Jürgen Roth

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Darstellungen funktionaler Zusammenhänge mit GeoGebra dynamisch vernetzen

15.11.2022 • juergen-roth.de

RPTU

Mathematik lehren 226
Mit Funktionen denken und arbeiten

https://juergen-roth.de/publikationen/

https://roth.tel/funktionen/

https://geogebra.org/m/nmsbbwja

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Darstellungen mit GeoGebra dynamisch vernetzen

1. Verständnisanker und Grund-vorstellungen zu Funktionen
2. Darstellungsformen ↔ Darstellungswechsel
3. Parameter, Funktionsgraph und sprachliche Darstellung

Darstellungen mit GeoGebra dynamisch vernetzen

1. **Verständnisanker und Grundvorstellungen zu Funktionen**
2. Darstellungsformen
   ↔ Darstellungswechsel
3. Parameter, Funktionsgraph und sprachliche Darstellung

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungszusammenhängen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
  haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
  werden mit mathematischen Darstellungsmitteln (Zahlenstrahl, Graph, …) repräsentiert

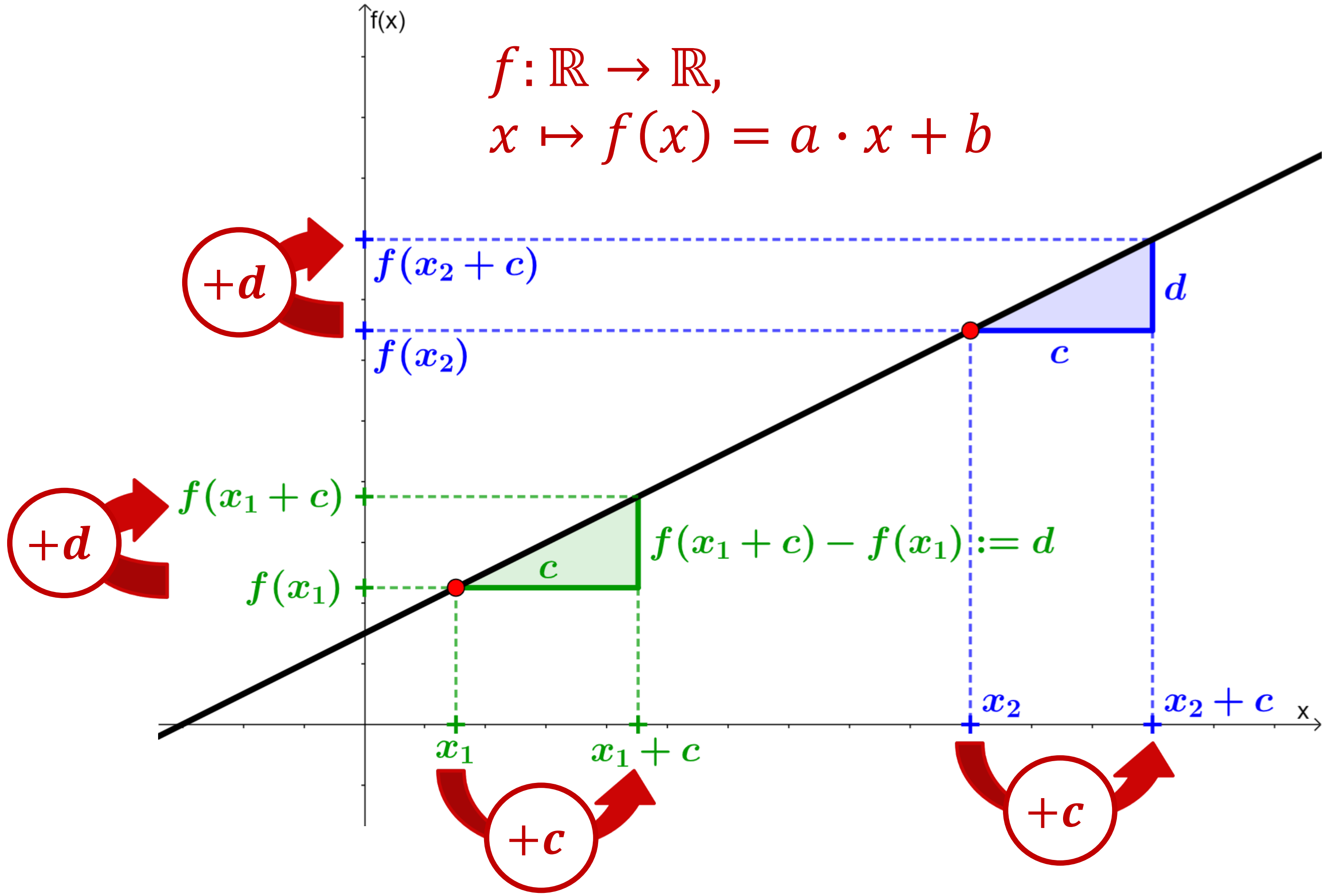
 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, S. 2-9

Primäre Grundvorstellungen

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, S. 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f(x+c)$$
$$= a \cdot (x+c) + b$$
$$\overset{DG}{\widehat{=}}\ a \cdot x + a \cdot c + b$$
$$\overset{KG}{\widehat{=}}\ \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$
$$= f(x) + d$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

 Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

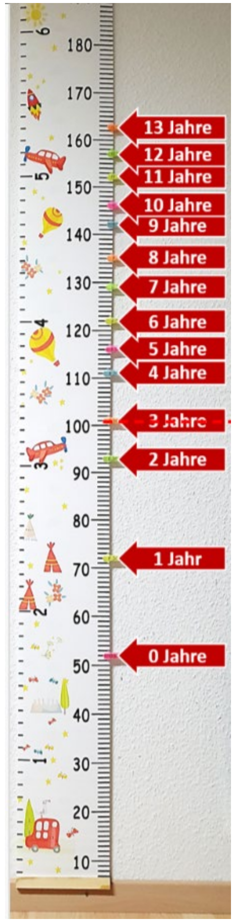
Verständnisanker

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle wesentlichen Strukturelemente zum Verständnis des mathematischen Sachverhalts in dieser Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel

- Ein möglicher Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Funktionen ist etwa der Zusammenhang zwischen dem Lebensalter und der Körpergröße eines Menschen.
- Dieser Zusammenhang ist allen Menschen vertraut und die Grundvorstellungen zu Funktionen können daran erfasst & durchschaut werden.
- Näheres zu diesem Verständnisanker: Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.



https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

Grundvorstellungen zu Funktionen

Experiment:
Schüler/innen …

- rennen eine Treppe hinauf,
- messen nach dem Lauf in Abständen von 30s ihren Puls,
- halten den Zusammenhang paarweise in einer Tabelle fest.

Erfahrung: Jedem Zeitpunkt wird (genau) ein Puls zugeordnet.

Zuordnung
Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammen-hänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Fragestellung

Wie ändert sich der Puls in gleichen Zeitschritten? Ändert er sich auch gleichmäßig, oder zunächst langsamer und dann schneller oder … ?

- Hierfür reicht es nicht einzelne Wertepaare zu betrachten.
- Es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden.

Änderungsverhalten / Kovariation

Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Fragestellung

Wie sieht der funktionale Zusammenhang zwischen Zeitpunkt und Puls als Ganzes aus?

- Dazu muss man
  → systematisch Daten aufnehmen,
  → in einer Tabelle festhalten,
  → einen Graphen zeichnen
- Kann erst am Graph als Ganzes betrachtet und anhand der Verläufe für verschiedene Läufer verglichen werden → Fitness.

