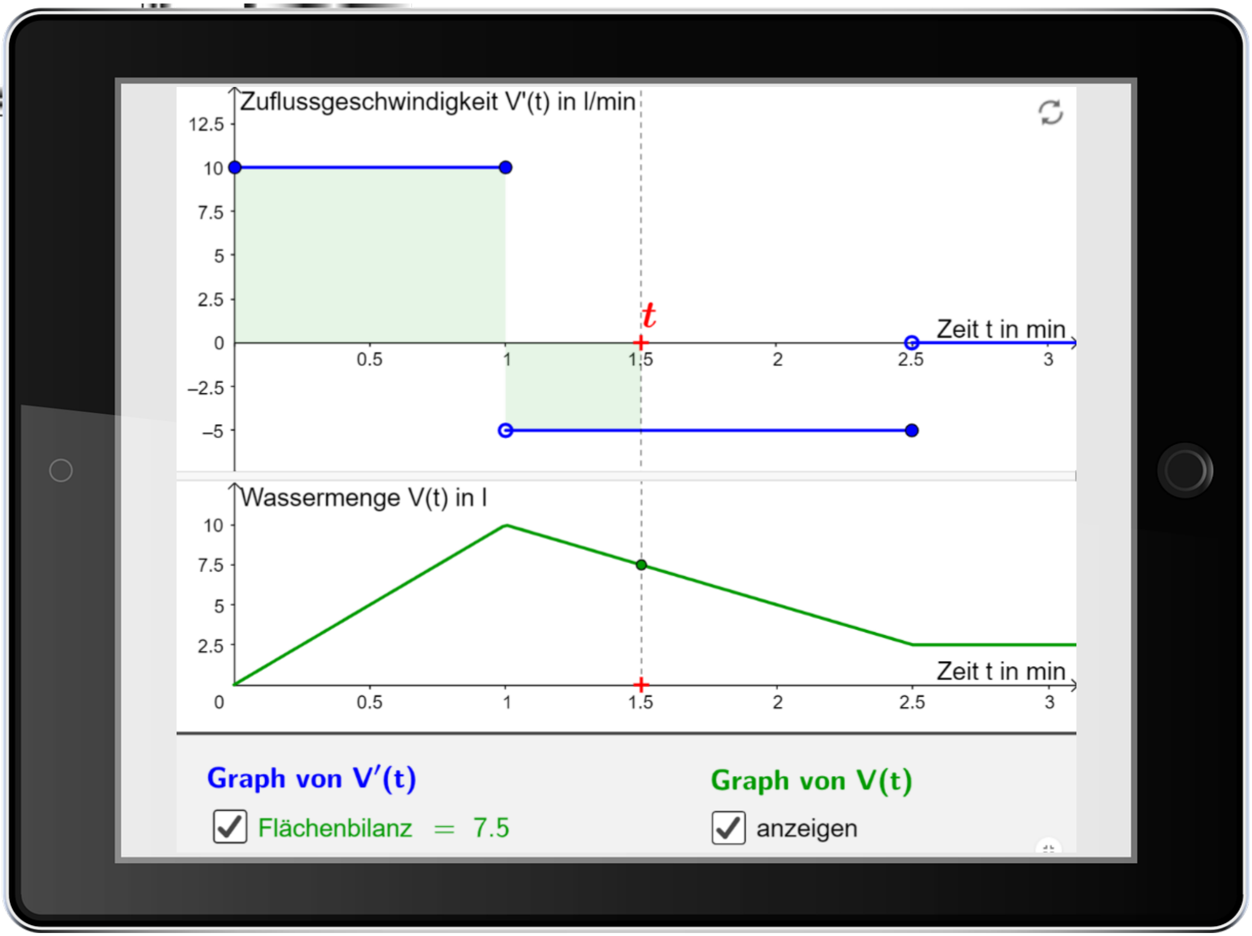
... bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen sowie die Möglichkeit der Ergebniskontrolle

Definition: Digitale Lernumgebung

Digitale Lernumgebung

- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
  - von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
  - die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten,

digital angereichert wurde.



Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Rolle der Lehrperson im Rahmen der Arbeit mit (digitalen) Lernumgebungen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Vorbereitung

Lernende auf Arbeit mit digitaler Lernumgebung einstimmen

Regeln und Art der Dokumentation festlegen

Notwendige mathem. Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sicherstellen

Voraussetzungen für sinnvolles Arbeiten mit digitaler Lernumgebung schaffen

Durchführung

Überblick über Arbeitsstände und -ergebnisse wiederholt verschaffen

Implementierte Unterstützungssysteme adaptiv ergänzen

Möglichst minimal und in der Regel nicht inhaltlich unterstützen (Lernhilfen nach Zech)

Nachbereitungsphase inhaltlich vorbereiten

Nachbereitung

Konsolidieren der erarbeiteten Wissenselemente

Beobachtungen & Protokolle Lernender nutzen

Mit regulärem mathem. Wissen abgleichen

Wesentliche Grundvorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten herausarbeiten und sichern

Erreichten Fähigkeits- & Wissensstand überprüfen

Erarbeitetes weiter nutzen

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Taxonomie der Lernhilfen

Motivationshilfe	▪ Lernende Motivieren ▪ Lernende bei der Aufgabenbearbeitung halten
Rückmeldehilfe	▪ Lernstand ▪ Korrektheit der Bearbeitung Protokollierung
Allgemein-strategische Hilfe	▪ Strategie vermitteln, die unabhängig vom aktuellen Inhalt genutzt werden kann Verweis auf Hilfen, MMS …
Inhaltsorientiert-strategische Hilfe	▪ Strategie vermitteln, die überwiegend beim aktuellen Inhalt Anwendung findet
Inhaltliche Hilfe	▪ Inhaltliche Hinweise ▪ (Teil-)Lösungen

Hier beginnen.

Zech, F. (1998). Grundkurs Mathematikdidaktik (9. Aufl.). Beltz.
Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Digitale Lernumgebungen

Selbststudium

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Ziel der Nutzung

- Selbstständiges, verständnisbasiertes, an Grundvorstellungen ausgerichtetes Lernen mathematischer Inhalte
- durch geeignete Aufbereitung und mithilfe passgenauer (digitaler) Unterstützungsmedien ermöglichen

Keine Drill and Practice-Programme!

Mögliche Einsatzszenarien

- **In Inhaltsbereich einsteigen:** Inhaltsbereich explorieren und Grundvorstellungen erarbeiten
- **Inhaltsbereich konsolidieren:** Sichtweisen untereinander und mit Grundvorstellungen vernetzen

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Lernwirksamkeit digitaler Lernumgebungen

Selbststudium

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Computerunterstütztes Lernen

- mittlerer Effekt trotz Heterogenität (Effektstärke: Cohens $d = 0{,}37$) Hattie (2015)

Einsatz digitaler Werkzeuge beim MINT-Lernen in den Sekundarstufen

- 92 Vergleichsstudien mit ↔ ohne digitale Werkzeuge seit 2000
- Positiver Effekt digitaler Werkzeuge (Effektstärke: Hedges $g = 0{,}65$)
- Fortbildungen zum Einsatz digitaler Werkzeuge → positiver Einfluss

Hillmayer et al. (2020)

Digitale Lernumgebungen sind besonders lernförderlich, wenn

- Lerninhalte Veränderungen bzw. Prozesse einschließen
- Lerninhalte subjektiv anspruchsvoll
- Lerninhalte dynamisiert darstellbar
- dynamische Darstellungen interaktiv genutzt werden

Rolfes et al. (2020)

- sie Aushandlungs- und Austauschphasen beinhalten
- sie von schriftlichen Protokoll-aktivitäten begleitet werden

Digel et al. (2022)

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Gestaltungskriterien für lernwirksame digitale Lernumgebungen

Selbststudium

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabenstellungen

- schriftliche Ergebnis-Vorhersagen vor Nutzung dynamischer Interaktivitäten
- Reflexionsfragen zu beobachteten bzw. erarbeiteten Ergebnissen
- Zusammenhänge schriftlich festhalten
- dynamisch dargestellte Situation und dynamische mathematische Repräsentationen in Beziehung setzen
- Ergebnisse anwenden

Lichti & Roth (2018), Digel & Roth (2022)

Fokussierungshilfen

- dyna-linking, also dynamische Verbin-dungen zwischen Repräsentationen
- (identische) Farbgebung, Linienstärke
- Bezeichner & Messwerte mitführen
- Hilfslinien
- Veränderungsmöglichkeiten nur, wo für Erkenntnisgewinnung notwendig
- Zu- und Abschaltbare Optionen

Ainsworth (1999), Roth (2005, 2017, 2019)

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Gestaltungskriterien für lernwirksame digitale Lernumgebungen

Selbststudium

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Protokollierung

Ergebnisse und Vorgehensweisen schriftlich (Text & Grafik) festhalten

- erleichtert reflektierte Abstraktion sowie Schematisierung & ermöglicht tiefere Verarbeitung Dörfler (2003)
- entlastet das Arbeitsgedächtnis Schnotz et al. (2011)
- fördert Reflexionstiefe & neue Erkenntnisgewinnung Roth (2013)
- ermöglicht die spätere Weiterarbeit mit den Erkenntnissen
- Anregung: Prompts & leere Kästen Schumacher & Roth (2015)

Feedback

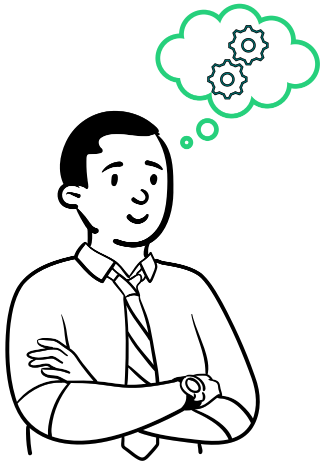
individuell und adaptiv

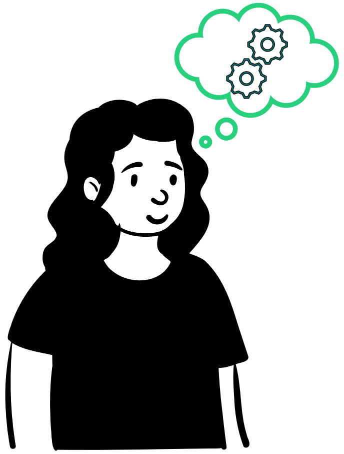
- Wissensstand d. Lernenden
  → Art des Feedbacks
  → Detailgrad des Feedbacks
- Lernende werden aktiv in den Feedbackprozess einbezogen Bimba et al. (2017)
- Lernende: Feedback ist hilfreich
  → Bearbeitung richtig oder falsch
  → Erklärung für korrekte Lösung Jedtke & Greefrath (2019)
- Leistung ↔ Feedbacknutzung Rezat (2017)

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

RPTU

Unterrichtsplanung und -durchführung





Lehr-Lern-Ziele

(Digitales) Werkzeug oder **(digitale) Lernumgebung**

Art der digitalen Lernumgebung

Vorbereitung

Überarbeitung
- Aufgabenstellungen
- Digitale Elemente
- Hilfen / Feedback

Auswahl/Passung
- Inhalt / Lernziel
- Lerngruppe
- Rahmenbedingung

Durchführung

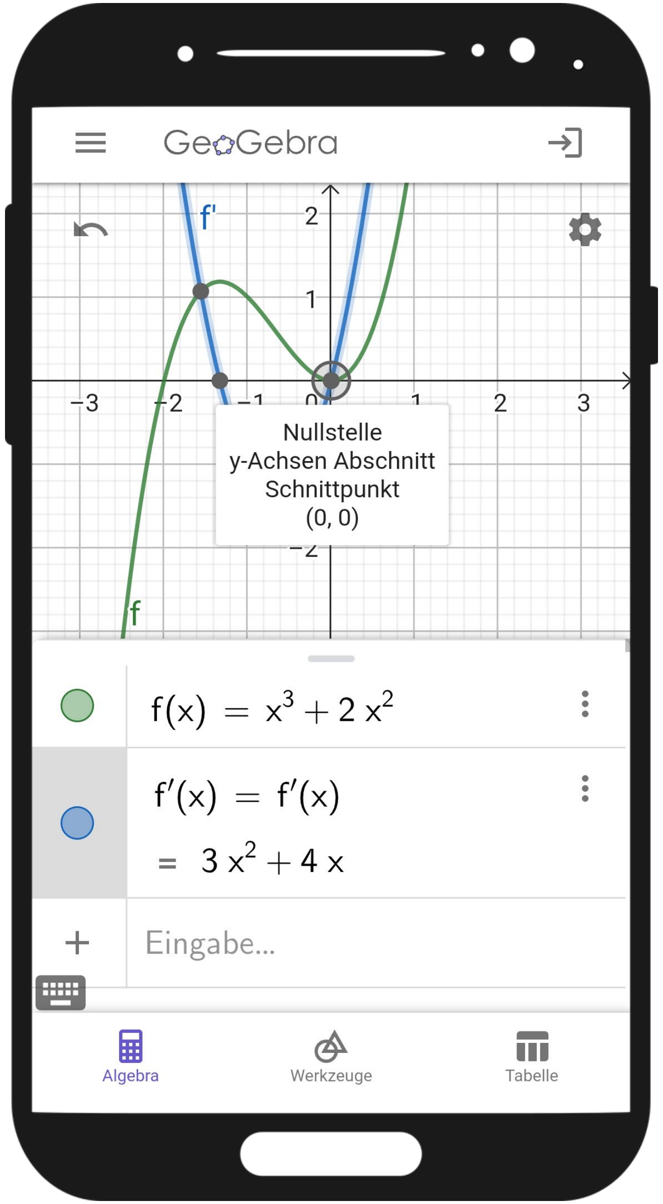
Nachbereitung

Lehr-Lern-Ziele

GeoGebra als Werkzeug einsetzen

Beispiele für MMS-Einsatz

- Überblick über Funktionen, deren charakteristische Punkte und Ableitungen verschaffen
- (Funktions-)Terme vereinfachen
- Funktionen mit Parametern
- Algebraische oder numerische Berechnungen durchführen
- Ideen für Problemlösungen generieren
- Regressionskurven zu Messwerten (Modellierung beim Experimentieren)
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen analysieren
- …



Inhalts- und Unterstützungsdimension

Grad der Fokussierungshilfe / Zweck des DMS-Einsatzes	Fertig vorgegebene Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)	Veränderbare Konfiguration mit einzelnen Fokussierungshilfen	Leeres, unstrukturiertes DMS
Bewegliche Argumentation kommunizieren	☑		(☑)
Beweisidee vermitteln	☑		(☑)
Verständnisgrundlage für Begriffe und ihre Eigenschaften schaffen	☑	☑	(☑)
Experimentelles Arbeiten ▪ Entdecken von Zusammenhängen	☑	☑	☑
▪ Finden von Ideen im Problemlöseprozess		☑	☑
Reflexion von Problemlöseprozessen	☑		☑

Roth, J. (2008). Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen?
In U. Kortenkamp et al. (Hrsg.), Informatische Ideen im MU. (S. 131-138). Franzbecker.

MaTeGnu

7

Aufgabenperspektiven

auch mit Blick auf Prüfungen

Aufgabentypen in Unterrichtssituationen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Aufgaben zum …	Merkmale	Beispiele
Erkunden	Anknüpfen an Präkonzepte, Offen für individuelle Lösungswege, aktive Wissenskonstruktion	*Herausfordernde Situationen* (Winter 1987) *Mathematische Situationen* (Brousseau 1997) *Intentionale Probleme* (Hußmann 2002) *„rich learning tasks“* (Flewelling und Higginson 2003)
Systematisieren	Konvergenzerzeugend, Brückenschlag zur “fertigen Mathematik”, Konservierung durch Dokumentation	*Ordnen-Aufgaben* (Prediger et al. 2011, 2013) *Post Organizer* (Prediger 2003)
Üben	Förderung von Automatisierung und Reflexion, Erhöhen von Wissensqualität, Transfer und Vernetzung	*Produktive Übungsaufgaben* (Winter 1984; Wittmann 1992; Leuders 2009) *tasks with constrained variation* (Watson & Mason 2006)
Anwenden	Stärkung von weitem Transfer, Kompetenzerleben	*z.B. Fermi-Aufgaben* (Büchter et al. 2011) *Komplexe Modellierungen* (Kaiser & Sriraman 2006) *Produktive Aufgaben* (Herget et al. 2001)
Überprüfen	Transparente Erwartungen, Valide Operationalisierung, Erlauben Diagnose und Feedback	*Leistungsumgebungen* *(Jundt & Wälti 2010)* *Verstehensorientierte Aufgaben* *(Büchter & Leuders 2008)*

Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hrsg.). Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 439). Berlin: Springer Spektrum.

Systematisierung von Aufgaben nach ihren Angaben

Aufgabentyp	Gegeben	Weg	Gesucht
Vollständig gelöste Aufgabe (Stimmt das?)	✓	✓	✓
Grundaufgabe / einf. Bestimmungsaufgabe (Was kommt raus?)	✓	✓	–
Einfache Umkehraufgabe (Was war gegeben?)	–	✓	✓
Strategiefindungs- / Begründungsaufgabe (Wie komme ich dahin?)	✓	–	✓
Schwierigere Bestimmungsaufgabe (Wie gehe ich vor und was kommt raus?)	✓	–	–
Schwierigere Umkehraufgabe (Was muss gelten und wie gehe ich vor?)	–	–	✓
Eigene Aufgabenkonstruktion / eigene Anwendung finden (So gehe ich in verschiedenen Fällen vor.)	–	✓	–
Offene Problemsituation (Ich überlege, was ich herausfinden will, wie ich rechne, was herauskommt.)	–	–	–

Eilers, K.; Bergmann, L. (2010). Erstes Üben auf eigenem Niveau – Mit Aufgabensets die Selbsteinschätzung fördern. *ml 162*, 14-17

Thesen zu Prüfungen im MU

Mathematikprüfungen sollten …

- Ziele von Bildungsstandards und Lehrplänen widerspiegeln
- im Einklang mit den Lehr- & Lern-praktiken des Unterrichts stehen
- Lernenden die Möglichkeit geben ihr Wissen und ihre Fähigkeiten geeignet darzustellen

Mathematikprüfungen verdeutlichen

- welche Kenntnisse und Fähigkeiten für wichtig erachtet & honoriert werden (Art der Aufgaben, geprüfte Fähigkeiten, Anzahl der BE, erlaubte Hilfsmittel)

Assessment
should not merely be done to students; rather, it should also be done for students, to guide and enhance their learning.

NCTM: Principles und Standards for School Mathematics

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Thesen zum Einsatz von MMS im MU

Ein digitales Werkzeug (MMS) ist …

- **Experimentierumgebung zur Erkenntnisgewinnung**
  - Vermutungen können sofort überprüft & ggf. korrigiert werden
  - funktionale Zusammenhänge werden erfahrbar
- **heuristisches Hilfsmittel** („Denkzeug“)
  - Routinedenkprozesse auslagern
  - Gedächtnis entlasten
  - Parametervariation → Interaktion zwischen MMS & Nutzer
- **Modellierungswerkzeug** („Kreativitäts-/Interpretationskrücke“)
  - Manipulation komplexer Modelle
  - Verarbeitung realistischer Daten
- **Kommunikationsmittel**
  - Darstellung / Visualisierung von Sachverhalten
  - Fokussierung auf Wesentliches

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Thesen zum Einsatz von MMS im MU

Ein digitales Werkzeug (MMS) ...

