UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Jürgen Roth

Darstellungen funktionaler Zusammenhänge mit GeoGebra dynamisch vernetzen

Mathematik lehren 226
Mit Funktionen denken und arbeiten

https://juergen-roth.de/publikationen/

https://roth.tel/funktionen/

https://geogebra.org/m/nmsbbwja

Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

1 Grundvorstellungen zu Funktionen

2 Darstellungsformen
↔ Darstellungswechsel

3 Grunderfahrungen vermitteln
↔ Aktivitäten gestalten

https://roth.tel/funktionen

Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

1 **Grundvorstellungen zu Funktionen**

2 Darstellungsformen
↔ Darstellungswechsel

3 Grunderfahrungen vermitteln
↔ Aktivitäten gestalten

https://roth.tel/funktionen

Kernpunkte des Grundvorstellungskonzepts

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

- **Grundvorstellungen**
  - repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich,
  - ermöglichen Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen.
- **Zwei Typen von Grundvorstellungen**
  - Primäre Grundvorstellungen
  - Sekundäre Grundvorstellungen

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

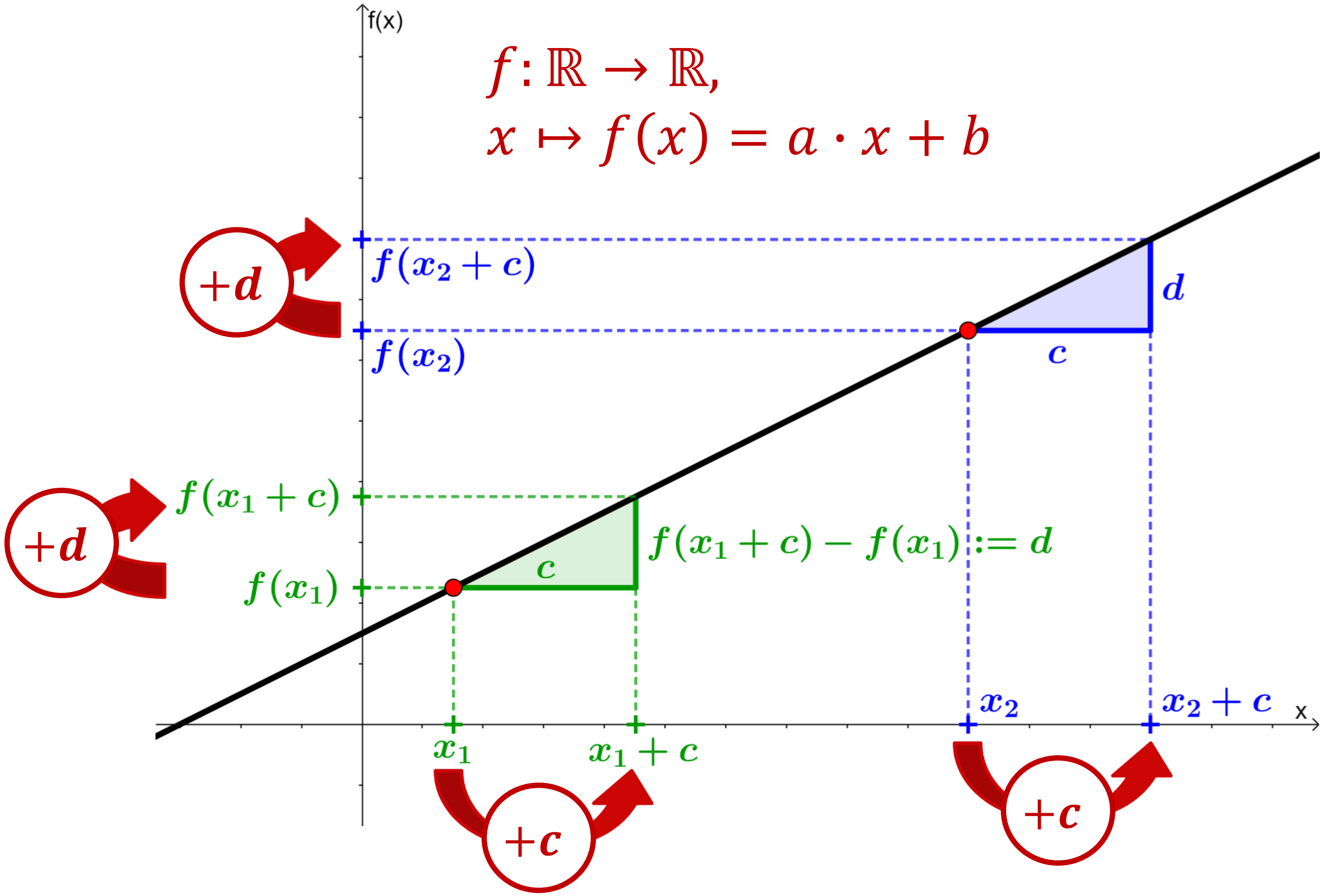
Primäre Grundvorstellungen

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, S. 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f(x + c)$$

$$= a \cdot (x + c) + b$$

$$\overset{DG}{=} a \cdot x + a \cdot c + b$$

$$\overset{AG}{=} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

Grundvorstellungen zu Funktionen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Experiment:**
  Schüler/innen …
  - rennen eine Treppe hinauf,
  - messen nach dem Lauf in Abständen von 30s ihren Puls,
  - halten den Zusammenhang paarweise in einer Tabelle fest.

- **Erfahrung:** Jedem Zeitpunkt wird (genau) ein Puls zugeordnet.

Zuordnung

- Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Grundvorstellungen zu Funktionen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Fragestellung**
  Wie ändert sich der Puls in gleichen Zeitschritten? Ändert er sich auch gleichmäßig, oder zunächst langsamer und dann schneller oder … ?
  - Hierfür reicht es nicht einzelne Wertepaare zu betrachten.
  - Es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden.

Änderungsverhalten / Kovariation
- Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Grundvorstellungen zu Funktionen

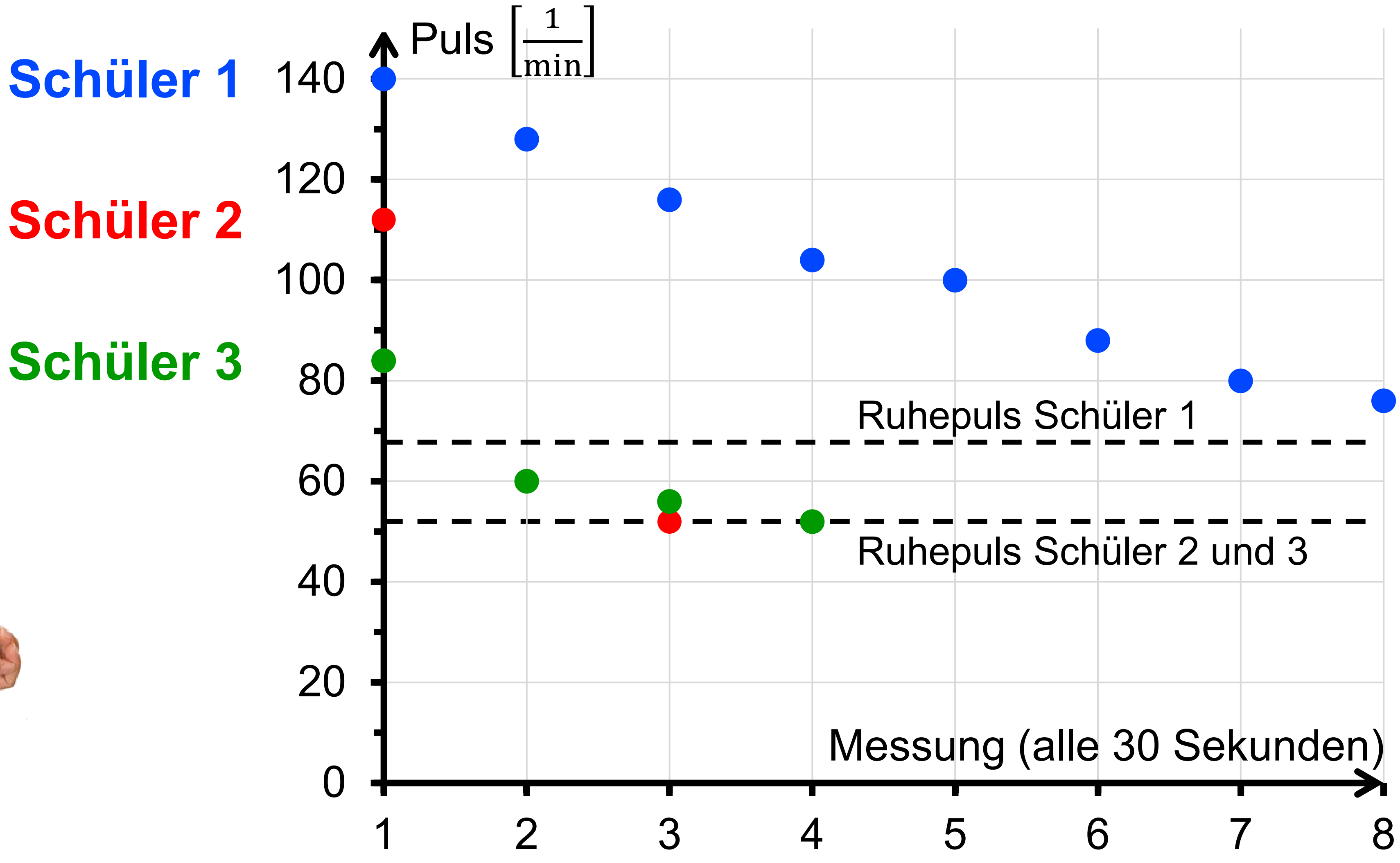
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Fragestellung**
  Wie sieht der funktionale Zusammenhang zwischen Zeitpunkt und Puls als Ganzes aus?
  - Dazu muss man systematisch Daten aufnehmen → in Tabelle festhalten → Graph zeichnen
  - Kann erst am Graph als Ganzes betrachtet und anhand der Verläufe für verschiedene Läufer verglichen werden → Fitness.