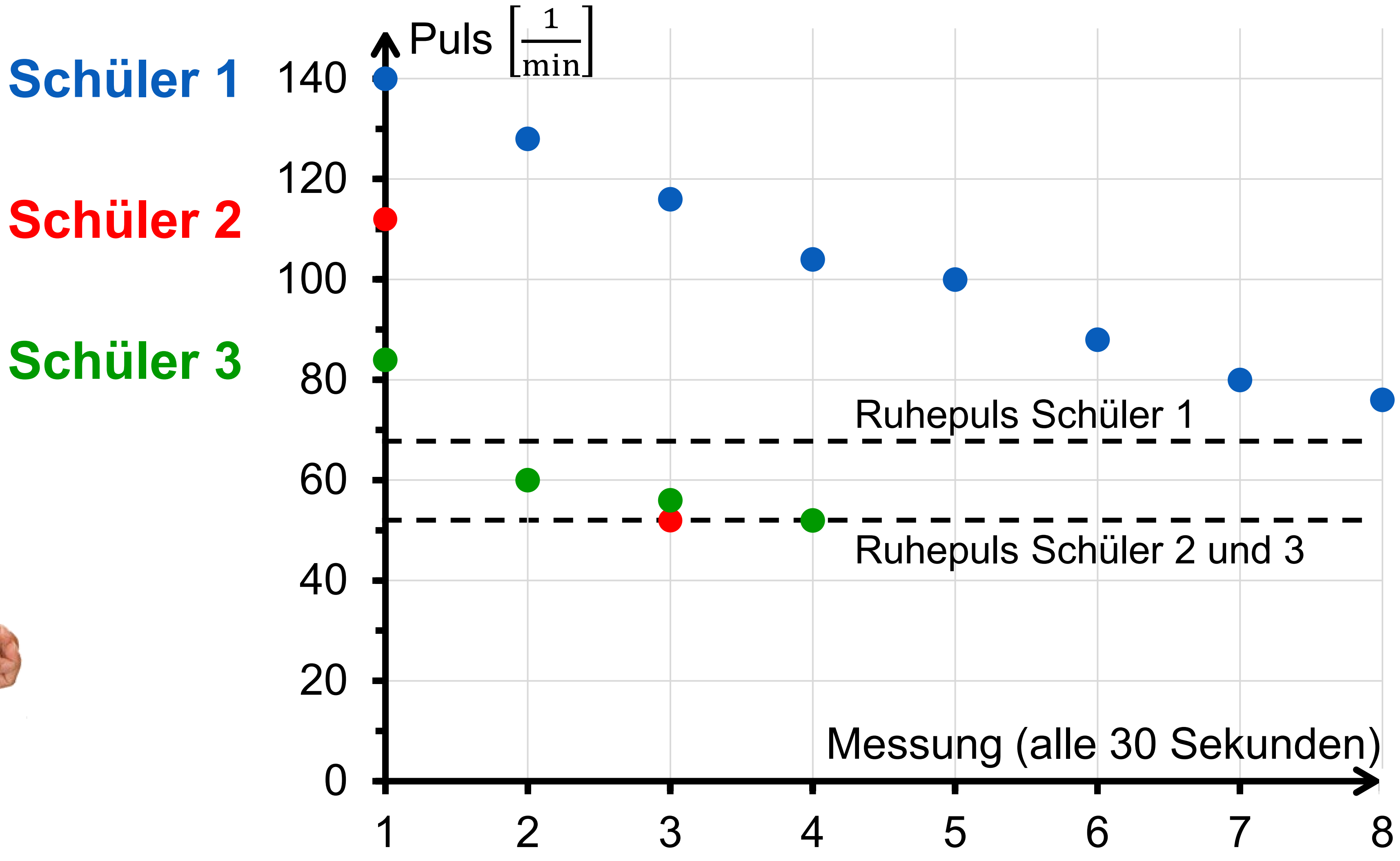
Funktion als Ganzes

Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

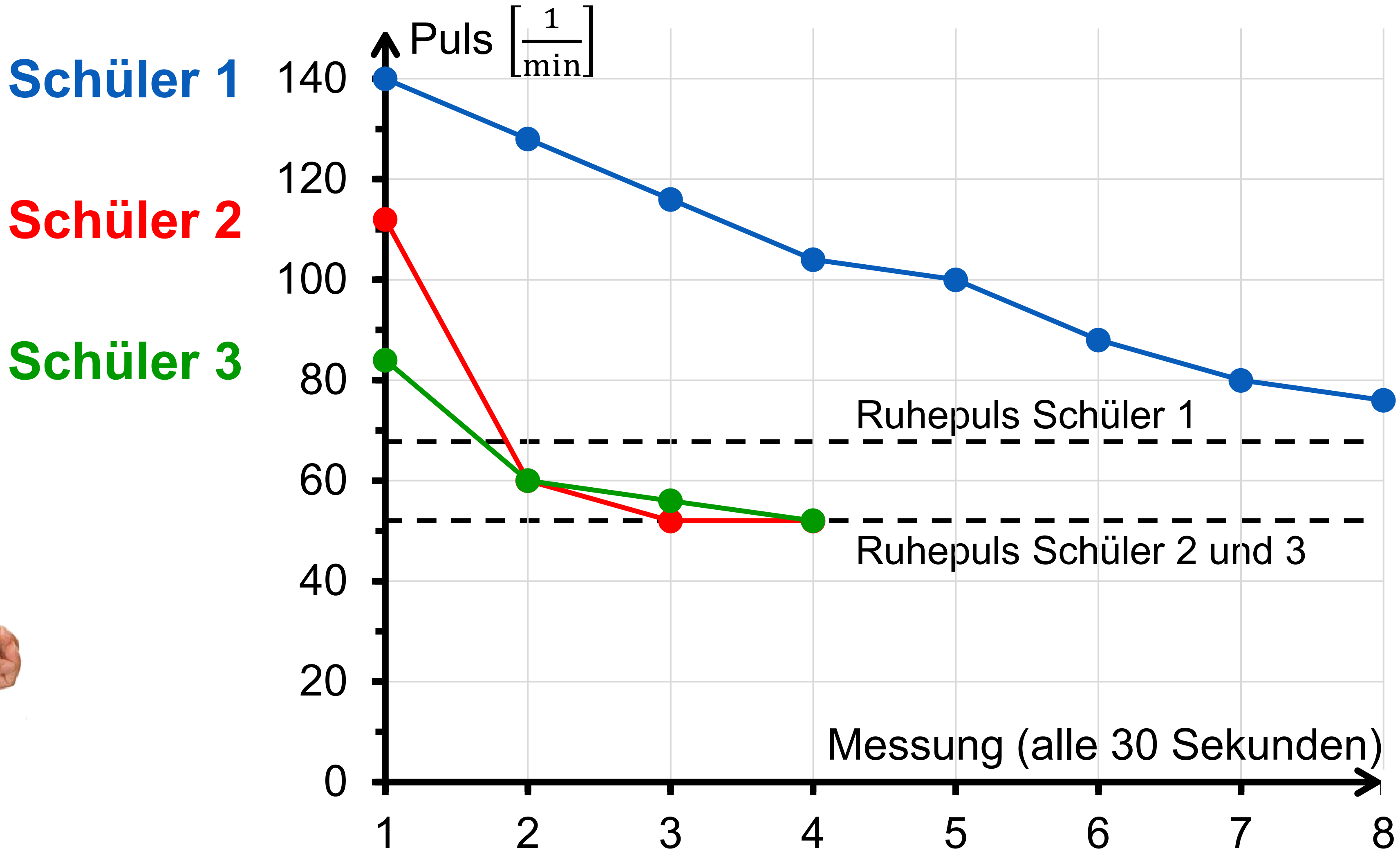
Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**



Perspektiven zur **Sicht als Ganzes** bei Funktions-graphen:

(1) Vergleich von Abschnitten im selben Graph

(2) Vergleich verschiedener Graphen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Zuordnung
Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Änderungsverhalten / Kovariation
Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Funktion als Ganzes
Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Ziele beim Ausbilden v. Grundvorstellungen