- ist **Experimentierumgebung zur Erkenntnisgewinnung**
- ist **heuristisches Hilfsmittel** („Denkzeug“)
- ist **Modellierungswerkzeug** („Kreativitäts-/Interpretationskrücke“)
- ist **Kommunikationsmittel**

- entlastet vom Kalkül
  → mehr Planung , Analyse
  und Argumentation
- ermöglicht Realitätsorientierung und authentische Probleme
- unterstützt selbsttätiges, entdeckendes Arbeiten
- fördern kreatives und produktives Arbeiten

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Thesen zum Einsatz von MMS im MU

Ein digitales Werkzeug (MMS) ...

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

sollte in Prüfungen erlaubt sein, zum

- Problemlösen
- Modellieren
- Visualisieren
- Analysieren

Digitale Werkzeuge können ein Katalysator dafür sein, bestehende Prüfungsformen durch weitere, eher prozessorientierte zu ergänzen.

ist in Prüfungen nicht notwendig, z. B. beim

- Interpretieren
- Reproduzieren von Wissen

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Prüfungsaufgaben und Einsatz von MMS

Prüfungsaufgaben:
Unterricht mit, Prüfung ohne MMS

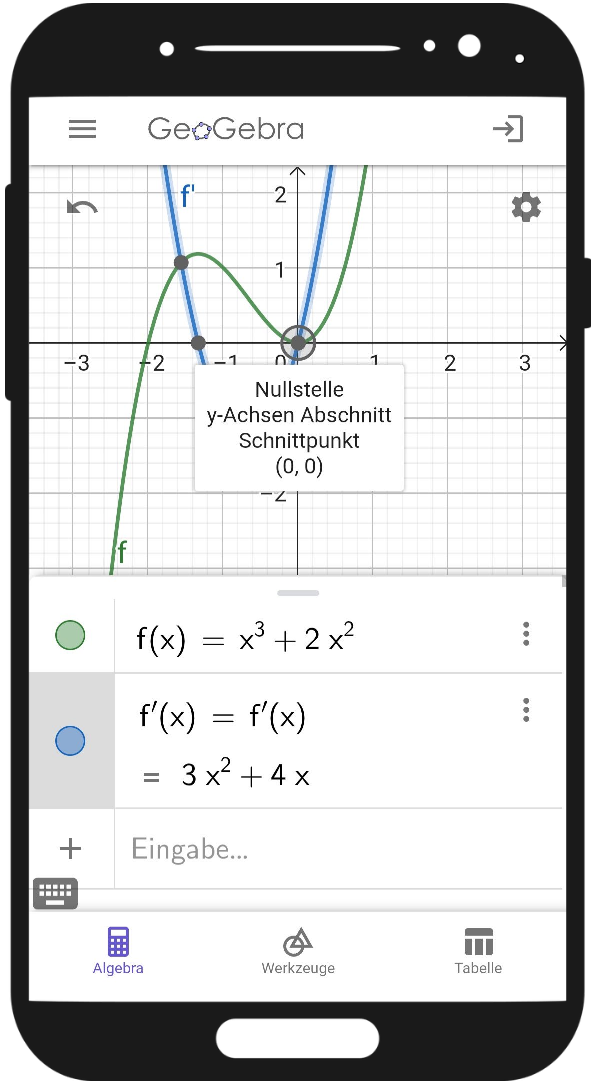
- Standardaufgaben (ohne Berücksichtigung von MMS)
- Nutzung von mit MMS gewonnenen Erkenntnissen
- Bildschirmausgaben von MMS interpretieren
- Beschreiben (mehrerer) Vorgehensweisen zur Lösung mit digitalen Werkzeugen

Prüfungsaufgaben:
Unterricht und Prüfung mit MMS

- wie links (evtl. komplexer; MMS ist Kontrollinstanz)
- Schwerpunkt: Analysieren & Argumentieren
- Problemorientierung
- Realitätsnähe

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Prüfungsaufgaben mit MMS-Perspektive



Typisierung von Prüfungsaufgaben, die von Lehrkräften mit MMS-Perspektive entwickelt wurden:

(1) MMS stellt keine wesentliche Hilfe dar

(2) mit MMS wesentlich schneller lösbar oder trivial

(3) testet Werkzeugkompetenz

(4) traditionell, wird durch die Nutzung von MMS ausgeweitet (Verallgemeinerung, Einfluss von Parametern usw.)

(5) nur mit Hilfe von MMS lösbar

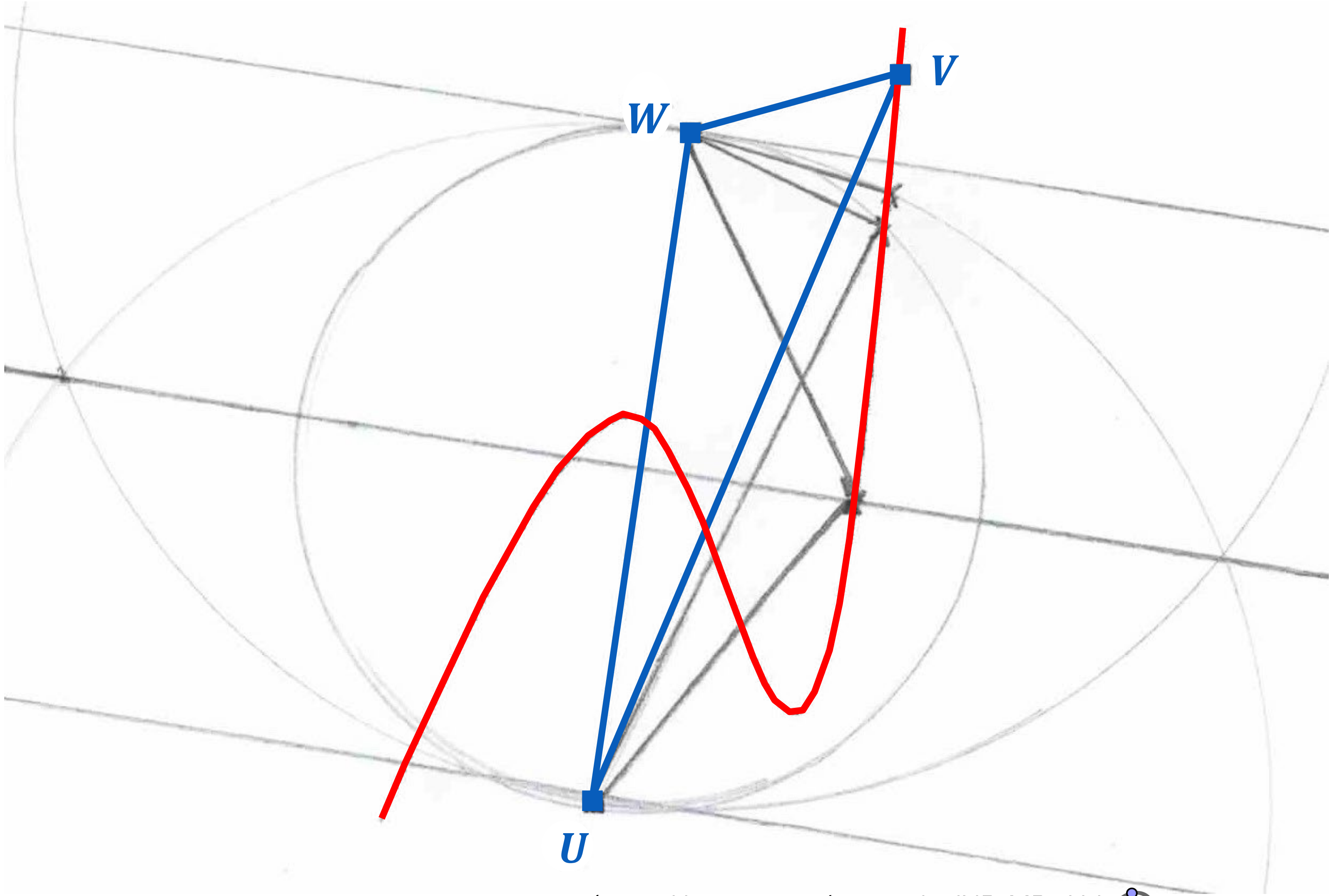
Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Prüfungsaufgabe – Typ (2)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

- Der Punkt V wird entlang der eingezeichneten Kurve nach links unten bewegt.
- Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck UVW dabei der Reihe nach an?



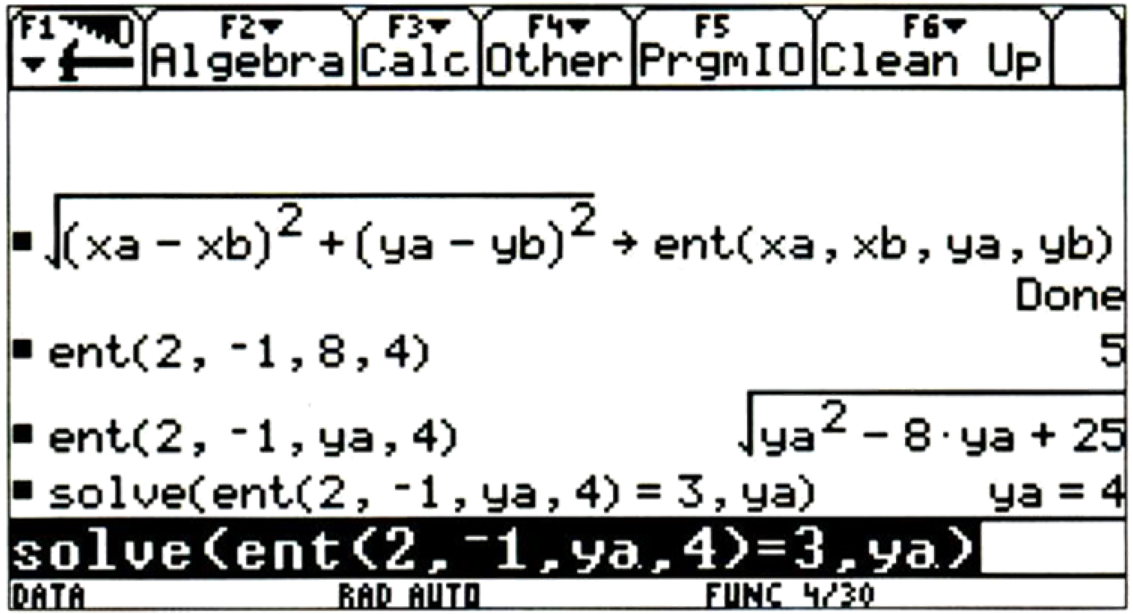
https://www.geogebra.org/m/NRtMBwUJ

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Prüfungsaufgabe – Typ (3)

Aufgabe

- Erkläre den Bildschirmausdruck.
- Es ist günstig, eine Zeile nach der anderen zu erklären.



Aus einer Schülerbearbeitung

In der ersten Zeile wurde der Baustein für den Abstand zweier Punkte eingegeben. Die Punkte sind im Allgemeinen $(x_a|y_a)$ und $(x_b|y_b)$.
In der zweiten Zeile wurden die genauen Koordinaten der Punkte eingegeben. Der Voyage berechnet also den Abstand der Punkte $(2|8)$ und $(-1|4)$. Man bekommt 5 als Lösung.
Danach wird für y_a kein Wert mehr eingegeben, deshalb ist der Punkt im Koordinatensystem auf einer Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $(2|0)$. Der Voyage löst die Eingabe nicht, da noch eine Variable, nämlich y_a vorhanden ist.
In der letzten Zeile wurde der Abstand der Punkte $(2|y_a)$ und $(-1|4)$ vorgegeben (er ist 3), und der Voyage sollte y_a ausrechnen, wobei er auf $y_a = 4$ kommt.

Dreeßen-Meyer, G. & Reiß, A. (2006). Mit Bausteinen spielen – Termeigenschaften mit dem Rechner entdecken. *Mathematik lehren, 136*, 51

Prüfungsaufgabe – Typ (4)

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Aufgabe

Beschreibe drei Möglichkeiten wie du mit MMS die Schnittstellen des Graphen der Funktion f mit der x-Achse bestimmen kannst.

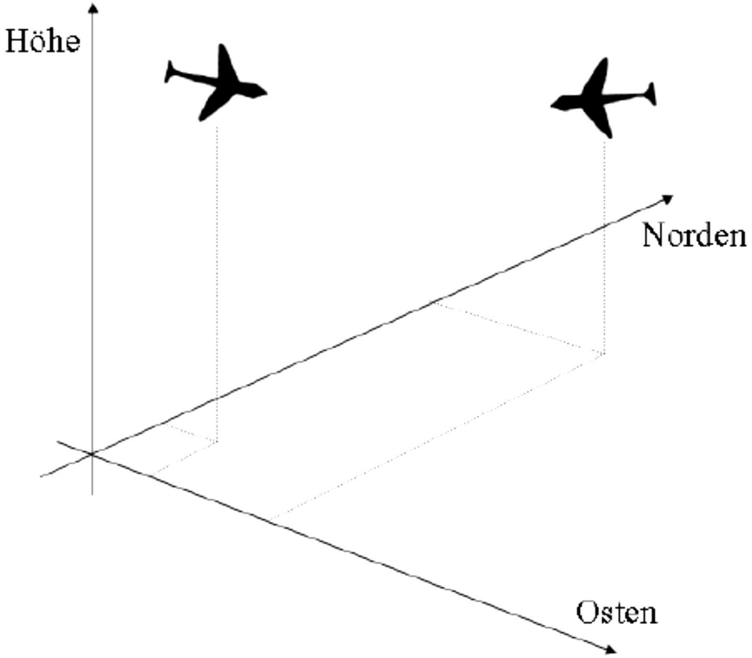
$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x-12)^4 - 5$$

Weigand, H.-G. (2006). Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe – Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27*(2), 103.

Prüfungsaufgabe – Typ (2) und (3)

Problem | Flugsicherheit

„Glück gehabt!?“, denkt sich Herr Falk, der Fotograf dieser beiden Kondensstreifen. Gegen 11 Uhr morgens, in einem Abstand von nur wenigen Sekunden, ziehen zwei Flugzeuge am Himmel vorbei. Die Bahnen der beiden Flugzeuge scheinen sich zu kreuzen und wäre die erste Maschine nur etwas später gekommen, dann wäre eine Kollision wohl nicht zu verhindern gewesen?



 Hußmann, S. (2003). Mathematik entdecken und erforschen. Berlin: Cornelsen, 122

Prüfungsaufgabe – Typ (2) und (3)

Neben dem Piloten tragen Fluglotsen die Verantwortung für die Flugzeuge. Sie sind während des gesamten Fluges über den Flugweg informiert. Mit Hilfe von Radarantennen, die im ganzen Bundesgebiet verteilt sind, wird die Flugstrecke überwacht. Die Antennen messen in zeitlichen Abständen die Entfernung des Flugzeuges zur Antenne, die Höhe des Flugzeuges und die Richtung als Winkel. Die Daten werden vom Computer in drei Koordinaten - Norden, Osten, Höhe - (jeweils in Meter) übersetzt. Das ermöglicht eine Darstellung auf dem Monitor.

Auf Nachfrage erhält Herr Falk jeweils drei Orte für die beiden Flugzeuge:

Flugzeug/Zeit	**11:10:10**	**11:10:15**	**11:10:20**
Boeing 767-299	(80,112,10380)	(1102,978,10366)	(2132,1843,10370)
Douglas DC 10-30F	(-78, 2302,10045)	(988, 1103,10062)	(2054,-96,10079)

 Hußmann, S. (2003). Mathematik entdecken und erforschen. Berlin: Cornelsen, 122

Chancen des MMS-Einsatzes in Prüfungen

MMS als Katalysator

- weniger Kalkül → mehr Planung, Analyse und Argumentation
- mehr Realitätsorientierung und authentische Probleme
- mehr selbsttätiges, entdeckendes Arbeiten
- mehr kreatives und produktives Arbeiten

- **Prüfungseinsatz von MMS kann** (bei geeigneten Aufgaben)
  - Wertschätzung entsprechender Fähigkeiten verdeutlichen
  - Ergänzung bestehender Prüfungsformen durch eher prozessorientierte erfordern
  - Katalysator für eine reichhaltigere Unterrichtskultur sein (zentrale Prüfungen)

Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen. In U. Kortenkamp, A. Lambert & A. Zeimetz (Hrsg.), Computerwerkzeuge und Prüfungen – Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker.

Tagesablauf

Zeit	Inhalt
9:30-9:45	1. Begrüßung und Organisatorisches
9:45-10:45	2. / 3. Einführung Grundvorstellungen zur Ableitung
10:45-11:15	4. Erkundung und Reflexion von Lernumgebungen
11:15-11:30	Kaffeepause
11:30-12:30	5. Aufgabengestaltung und Grundvorstellungen
12:30-14:00	Mittagspause
14:00-14:30	**PMLG:** Eigene Aufgabe im Hinblick auf Grundvorstellungen adaptieren
14:30-15:00	6. Digitale Lernumgebungen und Werkzeuge
15:00-15:45	7. Aufgabenperspektiven – Auch mit Blick auf Prüfungen
15:45-16:00	**Kaffeepause**
16:00-17:00	**PMLG:** Anhand der Grobplanung Themen- & Rückmeldungsverantwortliche identifizieren Eigene Aufgabe zum Thema mit MMS-Einsatz konzipieren
17:00-17:30	Evaluation, Hausaufgabe: Thema ausarbeiten, Arbeitsweise in PMLGs, Tagesabschluss

PMLG Unterrichtsgrobplanung

Themenvergabe in den PMLGs

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Themenverantwortlicher

- Jede Person der PMLG ist verantwortlich für ein Thema des Halbjahrs
- Wdh. Funktionen, Grenzwert, Ableitung (ggf. aufteilen), Kurvendiskussion, Exponentialfunktionen
- Sammelt und erarbeitet Konzept, Material, Aufgaben zu GV und GeoGebra für Unterrichtsgang
- Ist Ansprechpartner/in für die anderen Multis der PMLG bei der Umsetzung im Unterricht
- Sammelt Rückmeldungen zur Umsetzung

ZWEI Themengutachter pro Thema

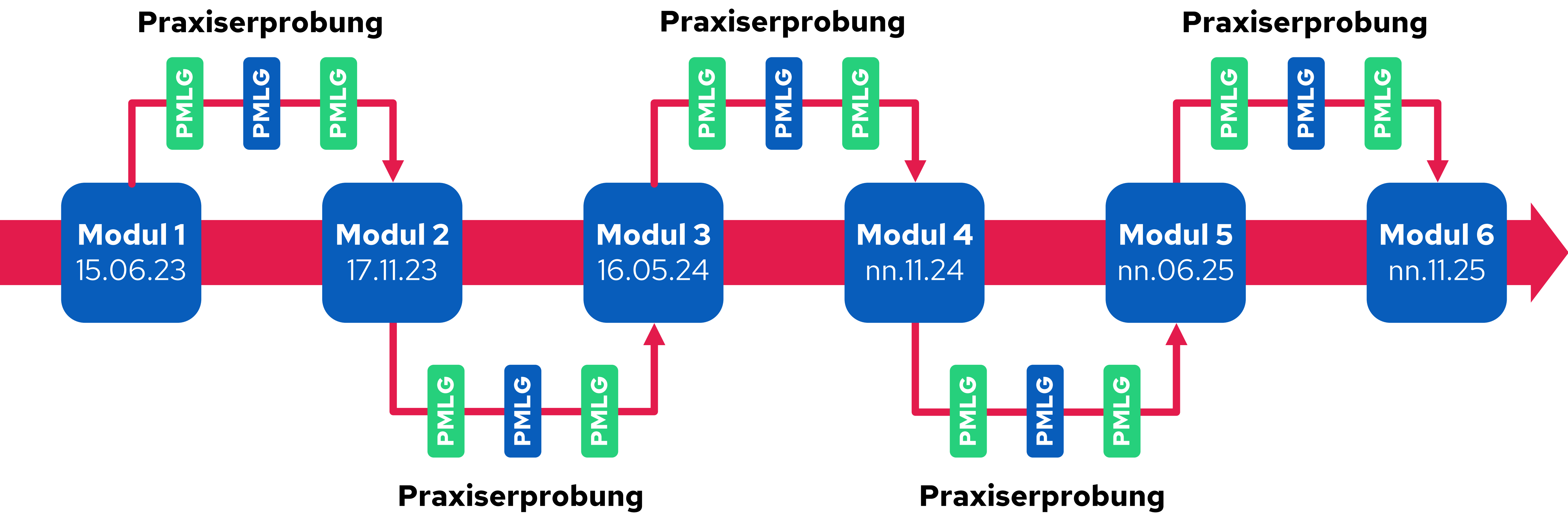
- Ergänzen und unterstützen
- Themenverantwortlicher stellt ihnen Konzept vor (Deadline)
- Geben Rückmeldung zu Material und Konzept des Themenverantwortlichen (Deadline)

ToDo jetzt

- Themen verteilen
  → Jede/r für ein Thema verantwortlich
  → Jede/r für zwei Themen Gutachter/in
- Deadline setzen für Vorstellungen
- Deadline setzen für Rückmeldungen

Multiplikator:innen-Qualifikation

Gesamter MSS-Durchlauf



Alle

In den drei Regionalsets **Nord**, **Mitte** und **Süd**

Multiplikator:innen-Qualifikation

Nächste Schritte

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Terminfindung in Regionalsets: Juli

Terminfindung alle: 11.-15.9. ODER 2.-6.10.

