UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

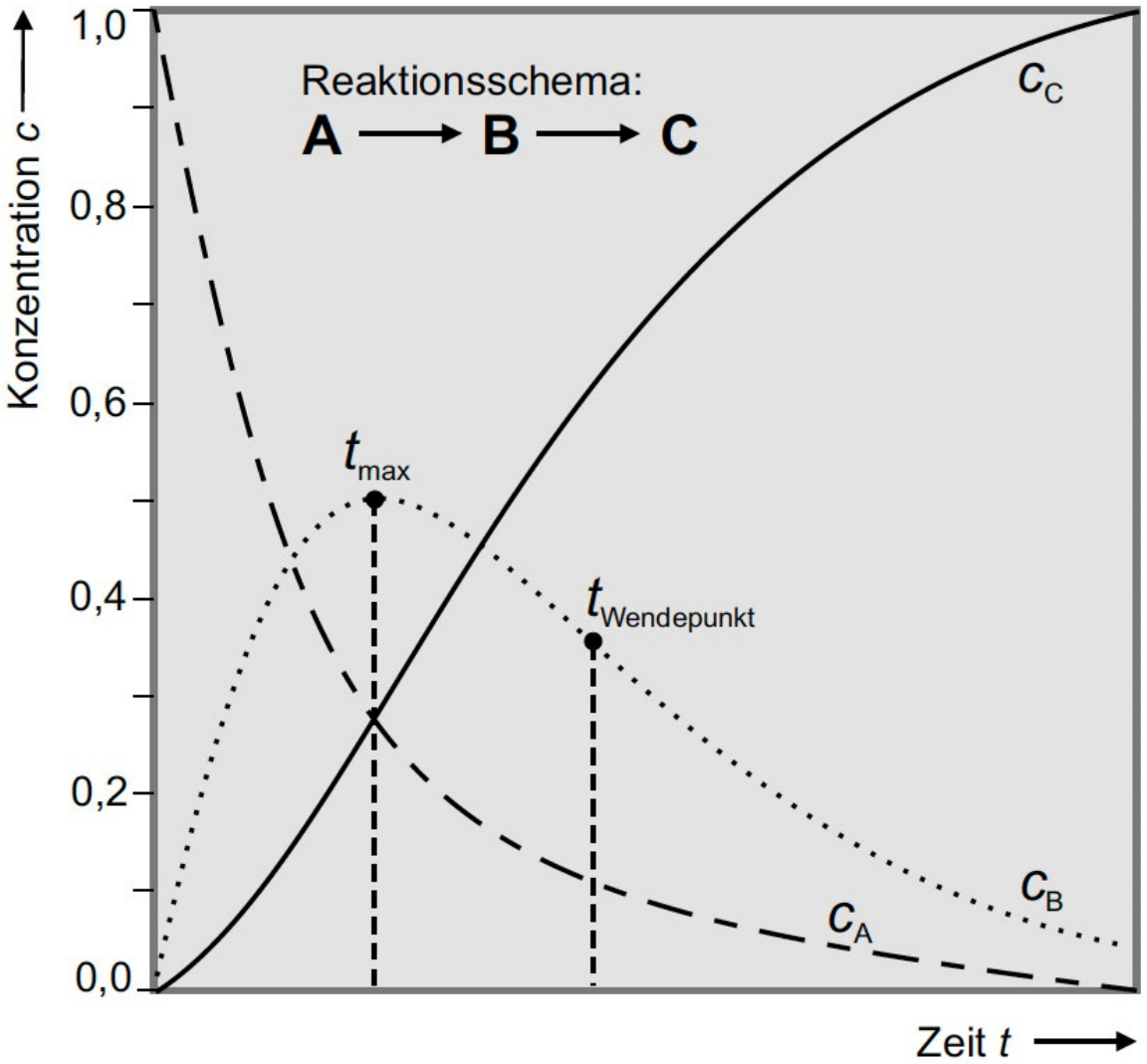
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Jürgen Roth

Funktionales Denken

Wesentliche Grundlage mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitens

Beispiel aus den Life Sciences



Schwister, K. & Leven, V. (2020). Verfahrenstechnik für Ingenieure (4. Auflage). München: Hanser, S. 117

Funktionales Denken

als wesentliche Grundlage mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitens

1. Funktionales Denken
2. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien und Simulationen
3. Ein Beispiel für die Hochschullehre?!

Funktionales Denken

als wesentliche Grundlage mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitens

1 **Funktionales Denken**

2 Experimentieren mit gegenständlichen Materialien und Simulationen

3 Ein Beispiel für die Hochschullehre!?

Kernpunkte des Grundvorstellungskonzepts

- **Grundvorstellungen**
  - repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich,
  - ermöglichen Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen.

- **Zwei Typen von Grundvorstellungen**
  - Primäre Grundvorstellungen
  - Sekundäre Grundvorstellungen

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Primäre Grundvorstellungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

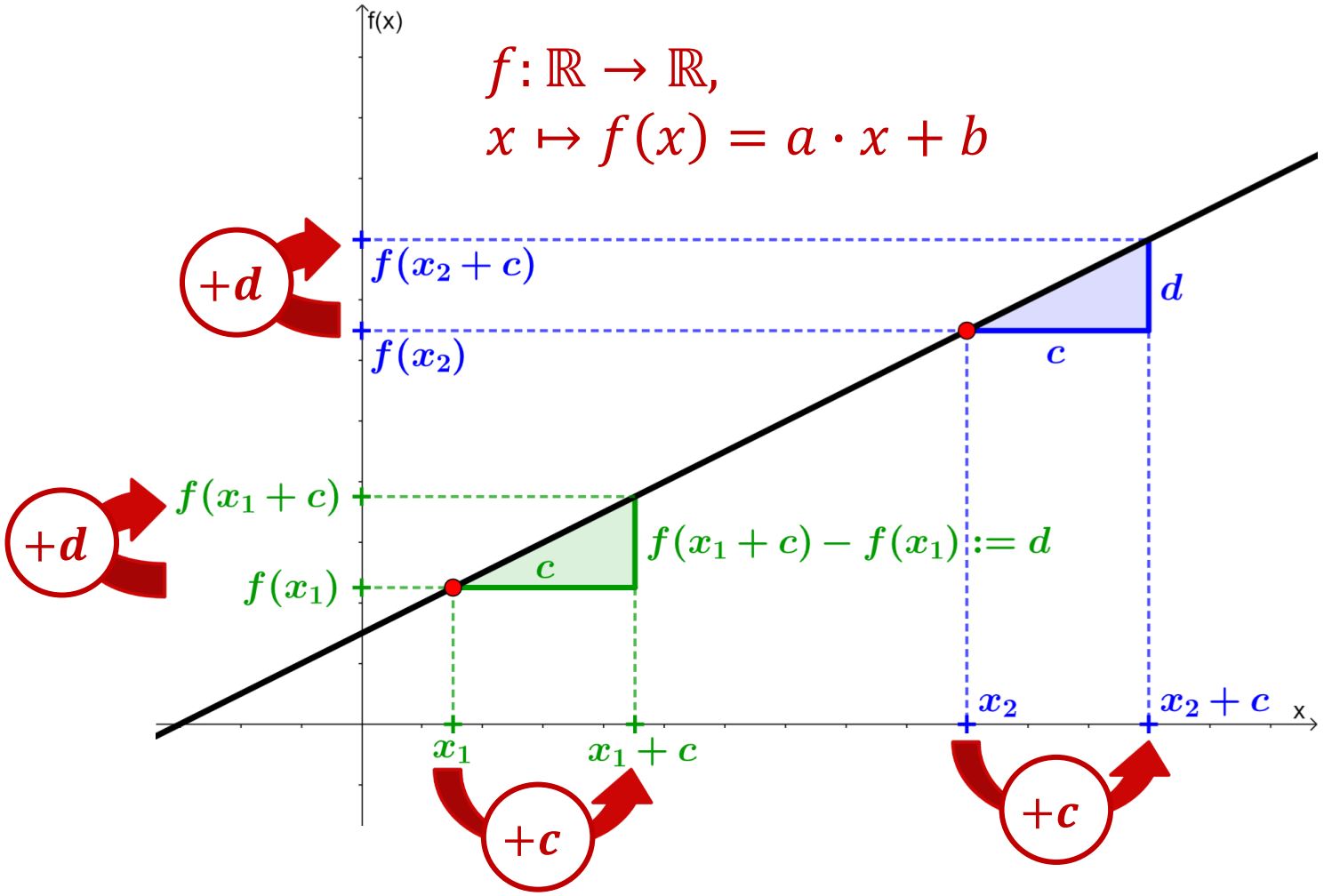
Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, S. 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f(x+c)$$

$$= a \cdot (x+c) + b$$

$$\overset{DG}{\cong} a \cdot x + a \cdot c + b$$

$$\overset{KG}{\cong} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

Grundvorstellungen zu Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Experiment:**
  Schüler/innen …
  - rennen eine Treppe hinauf,
  - messen nach dem Lauf in Abständen von 30s ihren Puls,
  - halten den Zusammenhang paarweise in einer Tabelle fest.

- **Erfahrung:** Jedem Zeitpunkt wird (genau) ein Puls zugeordnet.