Sinnzusammenhänge herstellen

- Anknüpfen an bekannte Situationen oder Handlungsvorstellungen

Prototypisches Beispiel als Verständnis-anker

Aufbauen von mentalen Repräsentationen

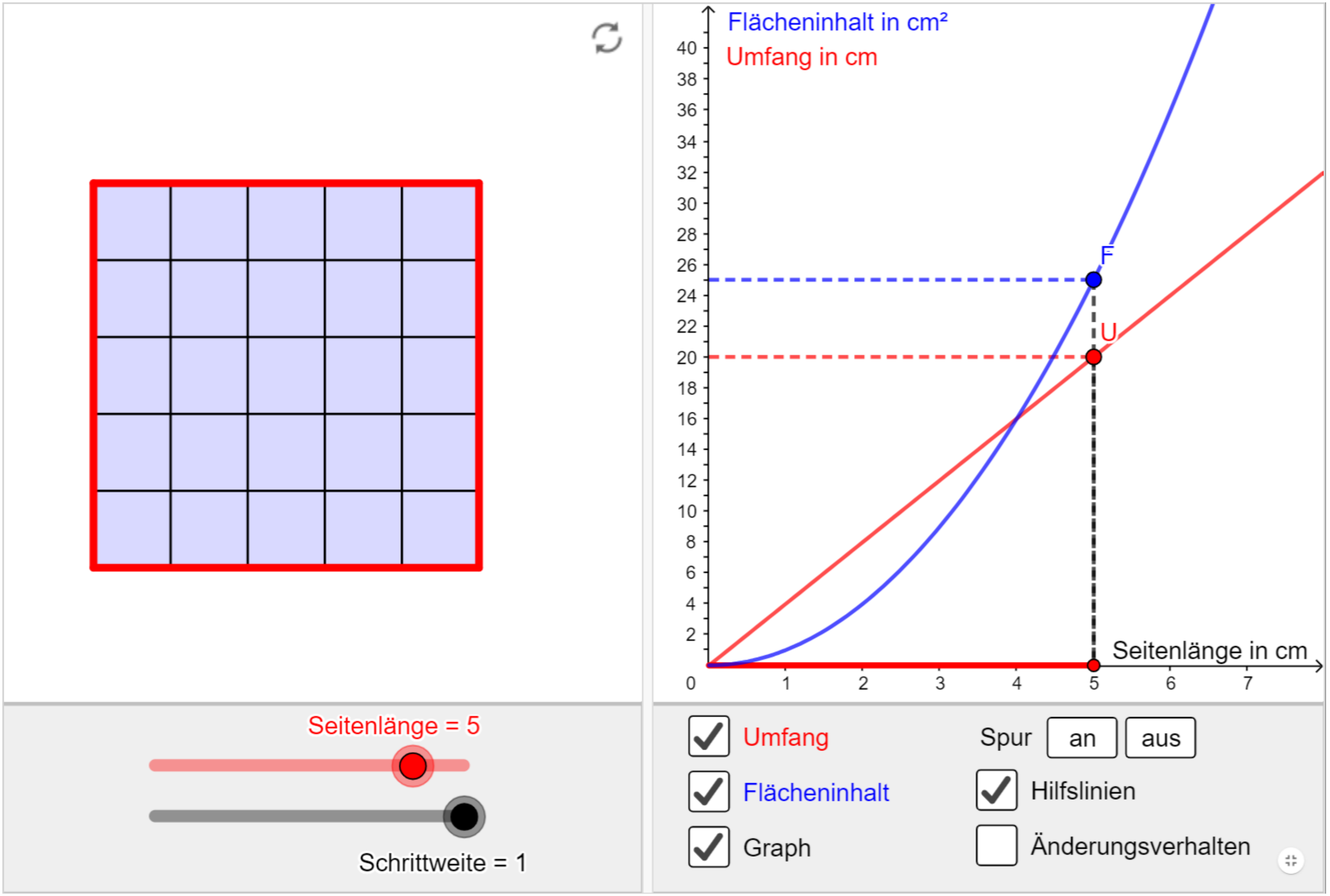
- Ermöglichen operativen Handelns auf der Vorstellungsebene

Anwenden in neuen Situationen

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren des Phänomens mit Hilfe der mathematischen Struktur

Vgl. vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren 118*, S. 4-8

Beispiel Quadrat:
Lineare Funktion ↔ Quadratische Funktion



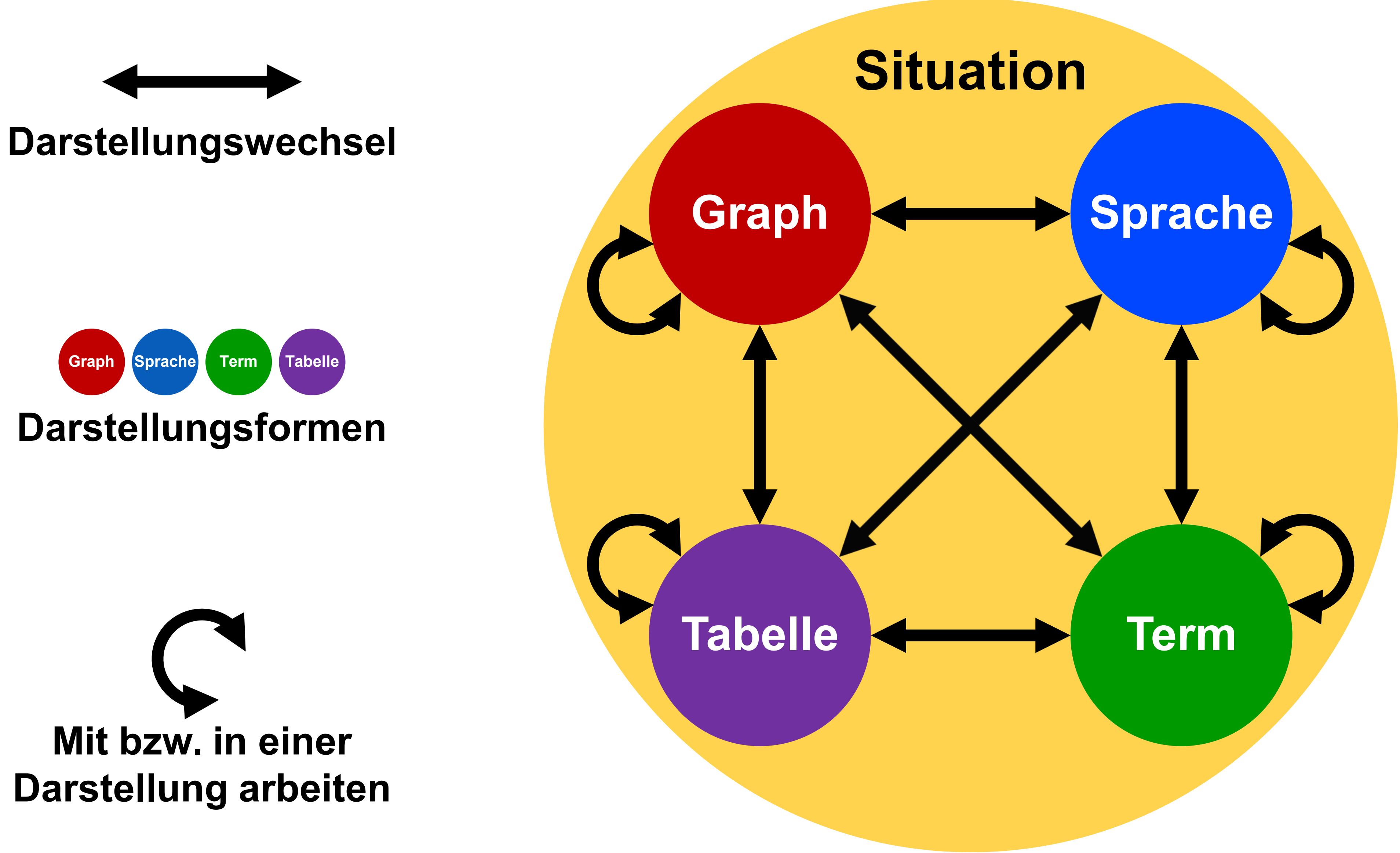
https://www.geogebra.org/m/vyb3z7vz

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Darstellungen mit GeoGebra dynamisch vernetzen

1. Verständnisanker und Grundvorstellungen zu Funktionen
2. **Darstellungsformen ↔ Darstellungswechsel**
3. Parameter, Funktionsgraph und sprachliche Darstellung

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen



Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](). *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

Grundvorstellungen ↔ Darstellungsformen

Darstellungsformen →

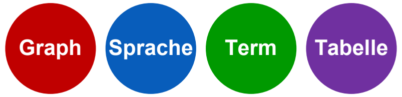
Grundvorstellungen ↓

	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	**Tätigkeit:** Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet. **Hauptzweck:** Markante Punkte erfassen	**Tätigkeit:** Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet. **Hauptzweck:** Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen	**Tätigkeit:** Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet. **Hauptzweck:** Bestimmen einzelner Werte	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen. **Hauptzweck:** Erfassen einzelner Werte
Kovariation	**Tätigkeit:** Unterteilung in Abschnitte mitunterschiedlichem Änderungsverhalten **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ erfassen	**Tätigkeit:** Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Sicht als Ganzes	**Tätigkeit:** Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder für Teilbereiche typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristischen Verlauf erfassen	**Tätigkeit:** Differenzen-, Produkt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen. **Hauptzweck:** Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	**Tätigkeit:** Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristika quantitativ erfassen	**Tätigkeit:** Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus. **Hauptzweck:** Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

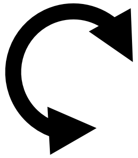
Verändert nach
Hußmann, Laakmann (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM (53)38*, 2-13