Terminfindung in Regionalsets: nach Herbstferien

PMLG

PMLG

PMLG

Unterrichtsplanung

Kursarbeiten

Passung

Deadline Themen-verantwortliche

Deadline Rück-meldung

Modul 1
15.06.23

Praxiserprobung

RPTU

Veranstaltungsfeedback

Rückmeldung zu den heutigen TOPs

- https://roth.tel/feedback/m1

  Gar nicht hilfreich **1** ... **10** Sehr hilfreich

Veranstaltungsfeedback

- https://roth.tel/feedback

Fragen (Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.)

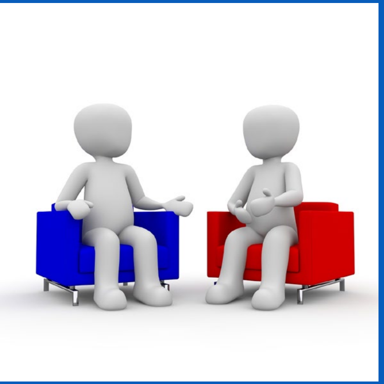
- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

- Was wünschen Sie sich für die Veranstaltung?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

MaTeGnu

A1 Ziele des Oberstufenunterrichts

Bildungsziele des Mathematikunterrichts



Kultur-historischer Aspekt

Erkenntnis-theoretischer Aspekt

Pragmatischer Aspekt

Schöpferischer Aspekt

Winter: Mathematikunterricht sollte drei Grunderfahrungen ermöglichen

Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, **in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen.**

Lesen Sie den Text von Winter!

Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, **als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenlernen und begreifen.**

In der Auseinandersetzung mit Aufgaben **Problemlösefähigkeiten erwerben**, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten).

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der DMV, 2, 35-41
http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/46/muundallgemeinbildung.pdf

Leitlinien

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

- **Leitlinie 1**
  Grund- und Leistungskurse bedürfen glei-chermaßen aller drei Grunderfahrungen. Leistungskurse dürfen sich nicht auf die zweite, Grundkurse nicht auf die erste Grunderfahrung beschränken.

- **Leitlinie 2**
  Jeder Lernbereich (Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik) muss seine verbindlichen Inhalte als exemplarischen Beitrag zur Integration dieser drei Grunderfahrungen legitimieren.

- **Leitlinie 3**
  Die Betonung heuristischer Denk- und Arbeitsweisen relativiert die Bedeutung der formalen Fachsprache als Träger mathematischer Kommunikation. Zur Stärkung der natürlichen Sprache im Mathematikunterricht gehört die Philosophie von der „Wiederentdeckung des Inhaltlichen in einer neuen Unterrichtskultur“.

Borneleit, Danckwerts, Henn, Weigand (2001). Expertise zum MU in der gymnasialen Oberstufe. *JMD, 22*(1), 73-90

Orientierung an fundamentalen Ideen

Fundamentale Ideen

- Messen
- funktionaler Zusammenhang
- Algorithmus
- Iteration
- Änderungsraten
- Optimieren
- räumliches Strukturieren
- Koordinatisieren
- Symmetrie
- Zufall und Wahrscheinlichkeit

Grundvorstellungen aufbauen

- kalkülorientierte Teile in Zeitaufwand und Wertigkeit zu Gunsten der inhaltlich orientierten Teile reduziert
- Begriffsbildung/Begründung: stärker inhaltlich argumentieren (nicht ausschließlich formal)
- Formale Ergebnisse immer auf Sinnhaftigkeit prüfen

Vernetzen

- vertikal
- horizontal

Borneleit, Danckwerts, Henn, Weigand (2001). Expertise zum MU in der gymnasialen Oberstufe. *JMD, 22*(1), 73-90

Grundvorstellung versus Kalkülorientierung

Idee und Bedeutung	Kalkülhaftes Arbeiten
Ableitung als Idee des Übergangs von der mittleren zur lokalen Änderungsrate	Bestimmen von Tangentensteigungen und Ableitungsfunktionen nach syntaktischen Regeln
Integral als Idee der Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Änderungsraten	Integrieren als Bestimmen von Flächeninhalten und Stammfunktionen nach syntaktischen Regeln
Idee der Approximation von Nullstellen durch das Newtonverfahren (oder ein anderes Iterationsverfahren) sowie die Analyse des Konvergenzverhaltens	Newtonverfahrens mit Taschenrechner oder Computer ausführen und Abbruchbedingungen „wenn sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert“
"Kurvendiskussion" als Analyse der Eigenschaften von Funktionen	"Kurvendiskussion" als Anwendung von Kalkülen auf Funktionen und Ableitungen
Geometrische Gebilde mit Hilfe analytischer Methoden darstellen	Formales Lösen von Gleichungssystemen
Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffe auf Alltagssituationen	Algorithmische Behandlung von Aufgaben in Urnenmodellen.

Borneleit, Danckwerts, Henn, Weigand (2001). Expertise zum MU in der gymnasialen Oberstufe. *JMD, 22*(1), 73-90

KMK-Bildungsstandards Abitur
Kompetenzbereiche

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Allgemeine mathematische Kompetenzen

[K1] Mathematisch argumentieren

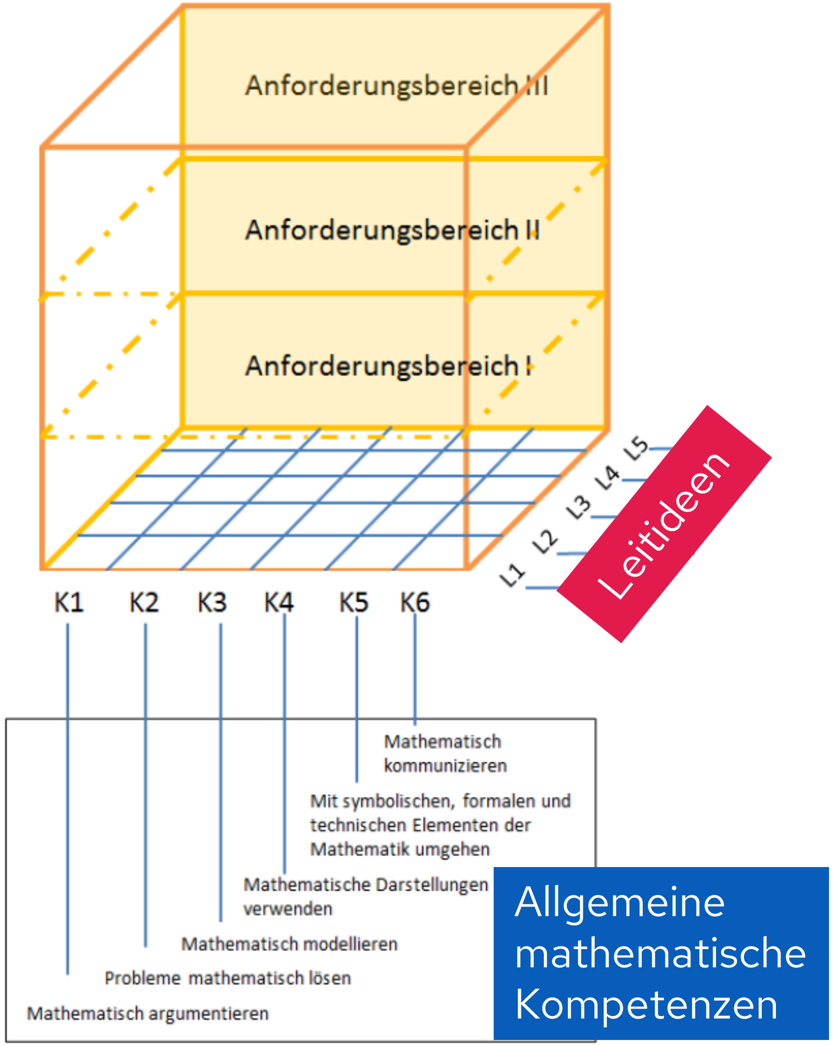
[K2] Probleme mathematisch lösen

[K3] Mathematisch modellieren

[K4] Mathematische Darstellungen verwenden

[K5] Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

[K6] Mathematisch kommunizieren



Leitideen

[L1] Algorithmus und Zahl

[L2] Messen

[L3] Raum und Form

[L4] Funktionaler Zusammenhang

[L5] Daten und Zufall

Kultusministerkonferenz (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.18.10.2012 https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

KMK-Bildungsstandards Sek. I
Kompetenzbereiche

Allgemeine mathematische Kompetenzen

[K1] Mathematisch argumentieren

[K2] Mathematisch kommunizieren

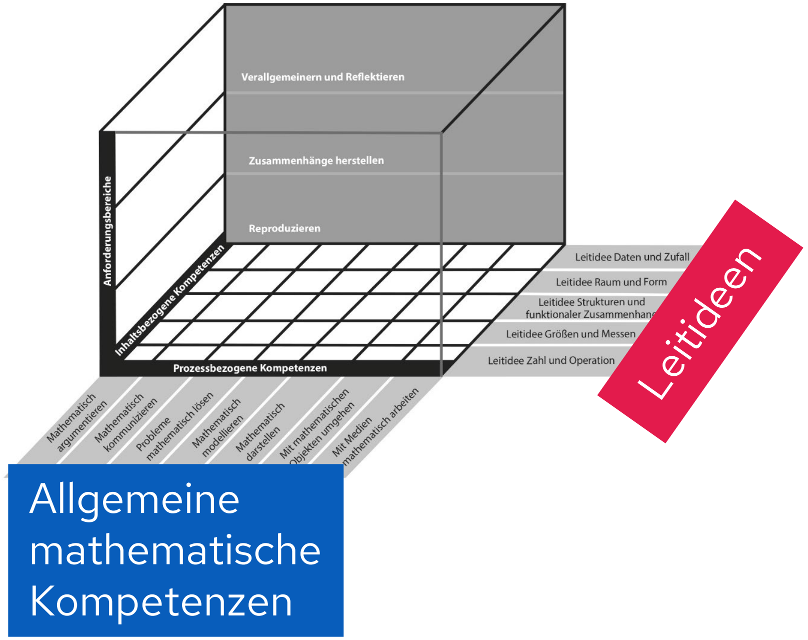
[K3] Probleme mathematisch lösen

[K4] Mathematisch modellieren

[K5] Mathematisch darstellen

[K6] Mit mathematischen Objekten umgehen

[K7] Mit Medien mathematisch arbeiten



Leitideen

[L1] Zahl und Operation

[L2] Größen und Messen

[L3] Strukturen und funktionaler Zusammenhang

[L4] Raum und Form

[L5] Daten und Zufall

Kultusministerkonferenz (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik – Erster (EAS) & Mittlerer Schulabschluss (MSA). 23.06.2022
https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

MaTeGnu

A_2

Folgen und Konvergenz

Definitionen

Definition

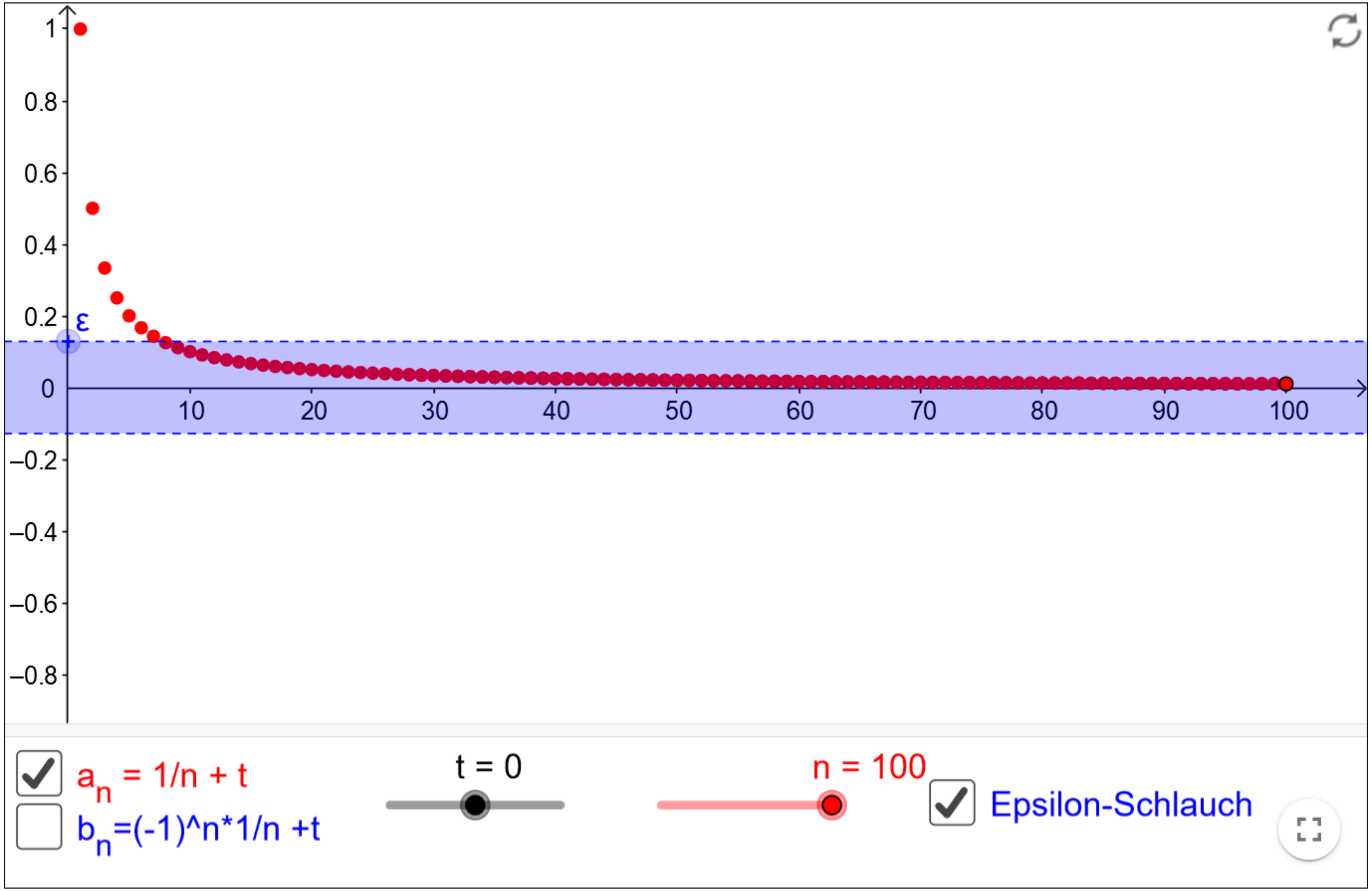
Eine **Folge** ist eine Funktion, die jedem Element der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ genau ein Element einer Zielmenge $\boldsymbol{Z}$ zuordnet.

$$\mathbb{N} \to \boldsymbol{Z}, n \mapsto a_n$$

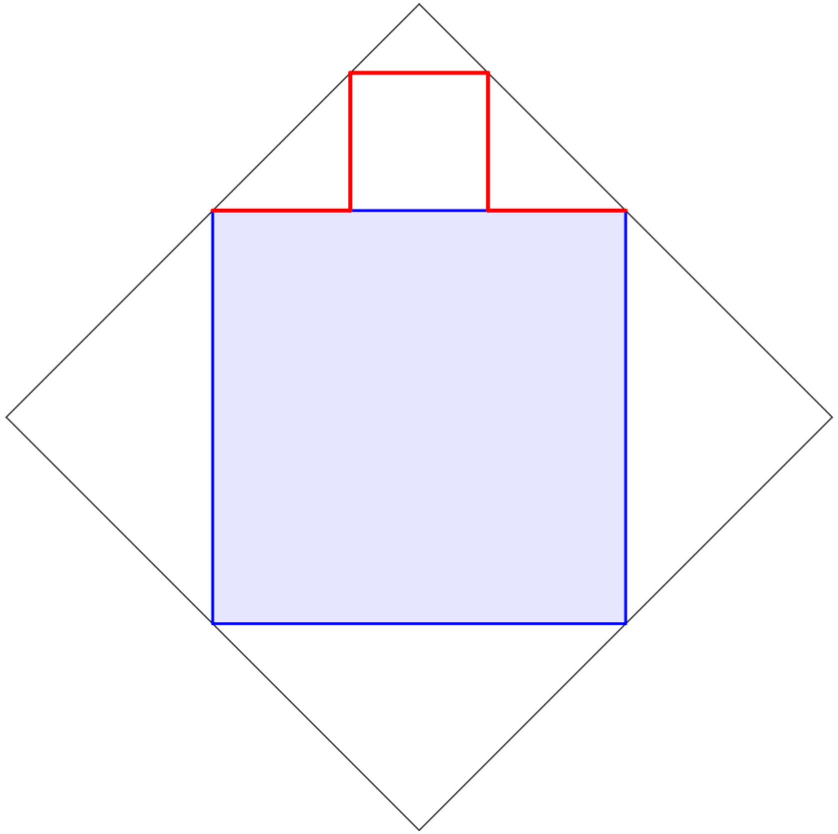
Definition

- Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent gegen a**, wenn es zu jeder Toleranz $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:
  $$|a_n - a| < \varepsilon$$
- a heißt dann **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt:
  $$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und ε-Schlauch