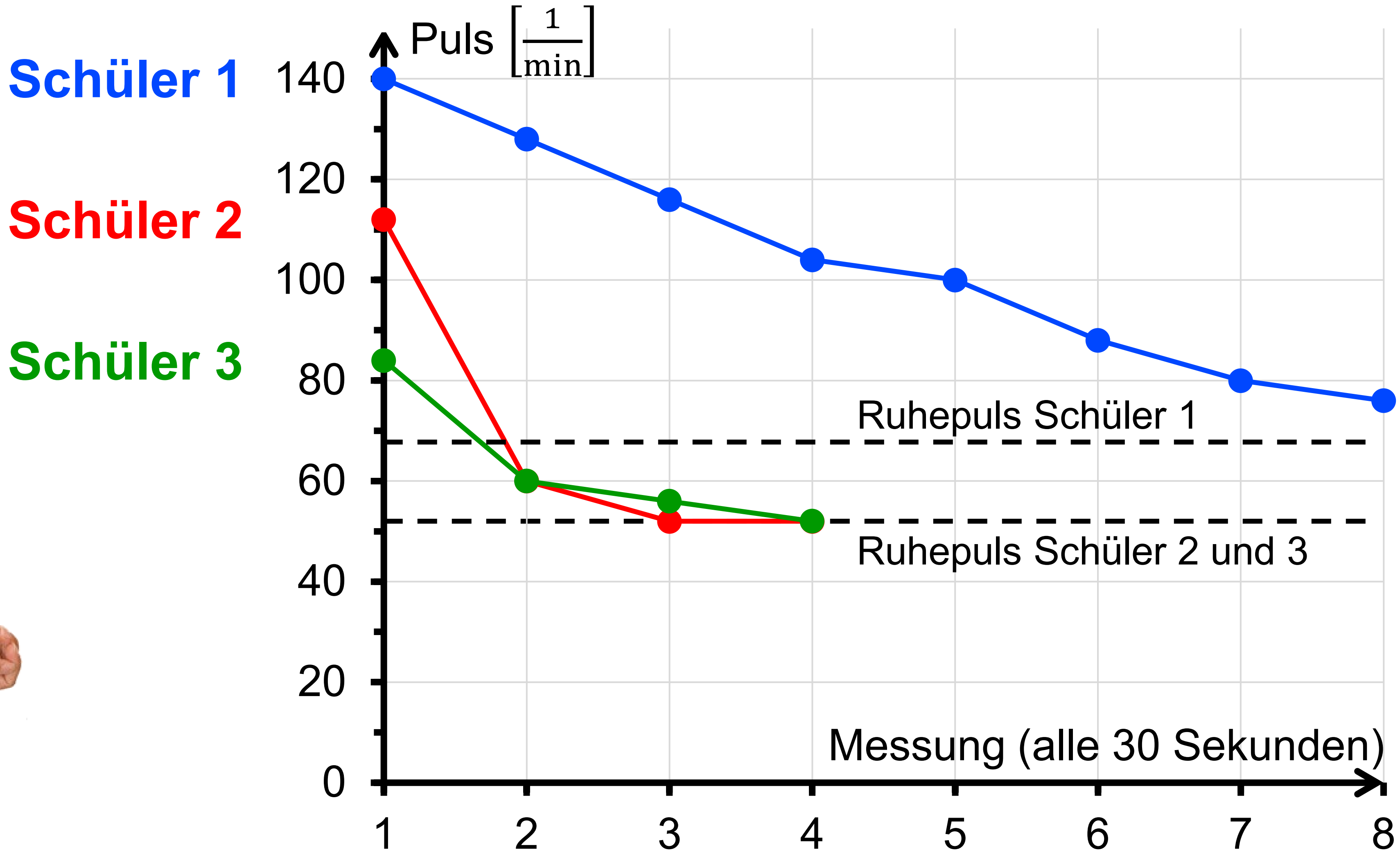
Funktion als Ganzes
- Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**



Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**



Perspektiven zur **Sicht als Ganzes** bei Funktions-graphen:

(1) Vergleich von Abschnitten im selben Graph

(2) Vergleich verschiedener Graphen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43

- **Zuordnung**
  - Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.
- **Änderungsverhalten / Kovariation**
  - Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.
- **Funktion als Ganzes**
  - Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne sondern die Menge aller Wertepaare.

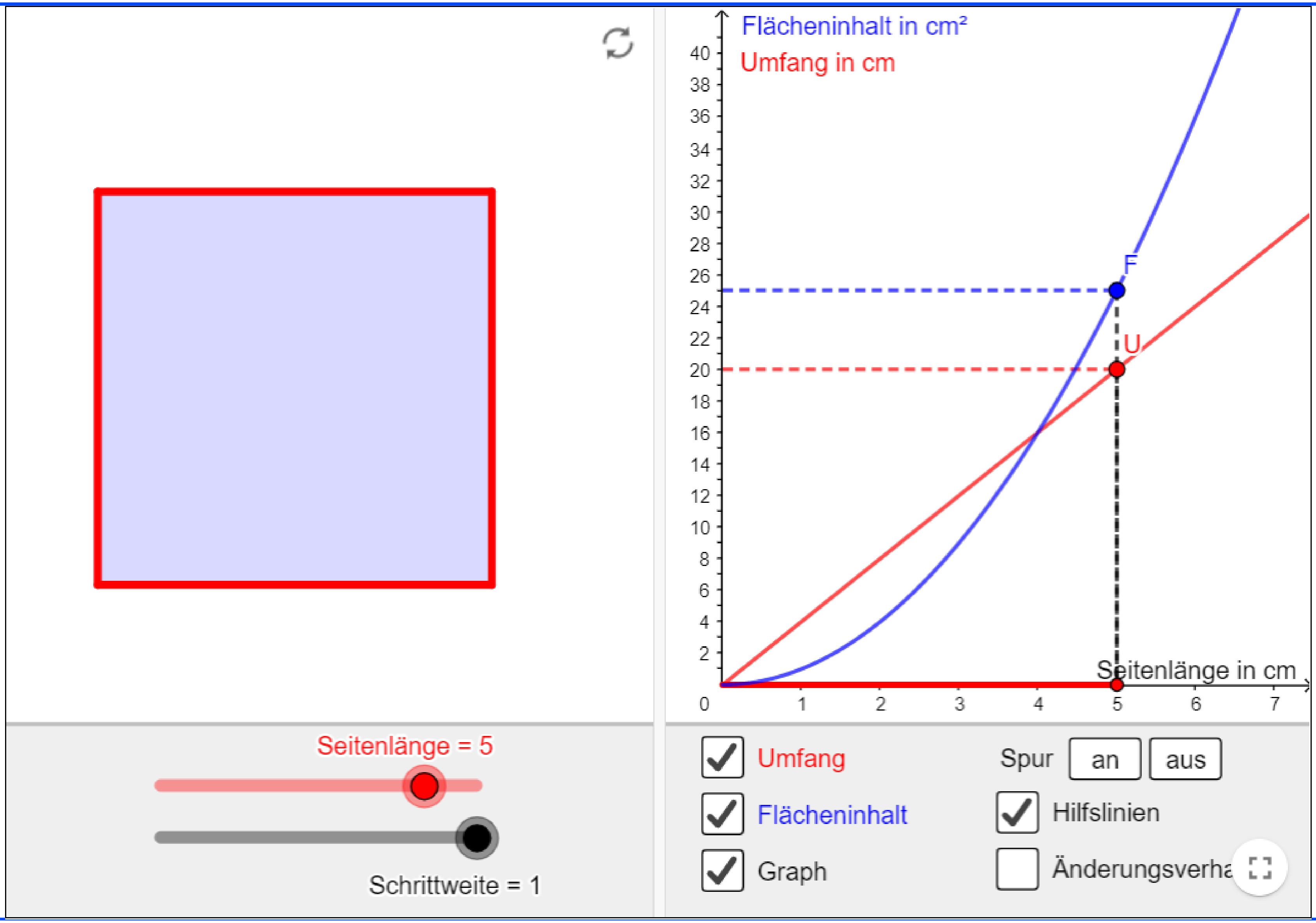
Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Sinnzusammenhänge herstellen	• Anknüpfen an bekannte Situationen oder Handlungsvorstellungen
Aufbau visueller Repräsentationen	• Ermöglichen mentales operieren
Fähigkeit zur Anwendung des Inhalts auf die Wirklichkeit	• Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen • Modellieren des Phänomens mit Hilfe der mathematischen Struktur

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren 199, S. 2-9

Beispiel Quadrat:
Lineare Funktion ↔ Quadratische Funktion



https://www.geogebra.org/m/vyb3z7vz

Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

1 Grundvorstellungen zu Funktionen

2 Darstellungsformen ↔ Darstellungswechsel

3 Grunderfahrungen vermitteln ↔ Aktivitäten gestalten

https://roth.tel/funktionen

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

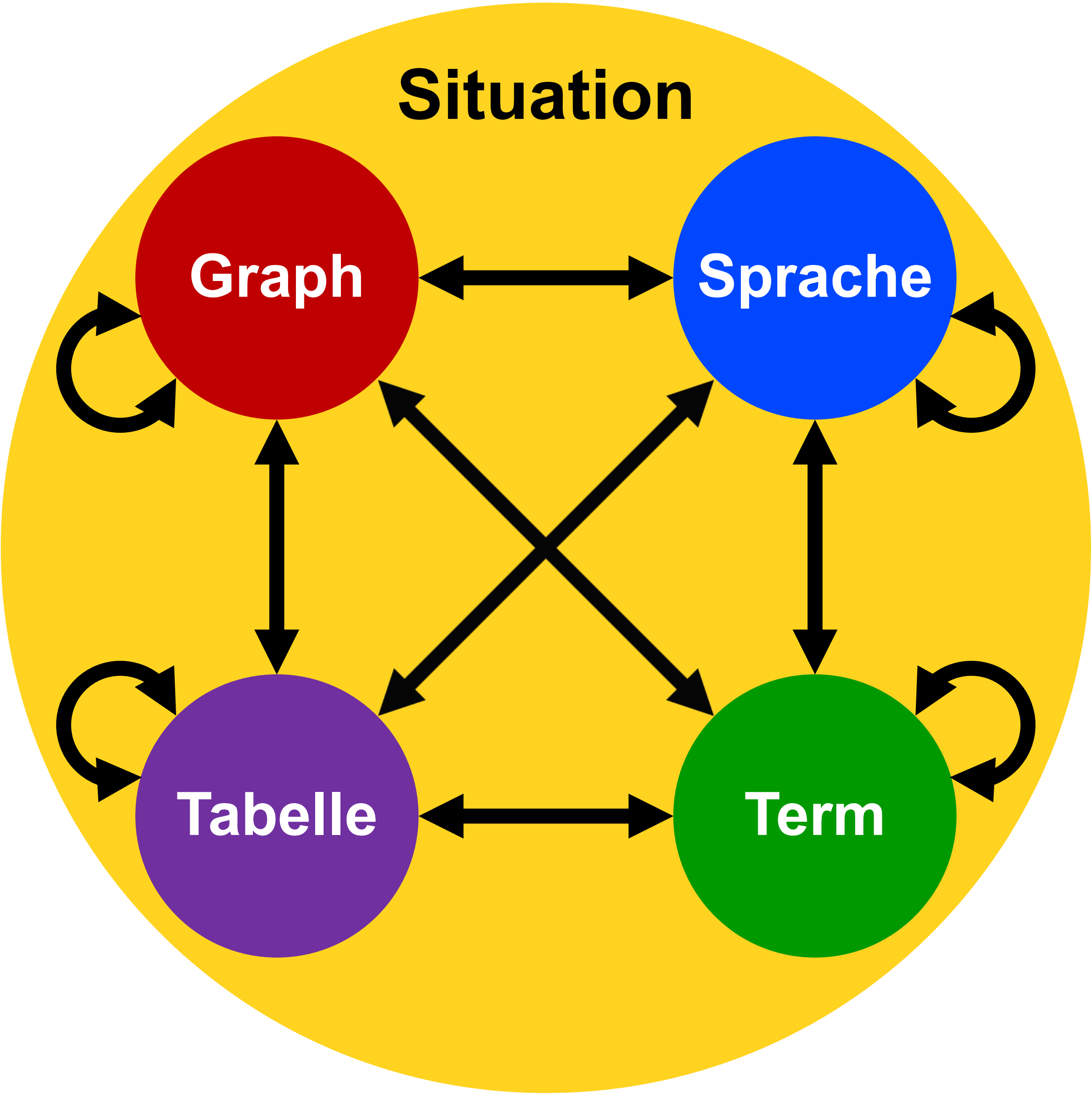
Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](). Mathematik lehren, 226, 2-9.

