

# GeoGebra-Tagung RLP 2021

21.-22.09.2021



GeoGebra-Institut  
Landau (RLP)



Rheinland-Pfalz

PÄDAGOGISCHES  
LANDESINSTITUT

# Tagungsprogramm: Mittwoch, 22.09.2021

Videokonferenz: <https://roth.tel/geogebra-tagung>

Zeit	Inhalt
09:00-09:10	<b>Organisatorisches</b>
09:10-10:00	Vortrag: Prof. Dr. Jürgen Roth <b>Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen</b>
10:00-10:30	Kaffeepause – Gelegenheit zur Diskussion mit dem Referenten
10:30-12:30	<b>Workshop-Phase III</b> <b>A3:</b> Anfänger III: 3. Schritte mit GeoGebra <b>B3:</b> Vom Papier zum Applet: Beispiel Integralrechnung
12:30-13:30	<b>Mittagspause</b>
13:30-15:30	<b>Workshop-Phase IV</b> <b>A4:</b> Anfänger IV: 4. Schritte mit GeoGebra <b>C4:</b> Schüler/innen zum eigenständigen Nutzen von GeoGebra anleiten <b>E4:</b> Ich habe ein Applet – und nun?
15:30-16:00	<b>Abschlussplenum und Evaluation</b>

## Zoom-Meeting

<https://roth.tel/geogebra-tagung>

Meeting-ID: 873 5785 4281

Kenncode: 587070

## Workshops

finden in Breakout-Räumen  
des Hauptraums statt.

## Tagungshomepage

[https://geogebra-institut.uni-landau.de/index.php/GeoGebra-Tagung\\_RLP\\_2021](https://geogebra-institut.uni-landau.de/index.php/GeoGebra-Tagung_RLP_2021)

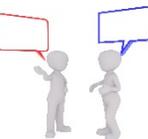
## Fragen an die Tagungsorganisation

<https://roth.tel/fragen>



## Feedback

<https://roth.tel/feedback>



### ■ Fortbildungsreihe: Mathematik lehren und lernen mit GeoGebra

- E-Sessions in jeder 1. Woche im Monat jeweils von 15:30 Uhr bis 17:30Uhr
- [https://geogebra-institut.uni-landau.de/index.php/Mathematik\\_lehren\\_und\\_lernen\\_mit\\_GeoGebra\\_2022](https://geogebra-institut.uni-landau.de/index.php/Mathematik_lehren_und_lernen_mit_GeoGebra_2022)

### ■ Zeitplan

- Montag, 03.01.2022 Mit GeoGebra-Büchern GeoGebra-Apps organisieren und Lernpfade gestalten
- Donnerstag, 03.02.2022 GeoGebra-Classroom im Matheunterricht
- Donnerstag, 03.03.2022 Beurteilung interaktiver Arbeitsblätter
- Donnerstag, 07.04.2021 GeoGebra-Lernumgebungen lernzielorientiert didaktisch reflektieren und weiterentwickeln
- Montag, 02.05.2022 Folgen und Listen - vom Anfänger zum Profi
- Donnerstag, 09.06.2022 GeoGebra-unterstützter Analyseunterricht
- Montag, 04.07.2022 Messwerte in GeoGebra weiterverarbeiten
- Mittwoch, 07.09.2022 Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht mit GeoGebra



Jürgen Roth

# Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen



Chat



## Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

- 1 Grundvorstellungen zu Funktionen
- 2 Darstellungsformen  
↔ Darstellungswechsel
- 3 Grunderfahrungen vermitteln  
↔ Aktivitäten gestalten



## Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

- 1 Grundvorstellungen zu Funktionen**
- 2 Darstellungsformen  
↔ Darstellungswechsel
- 3 Grunderfahrungen vermitteln  
↔ Aktivitäten gestalten



## ■ Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich,
- ermöglichen Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen.

## ■ Zwei Typen von Grundvorstellungen

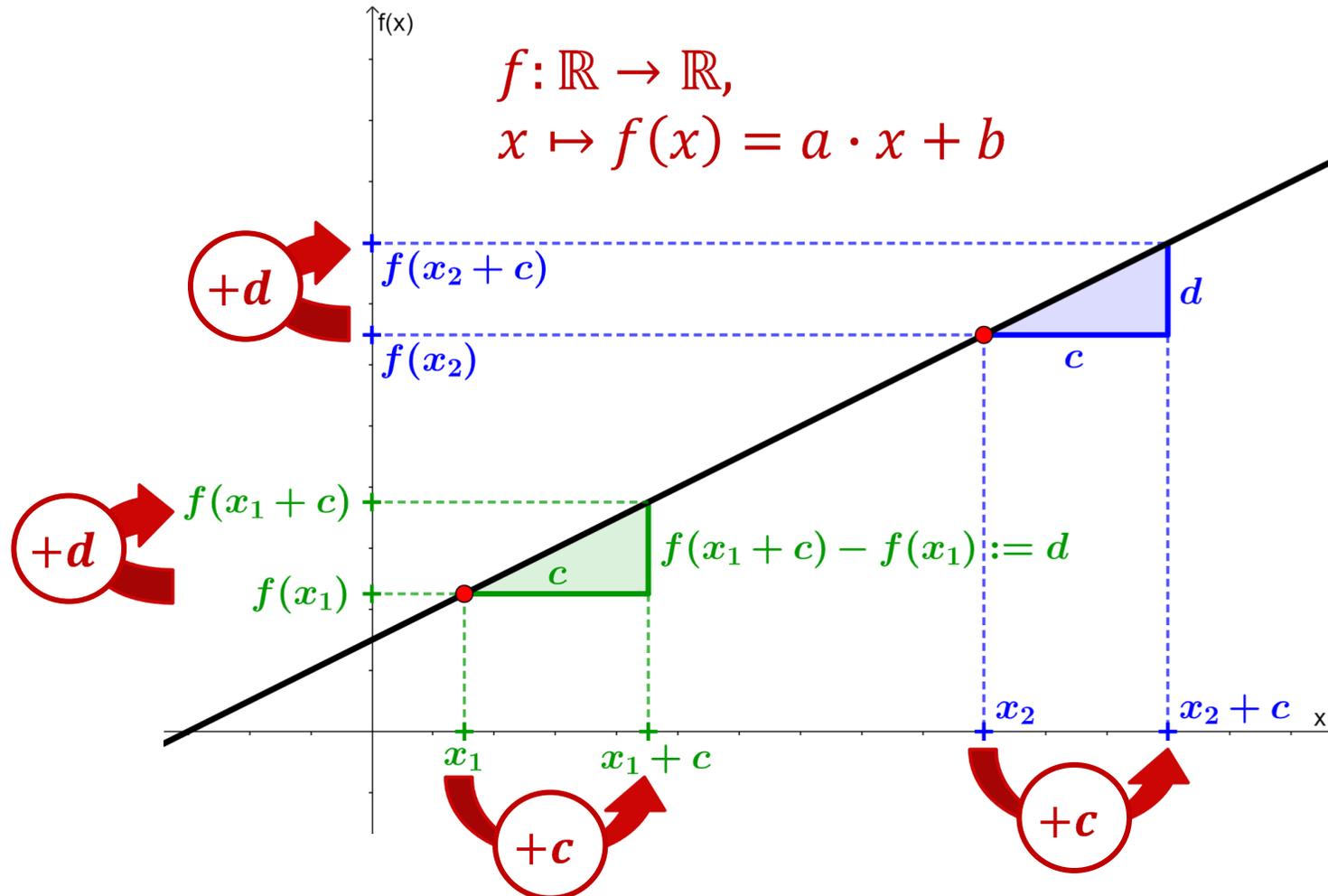
- Primäre Grundvorstellungen
- Sekundäre Grundvorstellungen

# Primäre Grundvorstellungen

Roth, J. & Siller S. (2016). [Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen](#). *Mathematik lehren* 199, S. 2-9



## Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f(x + c)$$

$$= a \cdot (x + c) + b$$

DG

$$\stackrel{DG}{=} a \cdot x + a \cdot c + b$$

AG

$$\stackrel{AG}{=} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$

$$= f(x) + d$$

Roth, J. (2014): [Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen](#) – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43



## ■ Experiment:

Schüler/innen ...

- rennen eine Treppe hinauf,
- messen nach dem Lauf in Abständen von 30s ihren Puls,
- halten den Zusammenhang paarweise in einer Tabelle fest.

- Erfahrung: Jedem Zeitpunkt wird (genau) ein Puls zugeordnet.