Konvergente und divergente Folgen



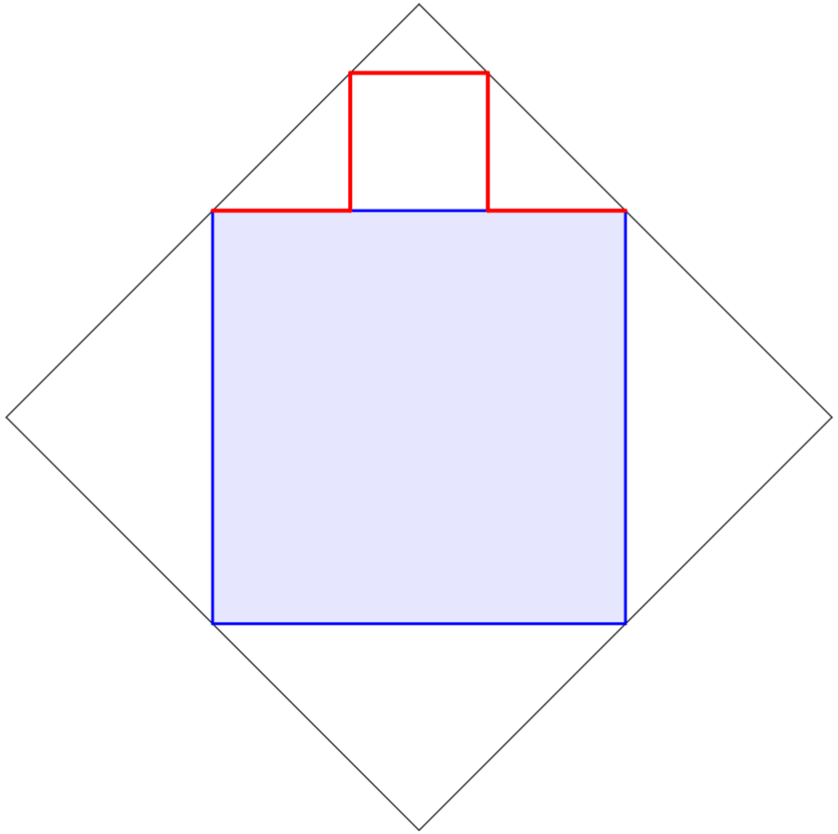
Folge aus Figuren

Die Figuren entstehen aus dem blauen Quadrat schrittweise wie folgt:

- Jede bisherige Kante der Länge a_n wird gedrittelt.
- Das mittlere Drittel wird parallel zur bisherigen Kante um $\frac{a_n}{3}$ nach außen verschoben.
- Durch die Ergänzung von zwei weiteren Kanten der Länge $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$ bei $\frac{1}{3}a_n$ bzw. $\frac{2}{3}a_n$, die senkrecht auf der alten Kante stehen, wird die Figur geschlossen.
- Dadurch ergibt sich je alter Kante a_n eine neue Teilfläche $a_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n}{3}\right)^2$.
- Zudem wird dadurch jede alte Kante a_n durch fünf neue Kanten a_{n+1} ersetzt.

https://www.geogebra.org/m/jythrpug

Konvergente und divergente Folgen



https://www.geogebra.org/m/jythrpug

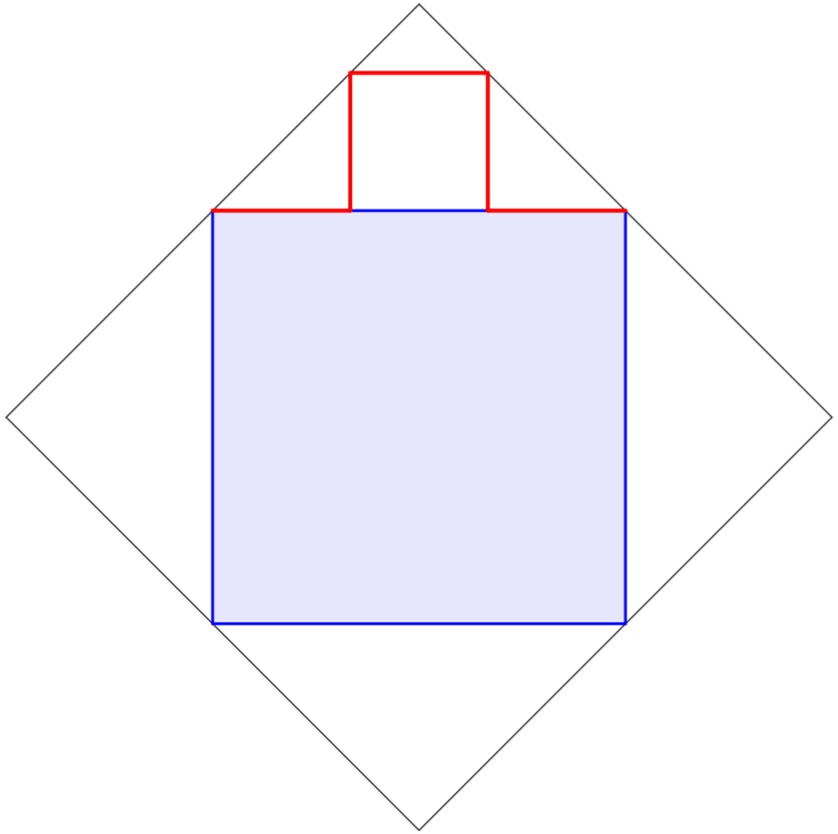
Folge U_n der Umfänge

- $U_0 = 4 \cdot a = 4 \cdot 1\text{ cm} = 4\text{ cm}$
- $U_1 = U_0 + \frac{2}{3} \cdot U_0 = U_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = U_0 \cdot \frac{5}{3}$
- $U_2 = U_1 \cdot \frac{5}{3} = \left(U_0 \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{5}{3} = U_0 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2$
- $U_n = U_0 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Folge A_n der Flächeninhalte

- $A_0 = a^2 = (1\text{ cm})^2 = 1\text{ cm}^2$
- $A_1 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot a^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3^2}\right)$
- $A_2 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{a}{3^2}\right)^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3^2} + \frac{4 \cdot 5}{(3^2)^2}\right)$
- $A_3 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 5^0}{(3^1)^2} + \frac{4 \cdot 5^1}{(3^2)^2} + \frac{4 \cdot 5^2}{(3^3)^2}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{3} \frac{(4 \cdot 5^{k-1})}{3^{2 \cdot k}}\right)$
- $A_n = a^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(4 \cdot 5^{k-1})}{3^{2 \cdot k}}\right) = a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{5^{k-1}}{3^{2 \cdot k}}\right)$

Konvergente und divergente Folgen



Folge A_n der Flächeninhalte (einfachere Darstellung)

$$A_n = a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{5^{k-1}}{3^{2\cdot k}}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{5^k}{3^{2\cdot k}}\right)\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5^k}{9^k}\right)\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \left[\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k\right) - \left(\frac{5}{9}\right)^0\right]\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^k}_{\text{geom. Reihe}} - \frac{4}{5}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{9}} - \frac{4}{5}\right)$$

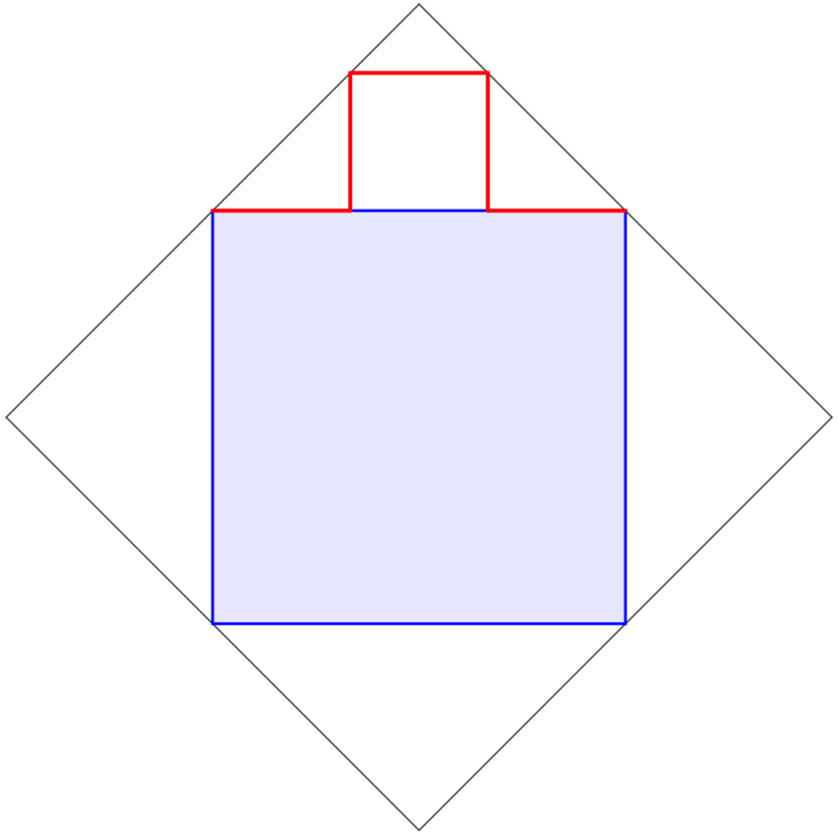
$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}\right) - \frac{4}{5}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 + \frac{9}{5} - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1} - \frac{4}{5}\right) = a^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{5} - \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$$

 https://www.geogebra.org/m/jythrpug

Konvergente und divergente Folgen



Konvergenzverhalten

- **Folge U_n der Umfänge divergiert für $n \to \infty$**

$$U_n = 4 \cdot a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot a \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{5}{3}}_{>1}\right)^n}_{\to\infty \text{ für } n\to\infty} = \infty$$

- **Folge A_n der Flächeninhalte konvergiert für $n \to \infty$**

$$A_n = a^2 \cdot \left(2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a^2 \cdot \left(2 - \underbrace{\left(\underbrace{\frac{5}{9}}_{0<\frac{5}{9}<1}\right)^n}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}\right) = a^2 \cdot 2$$

https://www.geogebra.org/m/jythrpug

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Annäherungsvorstellung
Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Umgebungsvorstellung
Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

Objektvorstellung
Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte – angesehen, die durch eine Folge – etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischen Objekten – konstruiert oder definiert werden.

Vgl. Greefrath, G. et al. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer Spektrum, 103-107

Verbalisierungen für Grenzprozesse

Konvergenz der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Sprechweisen

(1) „$\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 beliebig nahe."

(2) „$\frac{1}{n}$ strebt gegen 0 für n gegen ∞."

(3) „$\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher."

(4) „$\frac{1}{n}$ kommt der 0 immer näher, ohne sie jemals zu erreichen."

Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung

Welche Sprechweisen sind geeignet?

(1) Ohne Einschränkung geeignet.

(2) Ohne Einschränkung geeignet.

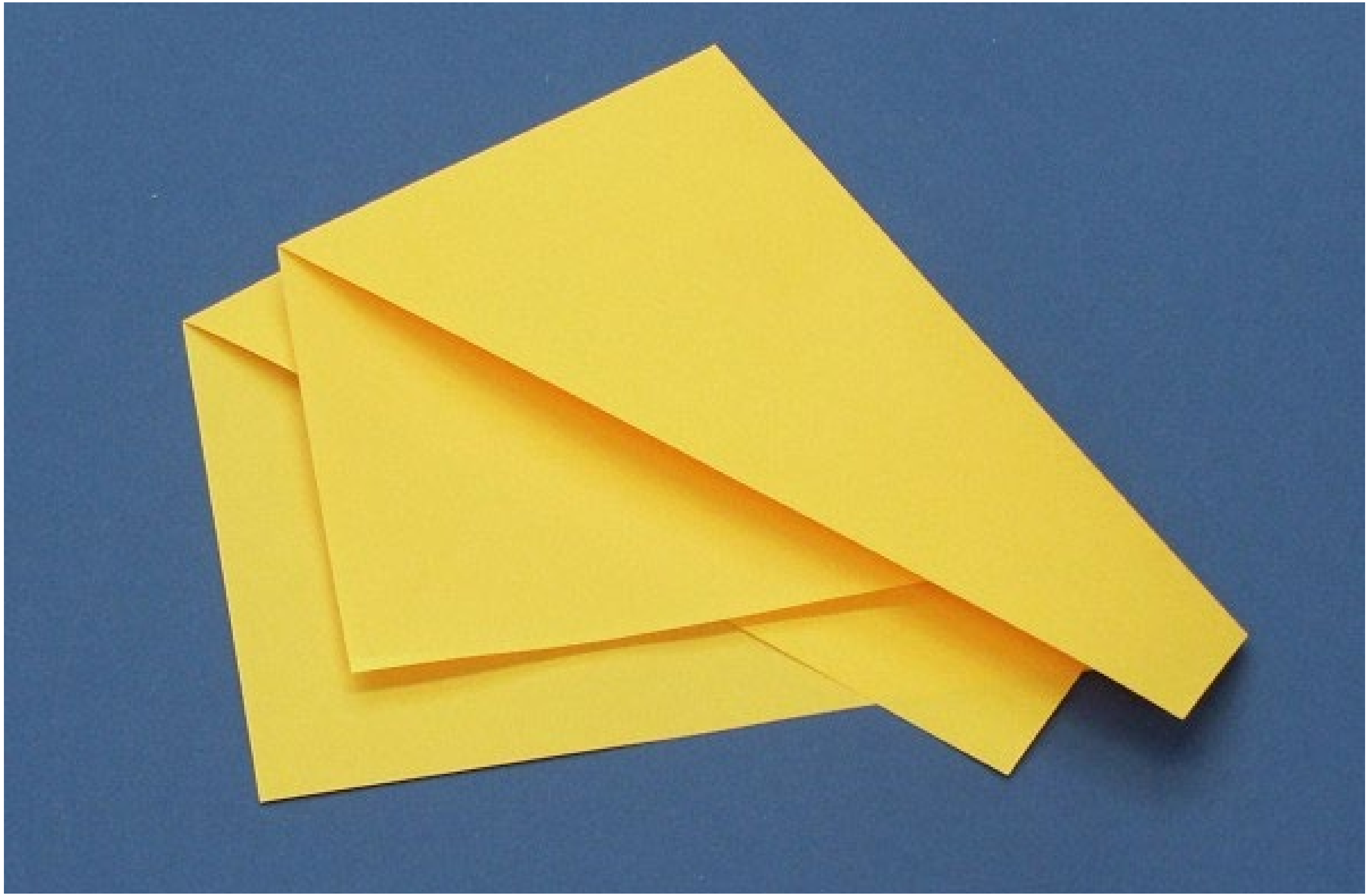
(3) Problematisch! $\frac{1}{n}$ kommt auch der -1 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. (1))!

(4) Grenze zur inhaltlichen Verfälschung deutlich überschritten!
Auch konstante Folgen sind konvergent!

A_3 Exponentialfunktion

MaTeGnu

Papier falten



Papier falten

Problem

- Ein DIN A0 Blatt wird 20-mal gefaltet.
- Wie dick ist das gefaltete Papier?

Experiment

- Messen
  - 50 Blatt Papier sind 5,25 mm hoch.
  - Dicke eines Blatts: $d_0 = 0{,}105\ \mathrm{mm}$
- 1-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(1)} = d_0 \cdot 2 \boldsymbol{= d_0 \cdot 2^1}$
- 2-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(2)} = d(1) \cdot 2$
    $= d_0 \cdot 2 \cdot 2 \boldsymbol{= d_0 \cdot 2^2}$
- 3-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(3)} = d(2) \cdot 2$
    $= d_0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
    $\boldsymbol{= d_0 \cdot 2^3}$
- n-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(n) = d_0 \cdot 2^n}$

Vgl. Zellteilung!

Dicke des gefalteten Papiers

- $d(20) = d_0 \cdot 2^{20}$
  $= 0{,}105\ \mathrm{mm} \cdot 2^{20}$
  $= 110.100{,}48\ \mathrm{mm}$
  $\approx 110\ \mathrm{m}$

Erbschaft

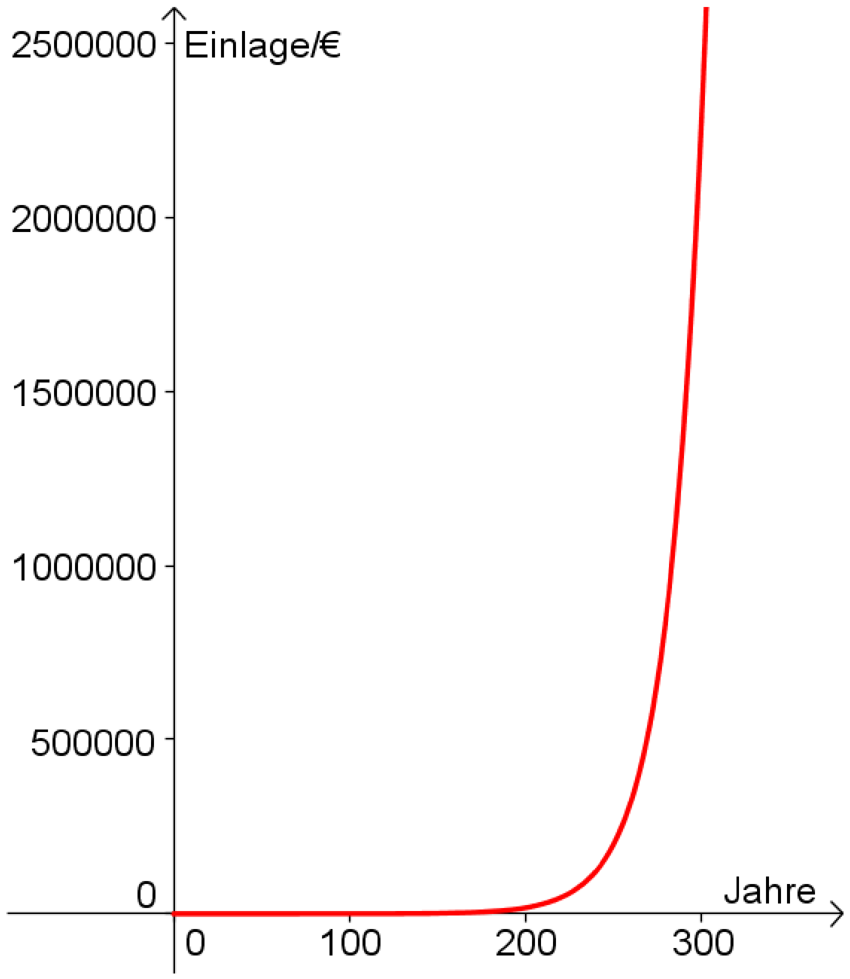
Netter Vorfahre

- Ein Mann legt 1 € festverzinslich zu einem jährlichen Zinssatz von 5 % für 300 Jahre an.
- Wie viel Geld erhält ein Erbe nach 300 Jahren?
- $1\,€ \cdot 1{,}05^{300} \approx 2.273.996{,}13\,€$

+50 +50 +50 +50 +50 +50

Jahr	0	50	100	150	200	250	300
Einlage	1,00 €	11,47 €	131,50 €	1.507,98 €	17.292,58 €	198.300,94 €	2.273.996,13 €