Zuordnung

- Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Grundvorstellungen zu Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Fragestellung**
  Wie ändert sich der Puls in gleichen Zeitschritten? Ändert er sich auch gleichmäßig, oder zunächst langsamer und dann schneller oder … ?
  - Hierfür reicht es nicht einzelne Wertepaare zu betrachten.
  - Es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden.

Änderungsverhalten / Kovariation

- Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Grundvorstellungen zu Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

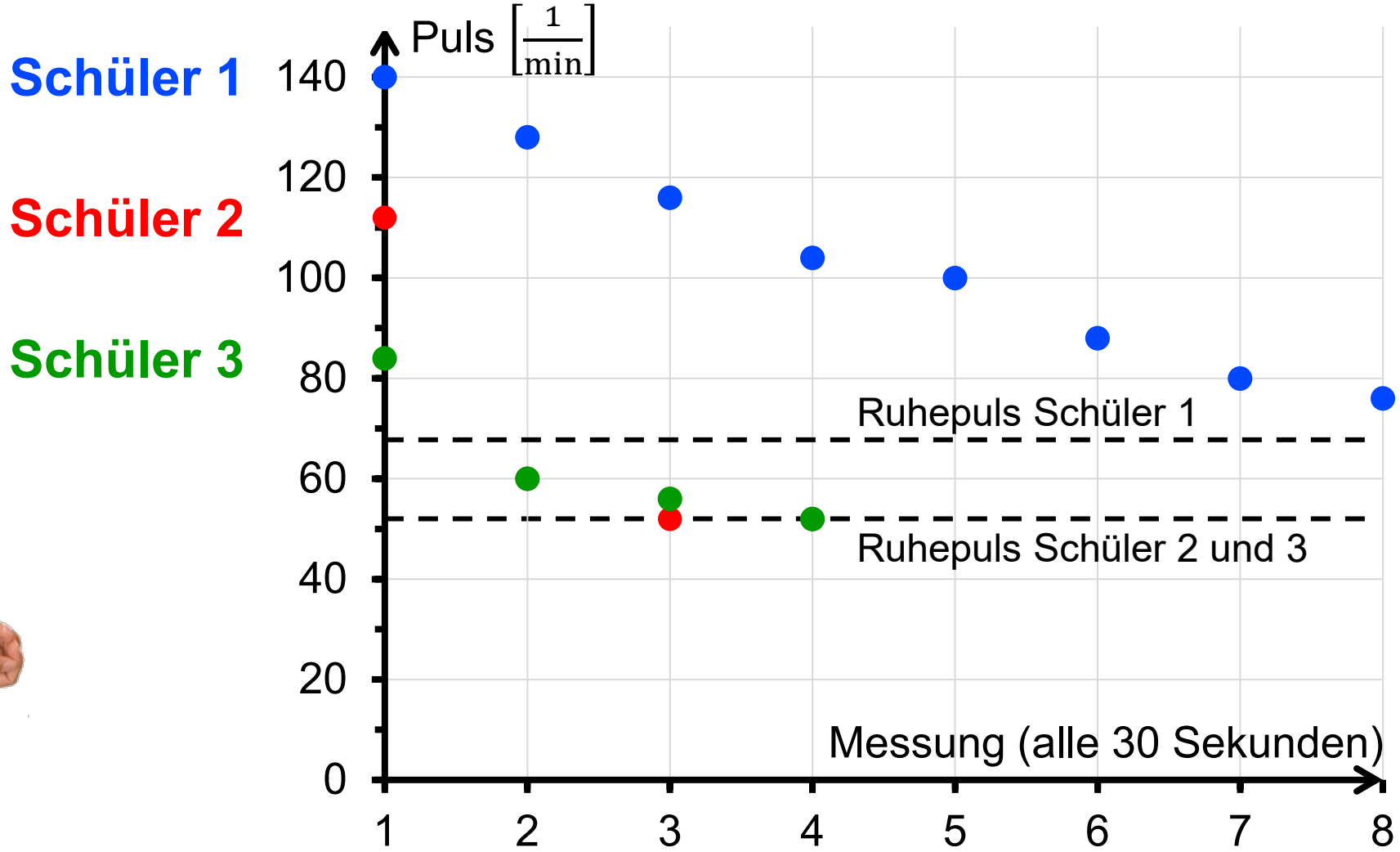
Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Fragestellung**
  Wie sieht der funktionale Zusammenhang zwischen Zeitpunkt und Puls als Ganzes aus?
  - Dazu muss man systematisch Daten aufnehmen → in Tabelle festhalten → Graph zeichnen
  - Kann erst am Graph als Ganzes betrachtet und anhand der Verläufe für verschiedene Läufer verglichen werden → Fitness.

Funktion als Ganzes

- Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

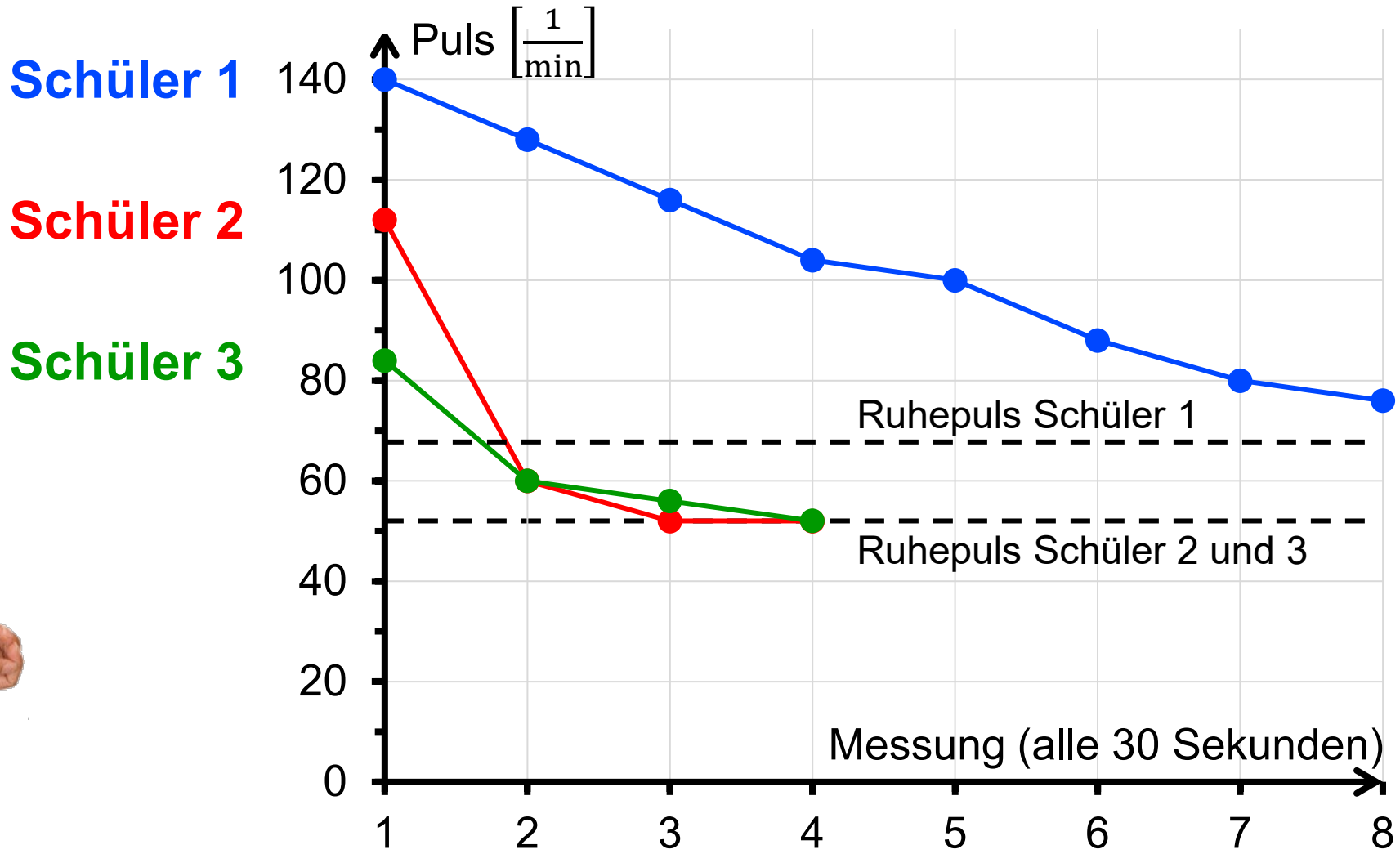
Fitness der Läufer: Sicht als Ganzes



Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Fitness der Läufer: Sicht als Ganzes

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Perspektiven zur **Sicht als Ganzes** bei Funktions-graphen:

(1) Vergleich von Abschnitten im selben Graph

(2) Vergleich verschiedener Graphen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Zuordnung**
  - Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.
- **Änderungsverhalten / Kovariation**
  - Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.
- **Funktion als Ganzes**
  - Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne sondern die Menge aller Wertepaare.