## Zuordnung

- Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Roth, J. (2014): [Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen](#) – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43



## ■ Fragestellung

Wie ändert sich der Puls in gleichen Zeitschritten?  
Ändert er sich auch gleichmäßig, oder zunächst langsamer und dann schneller oder ... ?

- Hierfür reicht es nicht einzelne Wertepaare zu betrachten.
- Es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden.

## Änderungsverhalten / Kovariation

- Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Roth, J. (2014): [Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen](#) – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43



## ■ Fragestellung

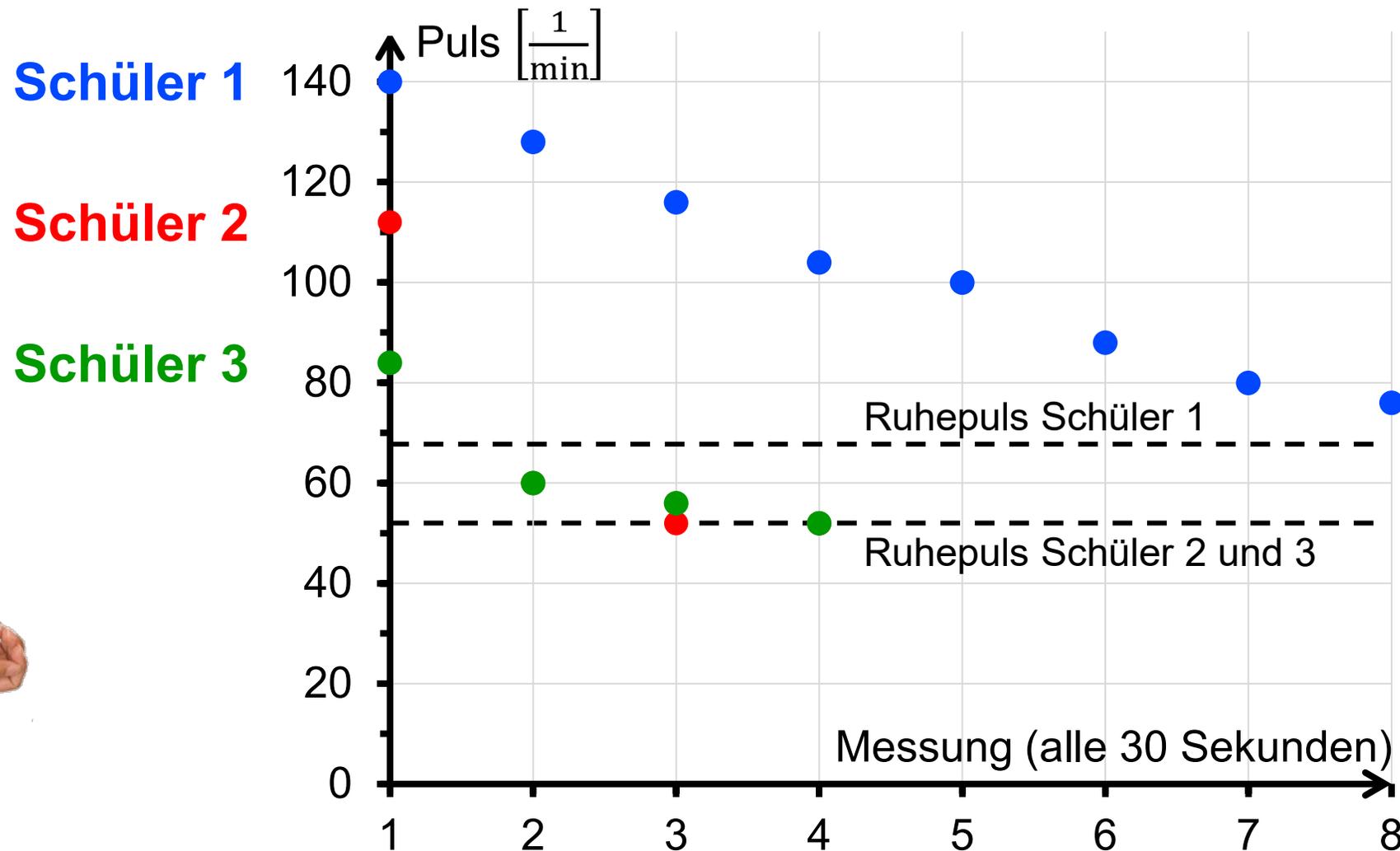
Wie sieht der funktionale Zusammenhang zwischen Zeitpunkt und Puls als Ganzes aus?

- Dazu muss man systematisch Daten aufnehmen → in Tabelle festhalten → Graph zeichnen
- Kann erst am Graph als Ganzes betrachtet und anhand der Verläufe für verschiedene Läufer verglichen werden → Fitness.

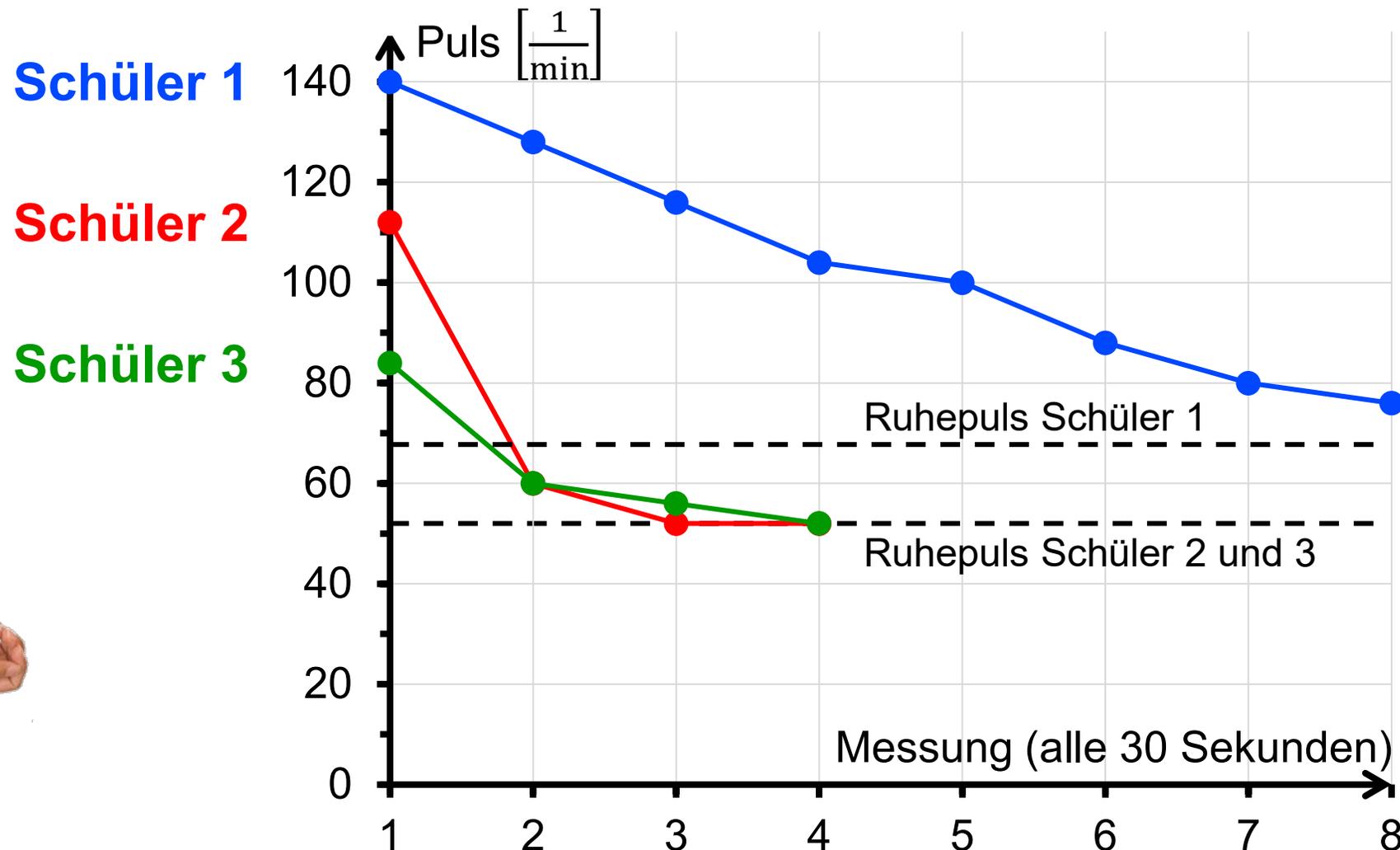
## Funktion als Ganzes

- Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

# Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**



# Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**



Perspektiven zur  
**Sicht als Ganzes**  
bei Funktions-  
graphen:

- (1) Vergleich von Abschnitten im selben Graph
- (2) Vergleich verschiedener Graphen



Roth, J. (2014): [Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen](#) – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU 60(6), S. 37-43



## ■ Zuordnung

- Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

## ■ Änderungsverhalten / Kovariation

- Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

## ■ Funktion als Ganzes

- Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne sondern die Menge aller Wertepaare.