Darstellungswechsel

Graph Sprache Term Tabelle

Darstellungsformen

Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten



Darstellungsformen ↔ Grundvorstellungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Darstellungsformen →

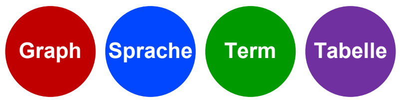
Grundvorstellungen ↓

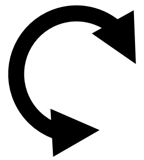
	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	**Tätigkeit:** Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet. **Hauptzweck:** Markante Punkte erfassen	**Tätigkeit:** Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet. **Hauptzweck:** Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen	**Tätigkeit:** Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet. **Hauptzweck:** Bestimmen einzelner Werte	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen. **Hauptzweck:** Erfassen einzelner Werte
Kovariation	**Tätigkeit:** Unterteilung in Abschnitte mitunterschiedlichem Änderungsverhalten **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ erfassen	**Tätigkeit:** Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Sicht als Ganzes	**Tätigkeit:** Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder für Teilbereiche typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristischen Verlauf erfassen	**Tätigkeit:** Differenzen-, Produkt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen. **Hauptzweck:** Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	**Tätigkeit:** Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristika quantitativ erfassen	**Tätigkeit:** Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus. **Hauptzweck:** Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

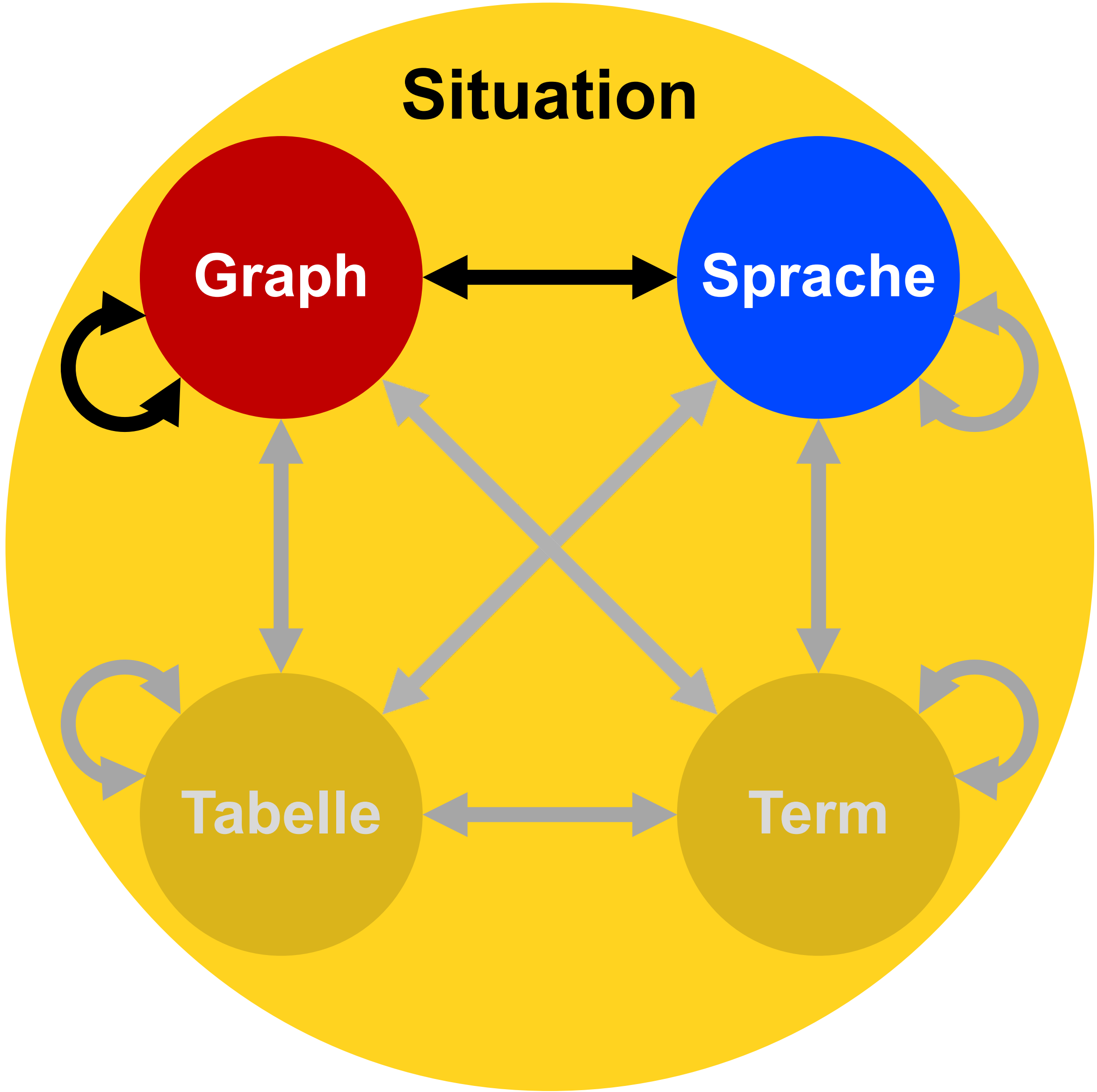
Verändert nach Hußmann, Laakmann (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM (53)38*, S. 2-13

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.



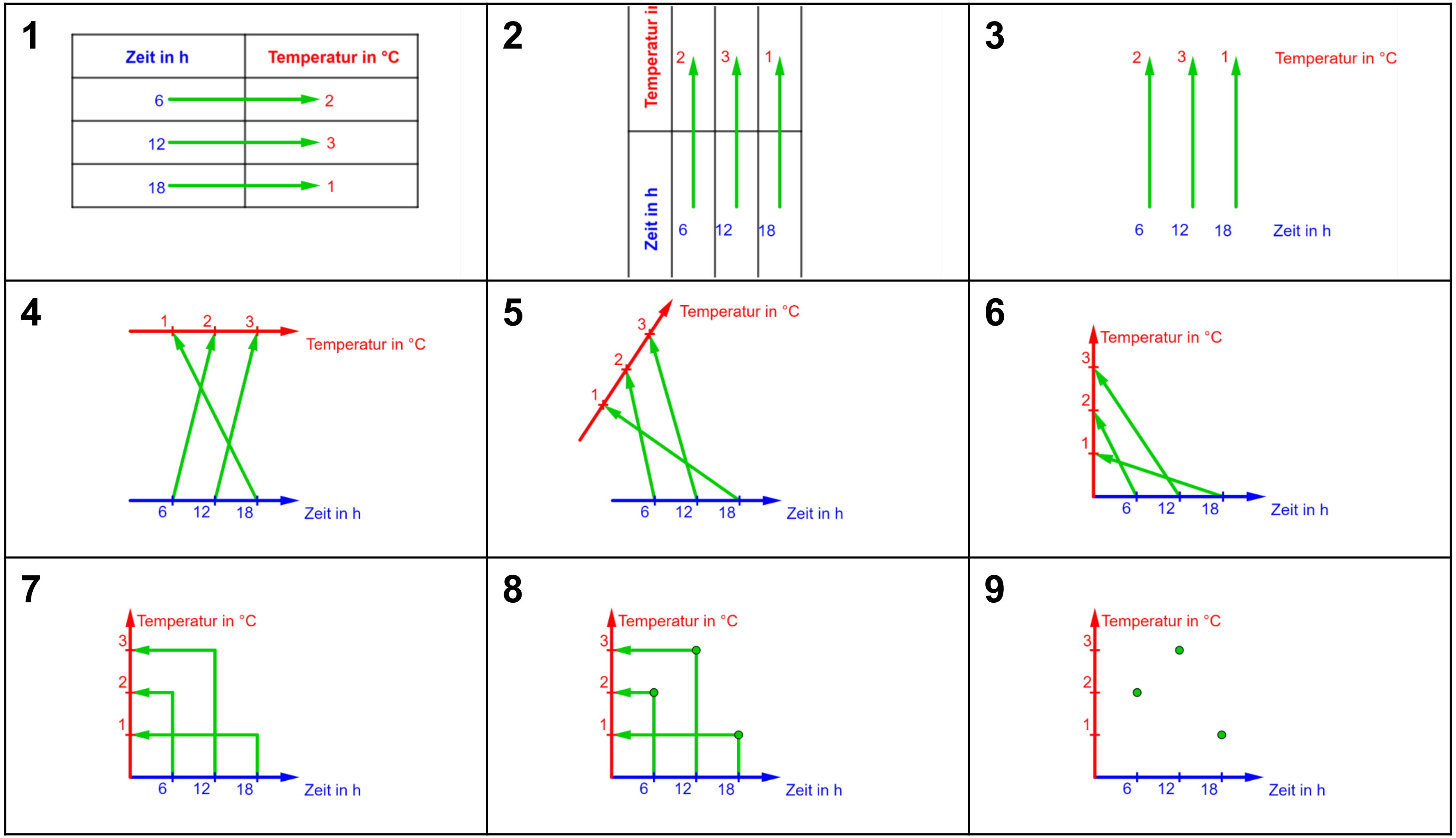




Darstellungsformen erfassen:
Das Beispiel Funktionsgraph

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](). Mathematik lehren, 226, 2-9.