Aspekte des Funktionsbegriffs

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Vollrath, Weigand (20073). Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, S. 140

- **Aspekte des Funktionsbegriffs**
  - Zuordnung
  - Änderungsverhalten (Kovariation)
  - Sicht als Ganzes

Tabelle

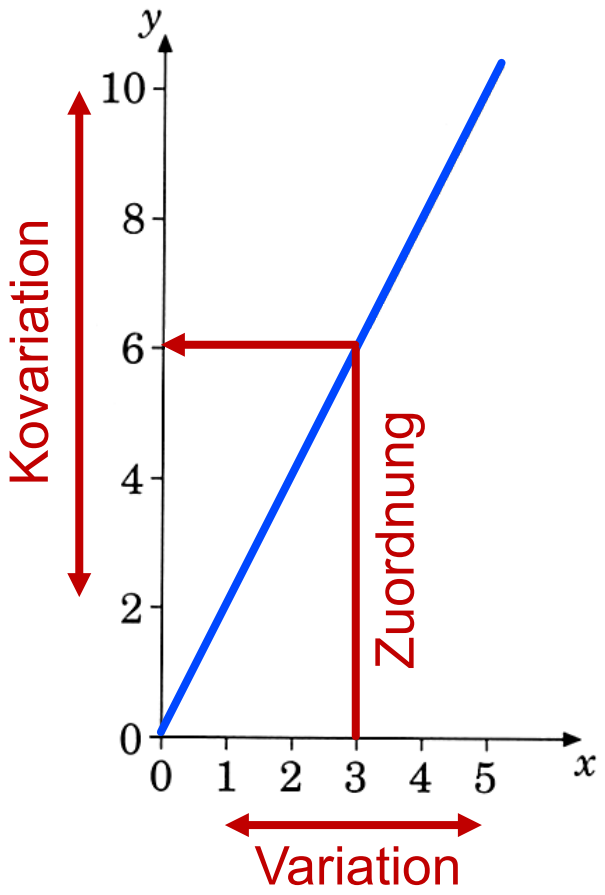
x	$f(x)$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Variation

Kovariation

Zuordnung

Graph



Funktionsterm

$$f(x) = 2 \cdot x$$

Zuordnung

Malle (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. Mathematik lehren 103, S. 8-11

Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Sinnzusammenhänge herstellen

- Anknüpfen an bekannte Situationen oder Handlungsvorstellungen

Prototypisches Beispiel als Verständnis-Anker

Aufbau visueller Repräsentationen

- Ermöglichen mentales Operieren

Fähigkeit zur Anwendung des Inhalts auf die Wirklichkeit

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren des Phänomens mit Hilfe der mathematischen Struktur

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

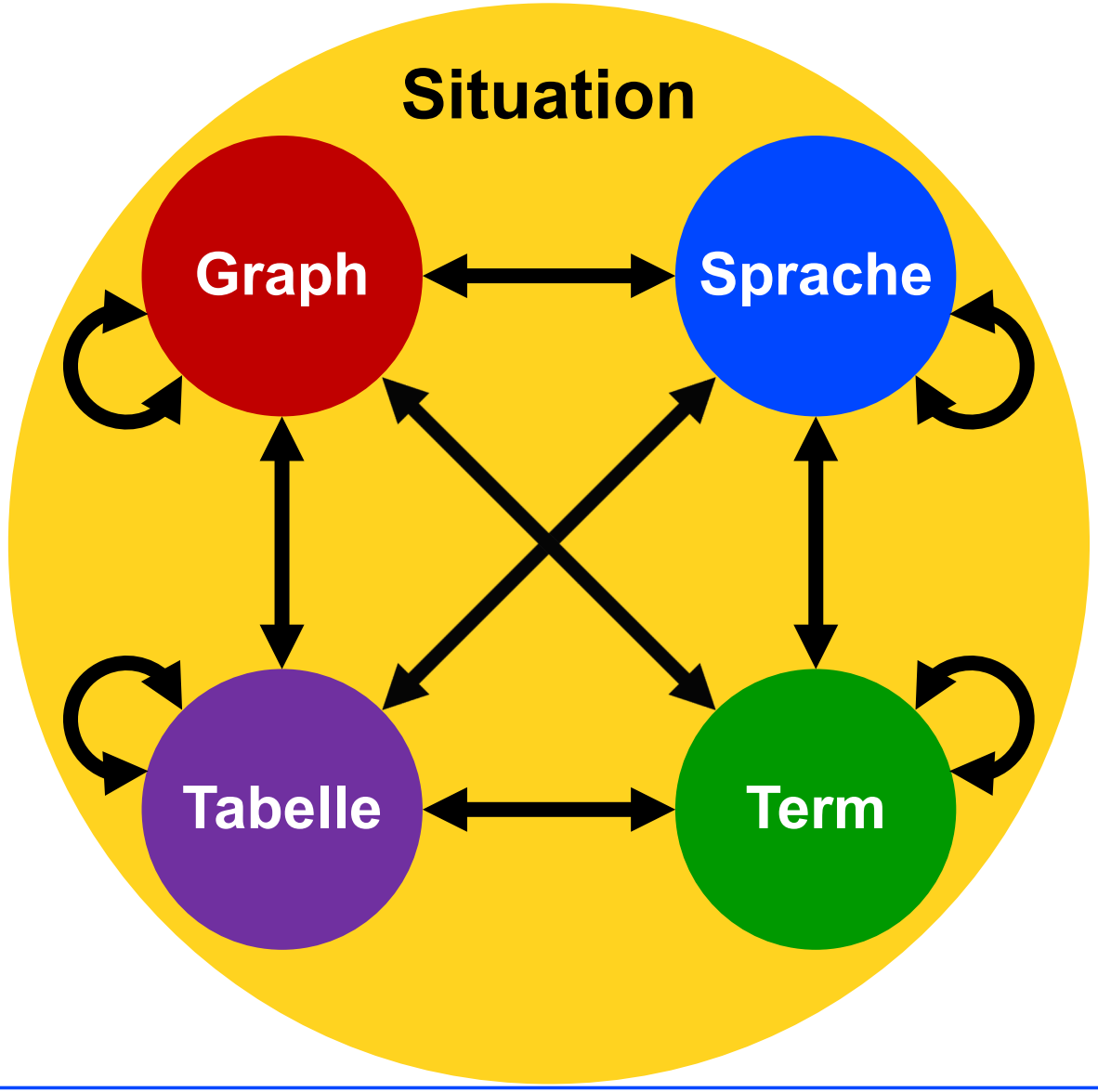
Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

Darstellungswechsel

Graph Sprache Term Tabelle

Darstellungsformen

Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten



Darstellungsformen ↔ Grundvorstellungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Darstellungsformen →

Grundvorstellungen ↓

	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	**Tätigkeit:** Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet. **Hauptzweck:** Markante Punkte erfassen	**Tätigkeit:** Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet. **Hauptzweck:** Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen	**Tätigkeit:** Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet. **Hauptzweck:** Bestimmen einzelner Werte	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen. **Hauptzweck:** Erfassen einzelner Werte
Kovariation	**Tätigkeit:** Unterteilung in Abschnitte mitunterschiedlichem Änderungsverhalten **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ erfassen	**Tätigkeit:** Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Sicht als Ganzes	**Tätigkeit:** Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder für Teilbereiche typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristischen Verlauf erfassen	**Tätigkeit:** Differenzen-, Produkt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen. **Hauptzweck:** Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	**Tätigkeit:** Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristika quantitativ erfassen	**Tätigkeit:** Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus. **Hauptzweck:** Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

Verändert nach Hußmann, Laakmann (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM (53)38*, S. 2-13

Funktionales Denken

als wesentliche Grundlage mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitens

1 Funktionales Denken

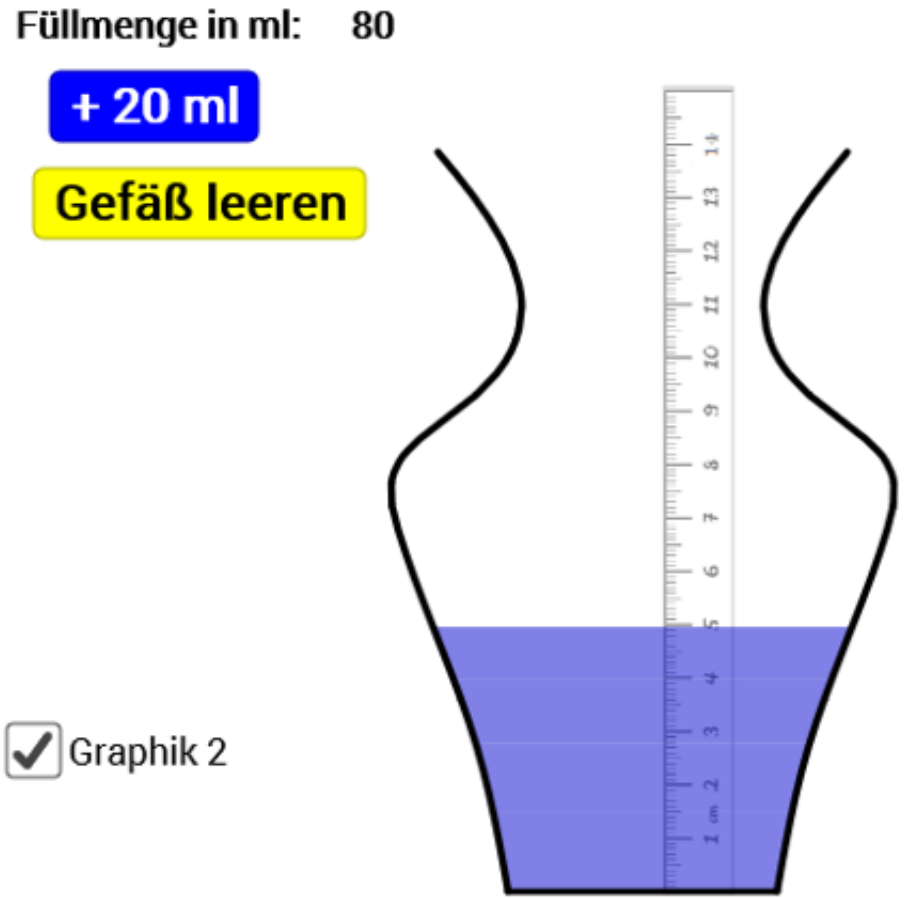
2 Experimentieren mit gegenständlichen Materialien und Simulationen