## Sinnzusammenhänge herstellen

- Anknüpfen an bekannte Situationen oder Handlungsvorstellungen

## Aufbau visueller Repräsentationen

- Ermöglichen mentales operieren

## Fähigkeit zur Anwendung des Inhalts auf die Wirklichkeit

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren des Phänomens mit Hilfe der mathematischen Struktur



## Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

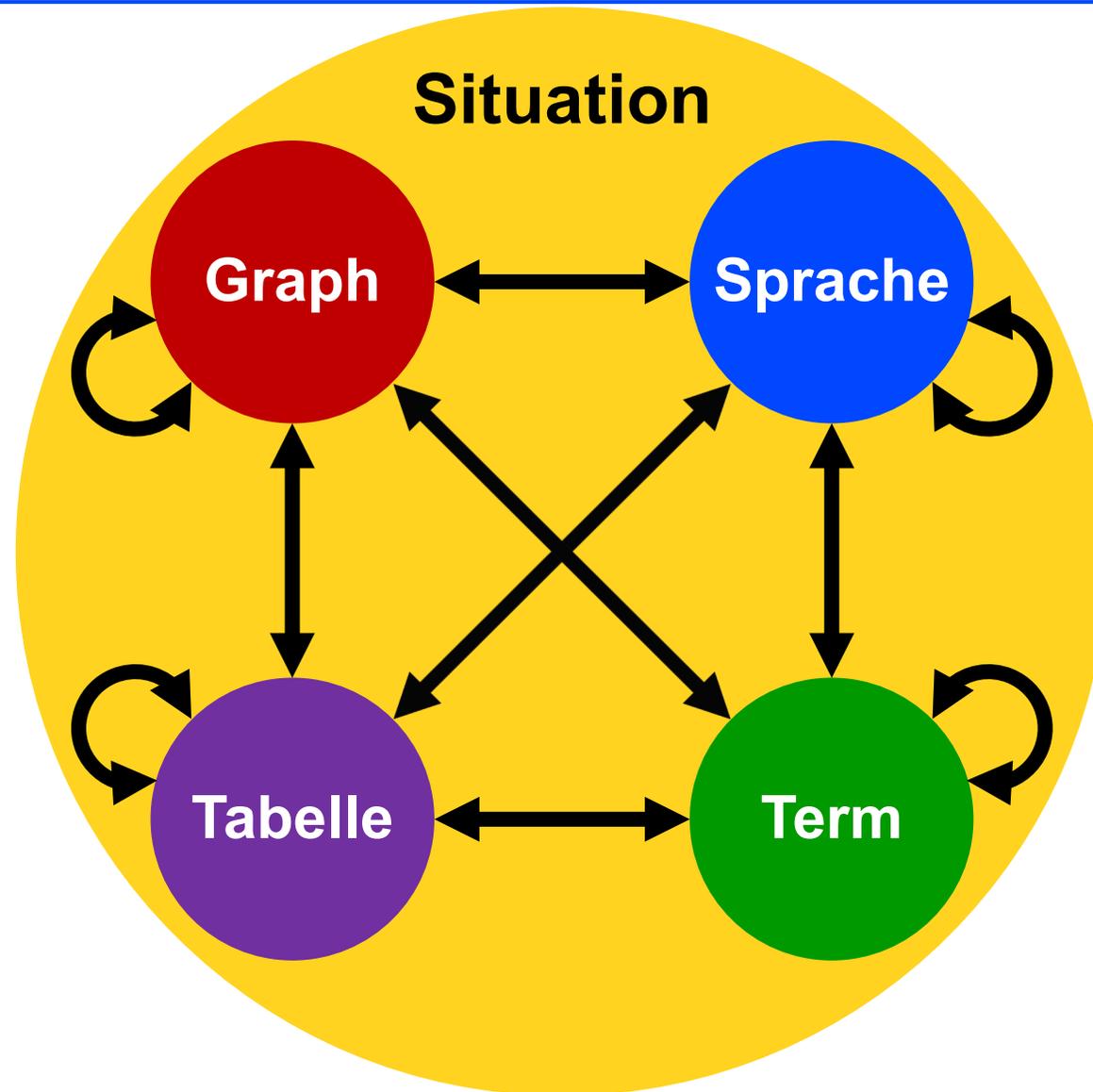
- 1 Grundvorstellungen zu Funktionen
- 2 Darstellungsformen**  
↔ **Darstellungswechsel**
- 3 Grunderfahrungen vermitteln  
↔ Aktivitäten gestalten

# Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

↔  
Darstellungswechsel

Graph Sprache Term Tabelle  
Darstellungsformen

↻  
Mit bzw. in einer  
Darstellung arbeiten



# Darstellungsformen ↔ Grundvorstellungen

## Darstellungsformen →

Grundvorstellungen →

	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	<p><b>Tätigkeit:</b> Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Markante Punkte erfassen</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Bestimmen einzelner Werte</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Erfassen einzelner Werte</p>
Kovariation	<p><b>Tätigkeit:</b> Unterteilung in Abschnitte mit unterschiedlichem Änderungsverhalten</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Änderungsverhalten qualitativ erfassen</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Änderungsverhalten quantifizieren</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Änderungsverhalten quantifizieren</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen</p>
Sicht als Ganzes	<p><b>Tätigkeit:</b> Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder für Teilbereiche typisieren.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Charakteristischen Verlauf erfassen</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Differenzen-, Produkt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Charakteristika quantitativ erfassen</p>	<p><b>Tätigkeit:</b> Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus.</p> <p><b>Hauptzweck:</b> Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen</p>

Verändert nach Hußmann, Laakmann (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM* (53)38, S. 2-13

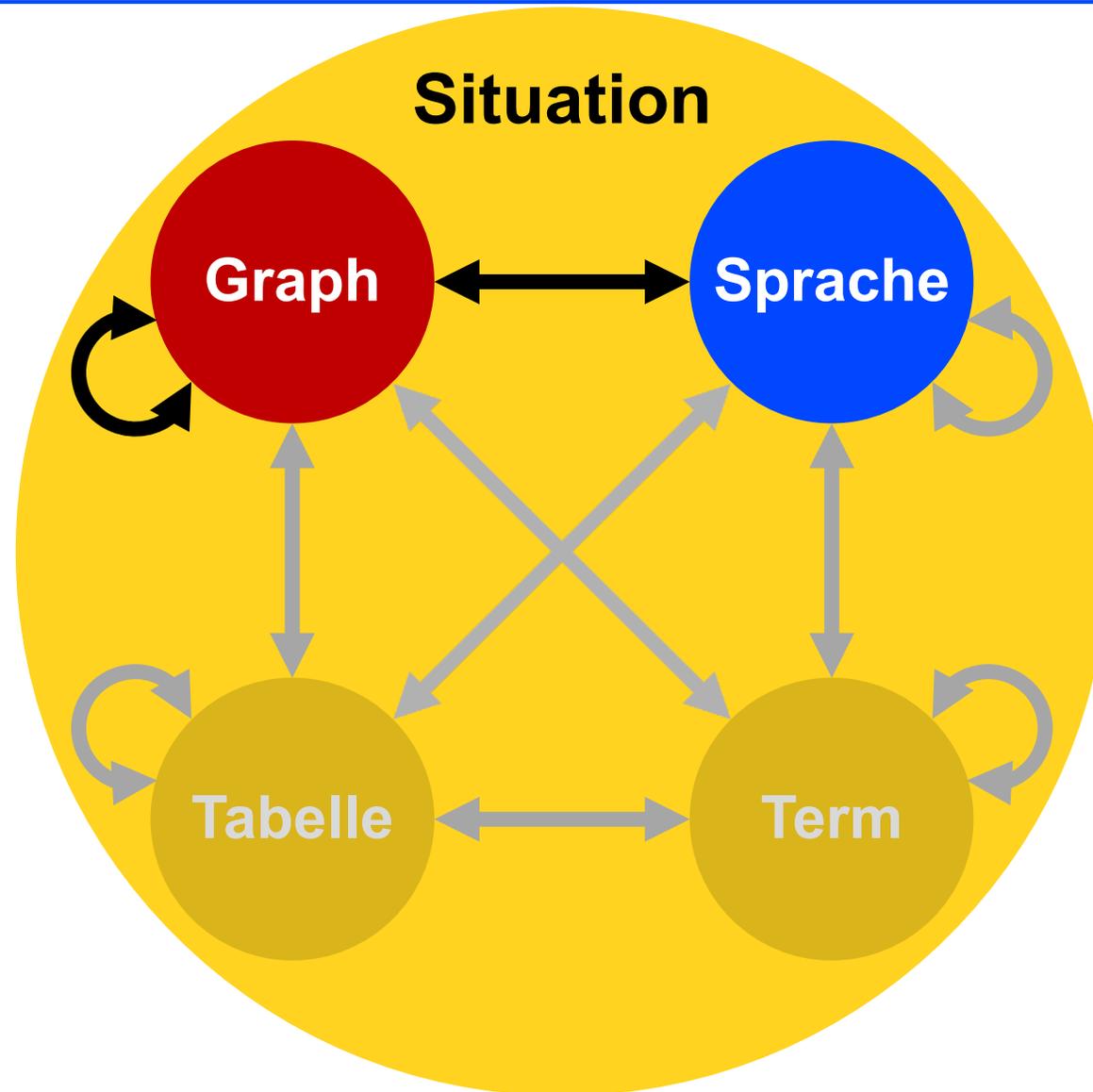
# Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