Grundvorstellung Zuordnung

https://www.geogebra.org/m/kknpe5u9

Kerze: Brenndauer → Länge

https://youtu.be/mq2caj9O-bs (Zeitraffer)

https://youtu.be/IOQNSsSvH_U (Originallänge)

https://www.geogebra.org/m/we6ftunf#chapter/542845

https://www.geogebra.org/m/fyvuvfst

Funktionale Zusammenhänge in Situationen:
Darstellungsformen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

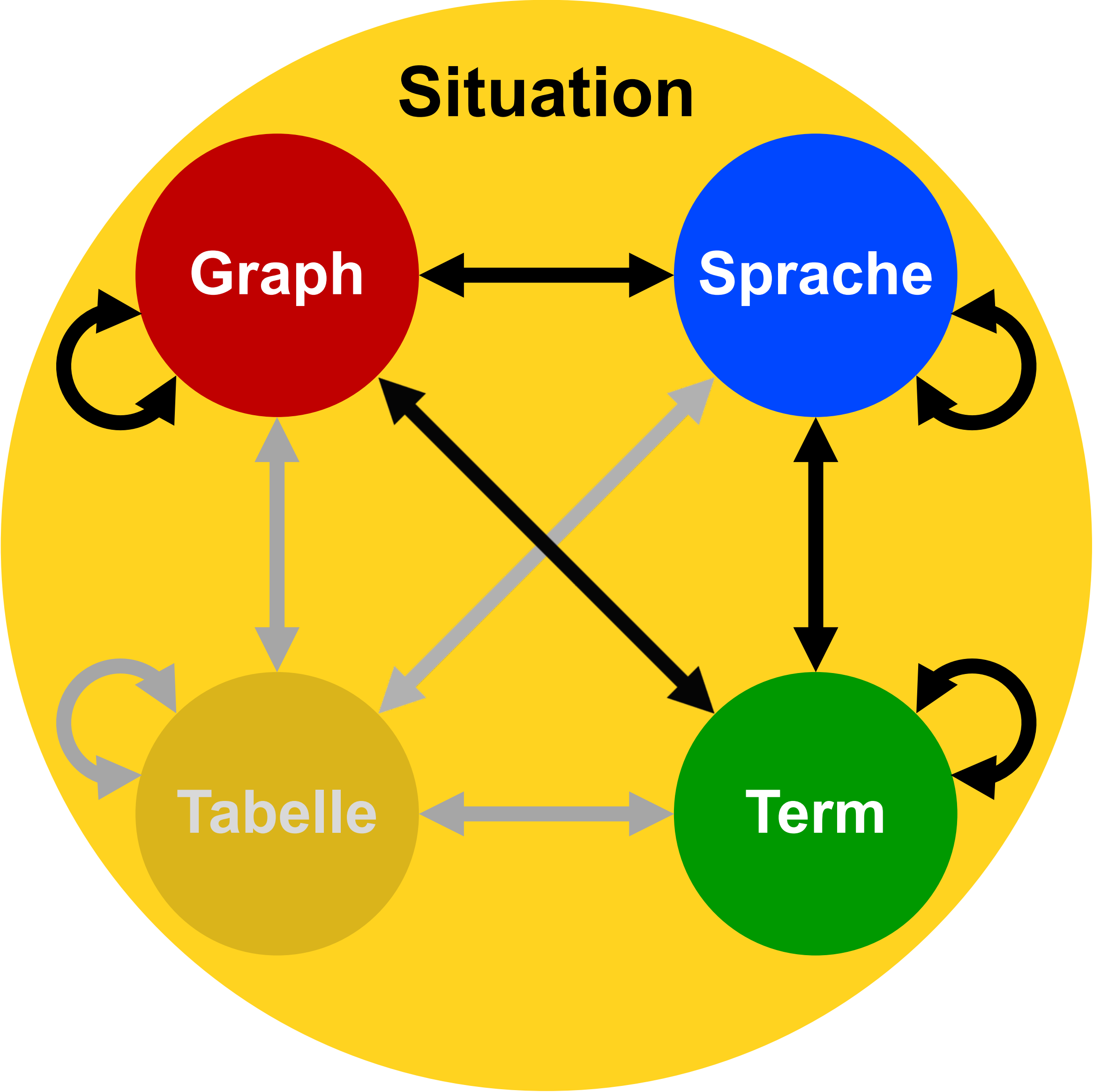
Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