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

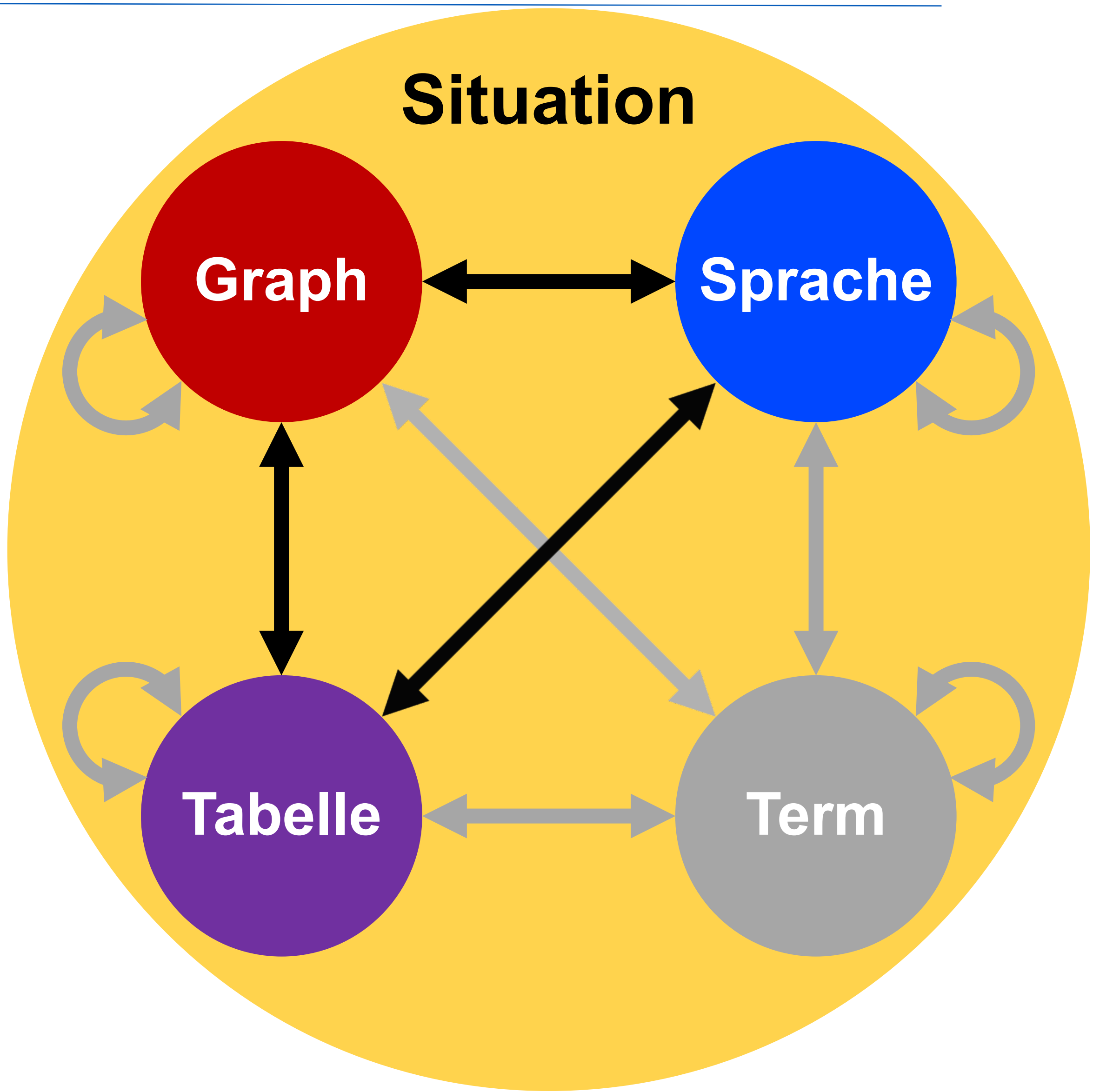
Darstellungswechsel



Darstellungsformen

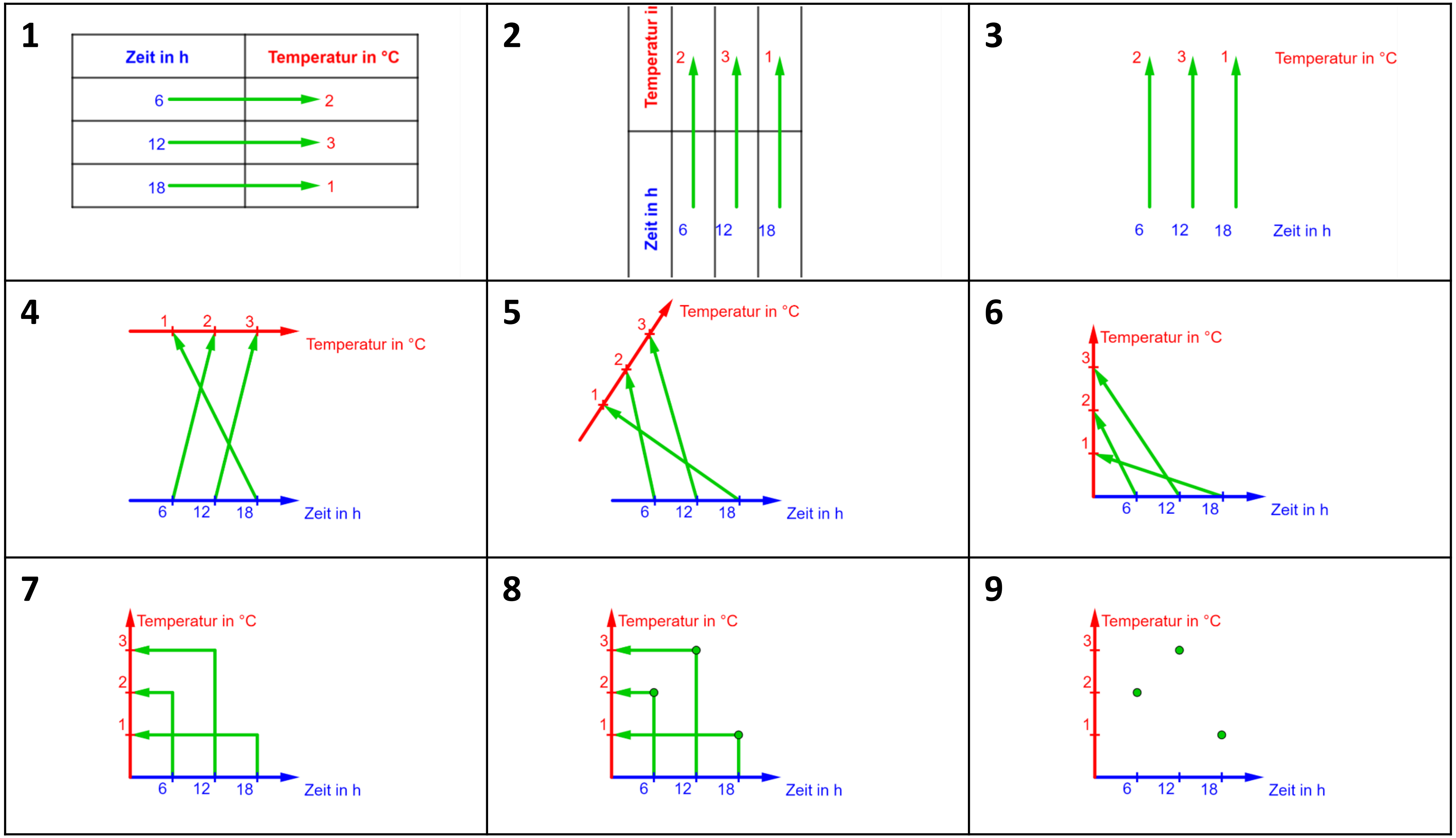


Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

Darstellungsformen erfassen:
Das Beispiel Funktionsgraph



Das Applet zeigt, wie aus den Zuordnungen von Zeit und Temperatur, die oben links in der Tabelle dargestellt sind, der Funktionsgraph der Zeit-Temperatur-Funktion unten rechts entsteht.

Dafür müssen die Elemente der beteiligten Mengen jeweils der Größe nach angeordnet werden können.