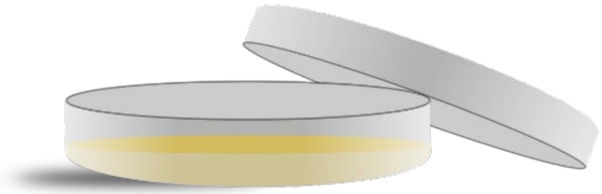
$\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$



Zellsterben

Problem:

- In einer Schale befinden sich 80.000 Zellen. Es wirkt ein Zellgift, durch das (idealisiert) pro Zeiteinheit 15 % der Zellen sterben.
- Gesucht:
  Anzahl der Zellen in Abhängigkeit von der Zeit



Zeitpunkt $t_0 = 0$:

- $N_0 = N(t_0) = N(0) = 80.000$

Zeitpunkt $t_1 = 1$:

- $N(t_1) = N_0 \cdot 0{,}85$

Zeitpunkt $t_2 = 2$:

- $N(t_2) = N(t_1) \cdot 0{,}85$
  $= (N_0 \cdot 0{,}85) \cdot 0{,}85$
  $= N_0 \cdot 0{,}85^2$

Zeitpunkt $t_3 = 3$:

- $N(t_3) = N(t_2) \cdot 0{,}85$
  $= \left(N_0 \cdot 0{,}85^2\right) \cdot 0{,}85$
  $= N_0 \cdot 0{,}85^3$

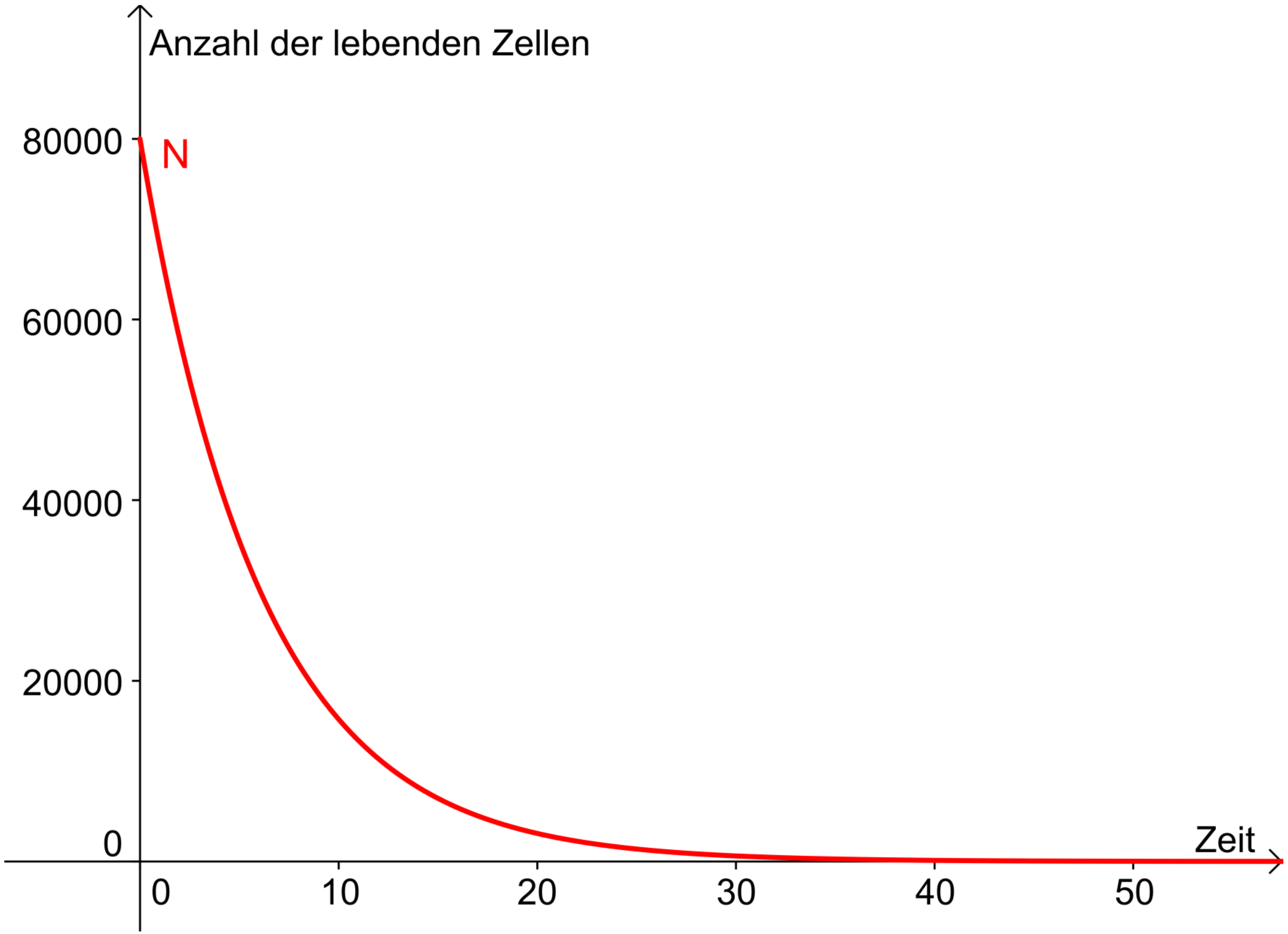
Zeitpunkt $t_n = n$:

- $N(t_n) = N_0 \cdot 0{,}85^n$

Allgemein

- $N(t) = N_0 \cdot 0{,}85^t$

Zellsterben



 https://www.geogebra.org/m/dsdB4YuG

Exponentialfunktionen

Definition

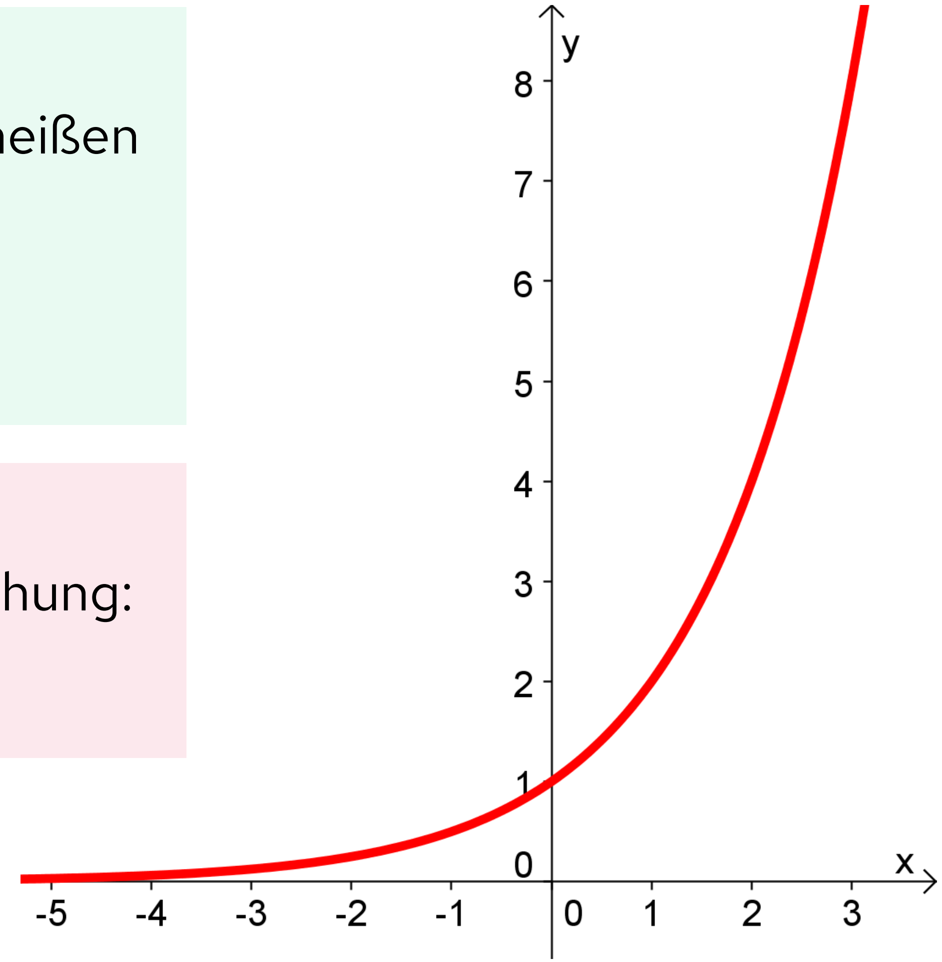
Funktionen der Bauart $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißen **Exponentialfunktionen**.

Häufig werden Exponentialfunktionen zur Basis a auch als $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \exp_a(x) = a^x$ geschrieben.

Satz

Exponentialfunktionen genügen folgender Funktionalgleichung:

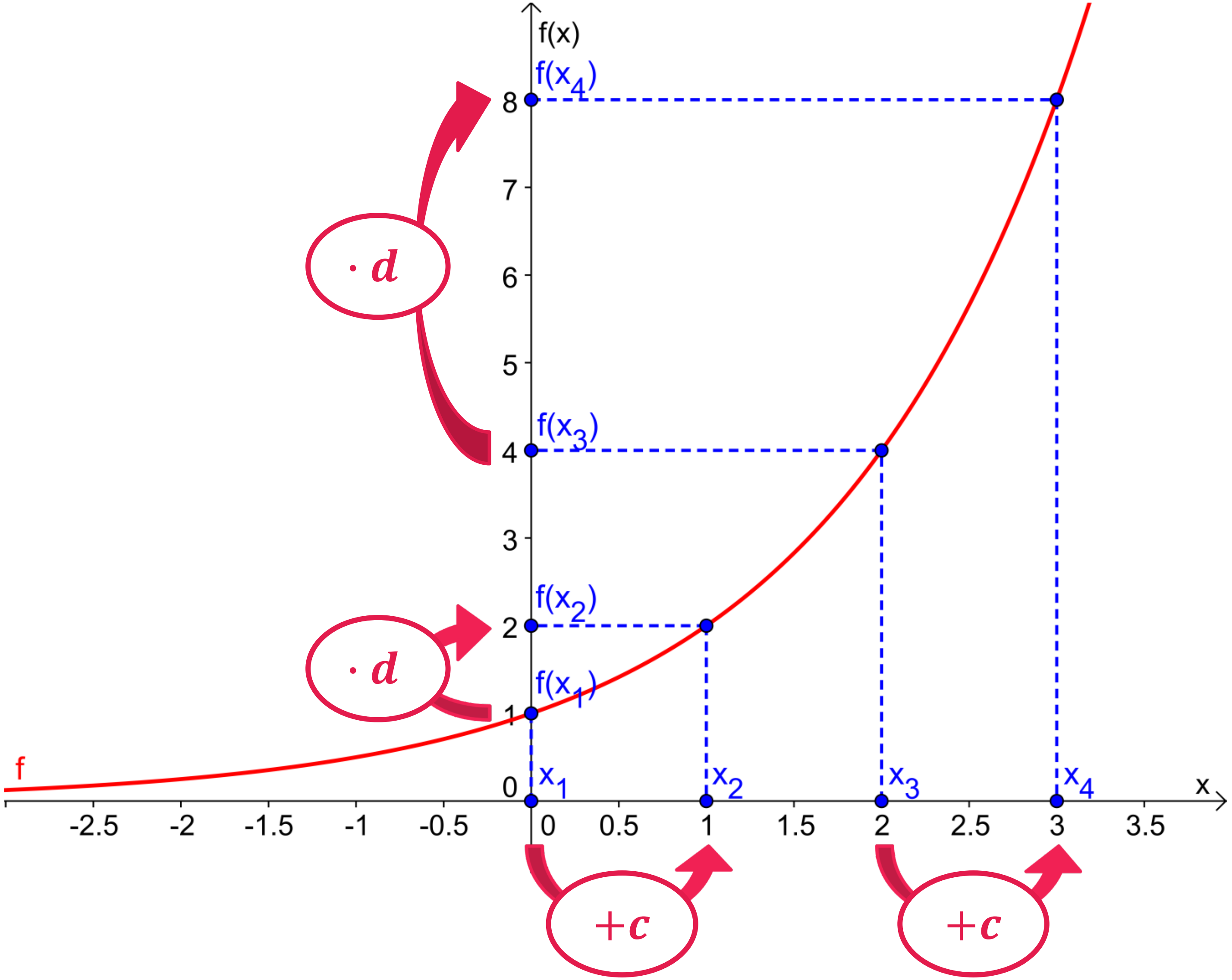
$$\forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}}\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$



Beweisidee

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} \overset{\text{Potenzgesetze}}{\triangleq} a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

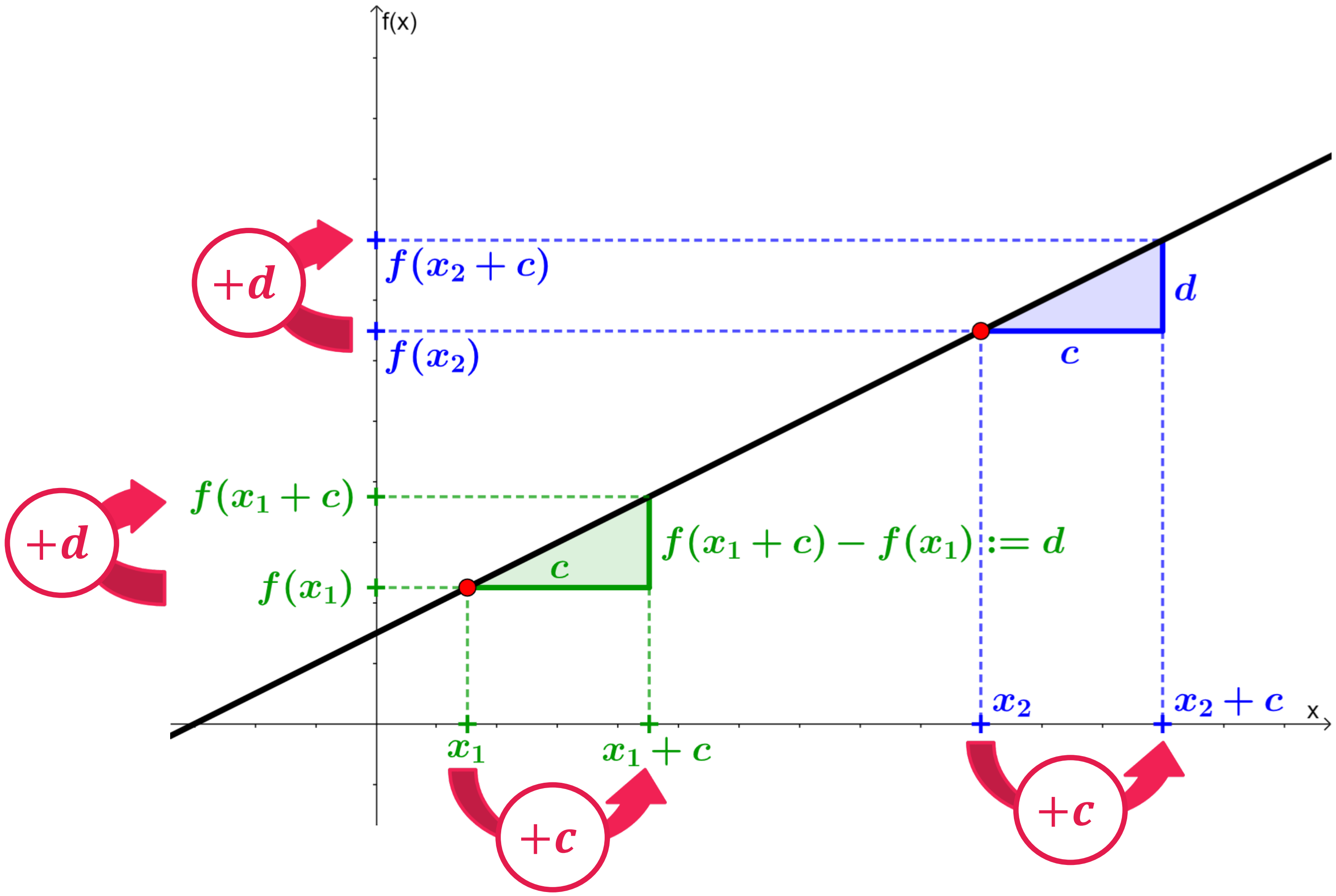
Exponentialfunktionen



$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto f(x) = a^x$

$$
\begin{aligned}
f(x+c) &= a^{x+c} \\
&= \underbrace{a^x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{a^c}_{:=d} \\
&= f(x) \cdot d
\end{aligned}
$$

Lineare Funktionen



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = a \cdot x + b$$

$$f(x+c)$$

$$= a \cdot (x+c) + b$$

$$= \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

Exponentialfunktionen & lineare Funktionen
Charakteristische Eigenschaften

Funktionsgleichung Exponentialfunktion
Die Funktionsgleichung einer Exponential-funktion hat die Form $f(x) = a^x$.

Funktionalgleichung Exponentialfunktion
Bei Exponentialfunktionen gehört zu gleichen additiven Zuwächsen im Argument immer der gleiche Wachstumsfaktor.

Wird also bei einer Exponentialfunktion das Argument um den gleichen Wert $(+c)$ vergrößert, dann nimmt der Funktionswert um den gleichen Faktor $(\cdot\, d)$ zu.

$$\begin{aligned} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x+c) &= a^{x+c} \\ &= \underbrace{a^x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{a^c}_{:=d} = f(x)\cdot d \end{aligned}$$

Funktionsgleichung lineare Funktion
Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion hat die Form $f(x) = a \cdot x + b$.

Funktionalgleichung lineare Funktion
Bei linearen Funktionen gehört zu gleichen additiven Zuwächsen im Argument immer der gleiche Wachstumssummand.