Darstellungswechsel

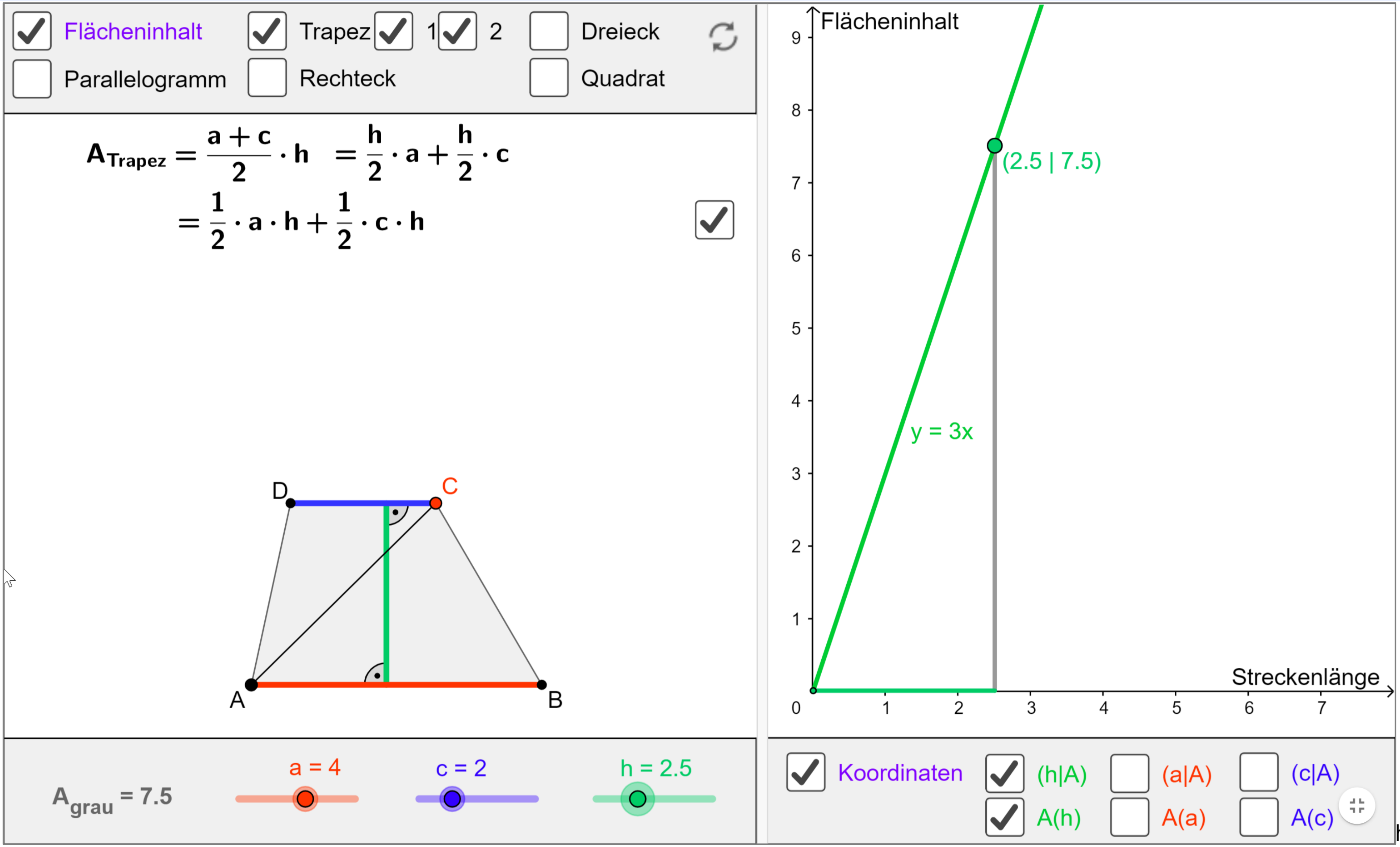
Graph Sprache Term Tabelle

Darstellungsformen

Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten

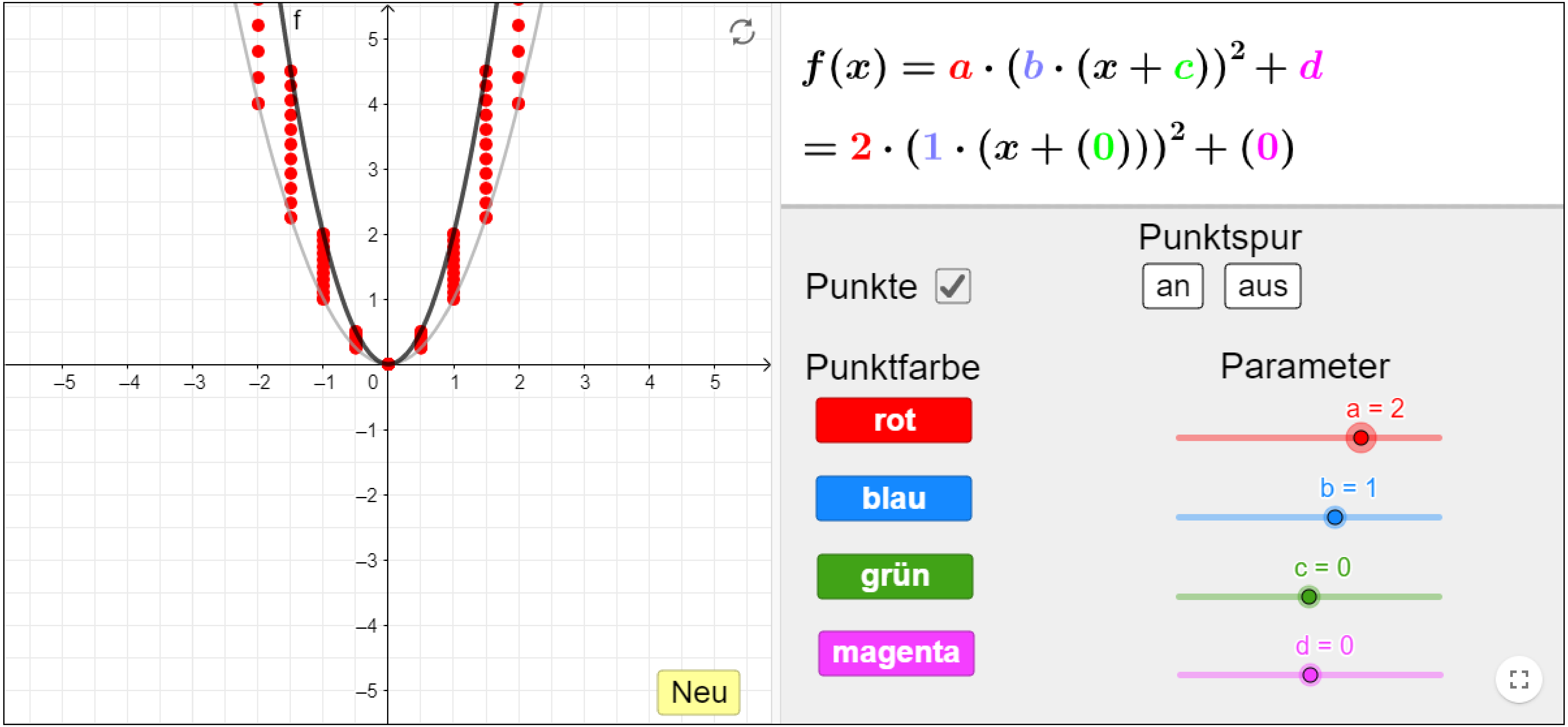


Situation ↔ Term ↔ Graph



https://www.geogebra.org/m/dTuCuDs5

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion

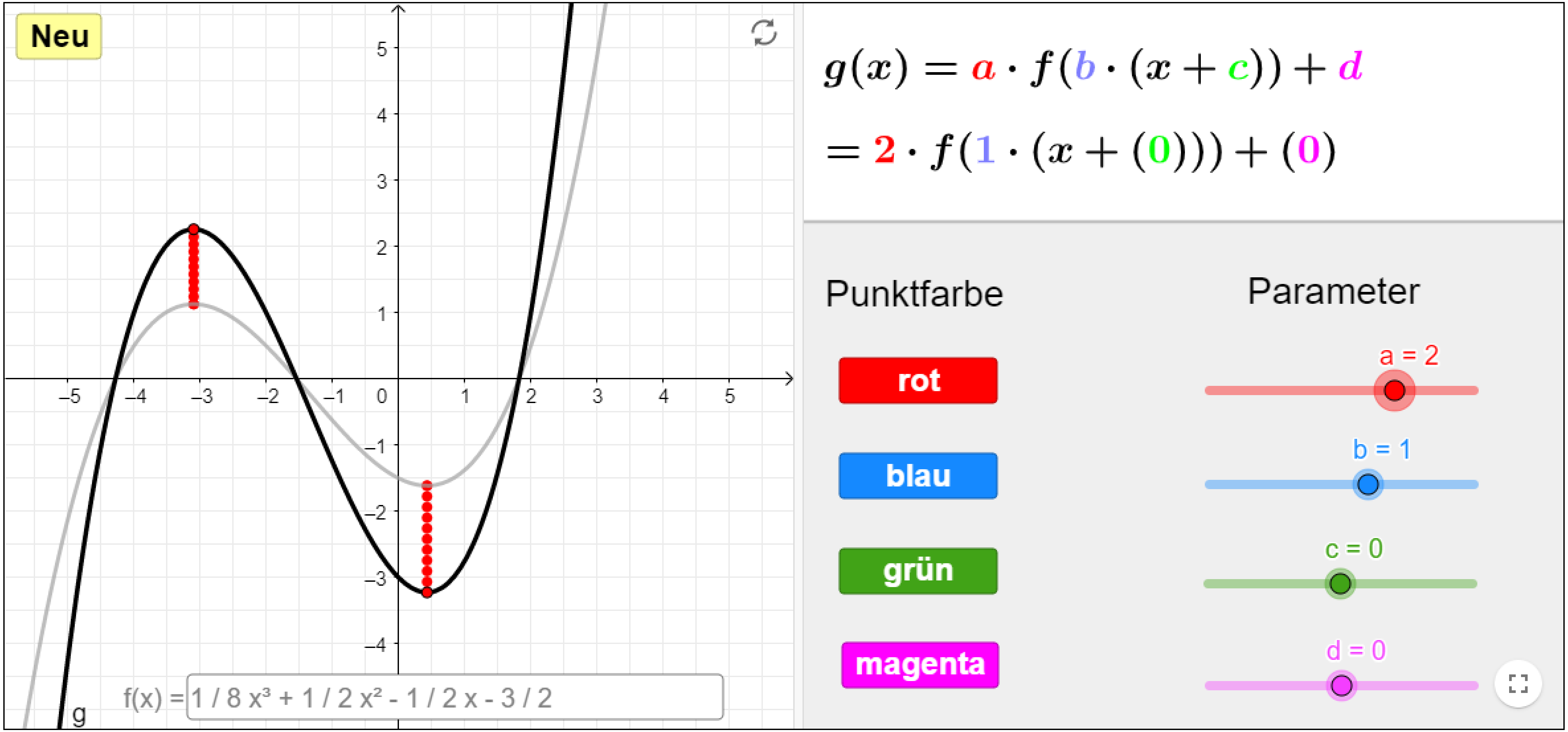


Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

https://www.geogebra.org/m/jp4t7u6k

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$f(x) = x^2$

$$g(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c)\right)^2 + d$$

+ −

+ −

Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

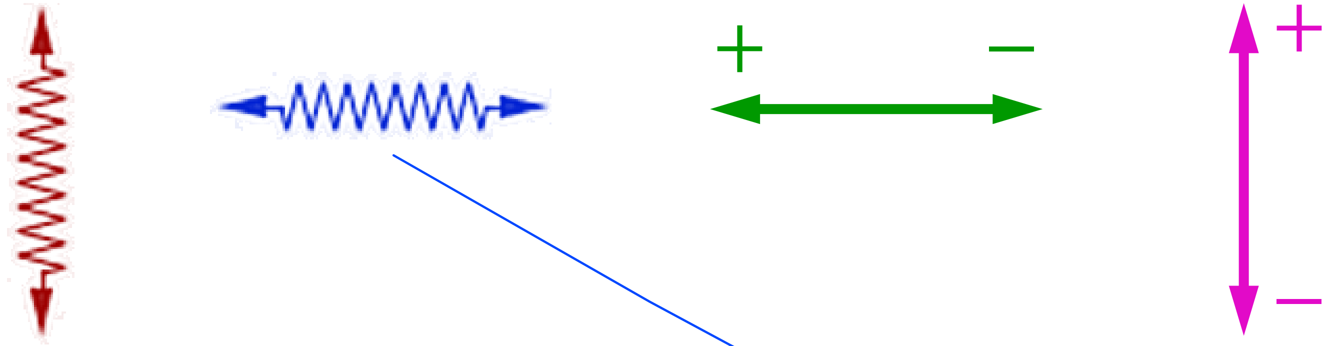
Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein

$$g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x + c)\big) + d$$



Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

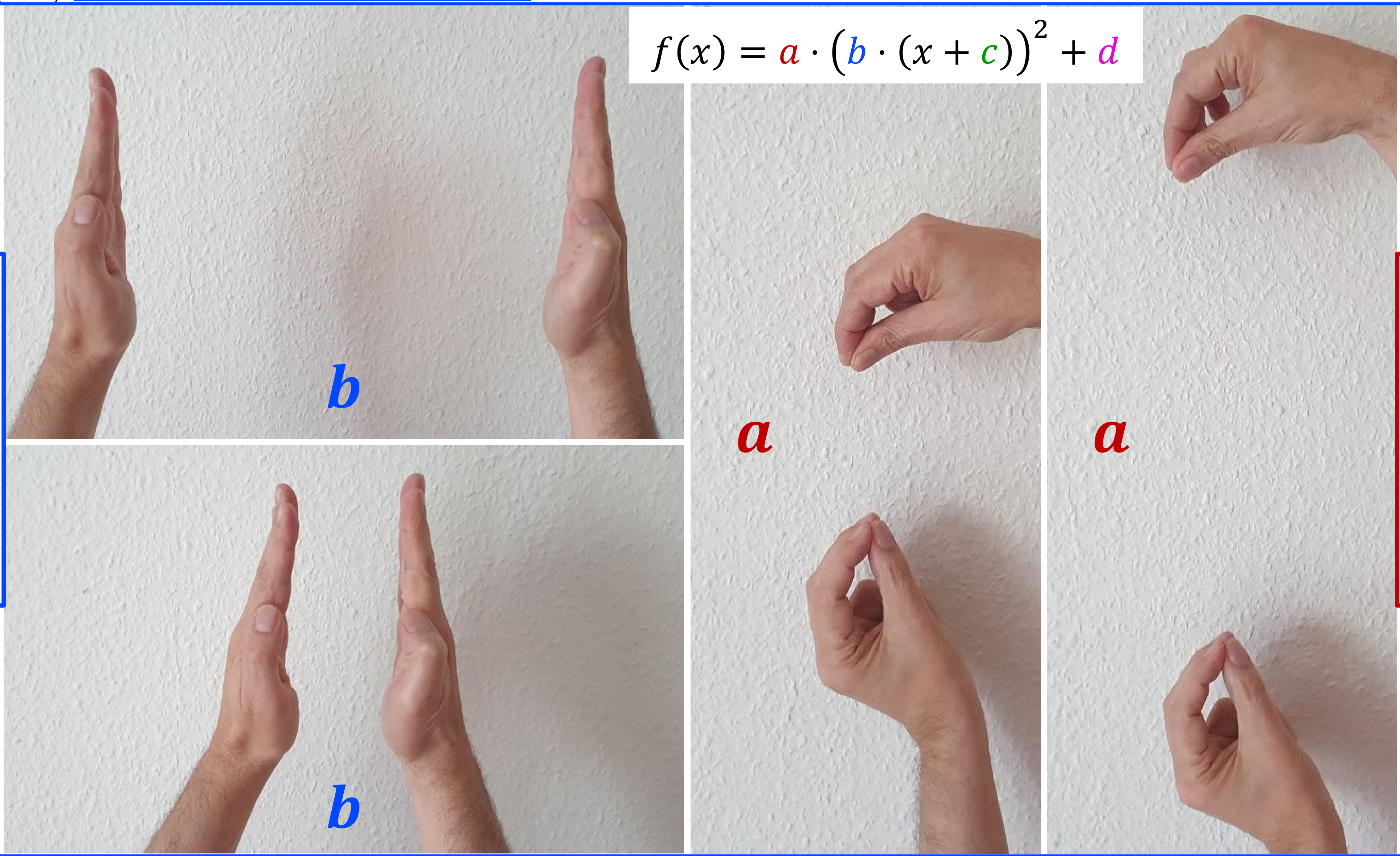
Passende Sprechweisen und Handbewegungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

$$f(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c)\right)^2 + d$$

Parameter b
Streckung
$(0 < |b| < 1)$
bzw.
Stauchung
$(|b| > 1)$
in
x-Richtung



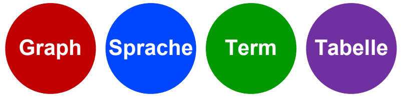
Parameter a
Streckung
$(|a| > 1)$
bzw.
Stauchung
$(0 < |a| < 1)$
in
y-Richtung

Funktionale Zusammenhänge in Situationen:
Darstellungsformen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