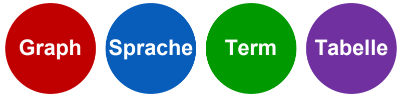
Grundvorstellung Zuordnung

https://www.geogebra.org/m/kknpe5u9

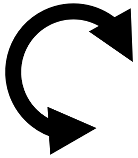
 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

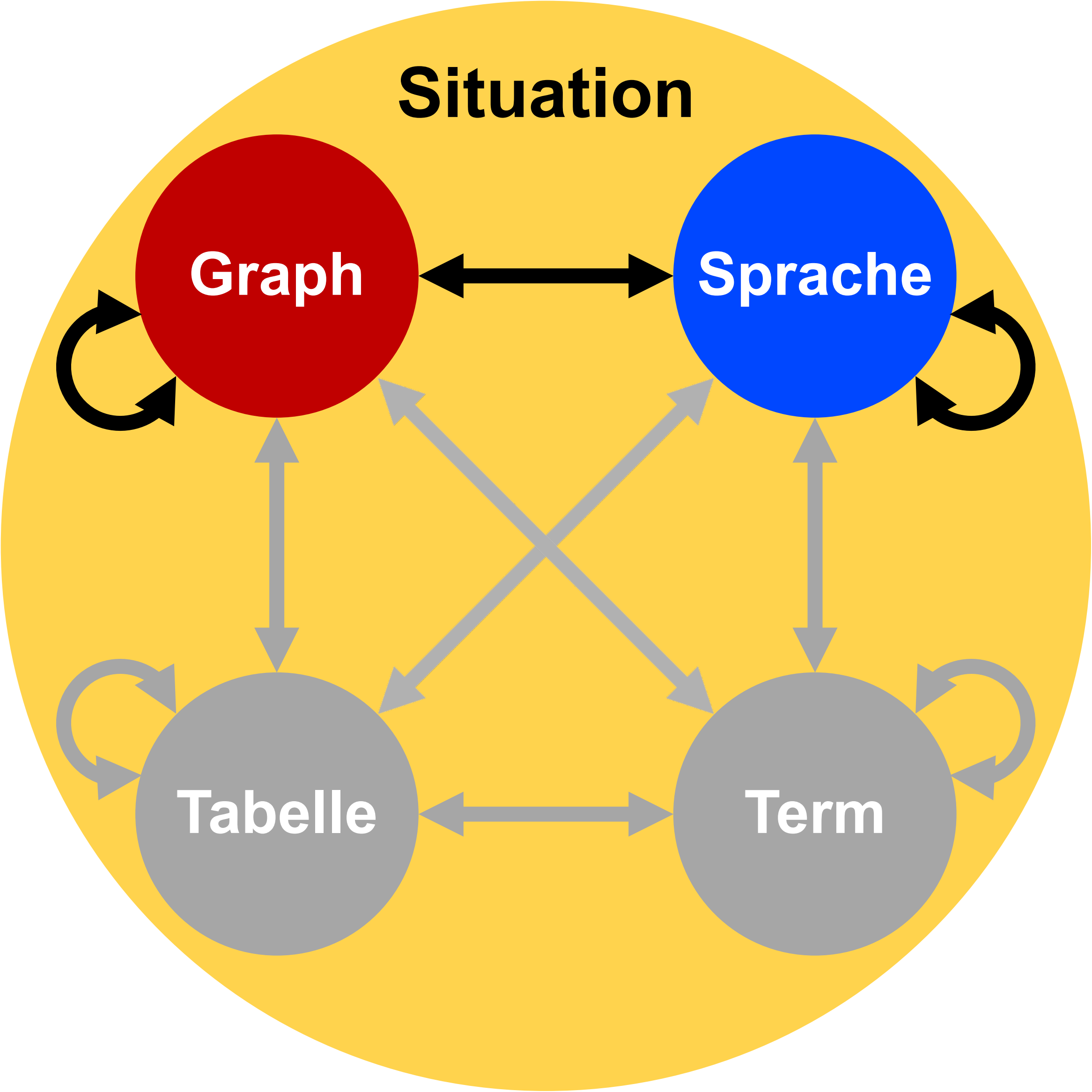
Darstellungswechsel



Darstellungsformen



Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten



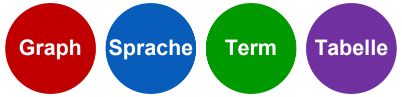
 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

Kerze: Brenndauer → Länge

https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=40da6cdb-fa5e-42e1-9a07-ae0a00de8077 (Zeitraffer)
https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=9b04b701-a3dc-4ce0-a984-ae0a00dd6449 (Originallänge)

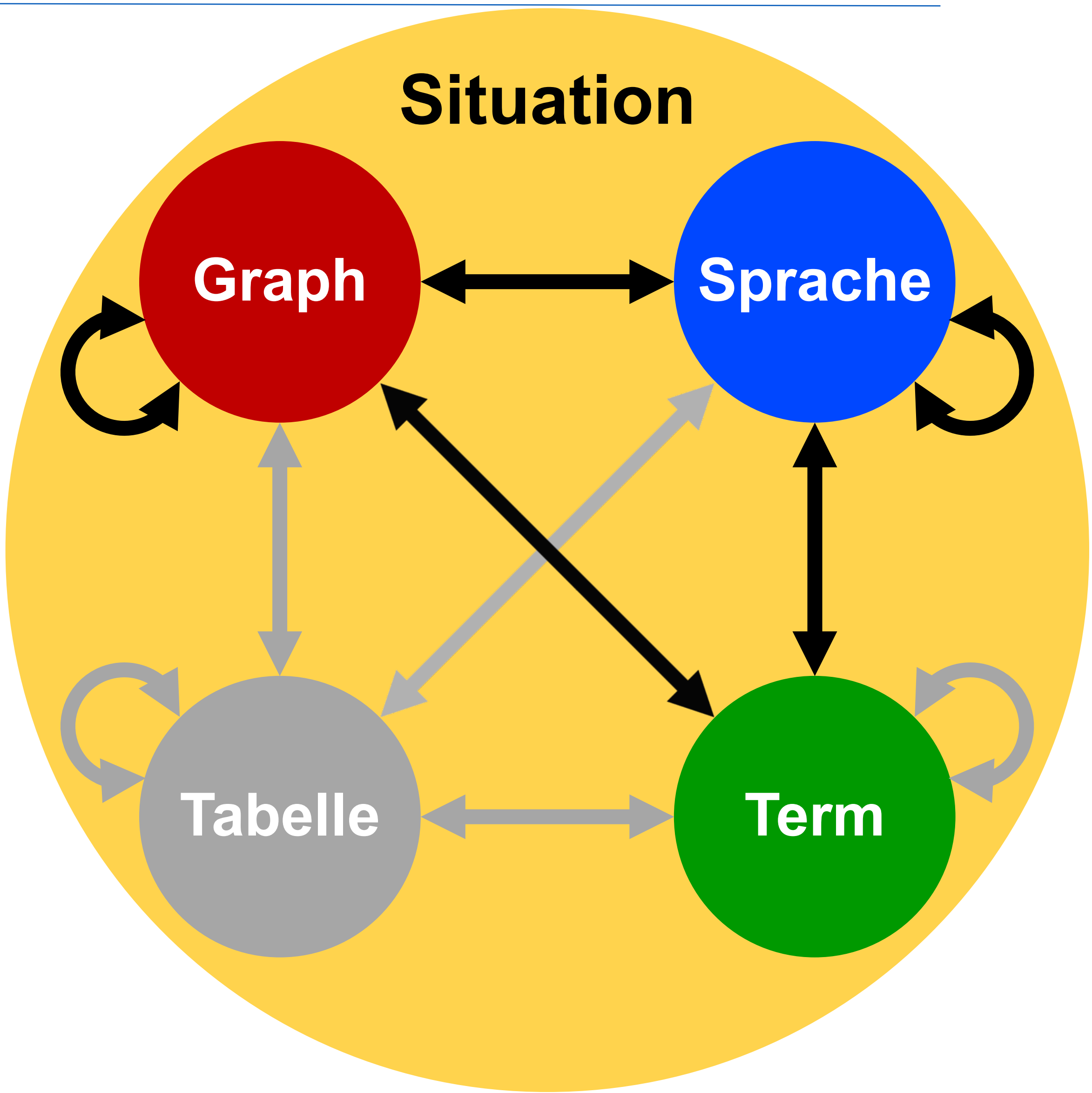
Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