Wird also bei einer linearen Funktion das Argument um den gleichen Wert $(+c)$ vergrößert, dann nimmt der Funktionswert um den gleichen Summanden $(+d)$ zu.

$$\begin{aligned} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x+c) &= a\cdot(x+c)+b \\ &= \underbrace{a\cdot x+b}_{=f(x)} + \underbrace{a\cdot c}_{:=d} = f(x)+d \end{aligned}$$

Präsenzübung: Änderungsverhalten

Betrachten Sie die

Exponentialfunktion
$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a^x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

und die

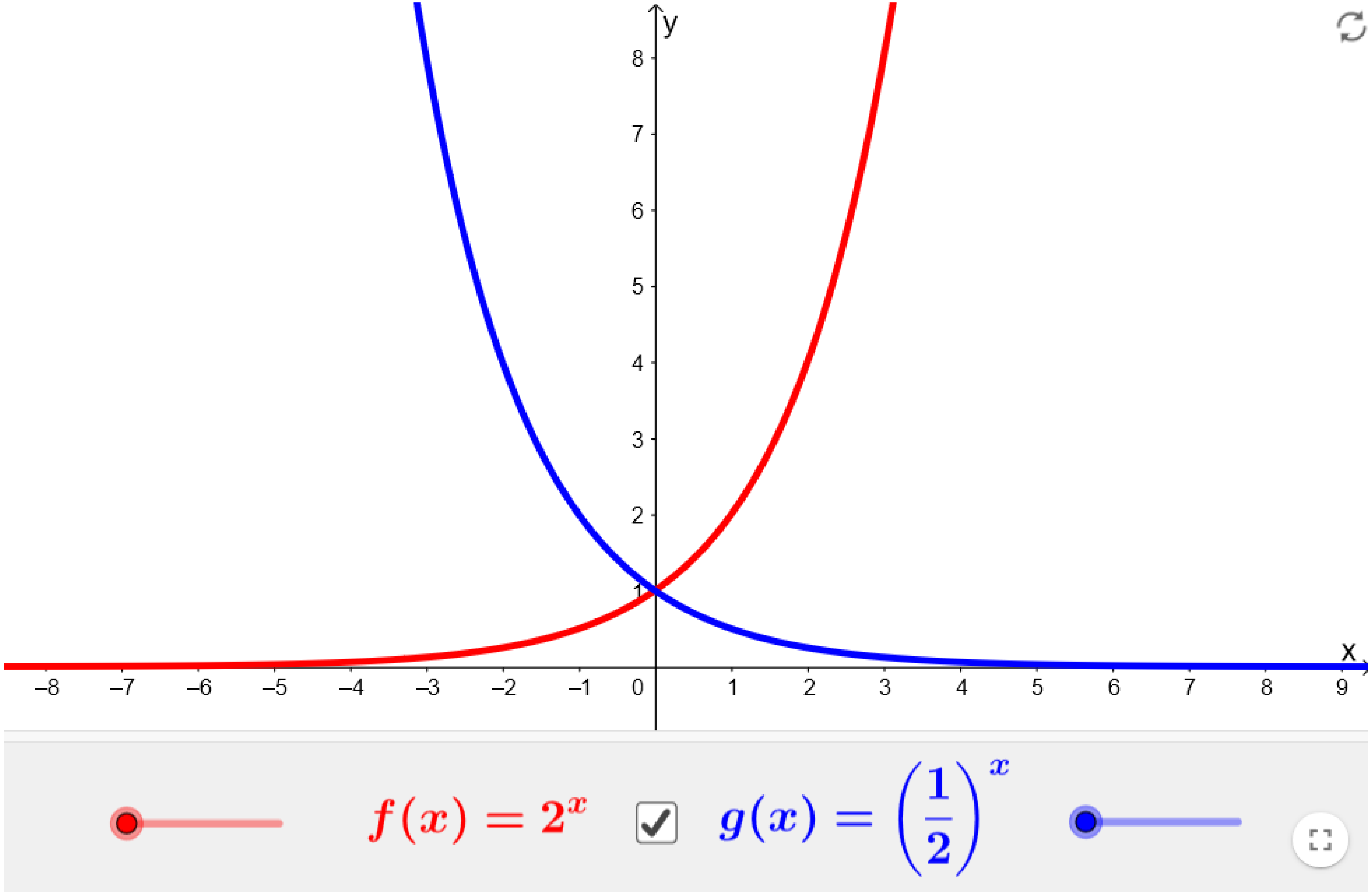
proportionale Funktion
$\boldsymbol{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}$

unter dem Kovariationsaspekt.

Wie ändert sich jeweils der Funktionswert, wenn man

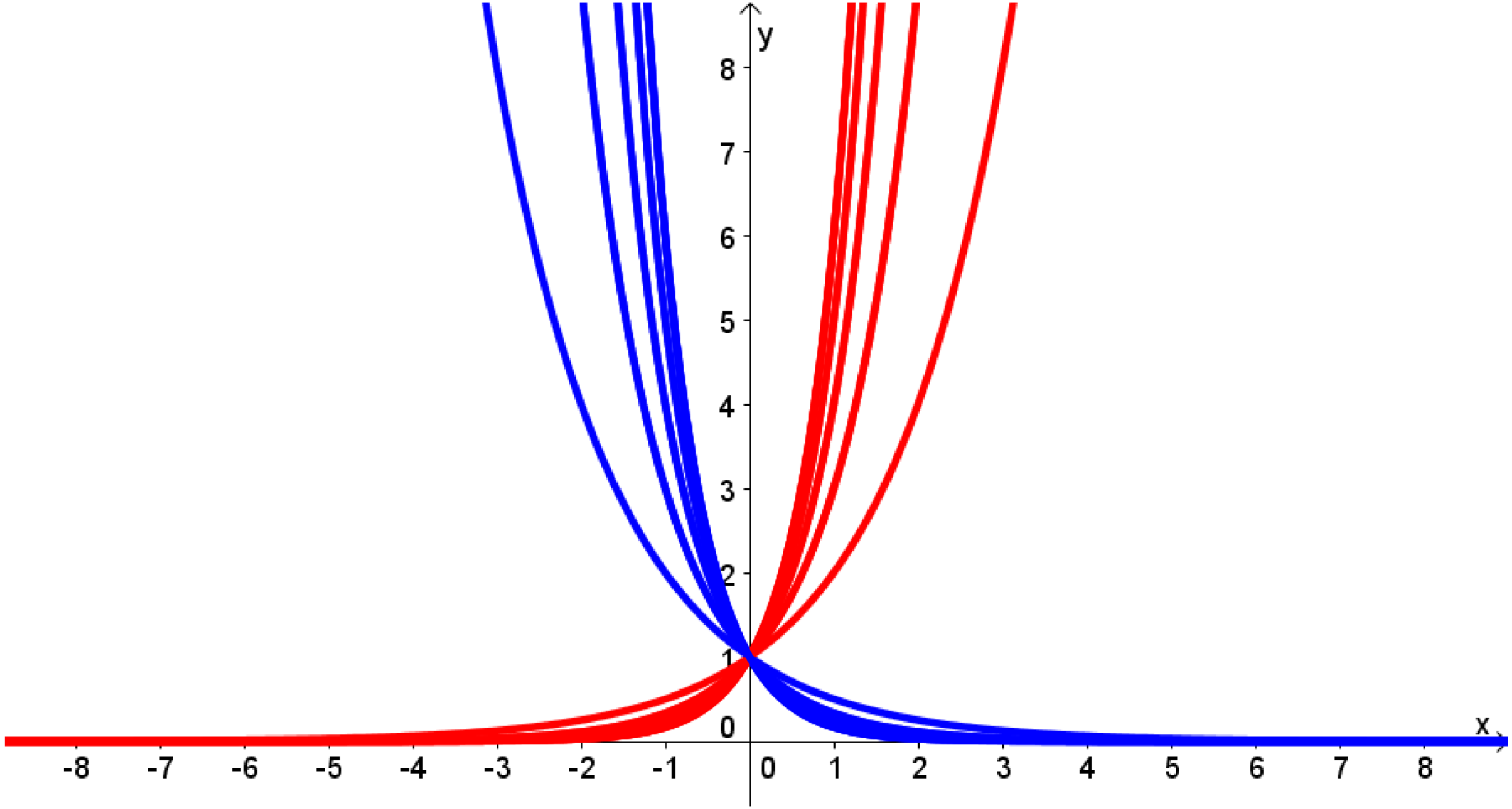
- x um 1 vergrößert,
- x um 2 verkleinert,
- x verdoppelt,
- x halbiert,
- x mit 3 multipliziert,
- x durch 3 dividiert,
- x quadriert?

Graphen von Exponentialfunktionen



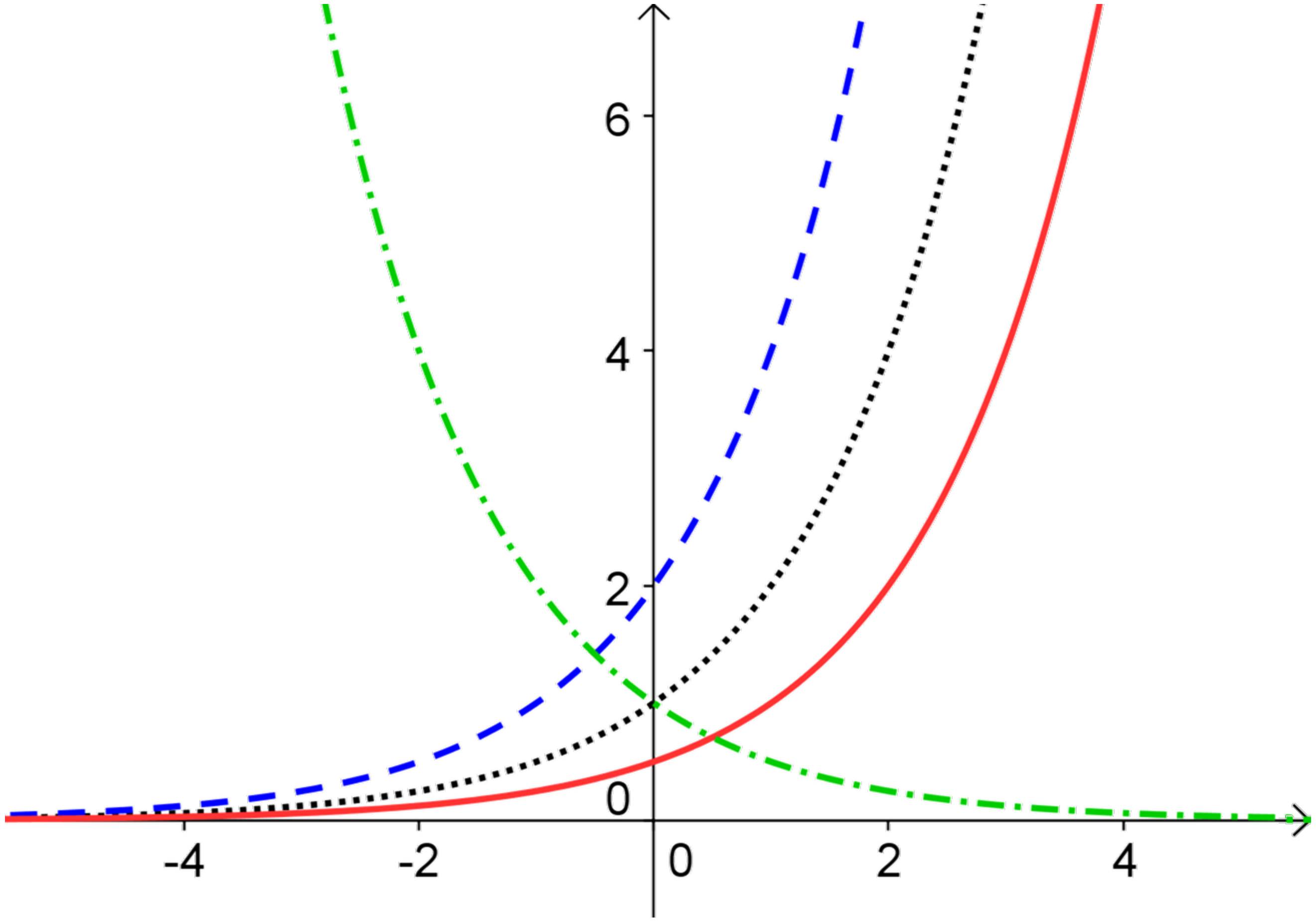
 https://www.geogebra.org/m/X5DyaUSA

Graphen von Exponentialfunktionen



Die Graphen der Funktionen $x \mapsto a^x$ und $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$
sind zueinander achsensymmerisch bzgl. der y-Achse.

Präsenzaufgabe:
Parameter und Funktionsgraphen



Es gilt: $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$$

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$$

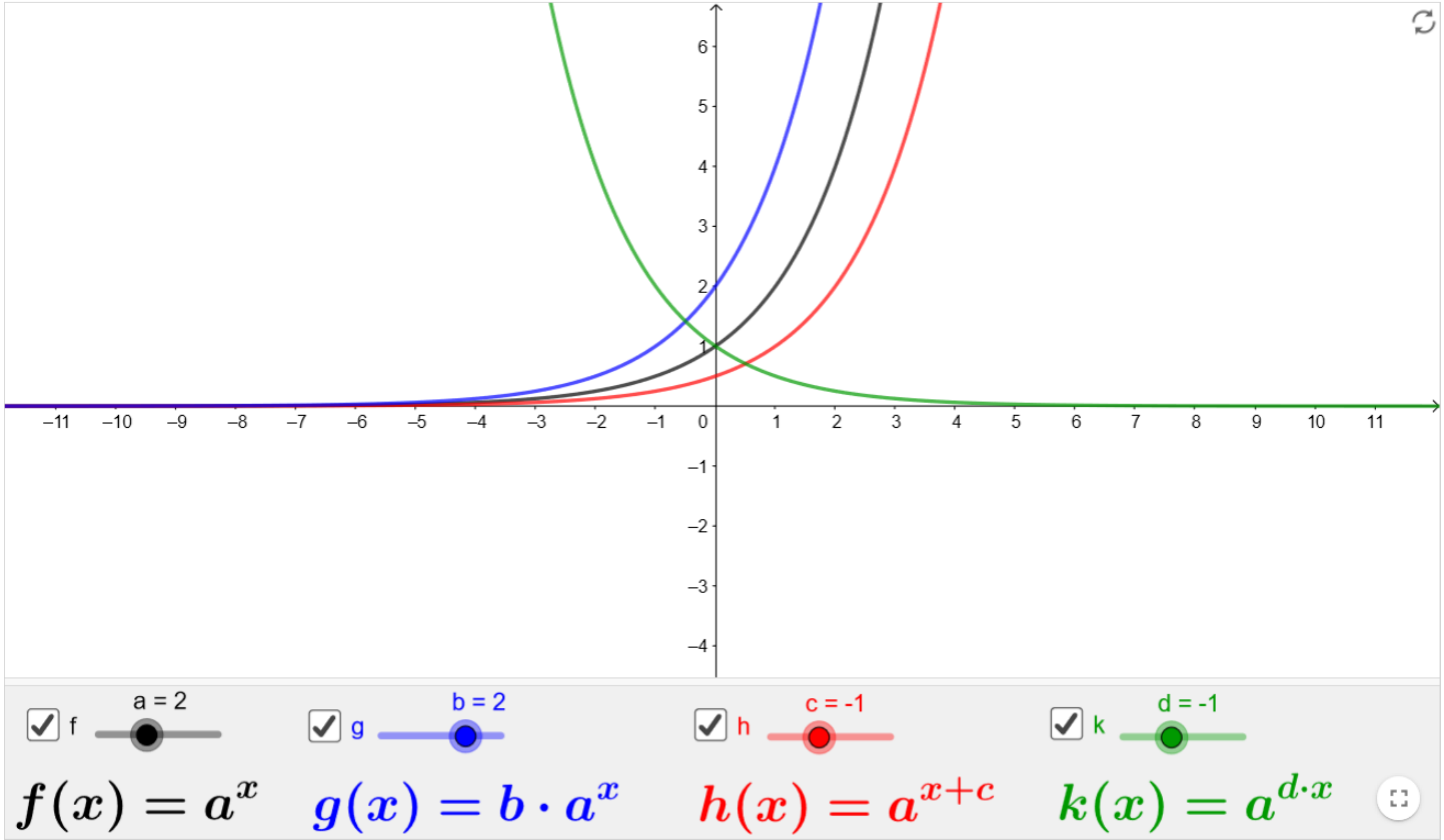
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$$

$$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$$

- Wie wirkt sich eine Veränderung der Parameter a, b, c und d auf die Graphen der jeweiligen Funktionen aus?
- Vergleichen Sie die Graphen der vier Funktionen für verschiedene Werte von b, c und d. Gibt es Werte, so dass jeweils zwei Funktionsgraphen übereinstimmen?

 https://www.geogebra.org/m/nvqzzuye

Präsenzübung



Es gilt:
$a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$

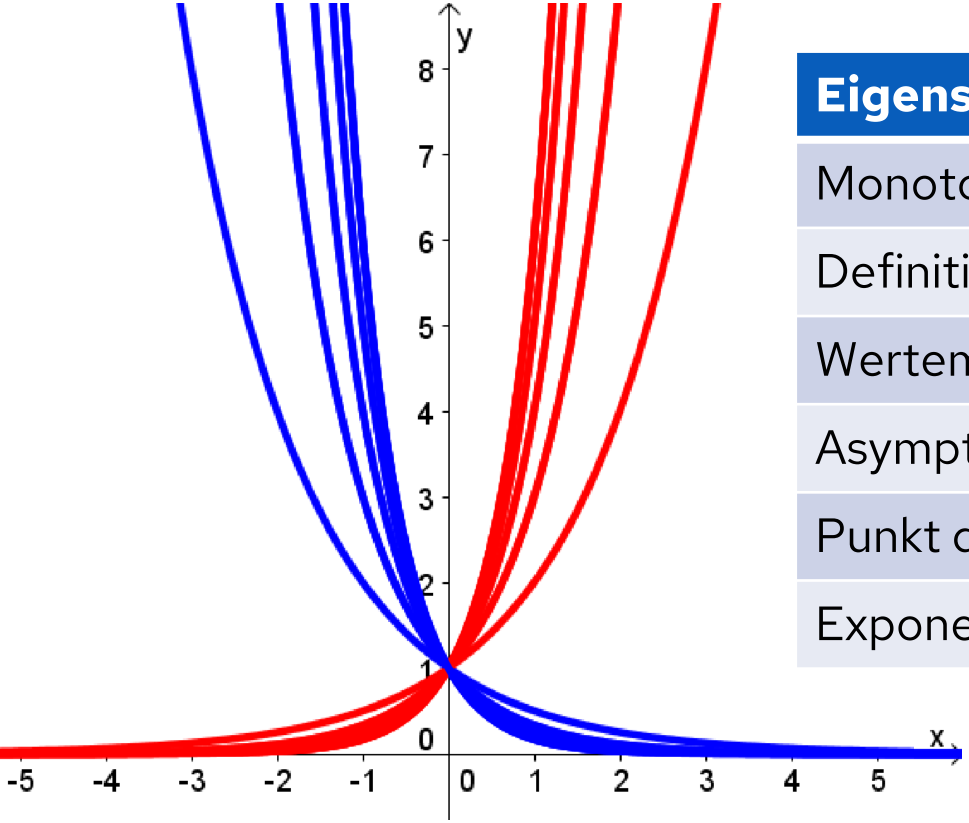
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$

$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$

Eigenschaften von $x \mapsto a^x$



Eigenschaft	$a > 1$	$0 < a < 1$
Monotonie		
Definitionsmenge $\mathbb{D}$		
Wertemenge $\mathbb{W}$		
Asymptote		
Punkt des Graphen		
Exponentielle(s)		