3 Ein Beispiel für die Hochschullehre?!

Gegenständliche Materialien

- Funktionale Zusammenhänge werden erlebbar (Ludwig & Oldenburg 2007)
- Lernen wird nachhaltiger (Vom Hofe 2003)
- Arbeitsweisen einprägsamer (Vollrath 1978)
- Zugriff auf Inhalte dauerhafter (Barzel & Ganter 2010)
- Deutung graphisch / tabellarisch dargestellter Zusammenhänge (Barzel & Ganter 2010)
- Motivation (Barzel 2010)

Simulationen



- Funktionen erkunden (Elschenbroich, 2011)
- Änderungsverhalten erleben (Vollrath & Roth, 2012)
- Systematische Variation (Roth, 2008)
- Multi-Repräsentations-System (Ballacheff & Kaput, 1997)
- Mittler zwischen Lernenden und mathematischem Phänomen (Danckwerts et al. 2000; Hoyles & Noss, 2003)
- Erleichterte Durchführung (Barzel 2010)

Gegenständliche Materialien ↔ Simulationen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

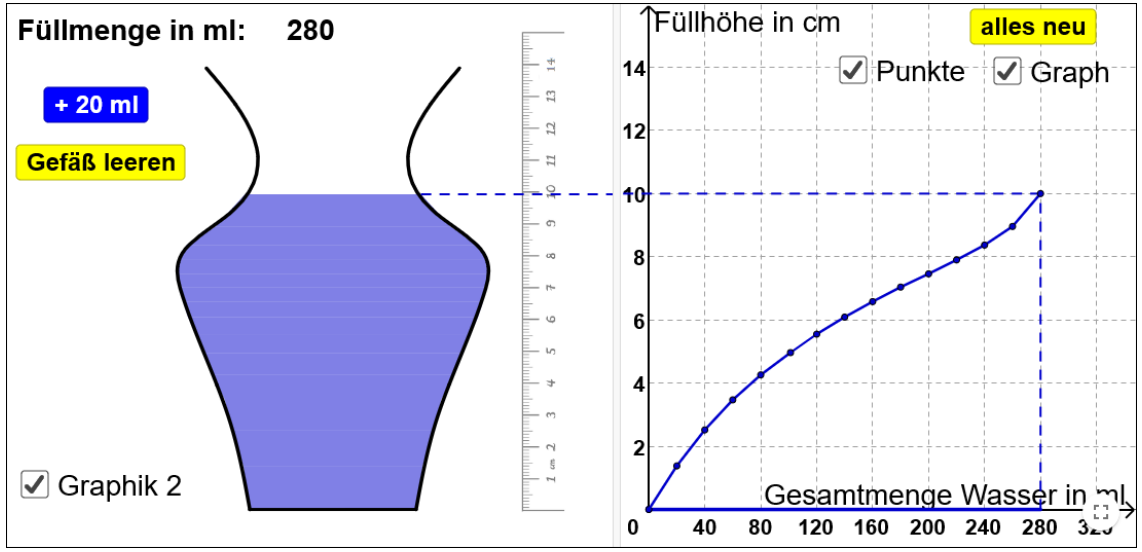
Auswahl der Situationen

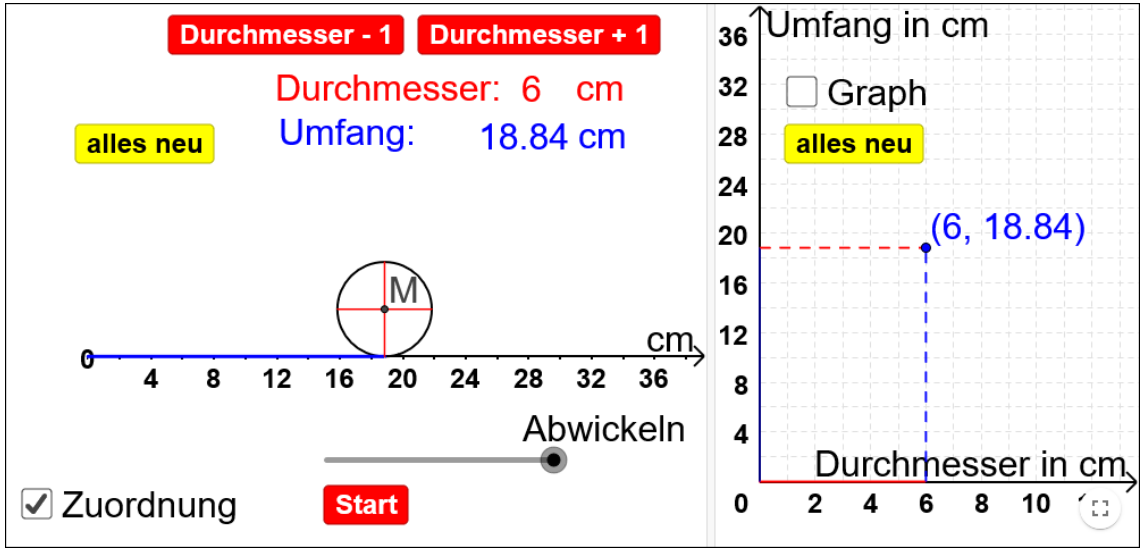
- Umsetzbarkeit
- Vergleichbare Aktionen
- Medienvorteile nutzen
- Durchführbarkeit
- Verschiedene funktionale Zusammenhänge

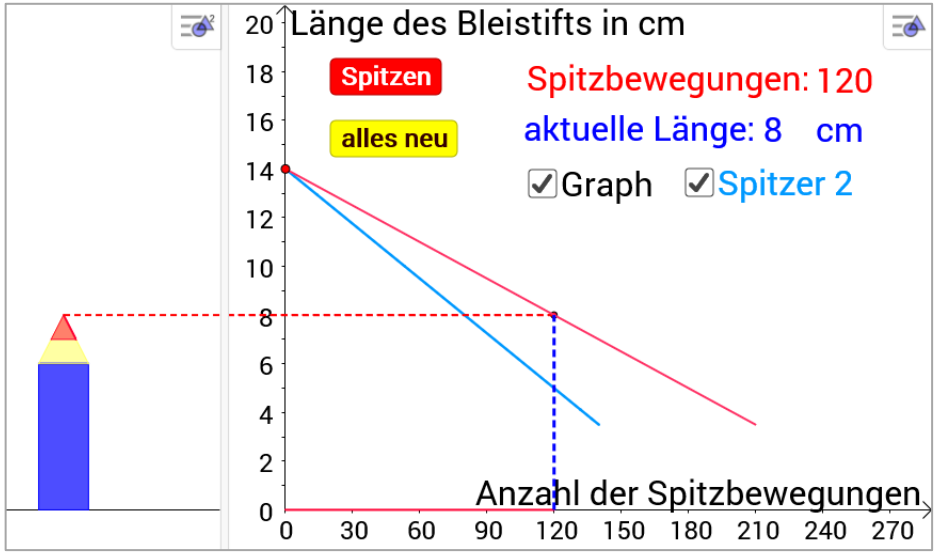
Lichti, M. & Roth, J. (2018). How to Foster Functional Thinking in Learning Environments Using Computer-Based Simulations or Real Materials. *Journal for STEM Education Research, 1*, pp. 148-172. DOI: 10.1007/s41979-018-0007-1,