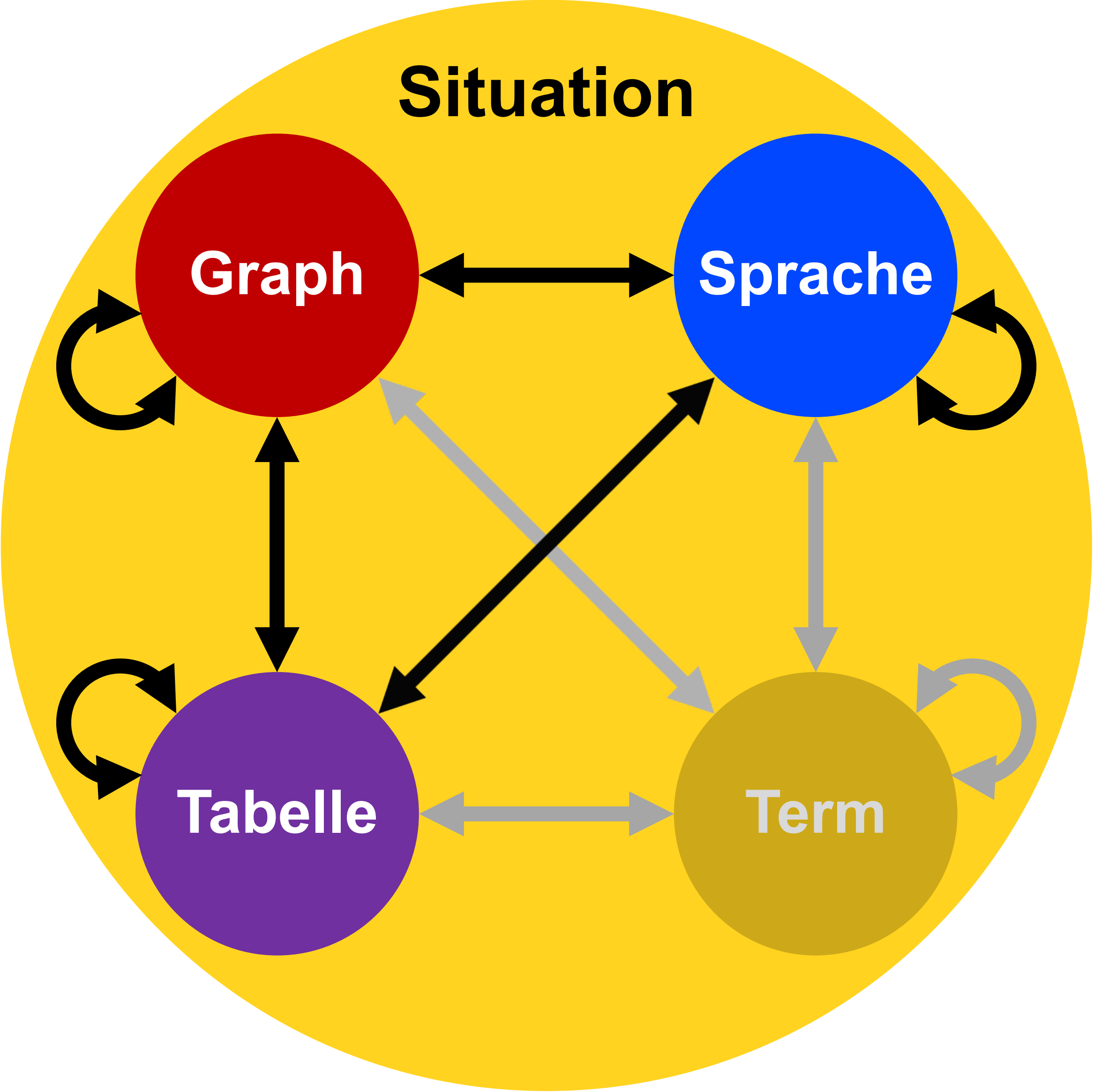
Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern]. Mathematik lehren, 226, 2-9.

Darstellungswechsel



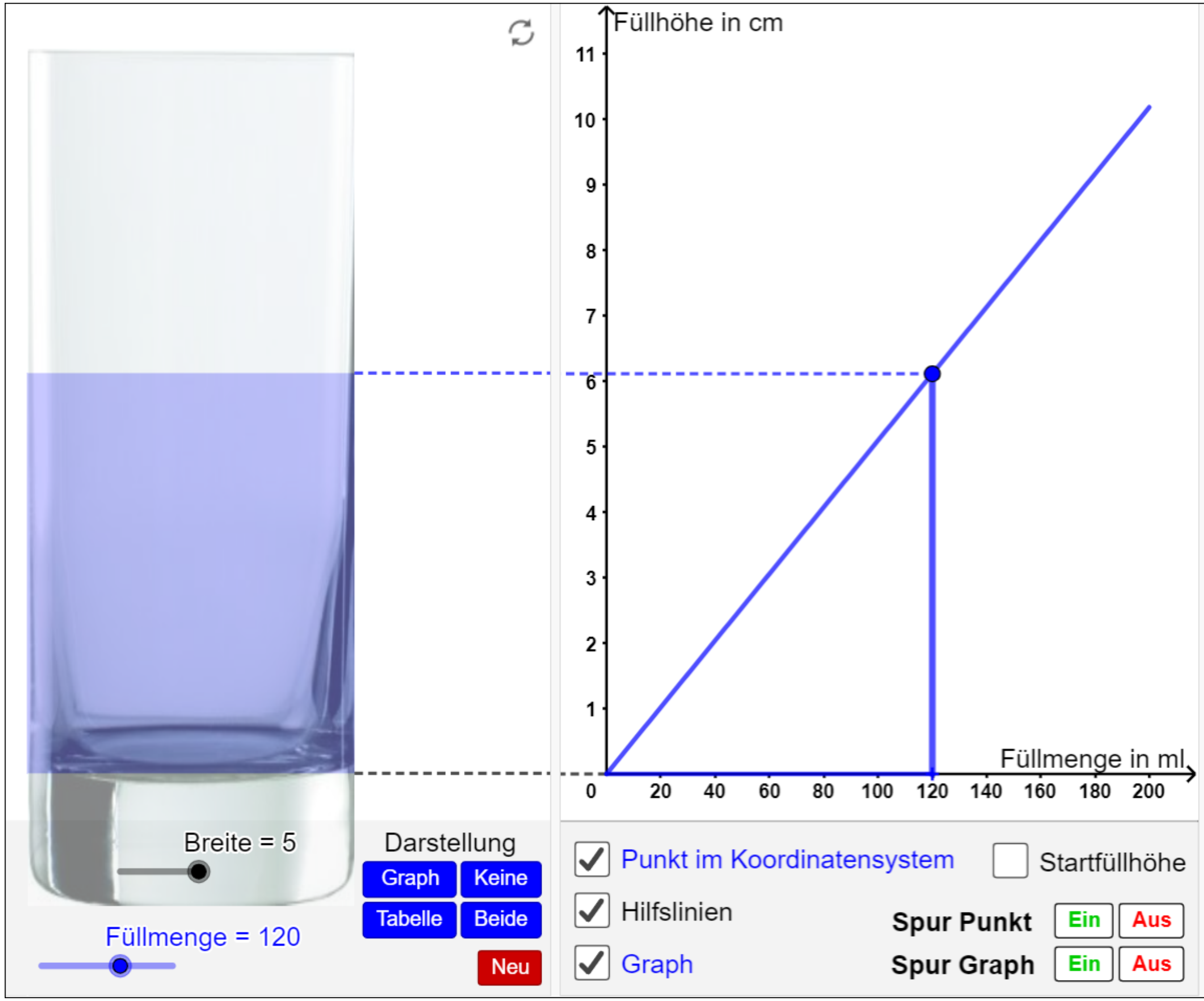
Darstellungsformen

Mit bzw. in einer Darstellung arbeiten



Darstellungsformen wechselseitig interpretieren

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen



	A	B	C	D
1	Breite:	5 cm	4 cm	3 cm
2	Füllmenge [ml]	Füllhöhe [cm]	Füllhöhe [cm]	Füllhöhe [cm]
3	0	0	0	0
4	20	1.02	1.59	2.83
5	40	2.04	3.18	5.66
6	60	3.06	4.77	8.49
7	80	4.07	6.37	
8	100	5.09	7.96	
9	120	6.11	9.55	
10	140	7.13		
11	160	8.15		
12	180	9.17		
13	200	10.19		
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				

Lichti, M., Roth, J. (2021). Der Einstieg in Funktionales Denken – Darstellungsform und passendes Medium. Mathematik lehren, 226, 10-14.

Hofmann, R., Roth, J. (2021). Lernfortschritte identifizieren – Typische Fehler im Umgang mit Funktionen. Mathematik lehren, 226, 15-19.

https://www.geogebra.org/m/rqgzqrm4

Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

1 Grundvorstellungen zu Funktionen

2 Darstellungsformen ↔ Darstellungswechsel

3 Grunderfahrungen vermitteln ↔ Aktivitäten gestalten

https://roth.tel/funktionen

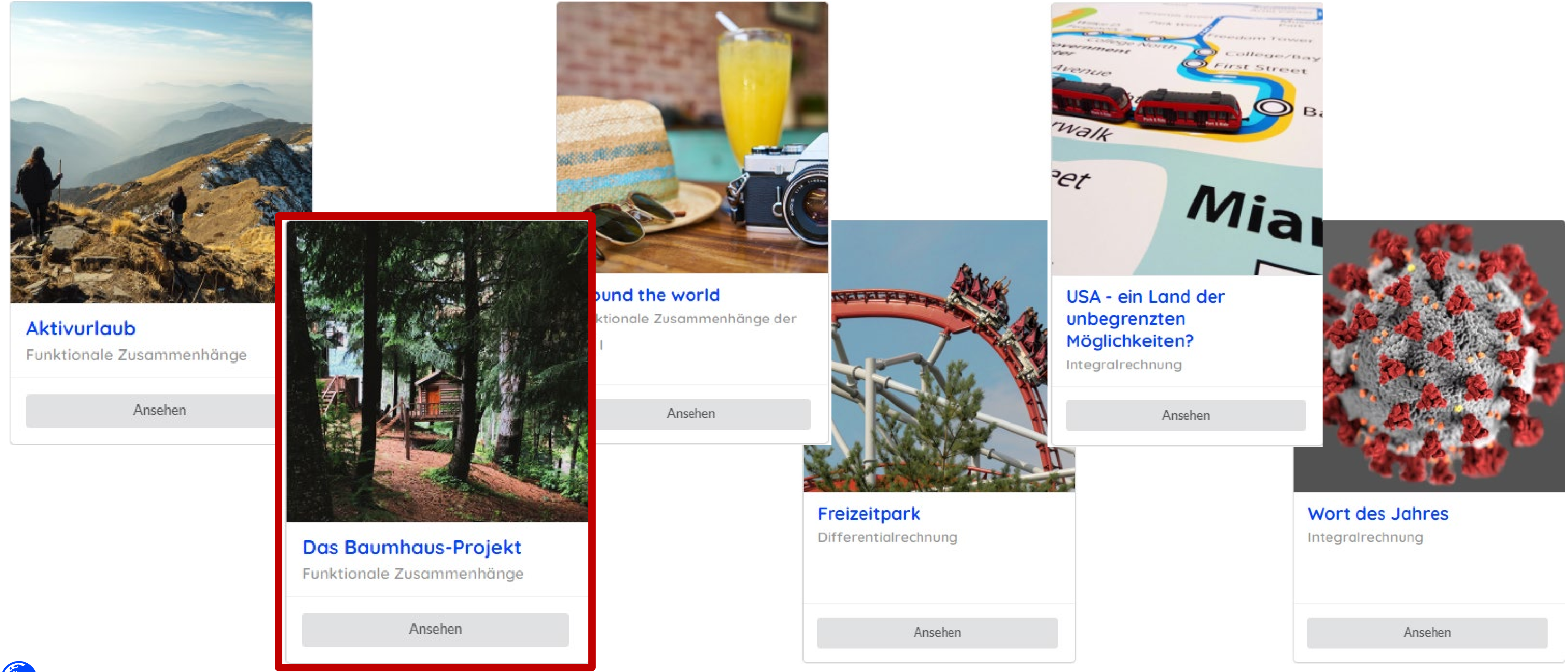
Lernumgebungen …

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- bilden den Rahmen für das selbstständige Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden,
- regen Lernende zu Prozessen aktiver Wissenskonstruktion an,
- organisieren und regulieren den Lernprozess über ein Netzwerk von Aufgaben, die
  - durch Leitgedanken inhaltlich aufeinander bezogen sind,
  - hinreichend offen sind, um differenzierend zu wirken,
  - bzgl. des zu erarbeitenden Inhalts sowie der intendierten Lernprozesse sinnvoll strukturiert sind, sowie
  - Aufforderungen zur Dokumentation der Vorgehensweisen und Ergebnisse enthalten
- umfassen geeignete Medien und Materialien für die aktive und vielfältige Auseinandersetzung mit einem inhaltlichen Phänomen,
- fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus,
- bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen sowie die Möglichkeit der Ergebniskontrolle und
- sollten von einem unterrichtlichen Gesamtsetting gerahmt werden, in dem die Lernenden durch eine Lehrperson auf die Arbeit mit der Lernumgebung vorbereitet, wieder daraus abgeholt und insbesondere beim Systematisieren ihrer gewonnenen Erkenntnisse unterstützt werden.