Darstellungswechsel



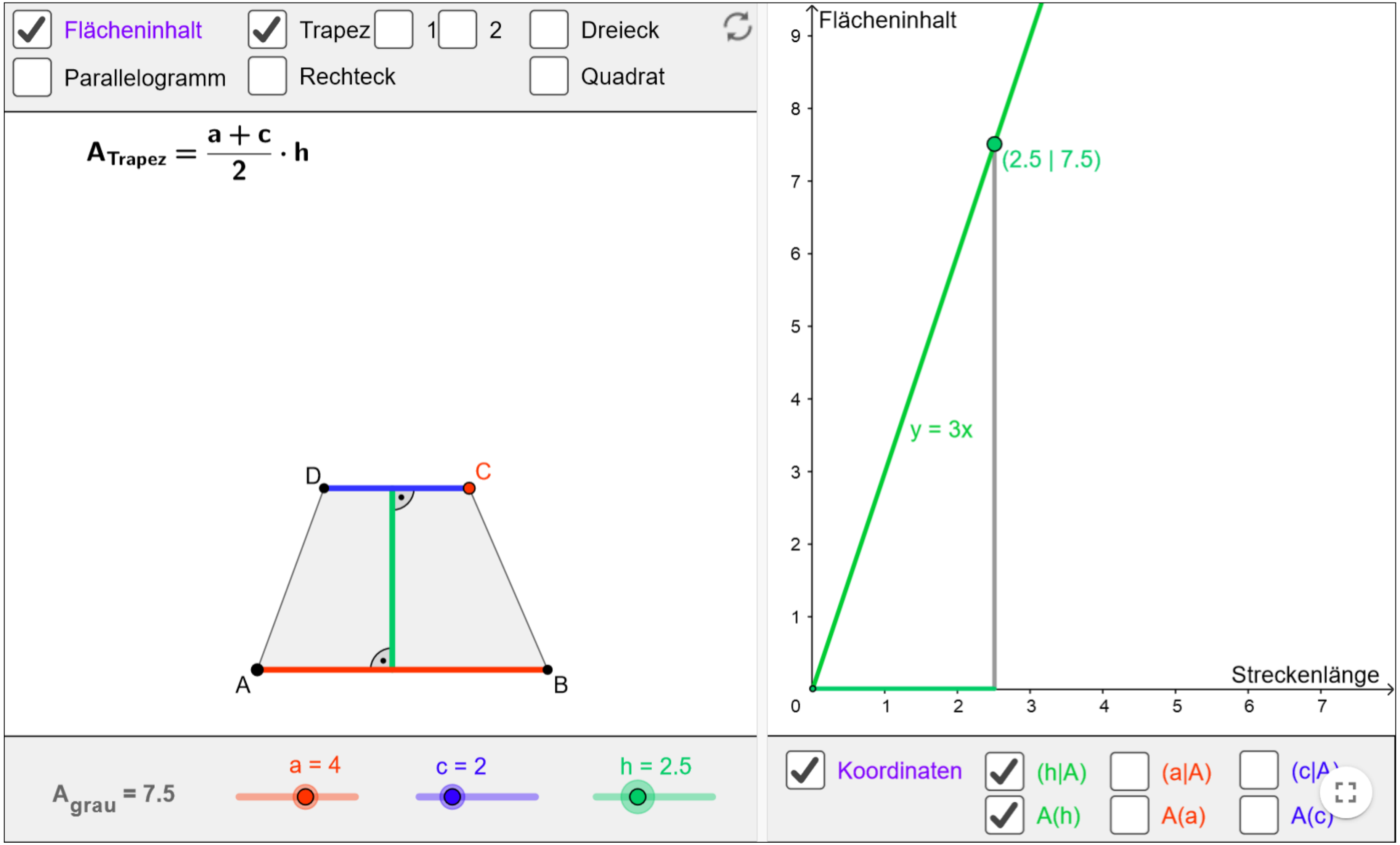
Darstellungsformen

Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

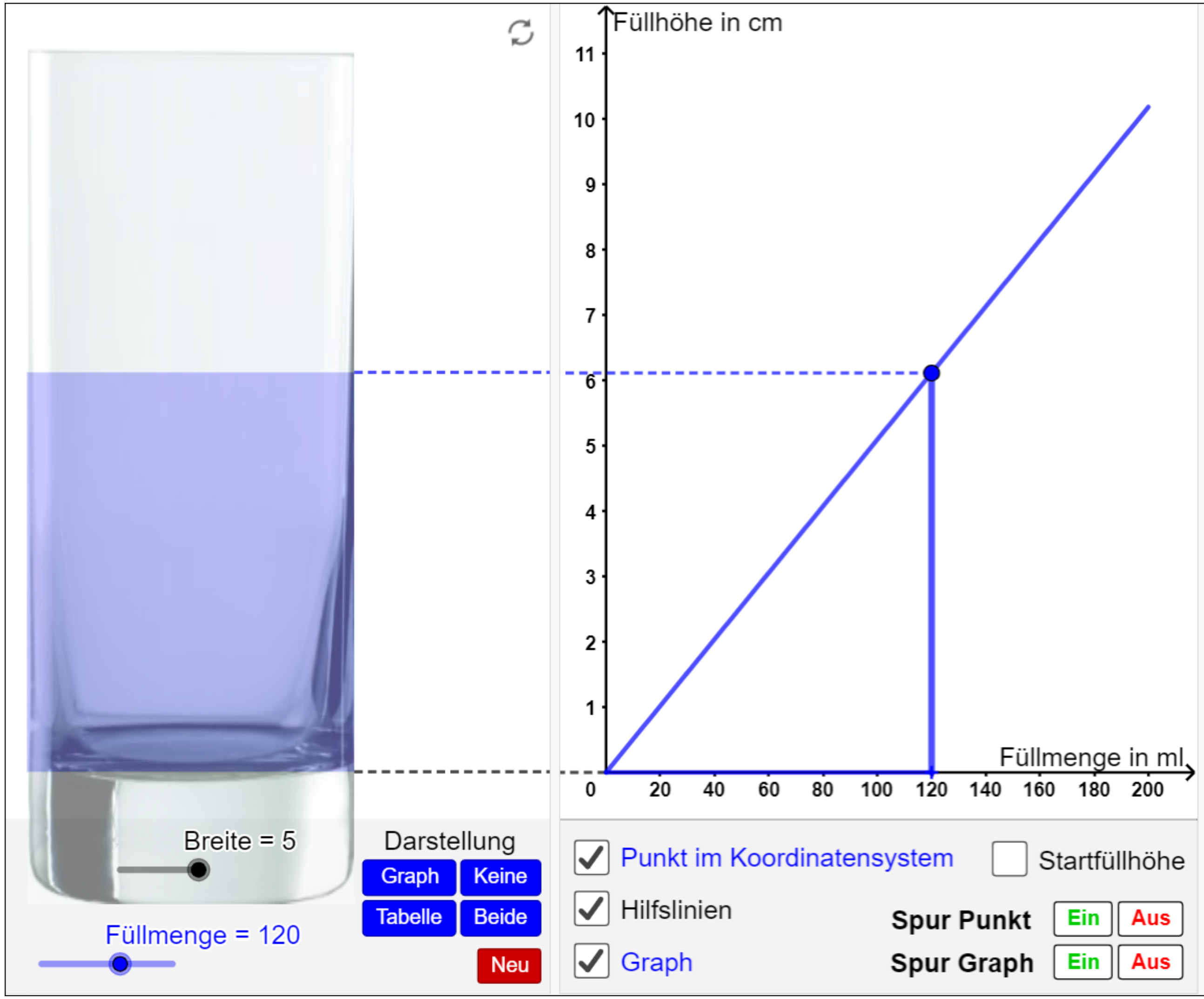
Darstellungen in Beziehung setzen
Trapez-Flächeninhalt



Roth, J. (2008). Systematische Variation – Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. *Mathematik lehren, 146*, 17-21
https://www.geogebra.org/m/dTuCuDs5

Darstellungsformen wechselseitig interpretieren: Fokussierungshilfen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



	A	B	C	D
1	Breite:	5 cm	4 cm	3 cm
2	Füllmenge [ml]	Füllhöhe [cm]	Füllhöhe [cm]	Füllhöhe [cm]
3	0	0	0	0
4	20	1.02	1.59	2.83
5	40	2.04	3.18	5.66
6	60	3.06	4.77	8.49
7	80	4.07	6.37	
8	100	5.09	7.96	
9	120	6.11	9.55	
10	140	7.13		
11	160	8.15		
12	180	9.17		
13	200	10.19		
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				