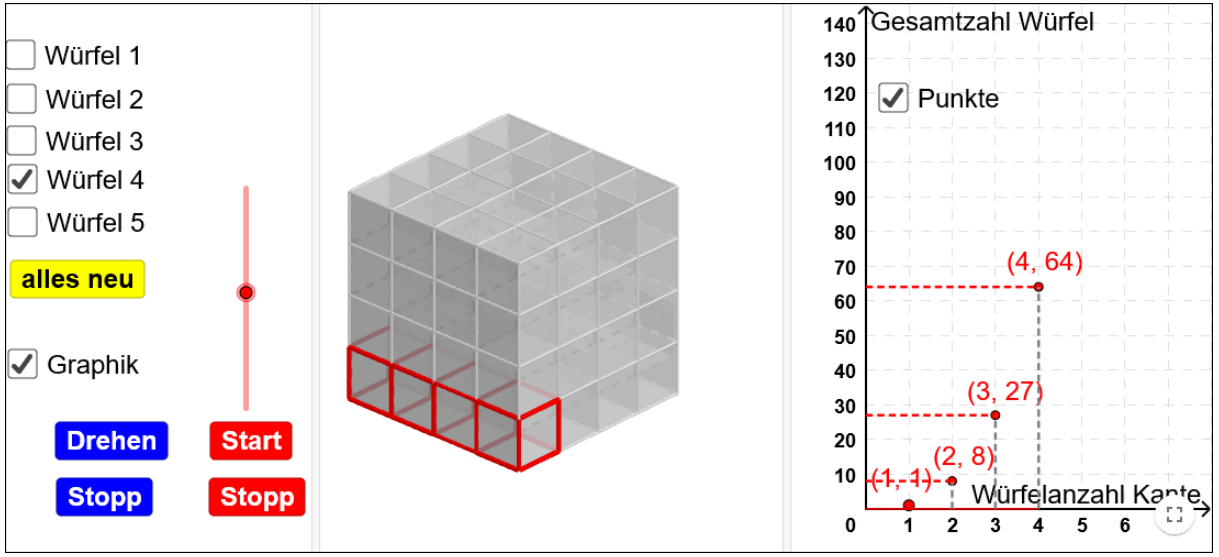
https://rdcu.be/99Tc

Die Simulationen









Lichti & Roth 2018

www.geogebra.org/m/VqVxutUB

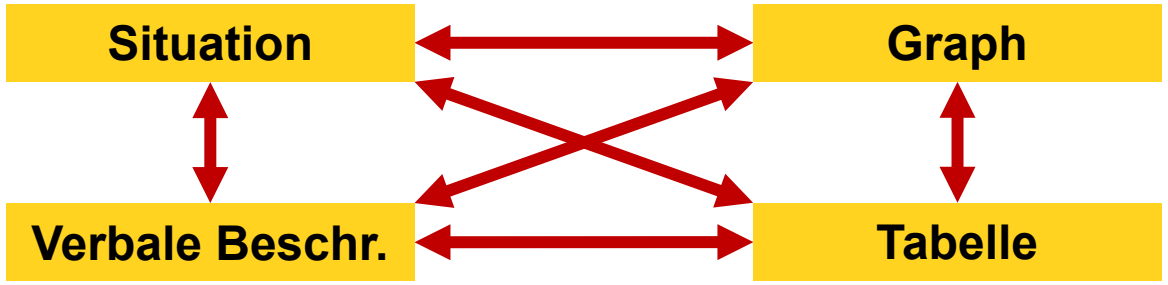
Aufgabengestaltung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lichti & Roth (2018)

- **Arbeitsaufträge**
  - Ermittlung von Werten (Messen)
  - Erstellen einer Wertetabelle
  - Arbeiten mit Graphen
    - Material-Gruppe: Zeichnen
    - Simulation-Gruppe: Entstehung beobachten
    - Beide Gruppen: Zusätzlich zeichnen und mit Graphen arbeiten
  - Interpolation, Anwendung & Transfer

- **Repräsentationsformen**

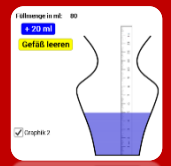


https://www.juergen-roth.de/projekte.html#5 → Lichti

Interventionsstudie

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lichti & Roth (2018)

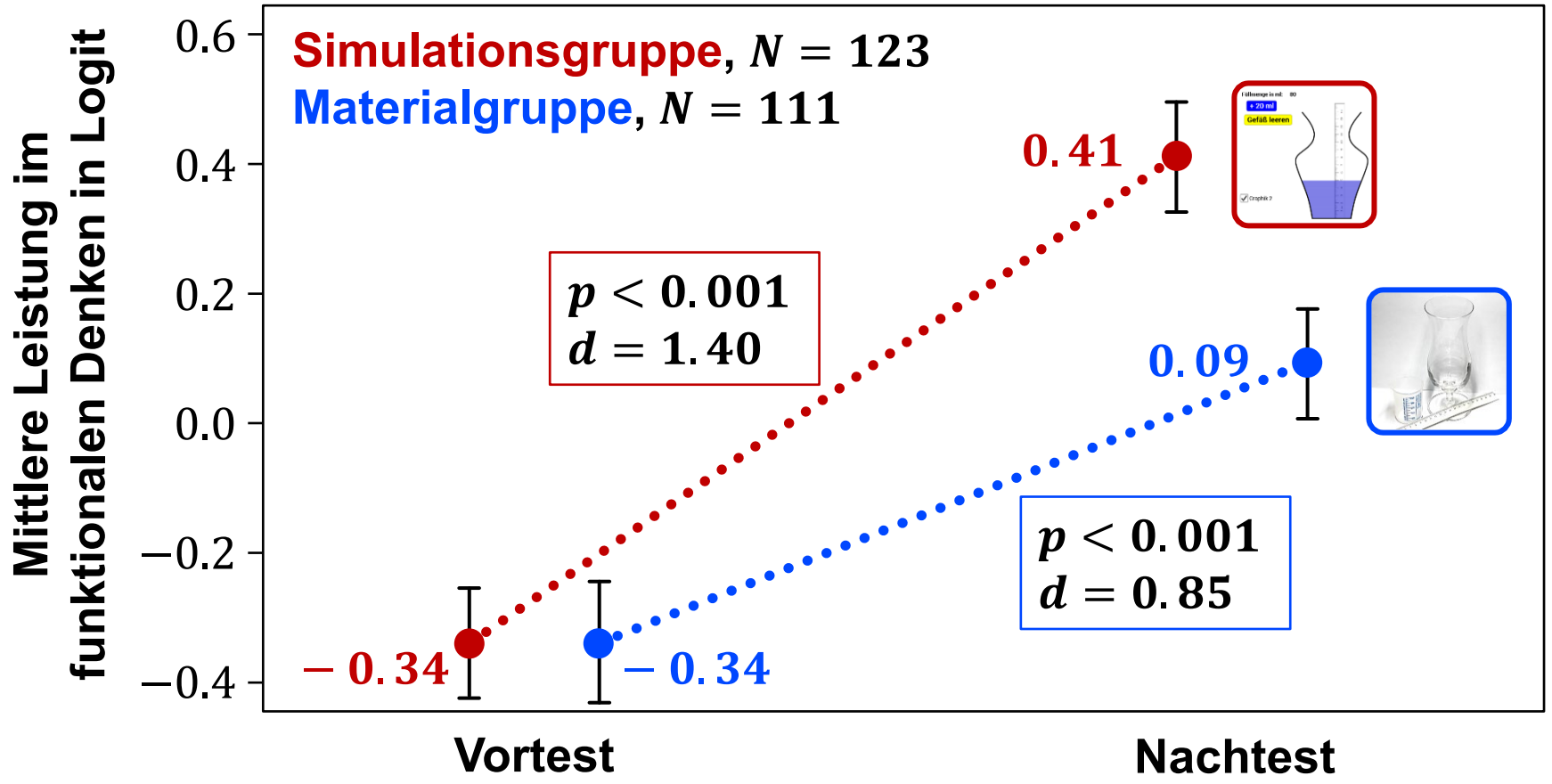
Experi-mental-gruppe 1	Vortest 40 min	eine Woche	Intervention (4 h): gegenständliche Materialien	Nachtest 40 min
Experi-mental-gruppe 2 	Vortest 40 min	eine Woche	Intervention (4 h): Computer-simulationen	Nachtest 40 min
Kontrollgruppe	Vortest 40 min	eine Woche	Keine Intervention	Nachtest 40 min

- Dreizehn 6. Klassen ($N = 282$)
- Schuljahr 2015/16 vor den Sommerferien

Lichti, M. & Roth, J. (2019). Functional thinking − A three-dimensional construct? *Journal für Mathematik-Didaktik, 39*, DOI 10.1007/s13138-019-00141-3, https://rdcu.be/bqRk8

Leistungszuwachs im funktionalen Denken

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



$$F(1, 25.820) = 8.856, p = 0.006, \eta_p^2 = 0.090$$

Erklärung?

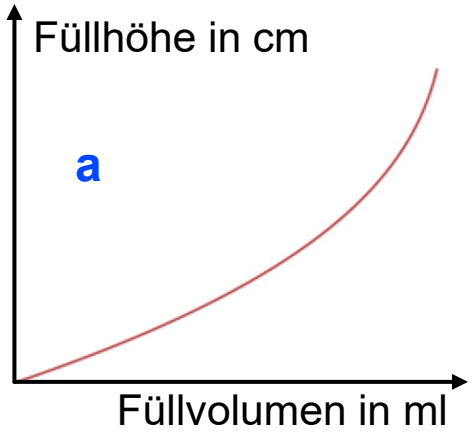
Qualitative Inhaltsanalyse
Aufgaben aus Intervention und Post-Test mit offenen Antwortformaten

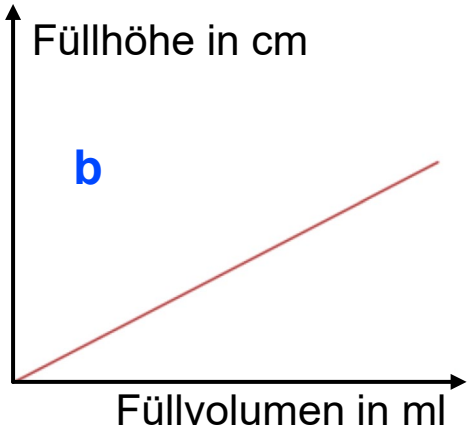
Lichti & Roth (2018, 2019)

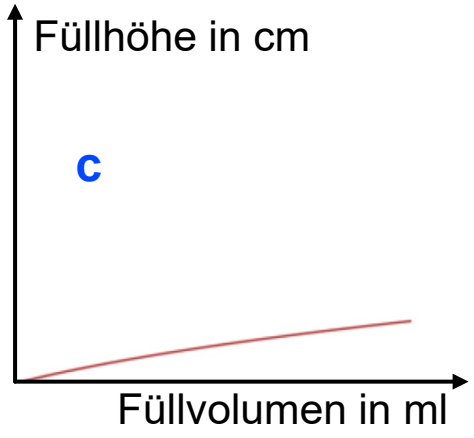
Gefäße füllen: Aufgabe

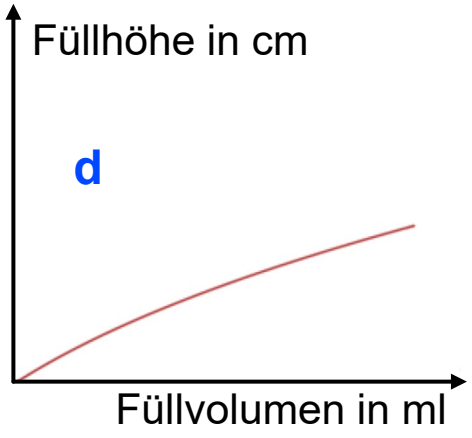
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Hier siehst du verschiedene Gefäße und Füllgraphen.
Ordne sie einander zu und begründe deine Wahl.