Roth, J. (im Druck). Digitale Lernumgebungen. In F. Schacht et al. (Hrsg.). Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Wiesbaden: Springer

Digitale Lernumgebungen
Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

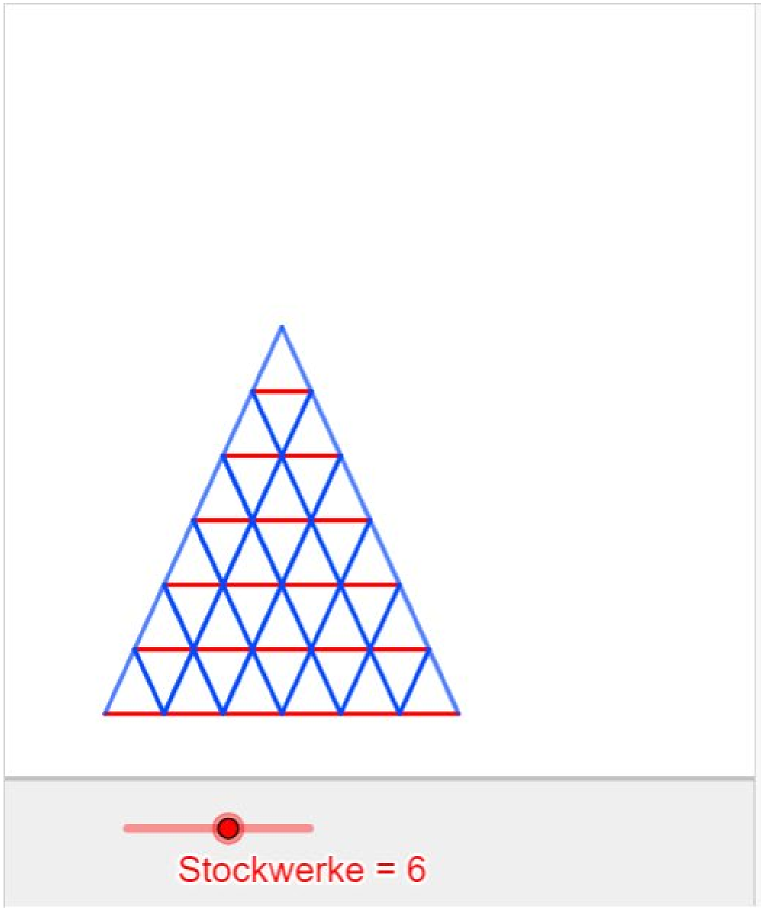


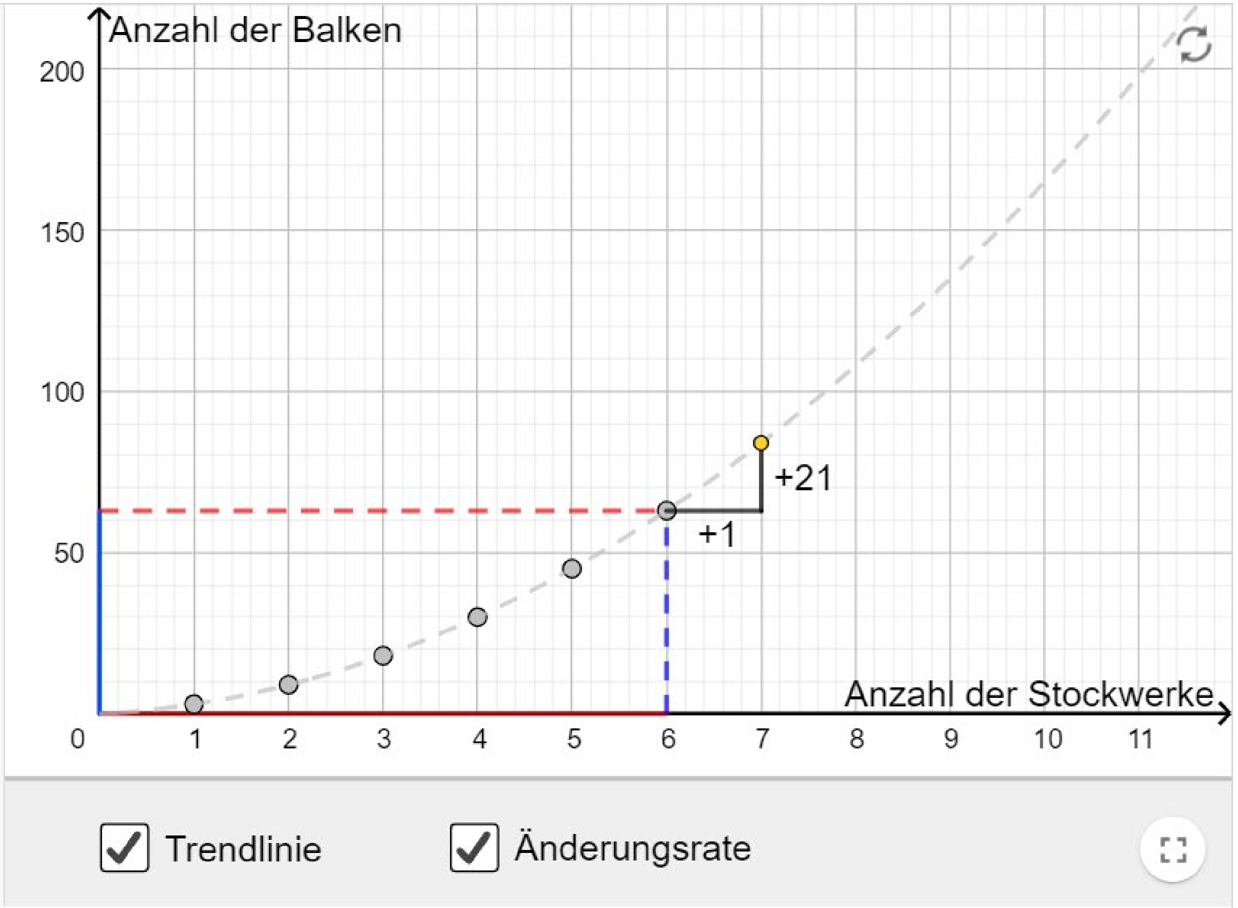
https://mathe-labor.de

Kartenhaus: Anzahl Stockwerke → Anzahl Balken

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Digel, S. & Roth, J. (2021). Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?! In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.



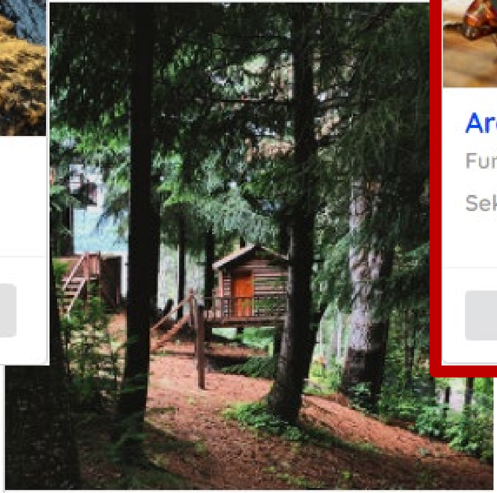


https://www.geogebra.org/m/m6pmwsuc

https://www.mathe-labor.de/stationen/baumhaus-2020/a/teil2/

Digitale Lernumgebungen
Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Aktivurlaub
Funktionale Zusammenhänge
Ansehen

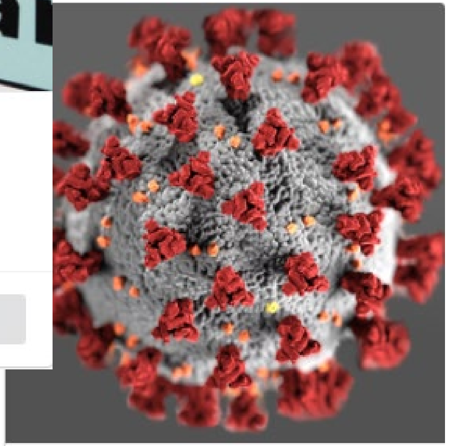


Das Baumhaus-Projekt
Funktionale Zusammenhänge
Ansehen

Around the world
Funktionale Zusammenhänge der Sek I
Ansehen

Freizeitpark
Differentialrechnung
Ansehen

USA - ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?
Integralrechnung
Ansehen