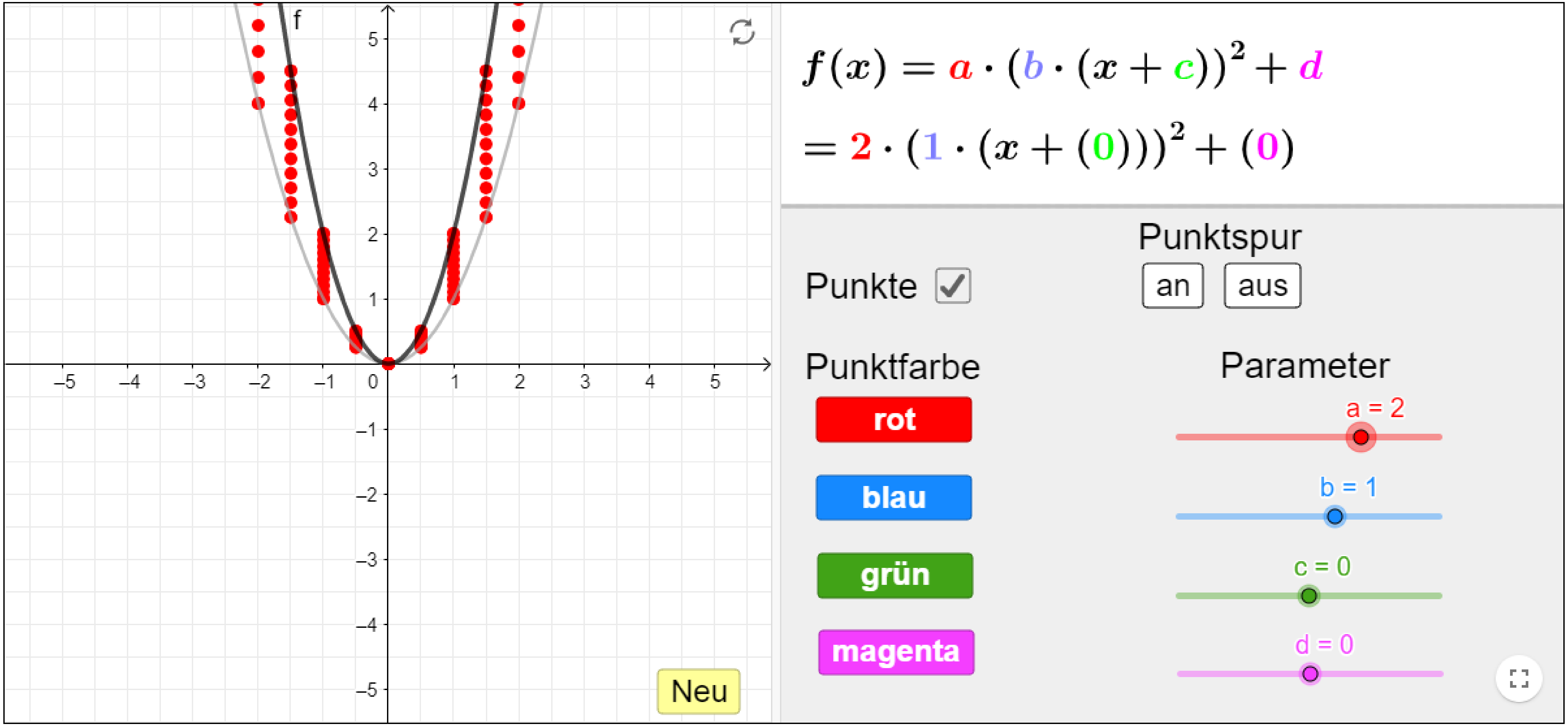
Lichti, Roth (2021). Der Einstieg in Funktionales Denken − Darstellungsform und passendes Medium. *Mathematik lehren, 226*, 10-14.
https://www.geogebra.org/m/rqgzqrm4

RPTU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Darstellungen mit GeoGebra dynamisch vernetzen

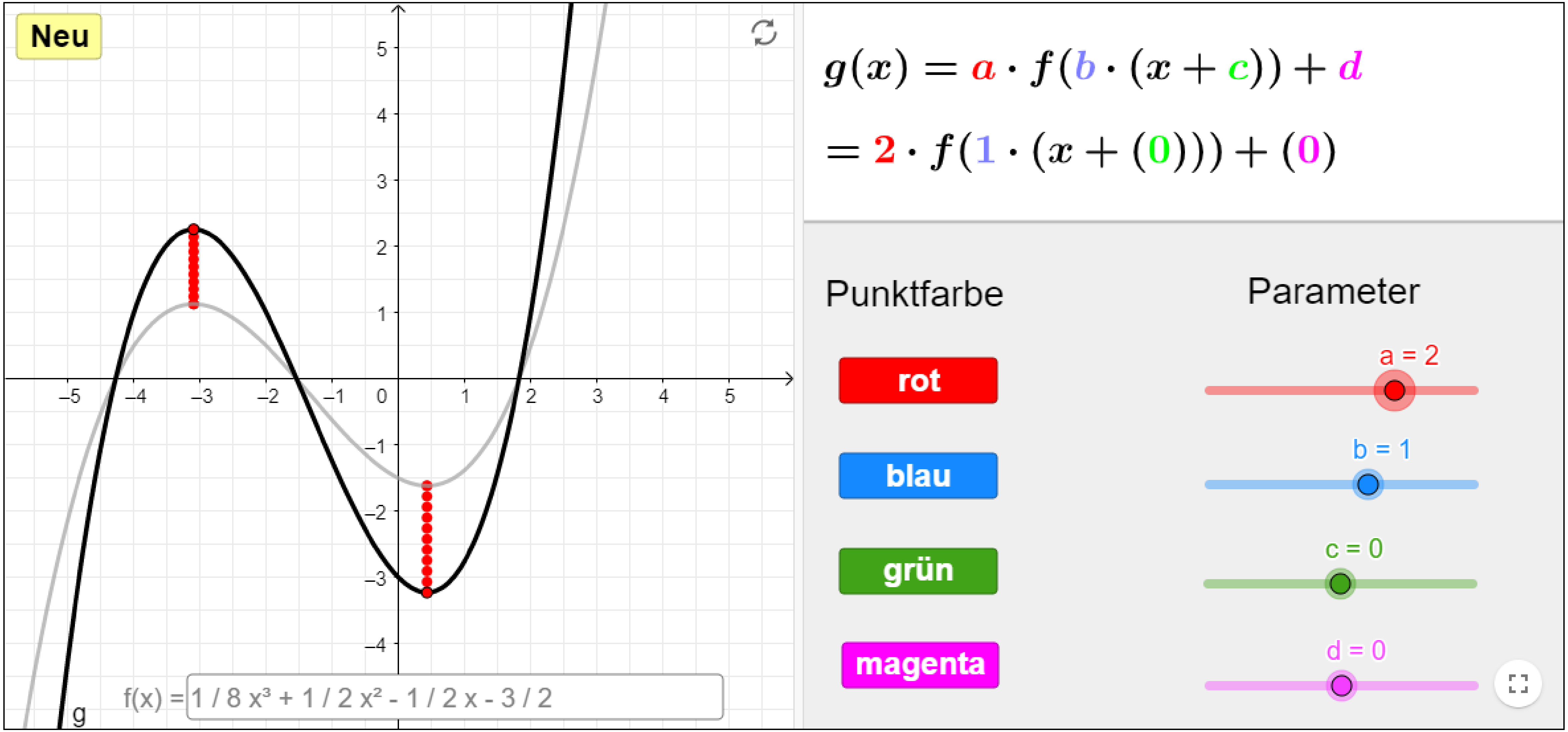
1. Verständnisanker und Grund-vorstellungen zu Funktionen
2. Darstellungsformen ↔ Darstellungswechsel
3. **Parameter, Funktionsgraph und sprachliche Darstellung**