Kategorie	Beispiel
Form des Gefäßes	Das Glas wird breiter.
Verlauf des Graphen	Weil der Graph ziemlich flach ist.
Anstieg des Wassers	Erst steigt das Wasser langsamer, dann schneller.
Zustand	Der Graph ist steil. Die Schüssel ist flach.
Veränderung	Der Graph wird nach und nach steiler.

Lichti & Roth (2018)

Gefäße füllen: Ergebnisse

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- **Materialgruppe**
  Lernende argumentieren signifikant häufiger
  - mit der Form des Gefäßes
    $(\chi^2 = 14.79,\ df = 1,\ p < 0.001,\ V = 0.15)$
  - mit Zuständen
    $(\chi^2 = 4.361,\ df = 1,\ p = 0.037^*,\ V = 0.08)$

Material:
Reale Situation
und Zustand

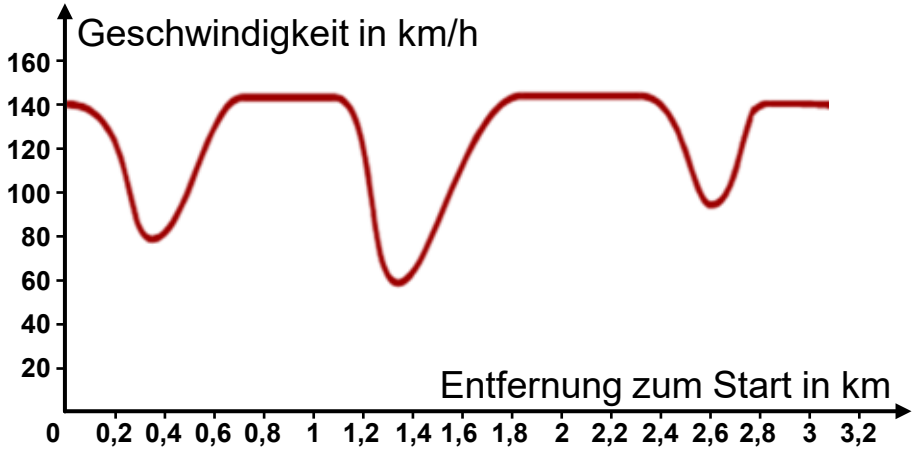
- **Simulationsgruppe**
  Lernende argumentieren signifikant häufiger
  - mit dem Verlauf des Graphen
    $(\chi^2 = 6.62,\ df = 1,\ p = 0.01^*,\ V = 0.10)$
  - mit Veränderung
    $(\chi^2 = 6.955,\ df = 1,\ p = 0.008^{**},\ V = 0.11)$

Simulation:
Graphische
Repräsentation
und Veränderung

Lichti & Roth (2018)

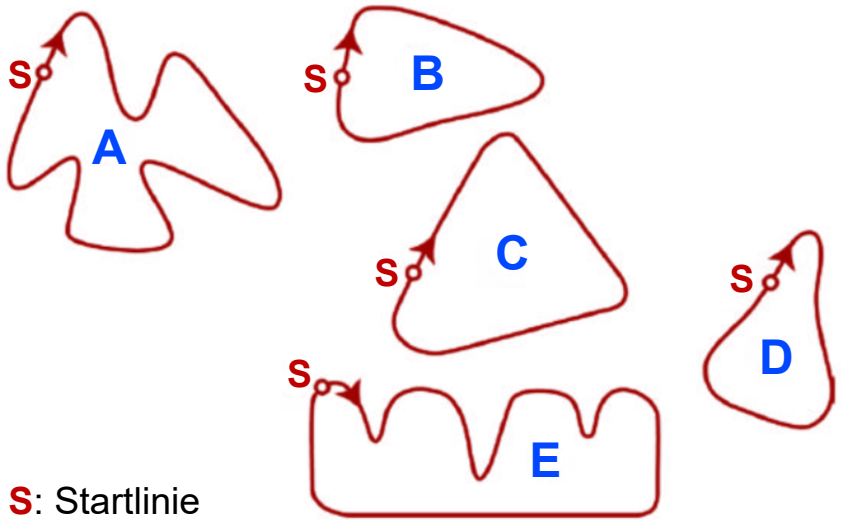
Rennwagen: Aufgabe

Dieser Graph zeigt, wie sich die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen, flachen Rennstrecke verändert.



Auf welcher der fünf Rennstrecken (man betrachtet sie von oben) ist der Wagen gefahren?

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C
- ☐ D
- ☐ E



S: Startlinie

Kategorie	Beispiel
Geschwindigkeit und Kurven	Ein Auto muss in Kurven langsamer werden.
Verschiedene Kurven	Es gibt drei Kurven: Zwei flache und eine steile.
Graph-als-Bild-Fehler	Weil die Bahn wie der Graph aussieht.
Falsche Interpretation der Rennstrecken	Die Rennstrecke [A] hat drei Kurven.

Lichti & Roth (2018)

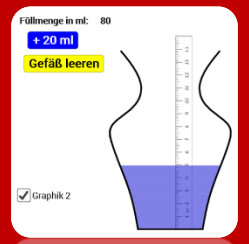
Rennwagen: Ergebnisse

- **Materialgruppe**
  - Schüler/innen können Wissen über Zusammenhang von Geschwindigkeit und Kurven signifikant häufiger **nicht** anwenden ($\chi^2 = 6.304$, $df = 1$, $p = 0.012^*$, $V = 0.21$)
  - Graph-als-Bild-Fehler: 36%

Material:
Graph-als-Bild-Fehler

- **Simulationsgruppe**
  - Graph-als-Bild-Fehler: 0%
    ⇒ Können besser mit Graphen umgehen

Simulation:
Verknüpfung Graph und reale Situation



Lichti & Roth (2018)

Ergebnisse im Überblick

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- **Quantitative Analyse**
  - Entwicklung Funktionalen Denkens — **Simulation** > Material

- **Qualitative Analyse**
  - Argumentation mit Funktionsgraphen — **Simulation** > Material
  - Argumentation mit realen Situation — Simulation < **Material**
  - Argumentation mit Änderungen — **Simulation** > Material
  - Argumentation mit Zuständen — Simulation < **Material**
  - qualitative Betrachtung (Interpretation und/oder Zeichnen) eines Graphen — **Simulation** > Material
  - Einzelne Wertepaare (Interpretation und/oder Zeichnen) — Simulation < **Material**

Lichti & Roth (2018)

Funktionales Denken

als wesentliche Grundlage mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitens

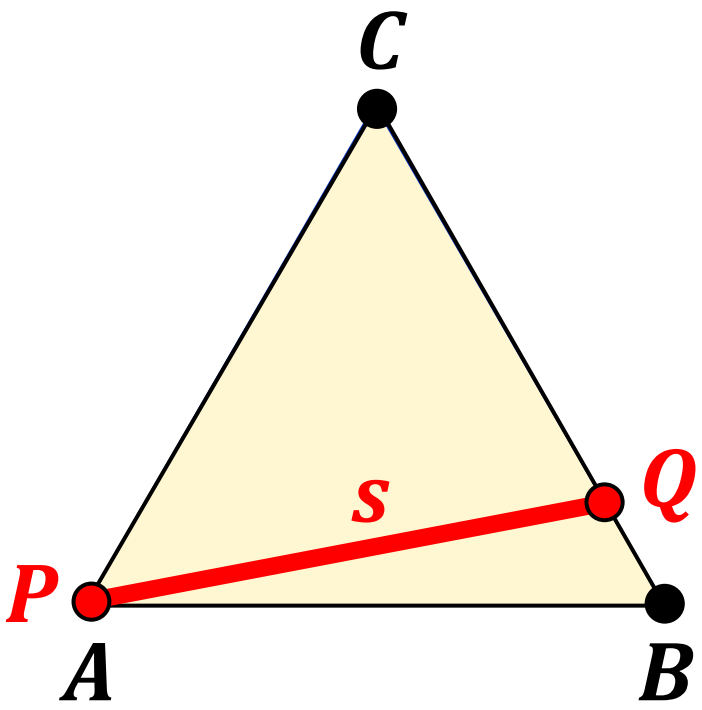
1 Funktionales Denken

2 Experimentieren mit gegenständlichen Materialien und Simulationen

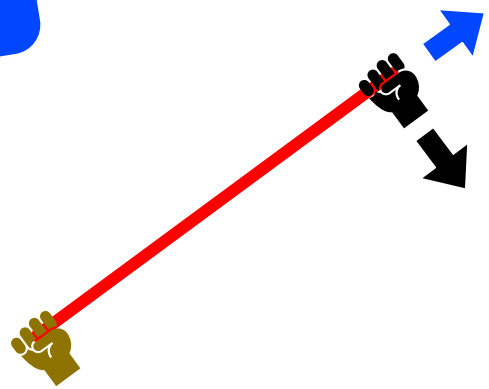
3 **Ein Beispiel für die Hochschullehre?!**