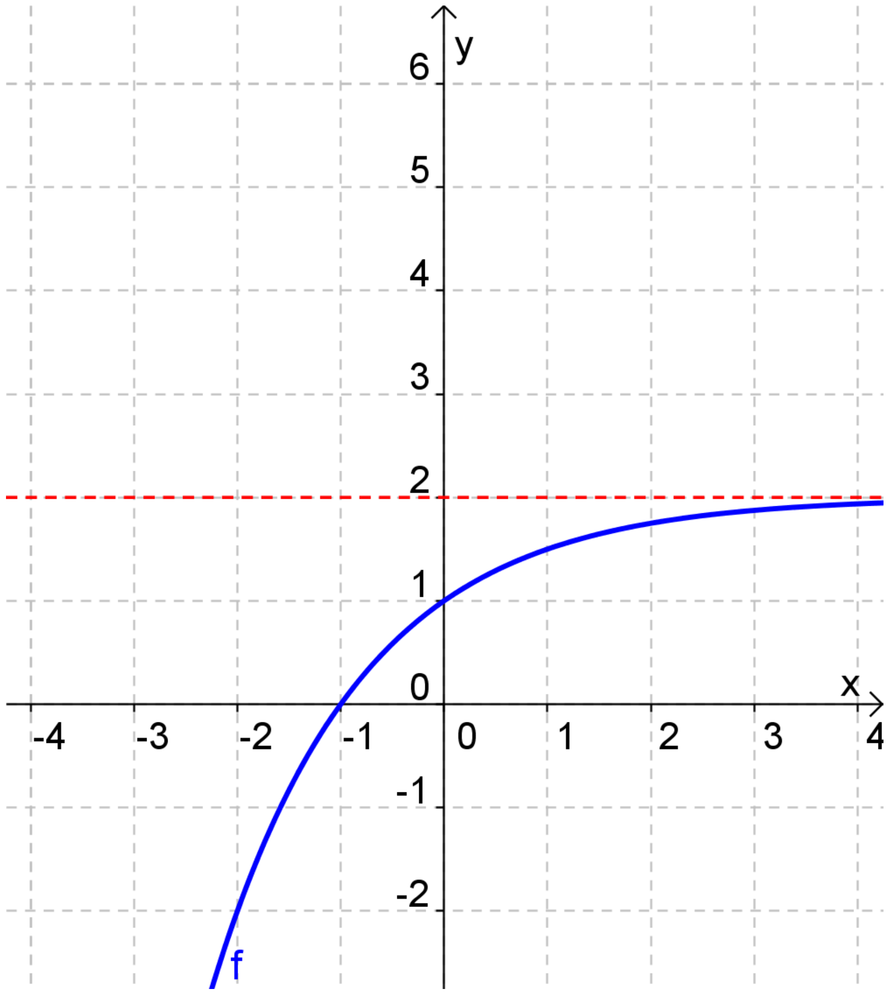
Präsenzaufgabe: Prozentuale Zunahme/Abnahme $\leftrightarrow$ Wachstumsfaktor

Ergänzen Sie die Tabelle.

prozentuale Zunahme / Abnahme pro Einheit	Wachstumsfaktor	Anfangsbestand	Funktionsterm
$-8\,\%$	$0{,}92$	6	$6 \cdot 0{,}92^x$
	$1{,}4$	40	
$120\,\%$			$6{,}3 \cdot S^x$
			$32 \cdot 0{,}58^x$

Präsenzaufgabe:
Parameter und Funktionsgraphen

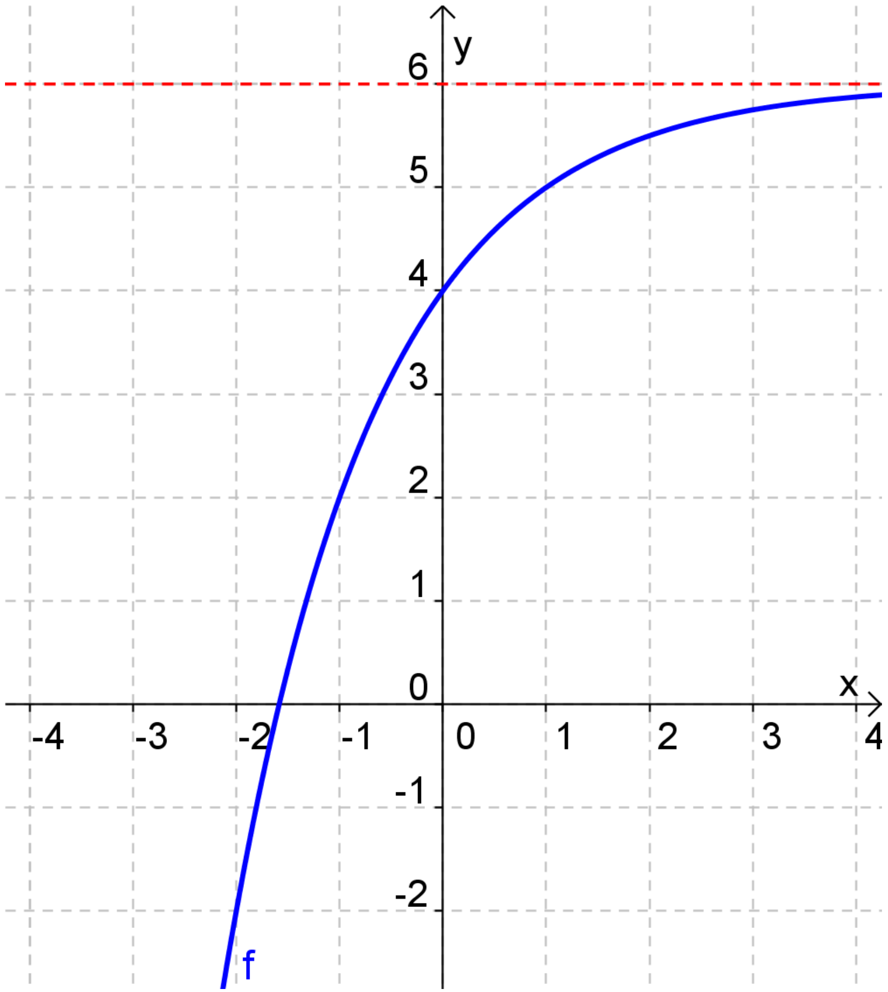
R P TU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Die abgebildeten Graphen gehören zu Funktionen folgenden Typs:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{b \cdot x + c} + d$$

Bestimmen Sie jeweils die Parameter a, b, c und d.



 https://www.geogebra.org/m/ecJJXVuN

Lineares und exponentielles Wachstum

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Baggersee

- Ein See mit einer Oberfläche von zunächst $500\ \mathrm{m}^2$ wird in einer Flussniederung ausgebaggert. Die Oberfläche vergrößert sich dadurch in jeder Woche um $200\ \mathrm{m}^2$.
- Der See wird von einer Seerosenart besiedelt, die zu Beginn der Baggerarbeiten $10\ \mathrm{m}^2$ der Oberfläche des Sees bedecken. Die Seerosen vermehren sich derart, dass sich die von ihnen bedeckte Fläche in jeder Woche verdoppelt.
- Nach wie vielen Wochen ist der ganze See mit Seerosen bedeckt?

Lineares und exponentielles Wachstum

Anzahl der Wochen	Seefläche in m²
0	500
1	700
2	900
3	1100
4	1300
5	1500
6	1700
7	1900
8	2100
x	$500 + 200 \cdot x$

+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

+200 +200 +200 +200 +200 +200 +200 +200

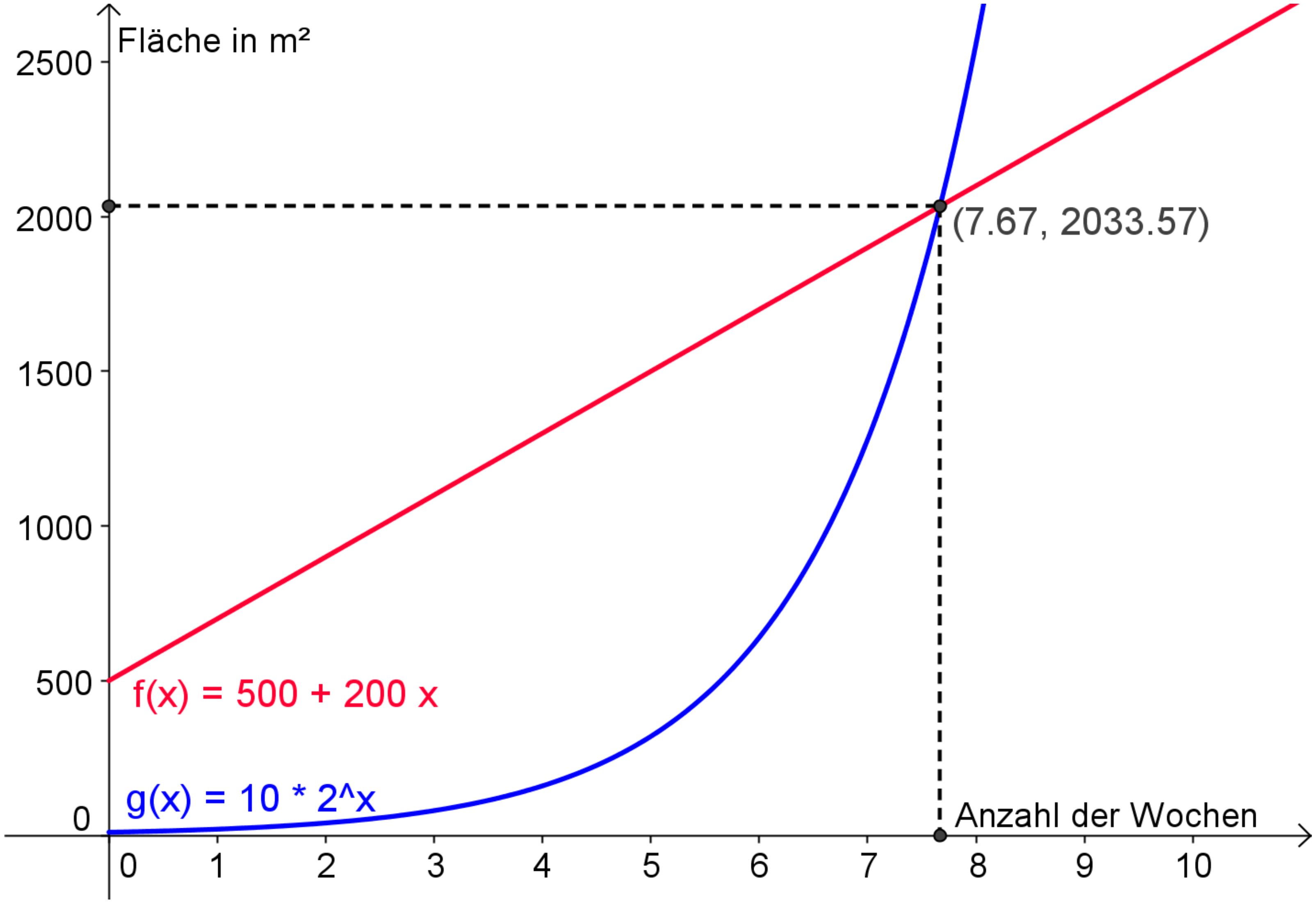
Anzahl der Wochen	Seerosenfläche in m²
0	10
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320
6	640
7	1280
8	2560
x	$10 \cdot 2^x$

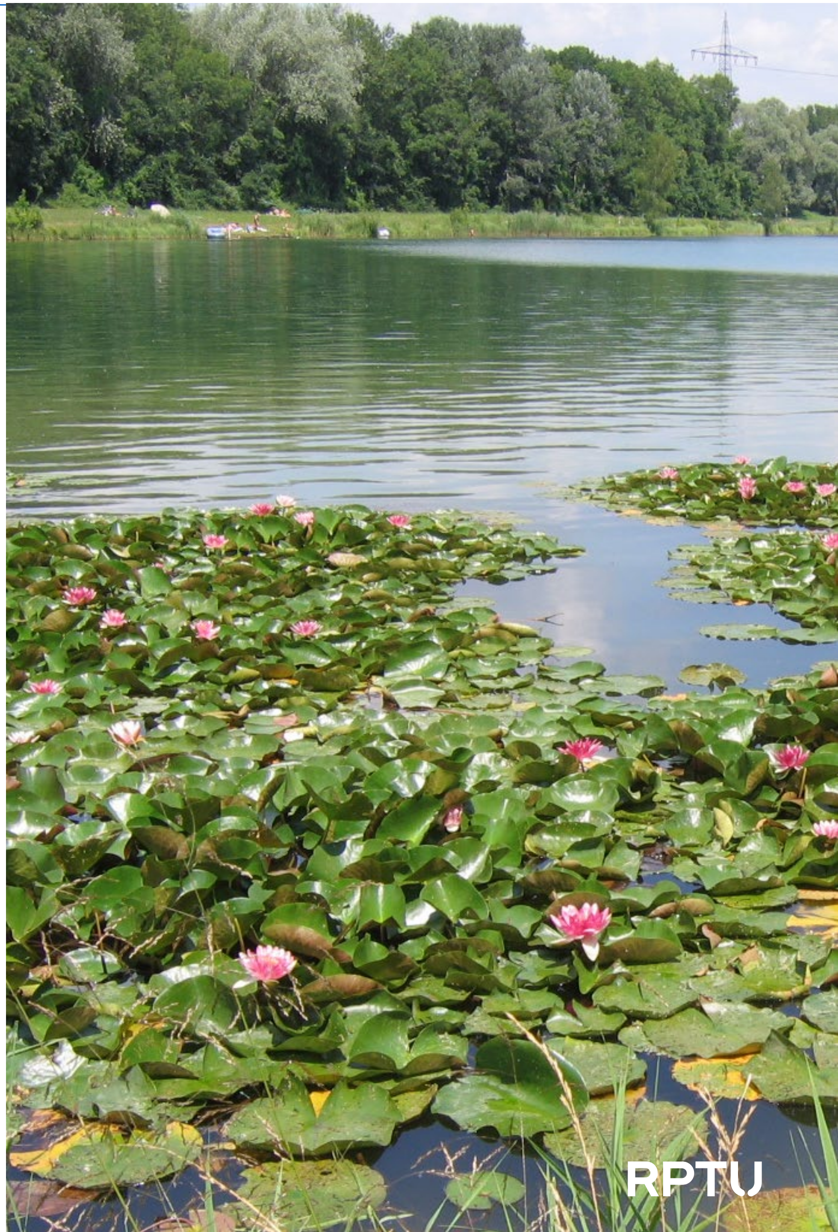
+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

·2 ·2 ·2 ·2 ·2 ·2 ·2 ·2

Lineares und exponentielles Wachstum

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen





https://www.geogebra.org/m/rdQTuA7s

Lineares und exponentielles Wachstum

Lineares Wachstum

- $f(x) = m \cdot x + t$
- $$\begin{aligned} f(x+c) &= m \cdot (x+c) + t \\ &= m \cdot x + t + m \cdot c \\ &= f(x) + m \cdot c \\ &= f(x) + d \end{aligned}$$
- $\forall_{x \in \mathbb{D}_f}\ f(x+c) - f(x) = const.$
- Bei gleichem Zuwachs im Argument ist der absolute Zuwachs konstant.
- Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumssummand.

Exponentielles Wachstum

- $g(x) = \ b \cdot a^x$
- $$\begin{aligned} g(x+c) &= b \cdot a^{x+c} \\ &= b \cdot a^x \cdot a^c \\ &= g(x) \cdot a^c \\ &= g(x) \cdot d \end{aligned}$$
- $\forall_{x \in \mathbb{D}_g}\ \frac{g(x+c)}{g(x)} = const.$
- Bei gleichem Zuwachs im Argument ist der relative Zuwachs konstant.
- Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumsfaktor.

Logarithmusfunktion

Exponentialfunktionen
also Funktionen der Bauart
$\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp_a(x) = a^x$
mit $a > 0$ und $a \neq 1$ sind bijektiv und damit umkehrbar.

Umkehrfunktion

- Bei der Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion wird für eine Potenz $p = a^r$ danach gefragt, mit welcher Zahl r man a potenzieren muss, um p zu erhalten.

- Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion

$$\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$

  ist die **Logarithmusfunktion**

$$\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$$

  zur Basis a.

- Da für eine Funktionen f und ihre Umkehrfunktionen f^{-1} gilt

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

  und

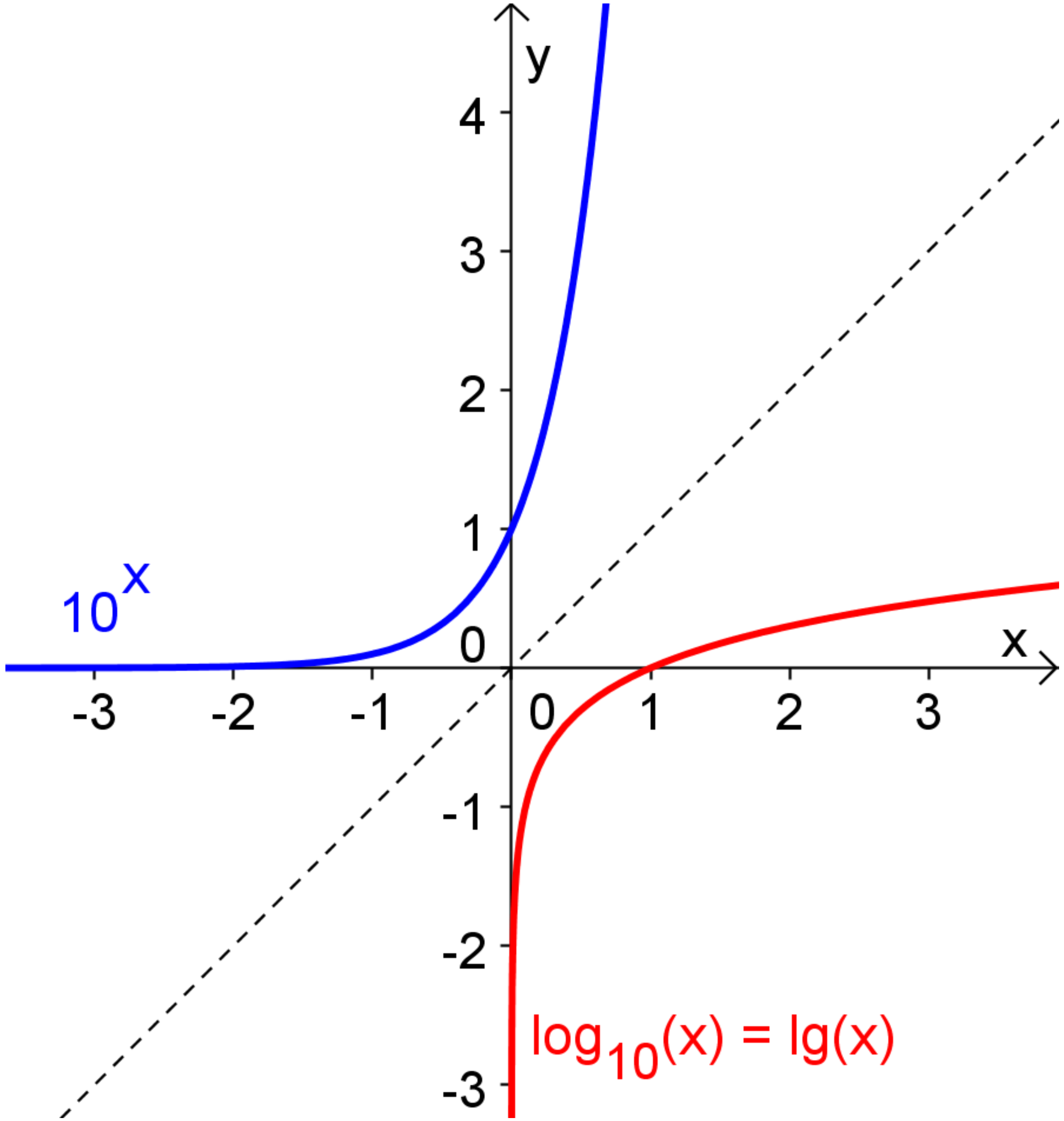
$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

  folgt:

$$a^{\log_a(x)} = x \text{ und } \log_a(a^x) = x$$

C. Weber (2013). Grundvorstellungen zum Logarithmus – Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In Allmendinger et al. (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 79-98), Wiesbaden: Springer