Roth, J. & Lichti, M. (2021).  
[Funktionales Denken  
entwickeln und fördern.](#)  
Mathematik lehren, 226, 2-9.

↔  
Darstellungswechsel

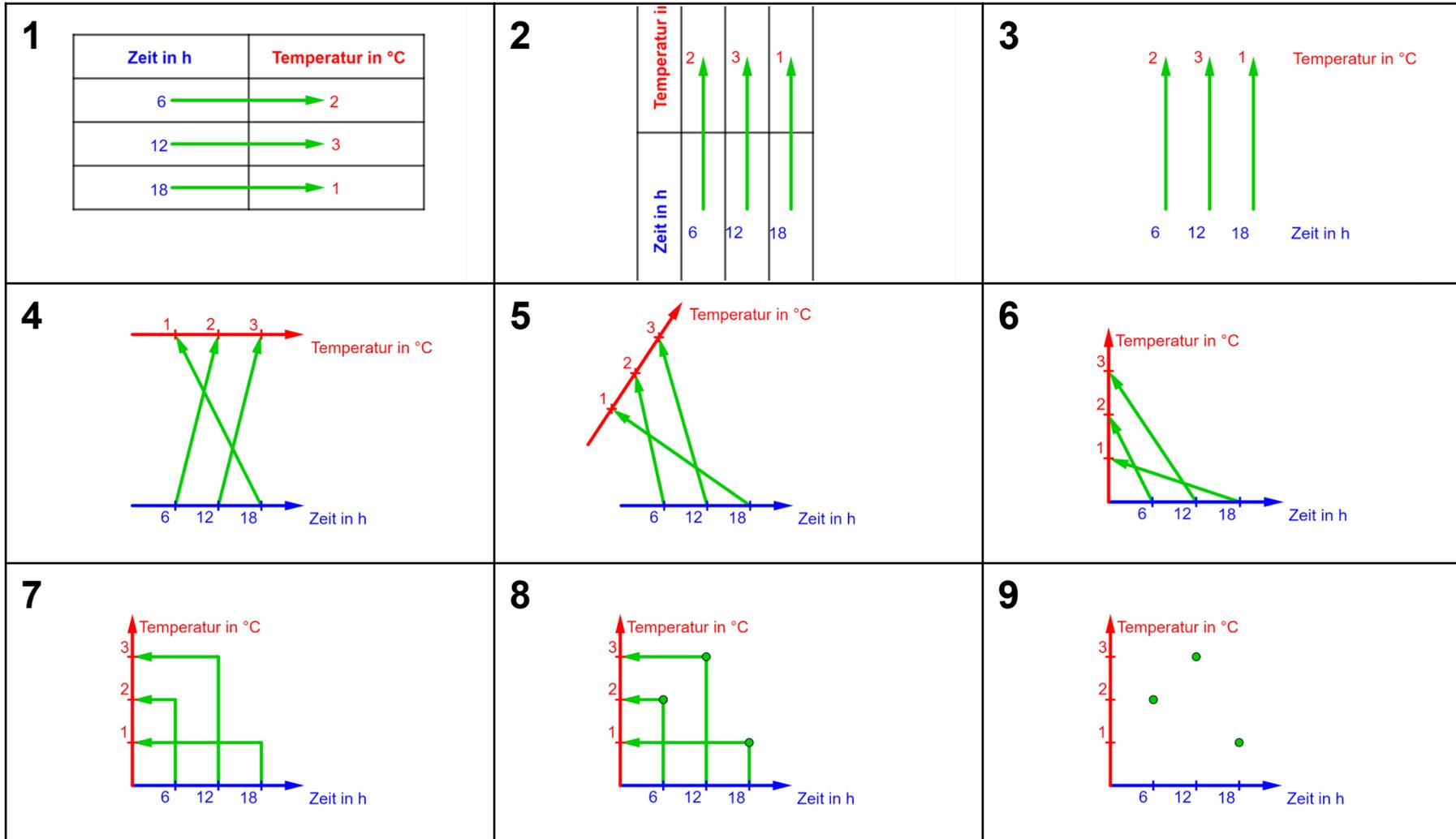
Graph Sprache Term Tabelle  
Darstellungsformen

↻  
Mit bzw. in einer  
Darstellung arbeiten



# Darstellungsformen erfassen: Das Beispiel Funktionsgraph

Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](#). Mathematik lehren, 226, 2-9.