Beispiel: Dreieckssehne

Roth, J. (2005). Kurvenerzeugende Sehnen. Mathematik lehren 130, S. 8-10



Gummiband-modell

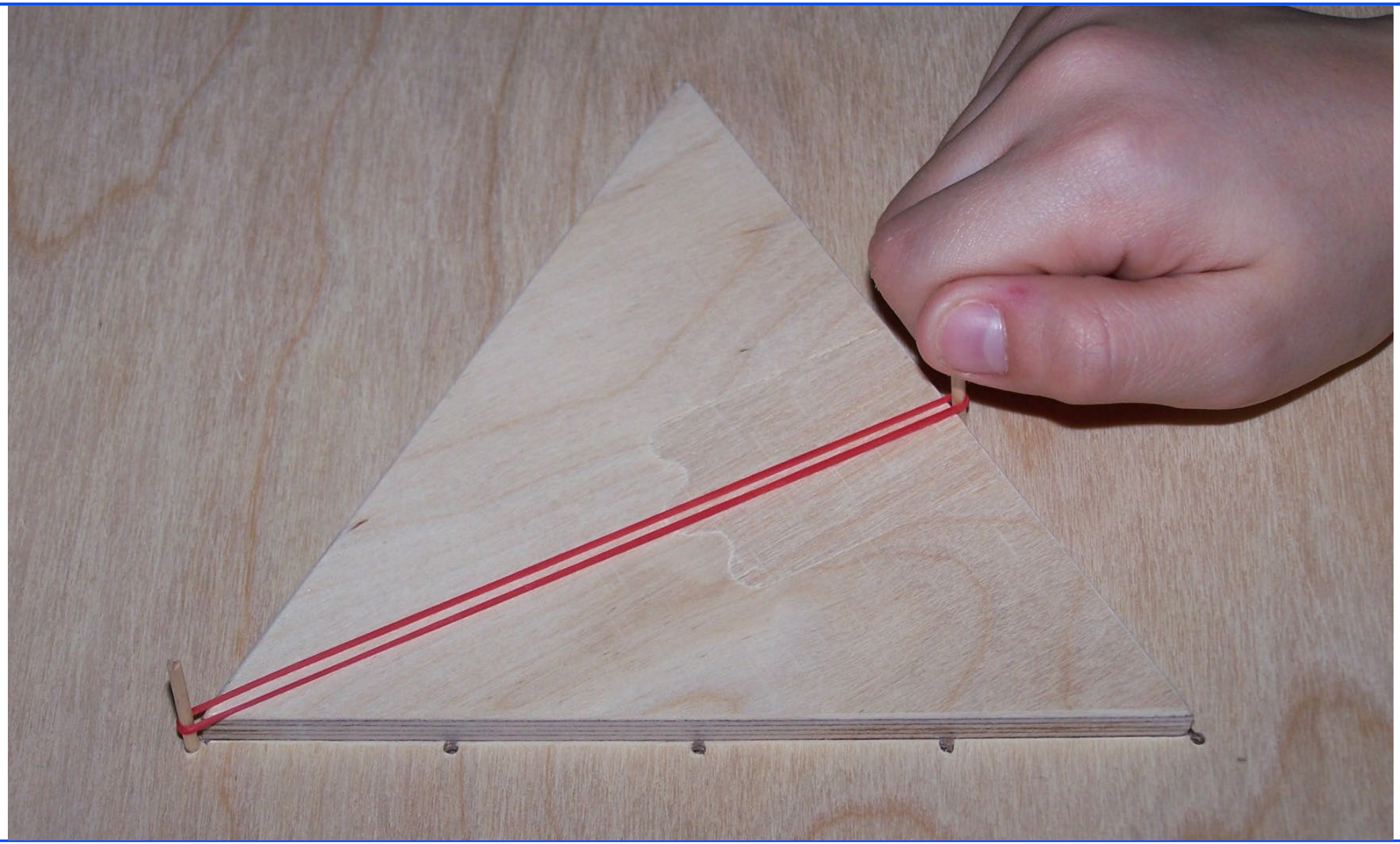


- Zuordnung
- Änderungsverhalten (Kovariation)
- Sicht als Ganzes

https://juergen-roth.de/dynageo/sehne_aenderung/

https://www.geogebra.org/m/wjgQ3PQB

Holzmodell Dreieckssehne

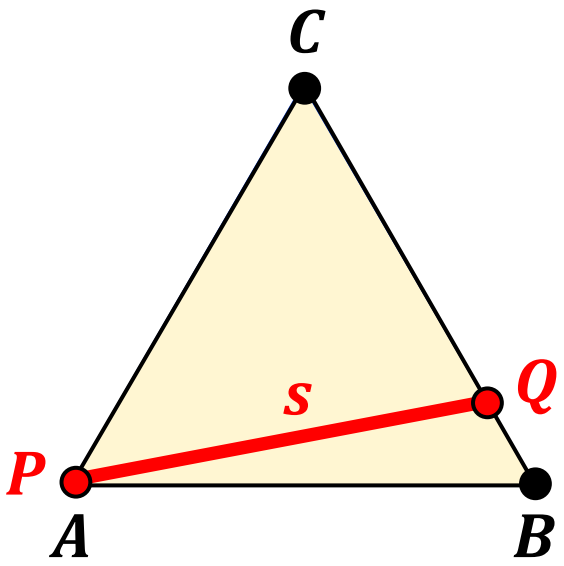


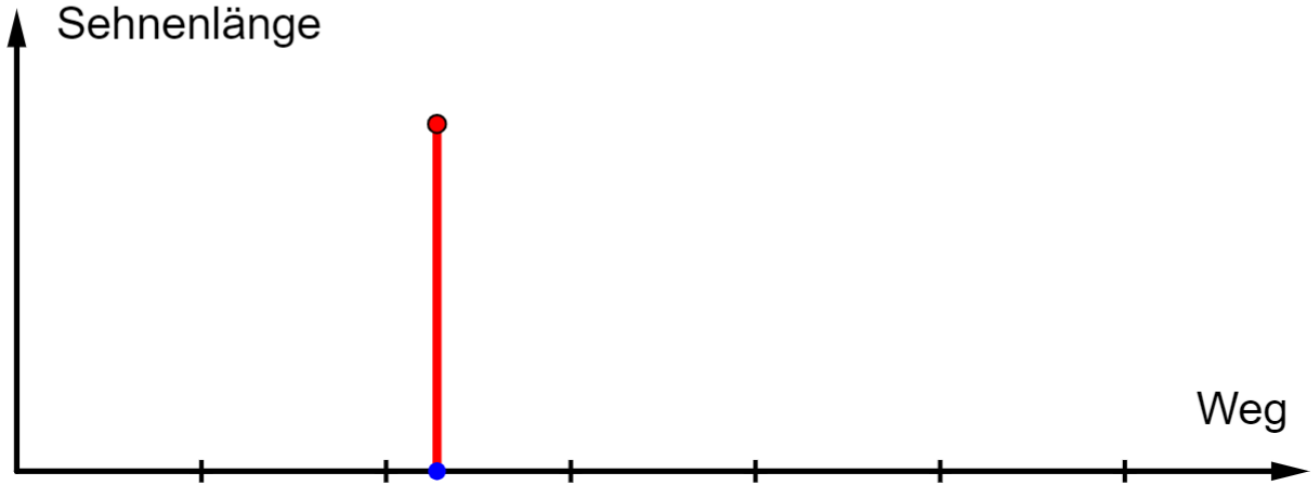
Arbeitsaufträge Dreieckssehne

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

https://www.geogebra.org/classroom/jykdjfdm

Gummiband-modell





- **Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Graphen der Zuordnung $x \mapsto s(x)$.**
  - Achten Sie dabei insbesondere auch auf das Änderungsverhalten.
  - Diskutieren Sie alle Details des Verlaufs Ihres Graphen in der Gruppe.
  - Interpretieren und erklären Sie Eigenschaften des Graphen anhand von Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks und umgekehrt.
  - https://roth.tel/dreieckssehne

https://www.geogebra.org/m/wjgQ3PQB

Einsatz von Werkzeugen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- **Bilder**
  - Denkprozesse anstoßen
  - Ergebnisse zusammenfassen
- **„Modelle“**
  - Verständnisgrundlagen anbieten (vgl. „Gummibandmodell“)