Eigenschaften der Logarithmusfunktion



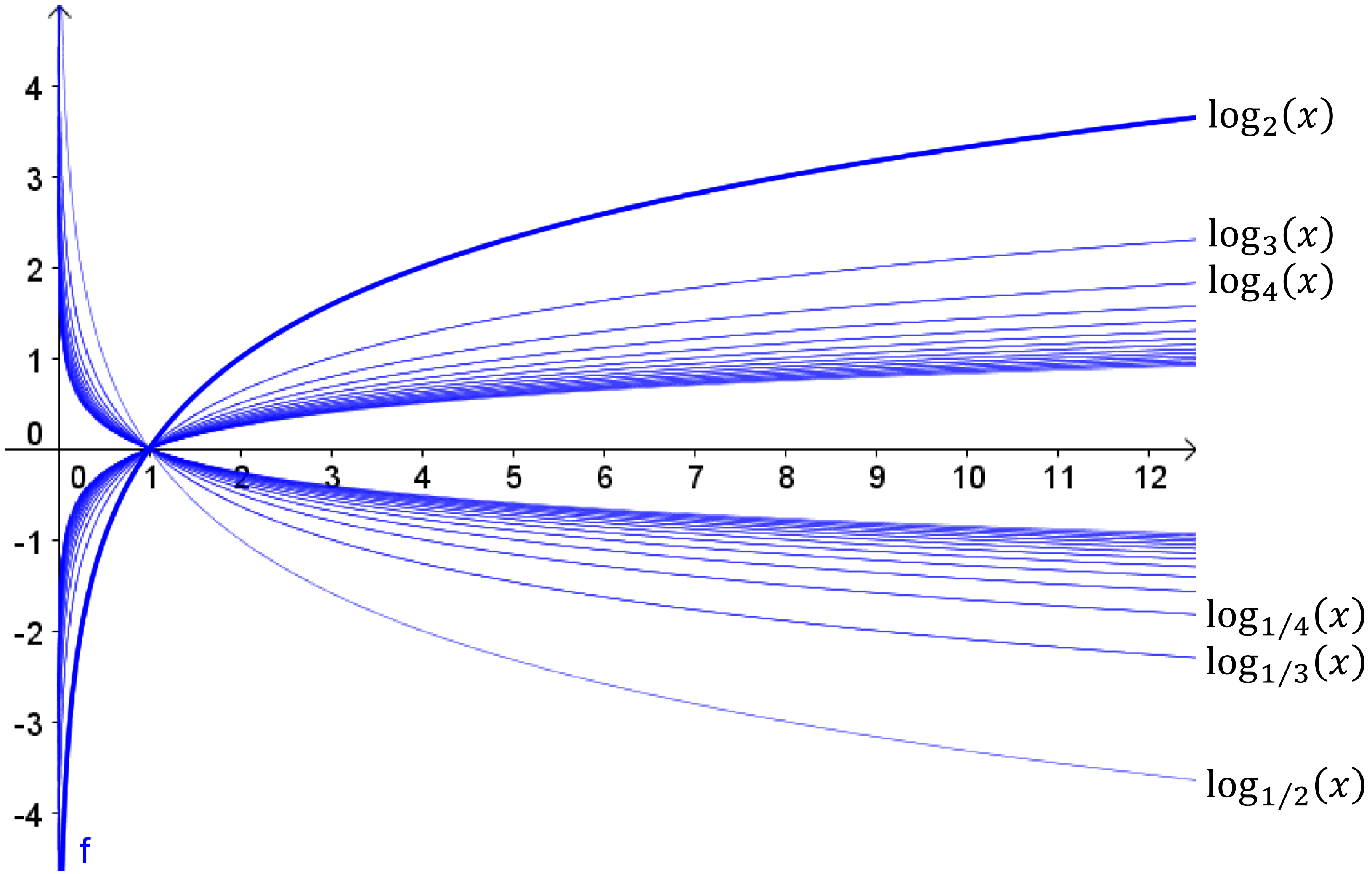
Exponentialfunktion $\exp_a$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
- $\exp_a(0) = a^0 = 1$
- Der Punkt $(0|1)$ ist Element des Graphen jeder Exponentialfunktion $\exp_a$.
- Die x-Achse ist waagerechte Asymptote des Graphen von $\exp_a$.

Logarithmusfunktion $\log_a$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- $\log_a(1) = \log_a\left(a^0\right) = 0$
- Der Punkt $(1|0)$ ist Element des Graphen jeder Logarithmusfunktion $\log_a$.
- Die y-Achse ist senkrechte Asymptote des Graphen von $\log_a$.

Eigenschaften der Logarithmusfunktion



 https://www.geogebra.org/m/FMMagDpG

Rechenregeln für Logarithmen

Satz
Für $a, r, s \in \mathbb{R}^+$ gilt:

- $\log_a(r \cdot s) = \log_a(r) + \log_a(s)$
- $\log_a(r : s) = \log_a(r) - \log_a(s)$
- $\log_a(r^s) = s \cdot \log_a(r)$

Beweis
Unter Verwendung von $a^{\log_a(x)} = x$ und $\log_a(a^x) = x$ ergibt sich:

- $$\begin{aligned}\log_a(r \cdot s) &= \log_a\left(a^{\log_a(r)} \cdot a^{\log_a(s)}\right)\\ &= \log_a\left(a^{\log_a(r)+\log_a(s)}\right)\\ &= \log_a(r) + \log_a(s)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\log_a(r : s) &= \log_a\left(a^{\log_a(r)} : a^{\log_a(s)}\right)\\ &= \log_a\left(a^{\log_a(r)-\log_a(s)}\right)\\ &= \log_a(r) - \log_a(s)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\log_a(r^s) &= \log_a\left(\left(a^{\log_a(r)}\right)^s\right)\\ &= \log_a\left(a^{s\cdot\log_a(r)}\right) = s \cdot \log_a(r)\end{aligned}$$

■

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Satz

Die Logarithmusfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$$

zur Basis a mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist

- streng monoton steigend für $a > 1$,
- streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

Beweis

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \wedge x_1 < x_2 \quad (*)$
- $\log_a(x_2) - \log_a(x_1)$

$$= \log_a \underbrace{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}_{\substack{>1 \\ \text{wegen } (*)}} \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 1 \\ < 0 & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$$

■

Rechenschieber

Der Vorläufer des Taschenrechners!

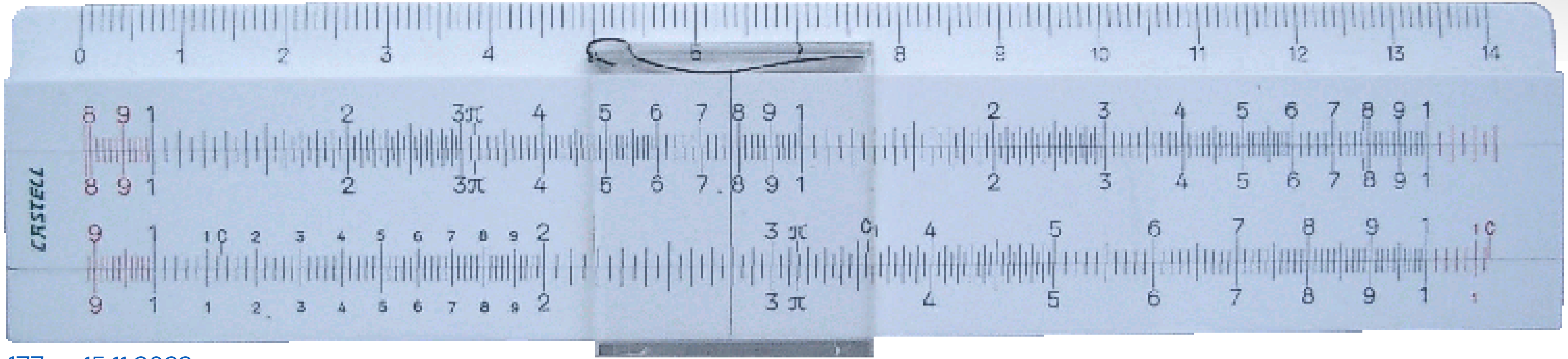
Die Regeln

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a(r) + \log_a(s)$$

und

$$\log_a(r : s) = \log_a(r) - \log_a(s)$$

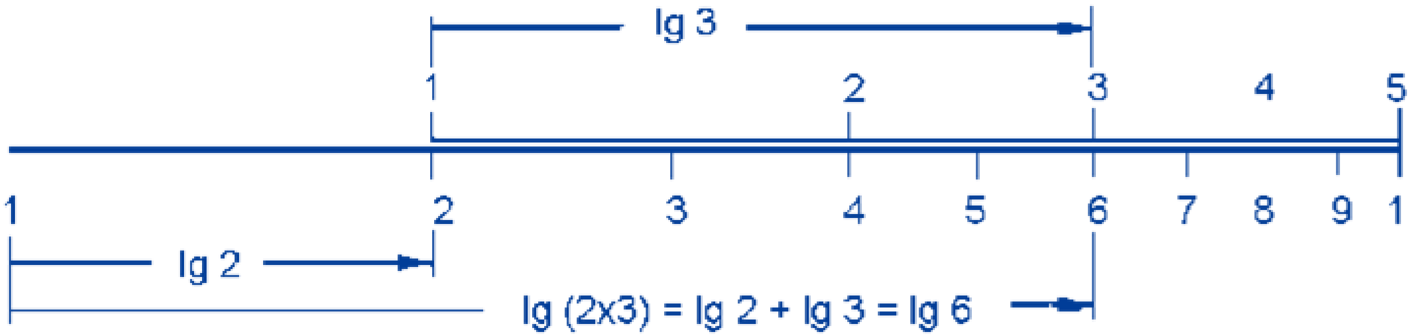
spielten beim Rechenschieber eine wichtige Rolle, weil man mit ihrer Hilfe die Multiplikation auf die Addition und die Division auf die Subtraktion zurückführen kann.



Rechenschieber: Beispiele

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

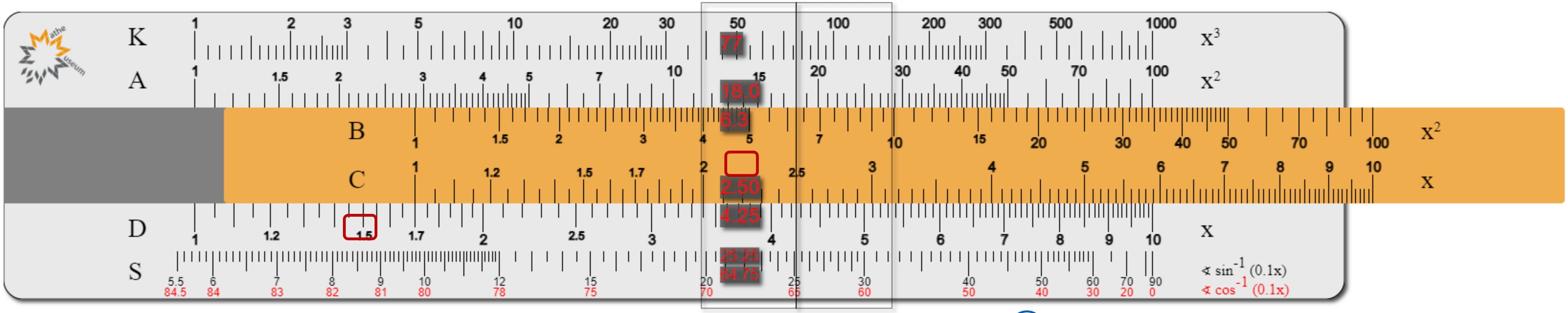
- $2 \cdot 3 = ?$



$$\log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10}(2) + \log_{10}(3) = \log_{10}(6)$$

- $1{,}7 \cdot 2{,}5 = ?$

$$\log_{10}(1{,}7 \cdot 2{,}5) = \log_{10}(1{,}7) + \log_{10}(2{,}5) = \log_{10}(4{,}25)$$



Rechenregel für Logarithmen

Satz („Taschenrechnergleichung“)

Für $a, b, r \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 0$ gilt:

$$\log_a(r) = \frac{\log_b(r)}{\log_b(a)}$$

Beweis

Aus $r = a^{\log_a(r)}$ folgt:

$$\begin{aligned}\log_b(r) &= \log_b\left(a^{\log_a(r)}\right)\\ &= \log_a(r) \cdot \log_b(a)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log_a(r) = \frac{\log_b(r)}{\log_b(a)} \qquad \blacksquare$$

Anmerkungen

- Mit diesem Satz kann der Logarithmus von r zur Basis a als Quotient zweier Logarithmen zu einer beliebigen Basis ausgedrückt werden.
- Taschenrechner beherrschten früher nur $\lg(x) \coloneqq \log_{10}(x)$, den Logarithmus zur Basis 10, und $\ln(x) \coloneqq \log_e(x)$, den Logarithmus zur Basis e, der auch natürlicher Logarithmus genannt wird.

Präsenzaufgabe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zinseszins

- Ein Kapital K_0 wird zu einem Zinssatz $p\%$ pro Jahr angelegt. Die anfallenden Zinsen werden am Ende des Jahres dem Sparkonto gutgeschrieben.
- Wie viele Jahre muss man sparen, bis sich das Kapital ver-m-facht hat?

Mögliche Lösung:

$$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad \wedge \quad K(n) = m \cdot K_0$$

$$m \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad \Big| : K_0$$

$$m = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad \Big| \ln$$ (zulässig, da ln streng monoton steigend)

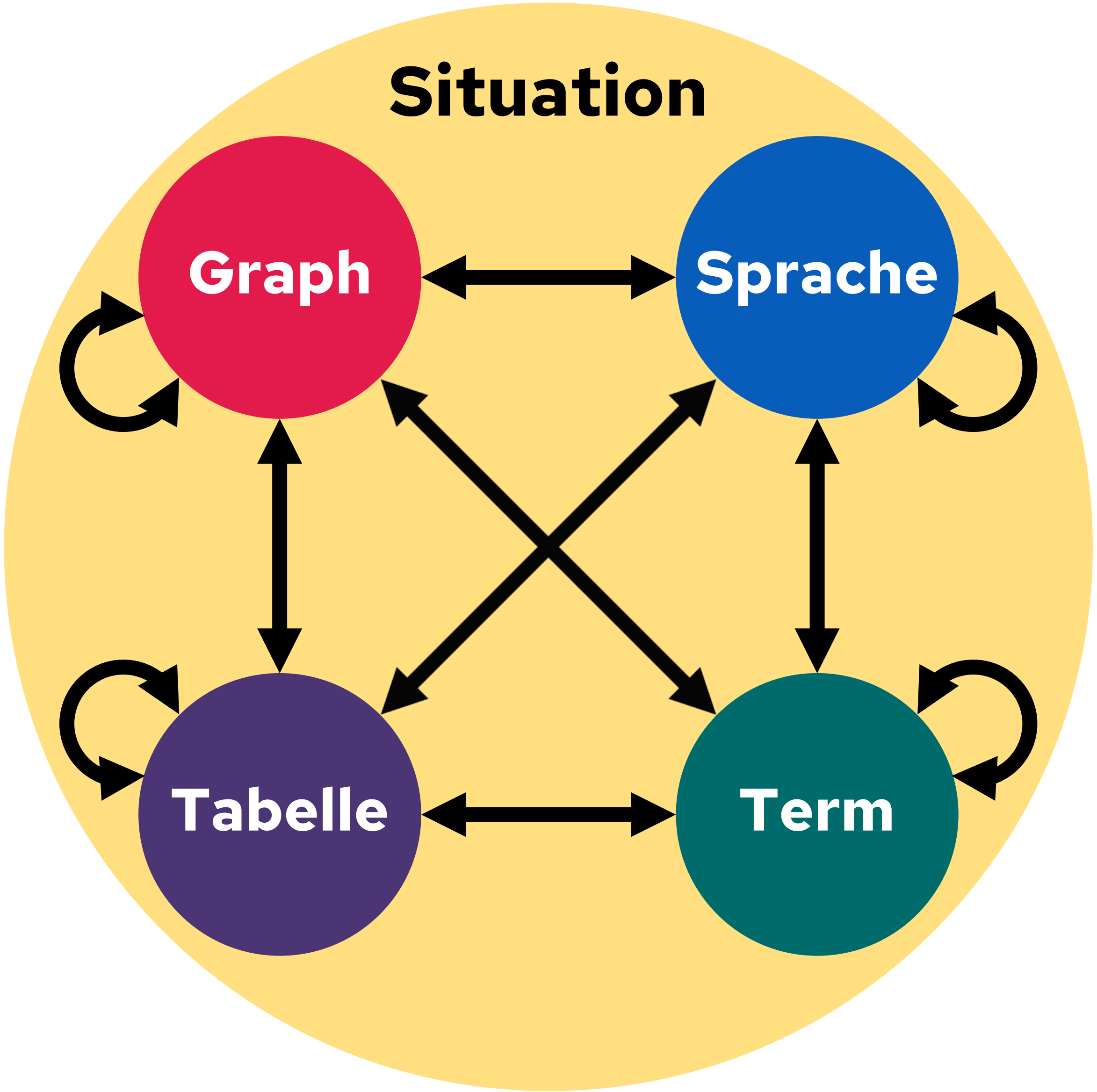
$$\ln(m) = n \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \Big| : \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(m)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Präsenzaufgabe: Bevölkerungswachstum

- Im Jahre 1798 veröffentlichte der englische Philosoph Thomas R. Malthus sein „Essay of the Principles of Population".
- Er vermutete, dass die Nahrungsmittelerzeugung dem rasanten Bevölkerungswachstum im Zuge der industriellen Revolution nicht würde folgen können, und prognostizierte permanente Hungersnöte.
- Zur Begründung seiner Thesen entwickelte er einfache Modelle für das Wachstum von Populationen: Er nahm an, die Bevölkerung wachse exponentiell, die zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel jedoch nur linear.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben unter der unten angegebenen URL.

Der Funktionsbegriff im MU



Ziele

- Den Funktionsbegriff erfassen.
- Wichtige Funktionstypen & ihre Eigenschaften kennen lernen.
- Funktionen zum Erkennen, Beschreiben oder Herstellen von Zusammenhängen nutzen.

Malle, G. (2000). Funktionen untersuchen – ein durchgängiges Thema. *Mathematik lehren, 103*, S. 4-7

MaTeGnu

A4

Testhefte

Stand der Dinge bzgl. Schülerverständnis
Aufgabenhefte zum Schülerverständnis

RPTU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- **Jahrgangsstufe 10**
  Funktionaler Zusammenhang
  - Heft A
  - Heft B

- **Alle**
  - Mantel-bogen

Kommentar einer Schülerin (Jgst. 11, G8) nach Bearbeitung von Aufgaben zu Ableitung und Integral:

Das waren richtig tolle Aufgaben! Können so nicht auch Kursarbeiten werden?

- **Jahrgangsstufe 11**
  Ableitung
  - Heft 1
  - Heft 2
  - Heft 3
  - Heft 4
  - Heft 5
  - Heft 6

  Integral
  - Heft 1
  - Heft 2
  - Heft 3
  - Heft 4
  - Heft 5
  - Heft 6

- **Jahrgangsstufe 12**
  Anal. Geometrie
  - Heft 1
  - Heft 2
  - Heft 3
  - Heft 4

  Stochastik
  - Heft 1
  - Heft 2
  - Heft 3
  - Heft 4
  - Heft 5
  - Heft 6

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth & Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Forststraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de; s.digel@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de/mategnu

RPTU