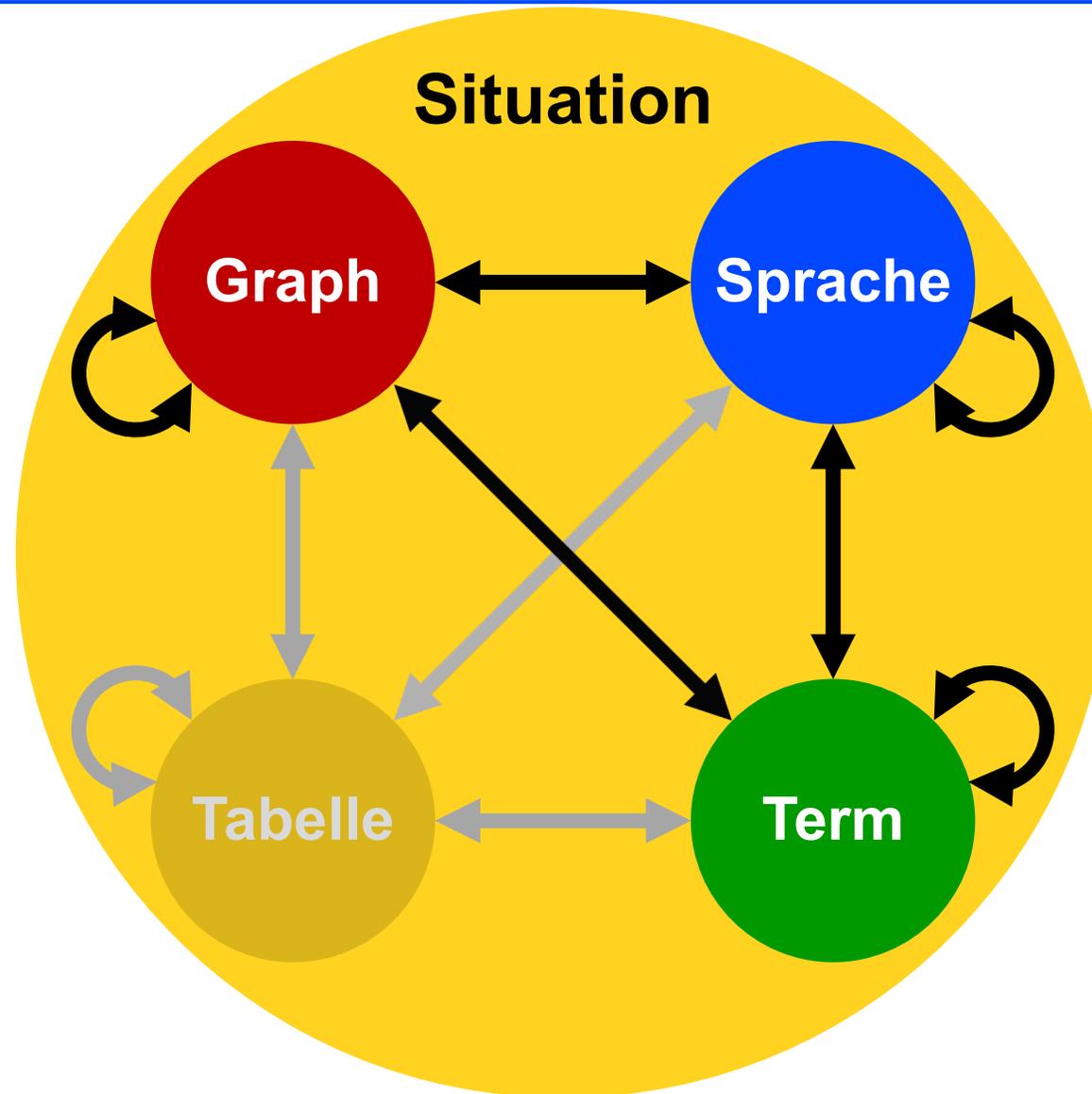
Grundvorstellung  
Zuordnung

# Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

↔  
Darstellungswechsel

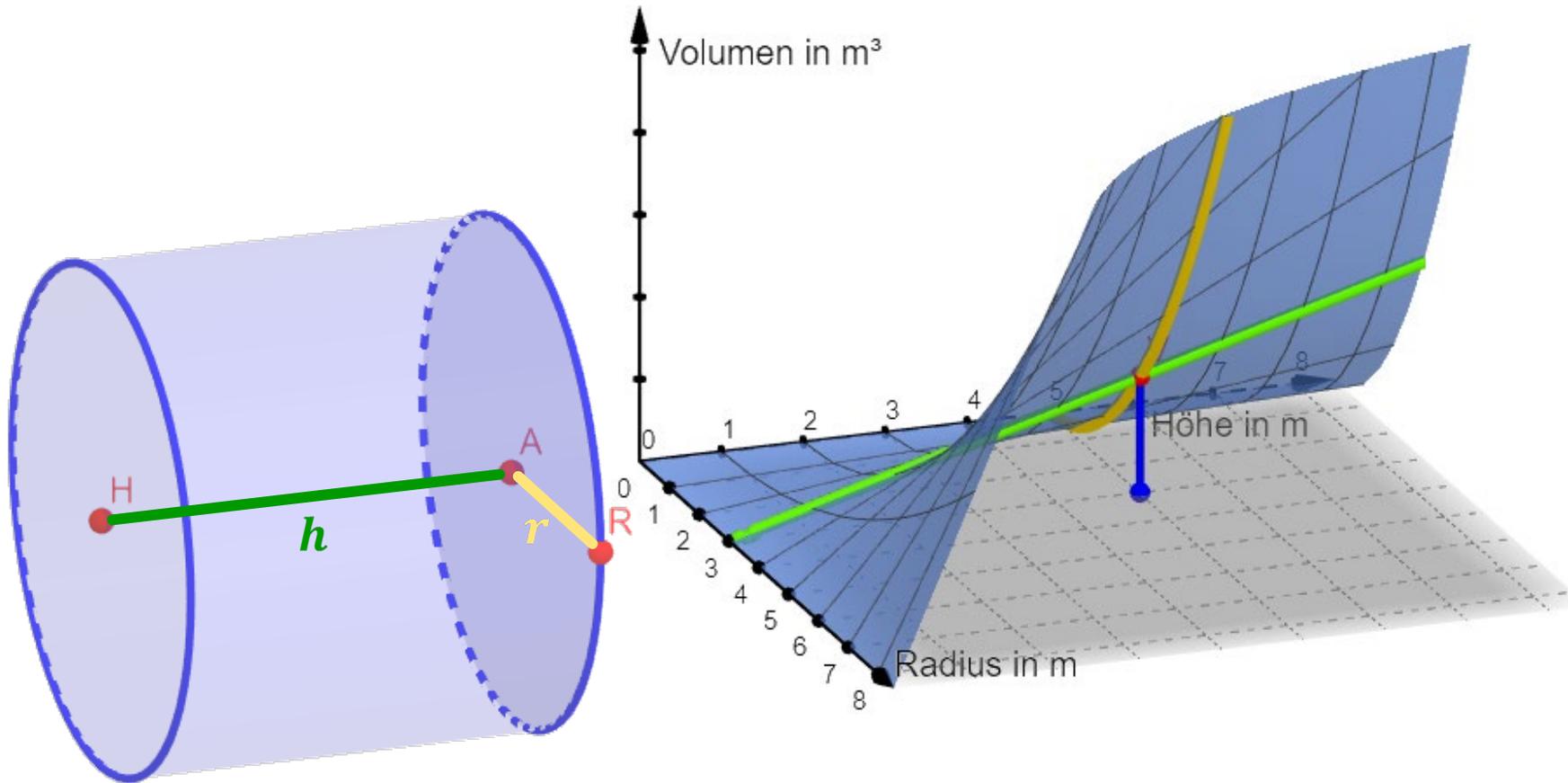
Graph Sprache Term Tabelle  
Darstellungsformen

↻  
Mit bzw. in einer  
Darstellung arbeiten



# Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher

Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](#). Mathematik lehren, 226, 2-9.



## ► Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

## ► Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

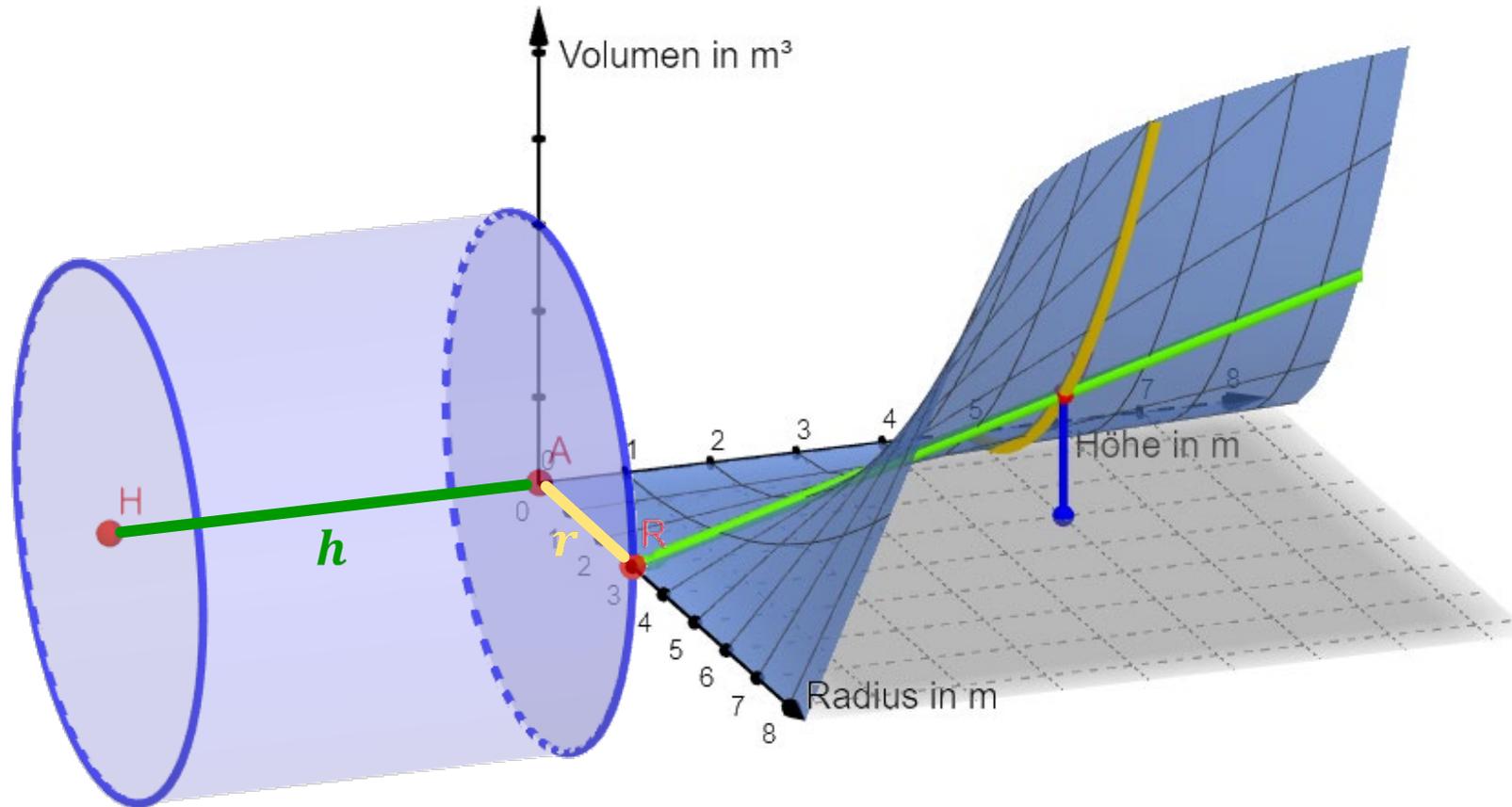
## ► Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(h) = (r^2 \pi) \cdot h$$