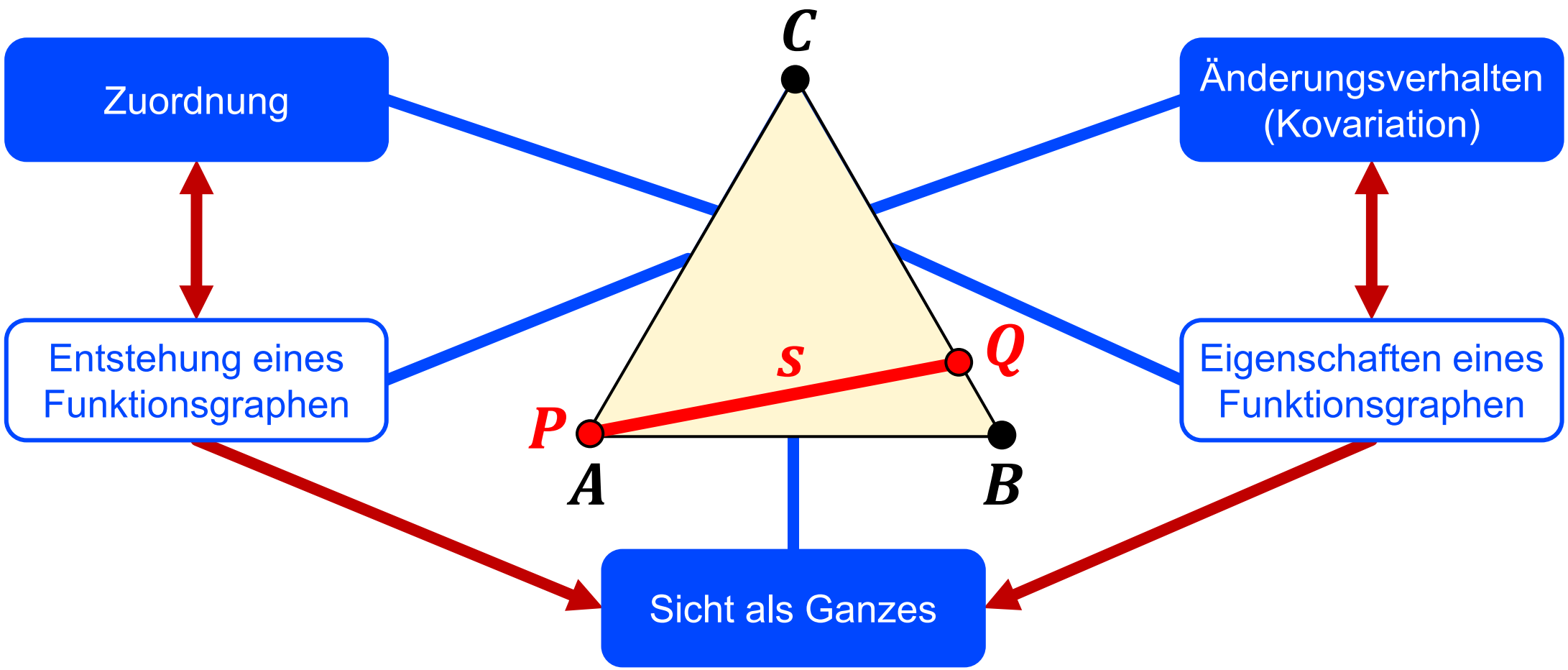
Grundsätzlich

- Werkzeuge dosiert einsetzen
- Einsatz von Werkzeugen soll zum Denken anregen

- **Computerwerkzeuge**
  - Kontrollinstanz
    - „Im Kopf“ abgelaufene Denkvorgänge überprüfen und hinterfragen
  - Kommunikationsmittel
    - Aufmerksamkeit fokussieren
    - Änderungsverhalten durch „Vorführen“ von Veränderungen veranschaulichen
  - „Denkzeug“
    - Komplexität reduzieren
    - Gedächtnis entlasten
    - Konzentration auf Planung, Analyse und Argumentation

Figuren verändern – Funktionen verstehen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



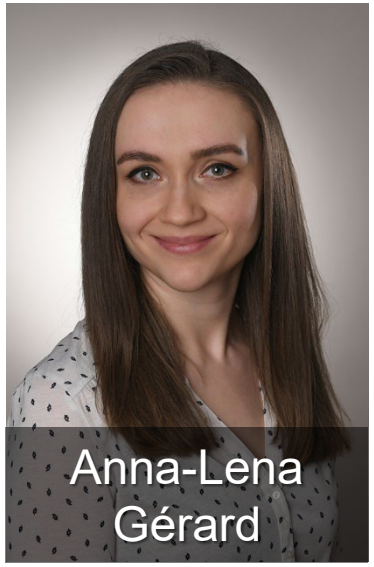
UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

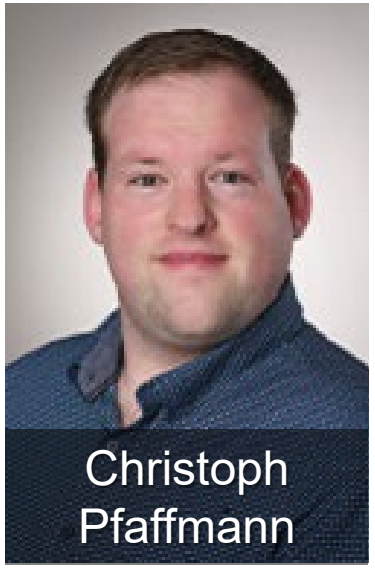
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

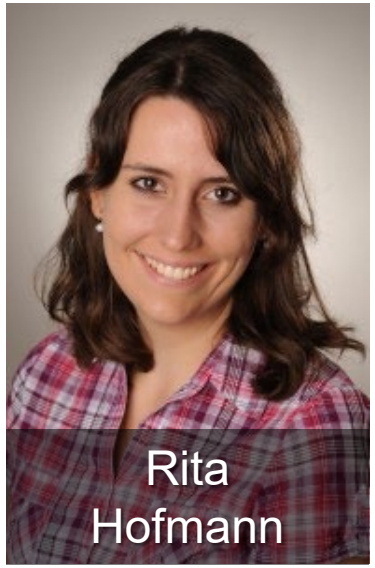
Marie-Elene Bartel

Jürgen Roth

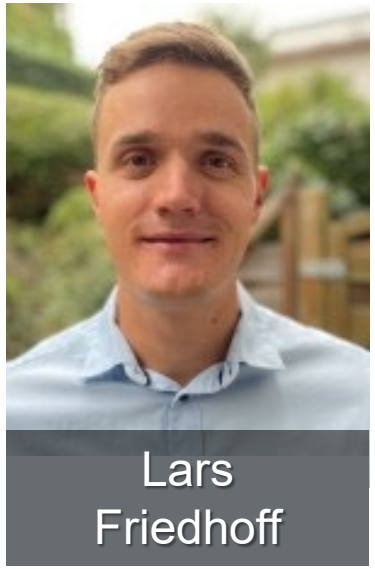

Anna-Lena Gérard

juergen-roth.de
dms.uni-landau.de

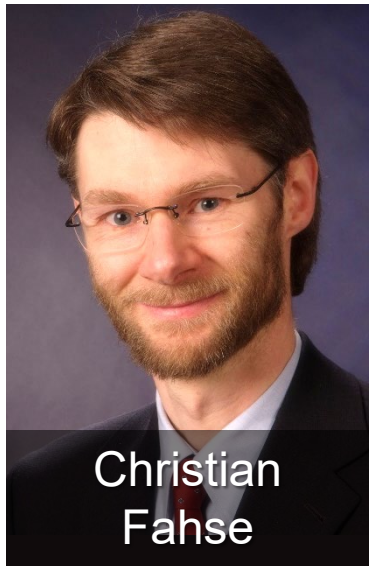

Christoph Pfaffmann


Rita Hofmann

Stefan Schumacher

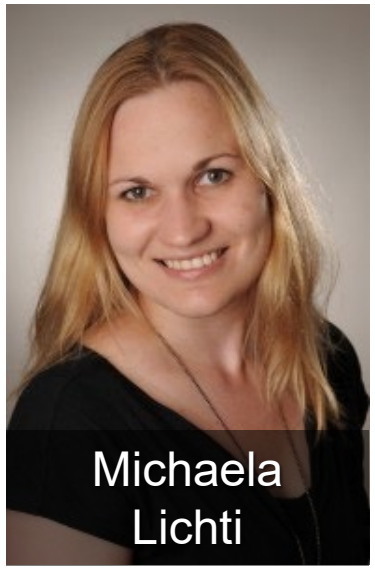

Lars Friedhoff

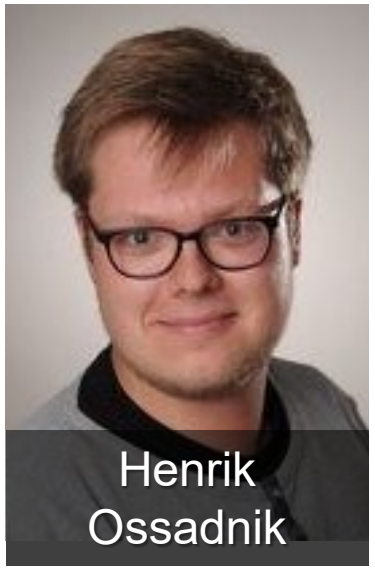
Susanne Digel


Christian Fahse

roth.tel

Alex Engelhardt


Michaela Lichti


Henrik Ossadnik