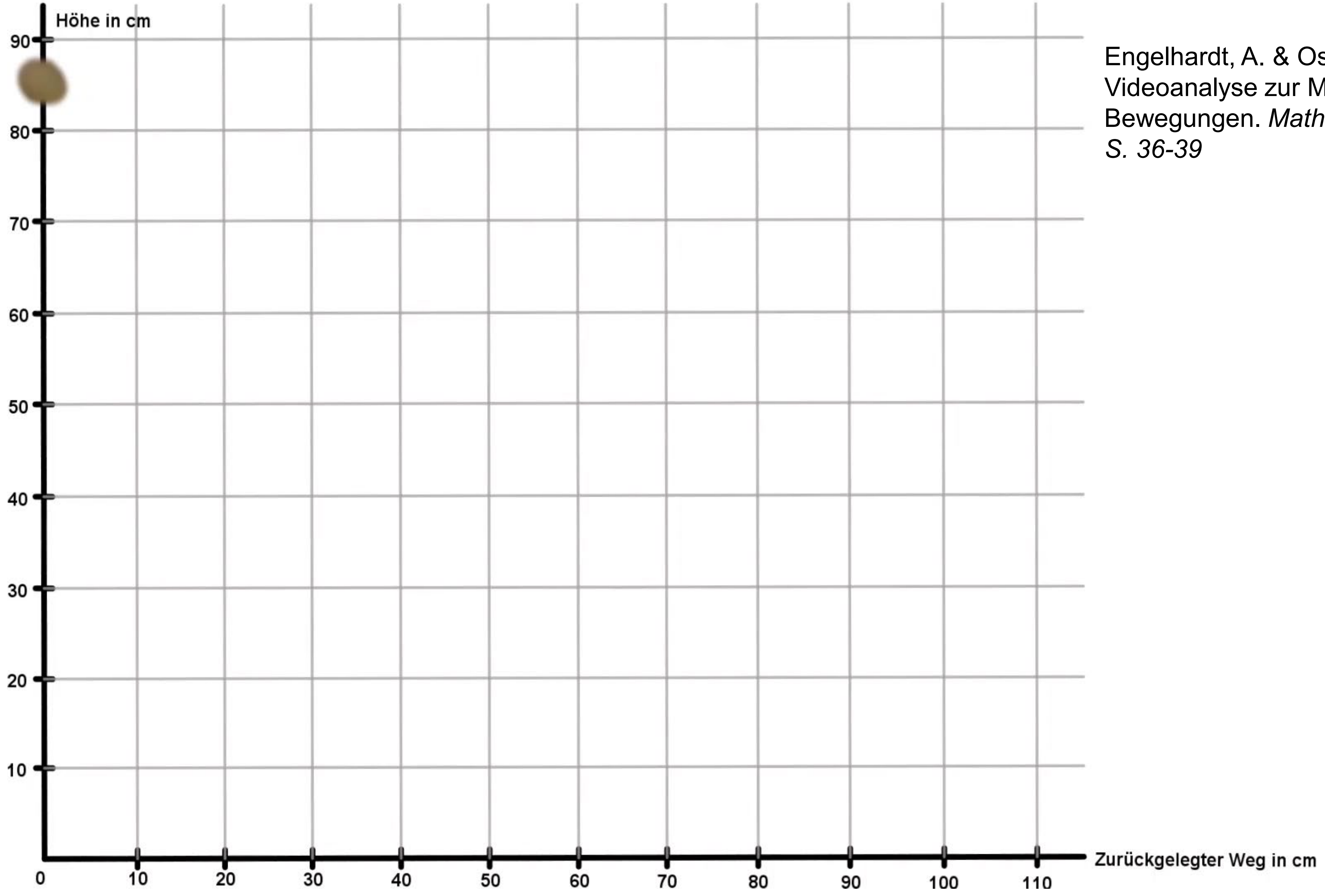
Wort des Jahres
Integralrechnung
Ansehen

https://mathe-labor.de

Springender Ball

https://roth.tel/video/springender_ball.mp4

https://www.mathe-labor.de/stationen/atw-2020/a/teil3/



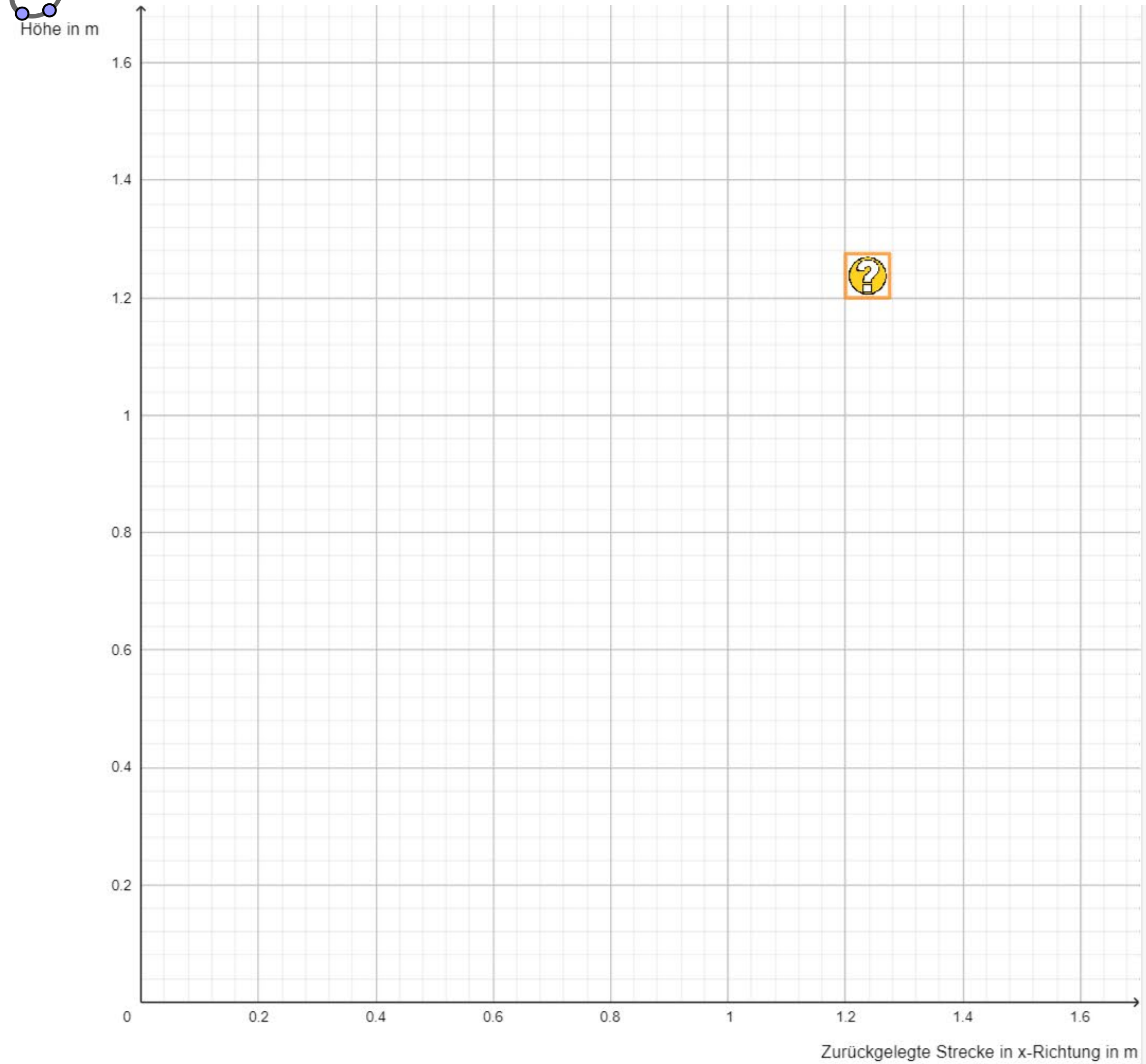
Engelhardt, A. & Ossadnik, H. (2021). Videoanalyse zur Modellierung von Bewegungen. *Mathematik lehren 226, S. 36-39*

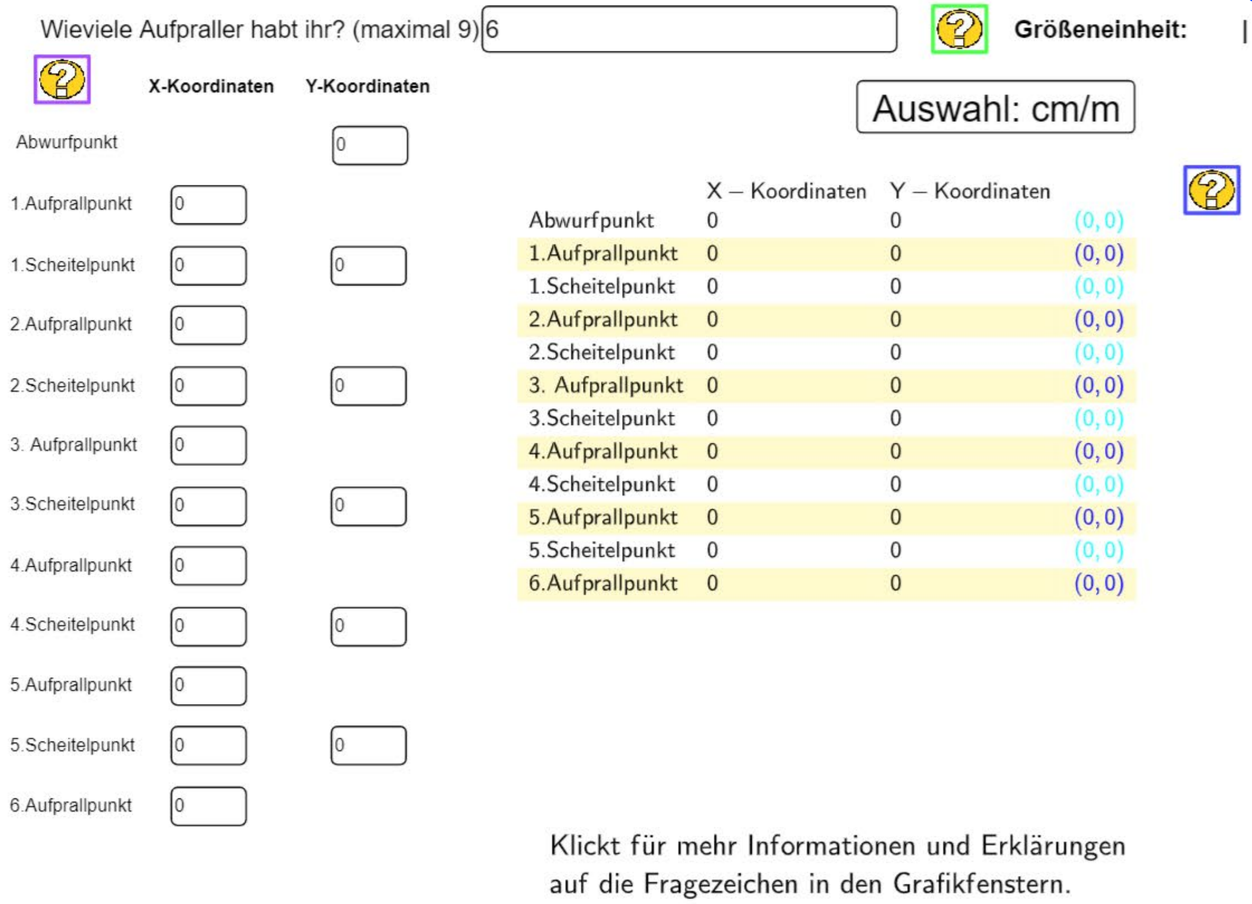
Springender Ball

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

https://www.geogebra.org/m/sswktfad

https://www.mathe-labor.de/stationen/atw-2020/a/teil3/





Engelhardt, A. & Ossadnik, H. (2021). Videoanalyse zur Modellierung von Bewegungen. *Mathematik lehren 226, S. 36-39*

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

juergen-roth.de