$$V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$$

# Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher

Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](#). Mathematik lehren, 226, 2-9.



## ► Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

## ► Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

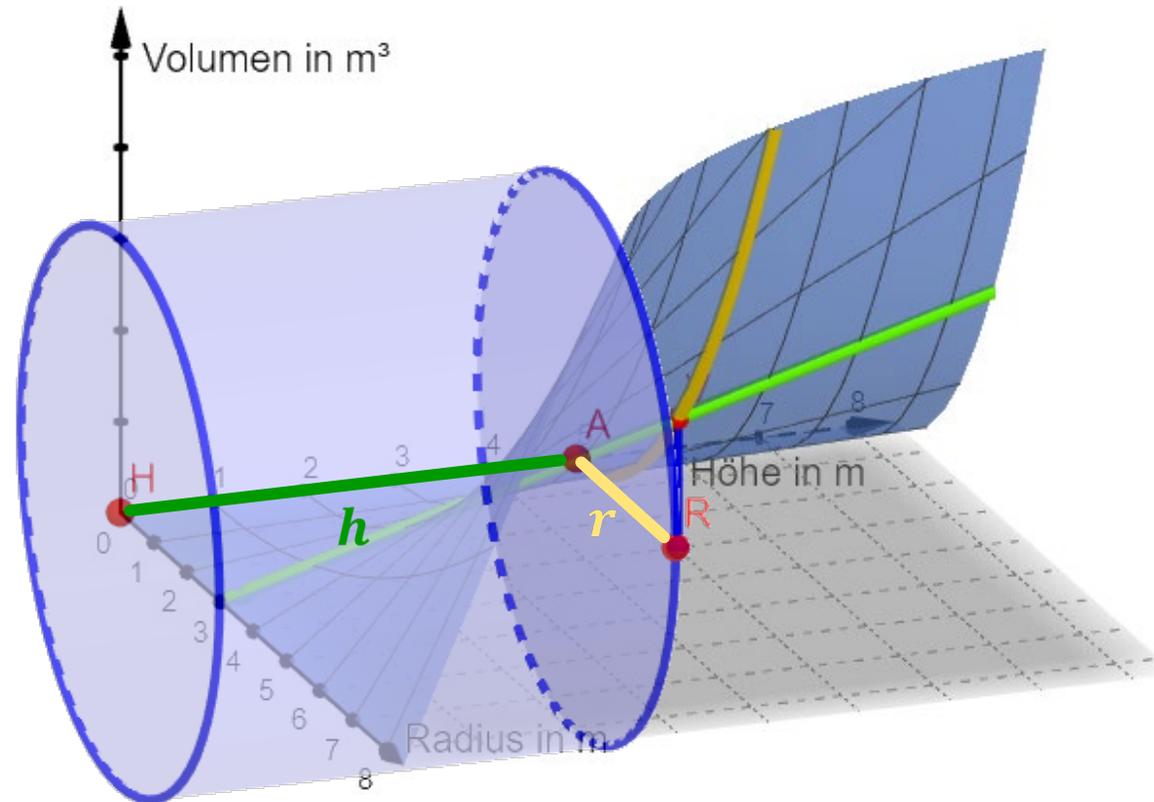
## ► Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(h) = (r^2 \pi) \cdot h$$

$$V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$$

# Ganz alltäglich: Funktionen mehrerer Veränderlicher

Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](#). Mathematik lehren, 226, 2-9.



## ► Zylindervolumen

$$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

## ► Funktion zweier Veränderlicher

$$V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2 \pi \cdot h$$

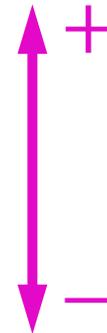
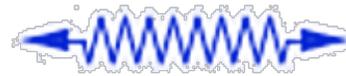
## ► Parameterfunktionen / Funktionenscharen

$$V_r(h) = (r^2 \pi) \cdot h$$

$$V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$$

# Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen **allgemein**

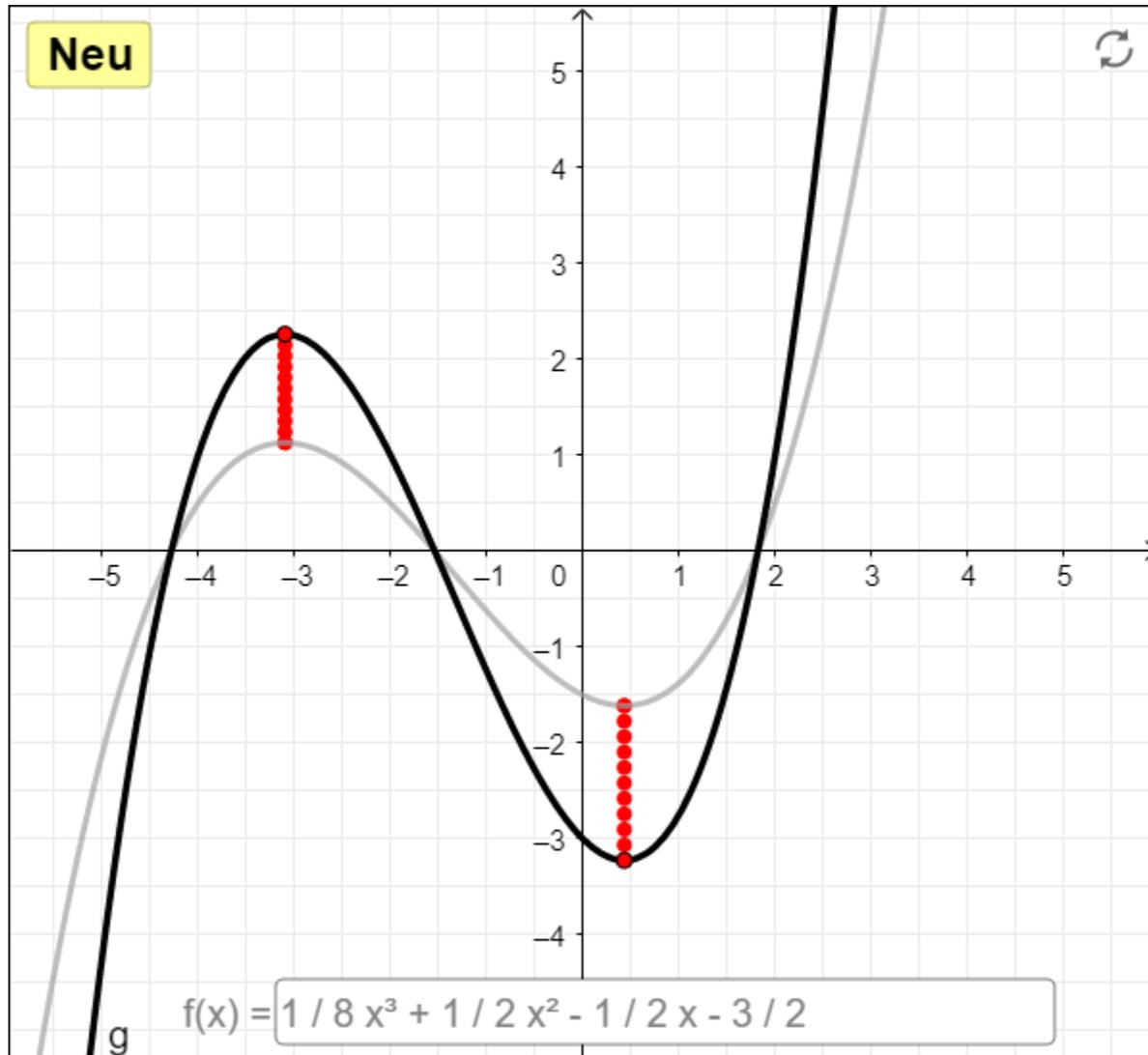
$$g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$$