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/jp4t7u6k

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion

$f(x) = x^2$

$$g(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c)\right)^2 + d$$

$+$ $-$

$+$

$-$

Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein

$$g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x + c)\big) + d$$

Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

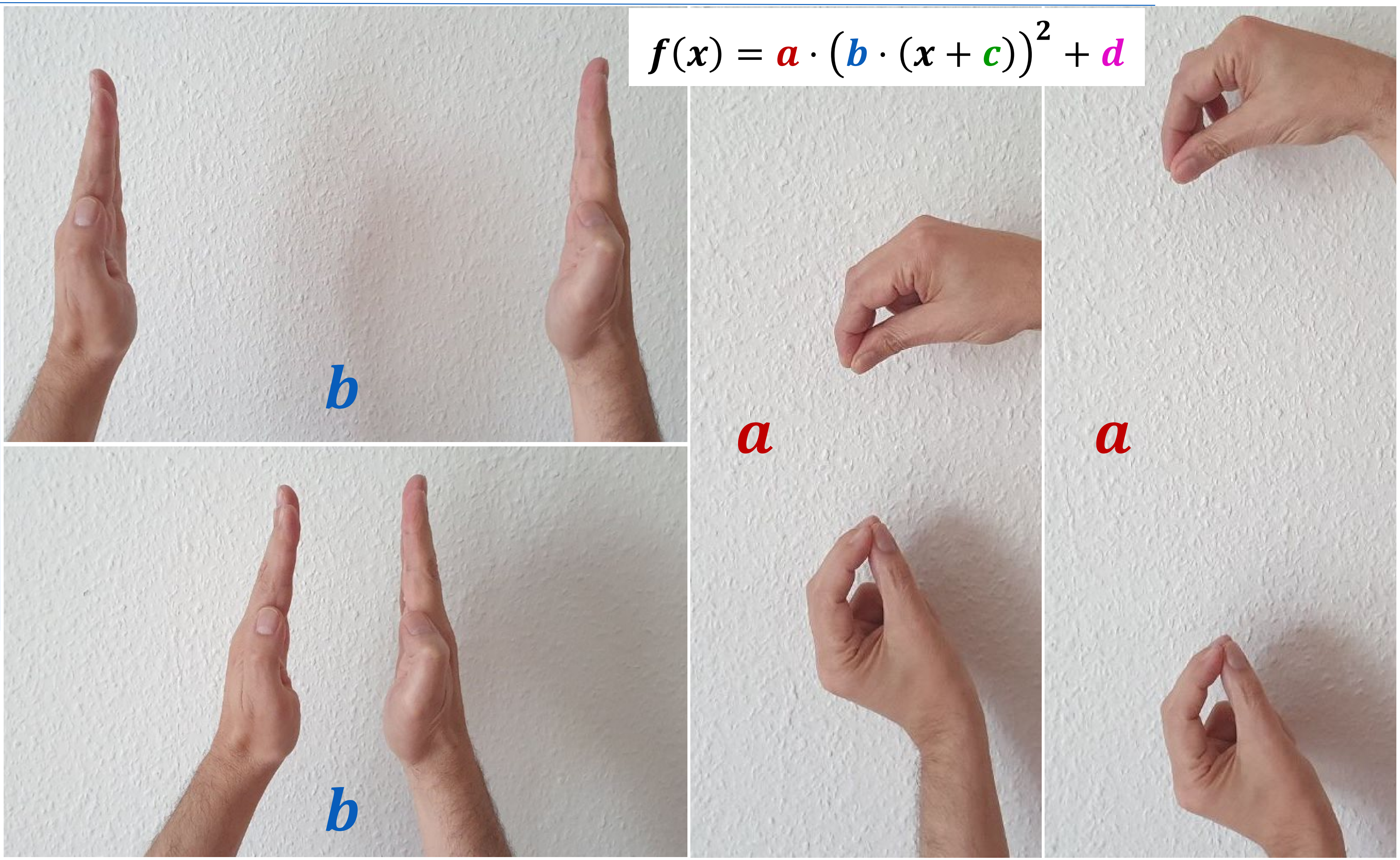
Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Passende Sprechweisen und Handbewegungen

$$f(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c)\right)^2 + d$$

Parameter b
Streckung
$(0 < |b| < 1)$
bzw.
Stauchung
$(|b| > 1)$
in
x-Richtung



Parameter a
Streckung
$(|a| > 1)$
bzw.
Stauchung
$(0 < |a| < 1)$
in
y-Richtung

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

RPTU
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Lernumgebungen

… regen Lernende zu Prozessen aktiver Wissenskonstruktion an

durch Leitgedanken inhaltlich aufeinander bezogen

hinreichend offen, um differenzierend zu wirken

… organisieren und regulieren den Lernprozess über ein Netzwerk von Aufgaben

sinnvoll strukturiert bzgl. Inhalt und intendierten Lernprozessen

enthalten Aufforderungen zur Dokumentation (Ergebnisse & Vorgehensweisen)

... bilden den Rahmen für selbstständiges Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden

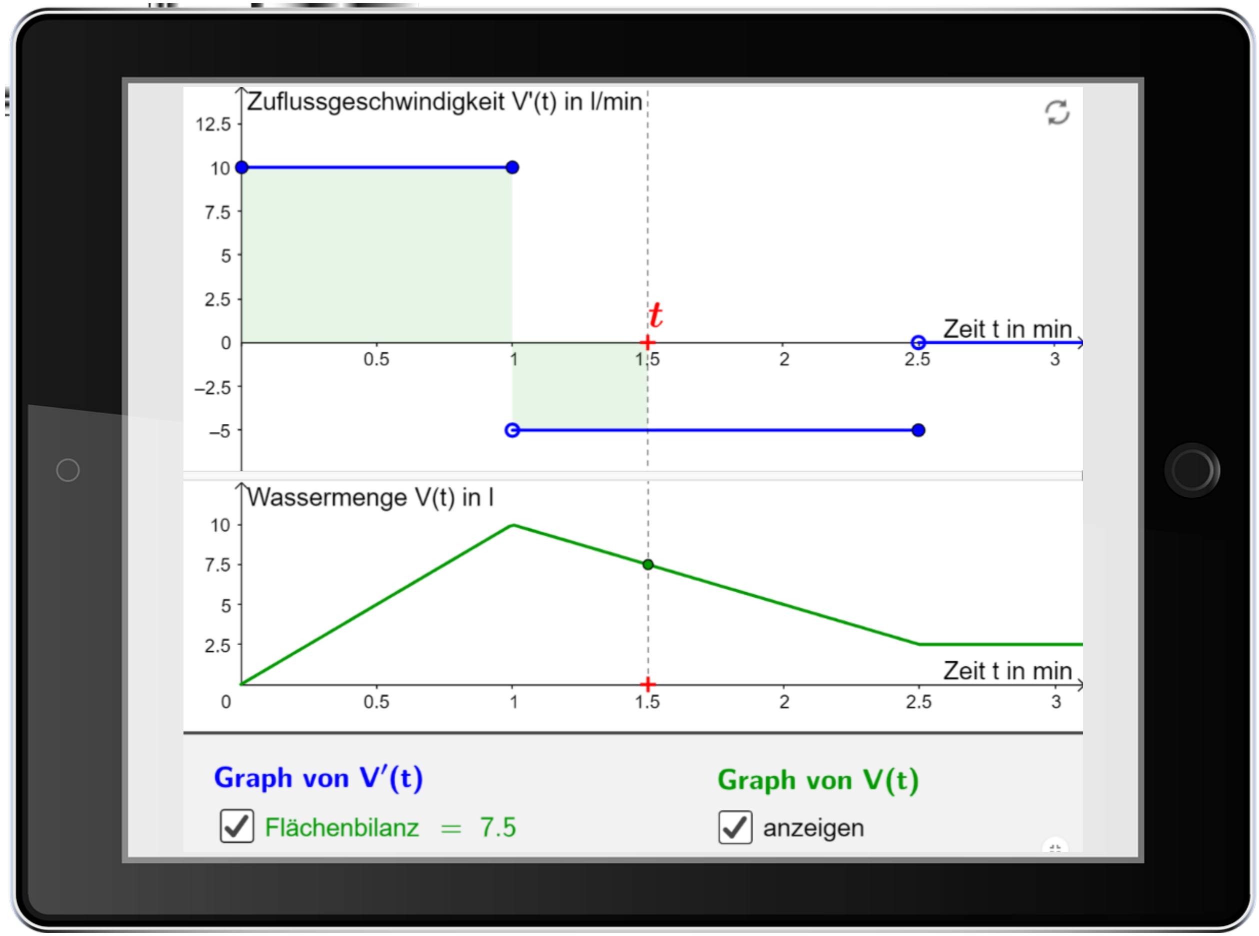
… sind von einem unterrichtlichen Gesamtsetting gerahmt, in dem die Lernenden durch eine Lehrperson auf die Arbeit mit der Lernumgebung vorbereitet, wieder daraus abgeholt und insbesondere beim Systematisieren ihrer gewonnenen Erkenntnisse unterstützt werden

… umfassen geeignete Medien und Materialien für aktive und vielfältige Auseinandersetzung mit einem Phänomen

… fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus

… bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen sowie die Möglichkeit der Ergebniskontrolle

Definition: Digitale Lernumgebung



Digitale Lernumgebung

- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
  - von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
  - die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten,

  digital angereichert wurde.

Roth. J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Jürgen Roth

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau (RPTU)
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, Gebäude I, EG, Raum I 1.01
76829 Landau

roth@uni-landau.de

https://juergen-roth.de
https://dms.uni-landau.de

RPTU