Strecken in  $y$ -Richtung für  $|a| > 1$   
Stauen in  $y$ -Richtung für  $0 < |a| < 1$

Strecken in  $x$ -Richtung für  $0 < |b| < 1$   
Stauen in  $x$ -Richtung für  $|b| > 1$

# Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen **allgemein**



$$g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$$
$$= 2 \cdot f(1 \cdot (x + (0))) + (0)$$

Punktfarbe

rot

blau

grün

magenta

Parameter

$a = 2$

$b = 1$

$c = 0$

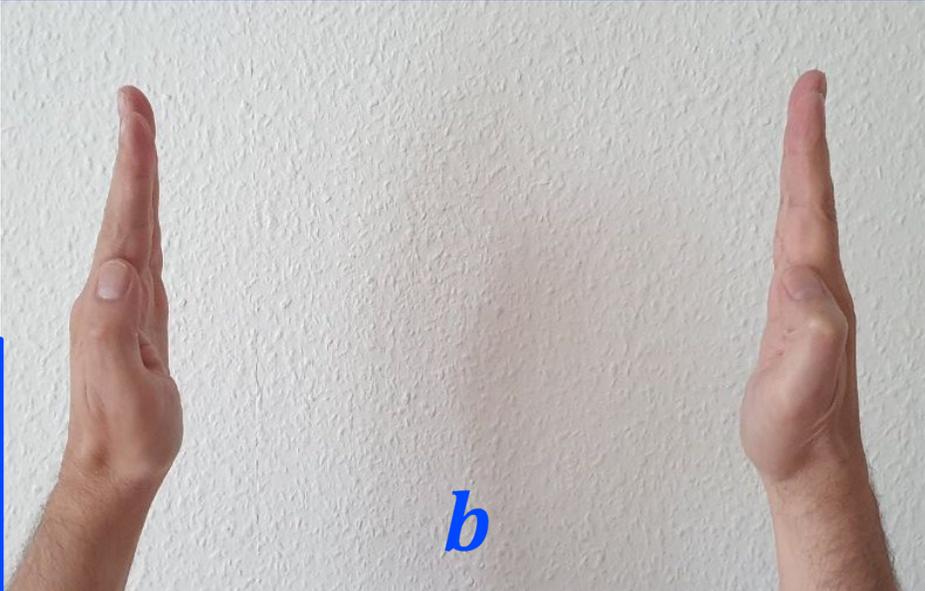
$d = 0$



# Passende Sprechweisen und Handbewegungen

Roth, J. & Lichti, M. (2021). [Funktionales Denken entwickeln und fördern](#). Mathematik lehren, 226, 2-9.

**Parameter  $b$**   
Streckung  
( $0 < |b| < 1$ )  
bzw.  
Stauchung  
( $|b| > 1$ )  
in  
 **$x$ -Richtung**



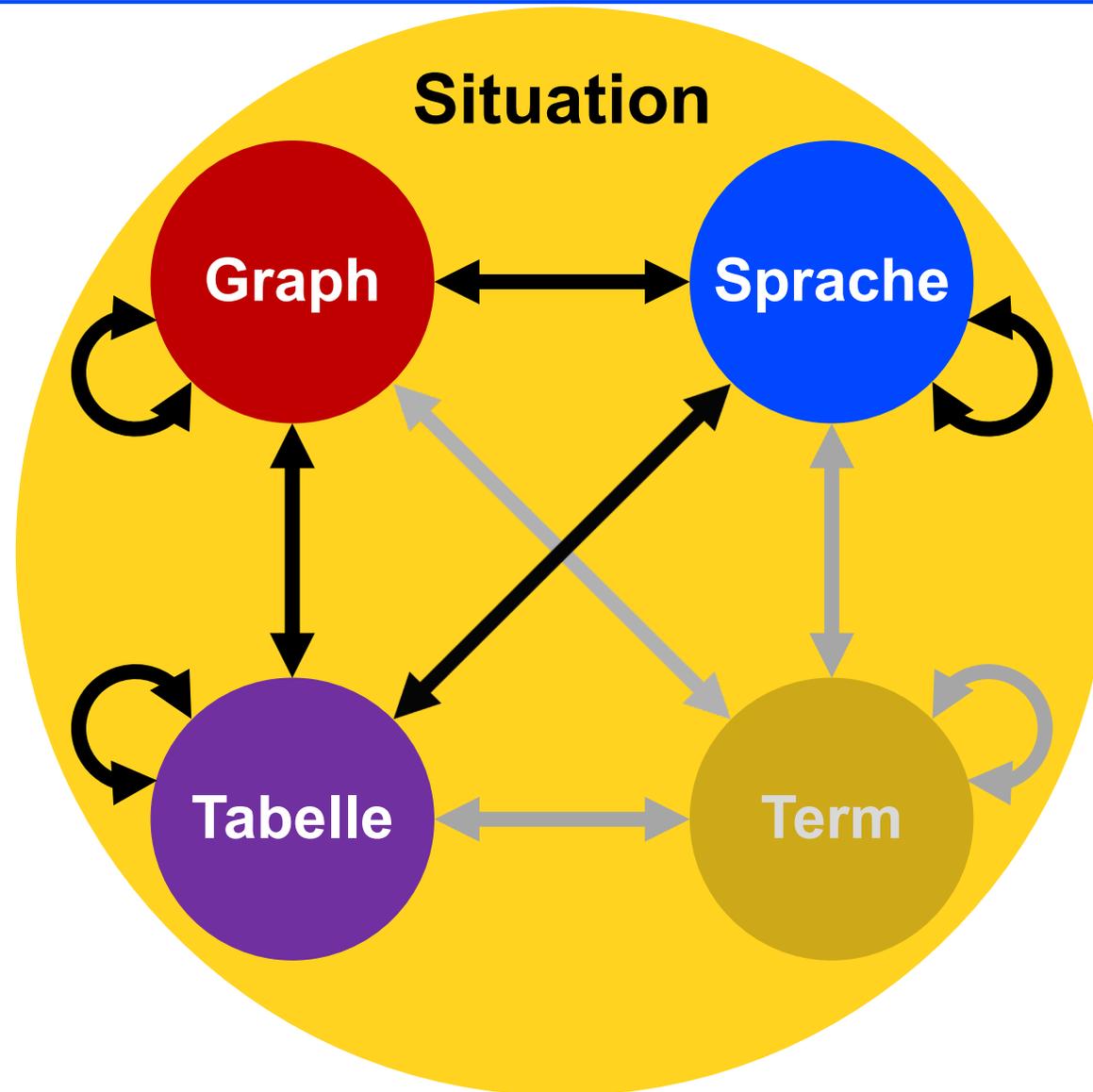
**Parameter  $a$**   
Streckung  
( $|a| > 1$ )  
bzw.  
Stauchung  
( $0 < |a| < 1$ )  
in  
 **$y$ -Richtung**

# Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen

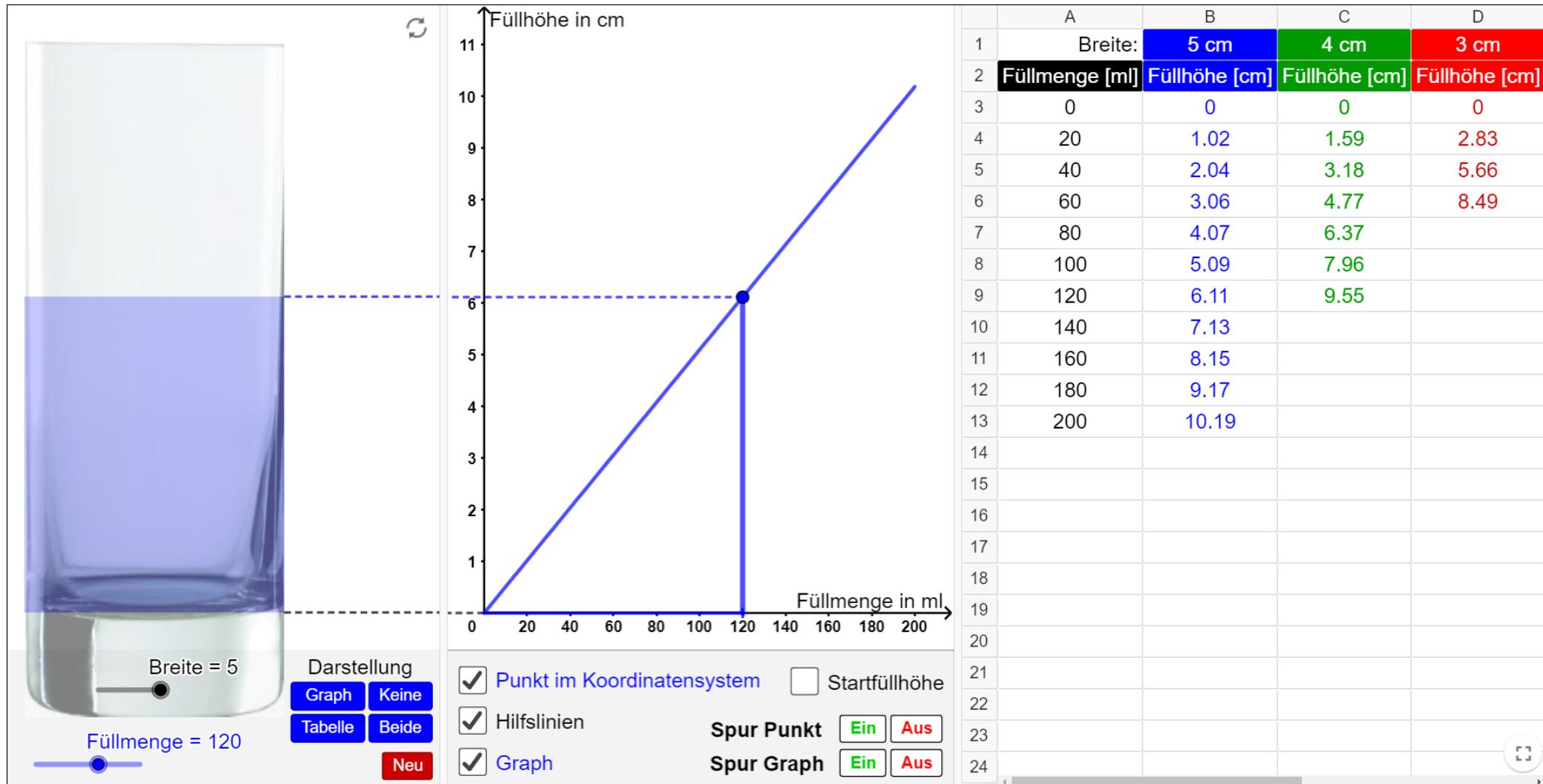
↔  
Darstellungswechsel

Graph Sprache Term Tabelle  
Darstellungsformen

↻  
Mit bzw. in einer  
Darstellung arbeiten



# Darstellungsformen wechselseitig interpretieren



Lichti, M., Roth, J. (2021).  
[Der Einstieg in Funktionales Denken – Darstellungsform und passendes Medium.](#)  
Mathematik lehren, 226, 10-14.

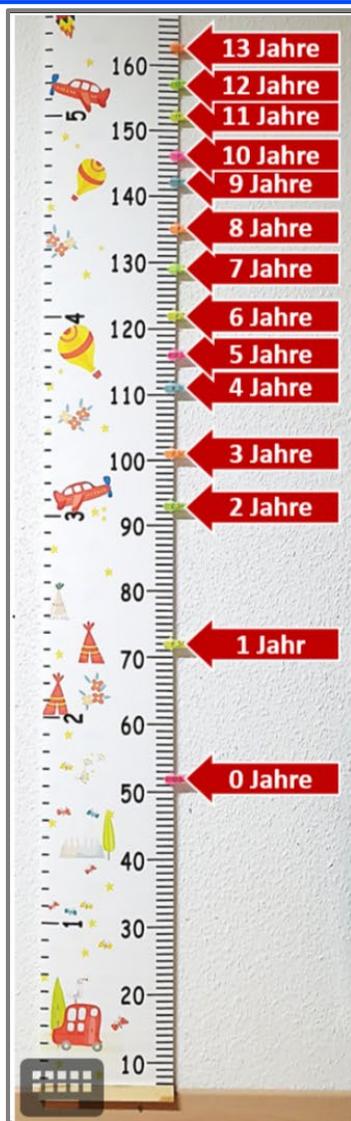
Hofmann, R., Roth, J. (2021).  
[Lernfortschritte identifizieren – Typische Fehler im Umgang mit Funktionen.](#)  
Mathematik lehren, 226, 15-19.



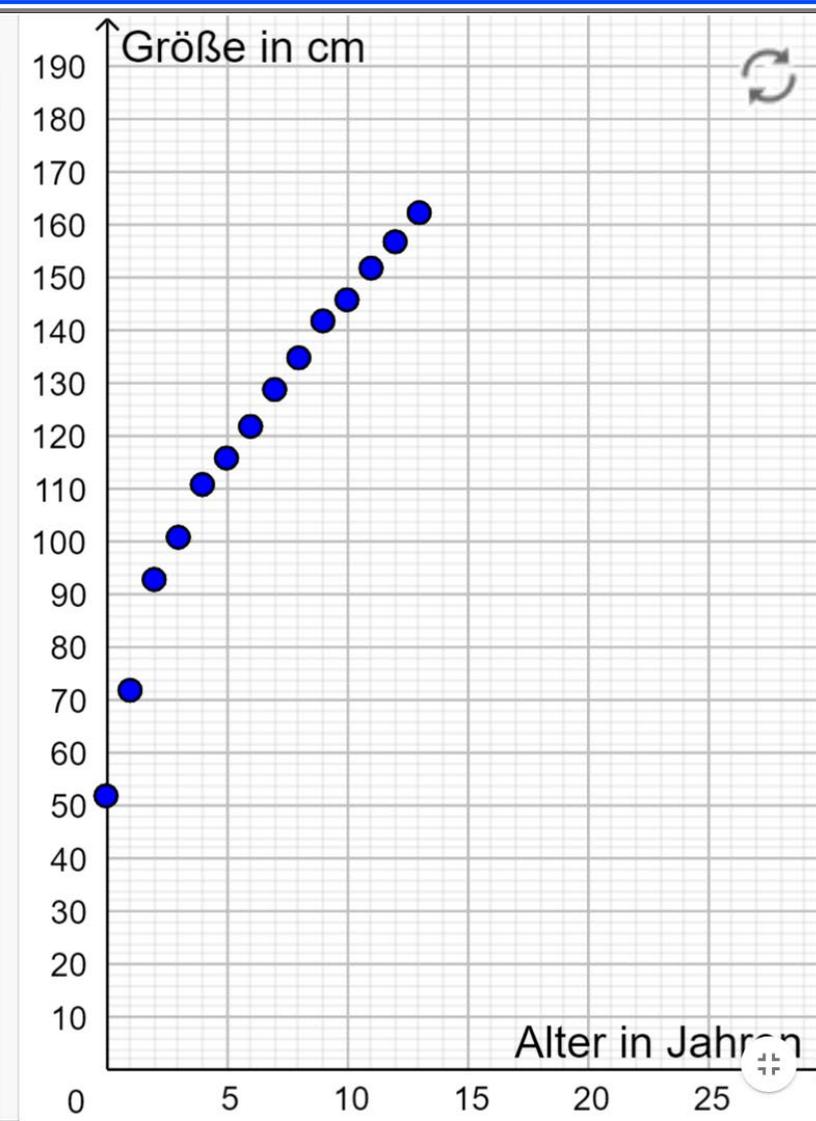
## Darstellungen mit GeoGebra systematisch und dynamisch vernetzen

- 1 Grundvorstellungen zu Funktionen
- 2 Darstellungsformen  
↔ Darstellungswechsel
- 3 Grunderfahrungen vermitteln**  
↔ **Aktivitäten gestalten**

# Lebensalter → Körpergröße



	A	B
1	Alter in Jahren	Größe in cm
2	0	52
3	1	72
4	2	93
5	3	101
6	4	111
7	5	116
8	6	122
9	7	129
10	8	135
11	9	142
12	10	146
13	11	152
14	12	157
15	13	162.5
16		



Roth, J. & Lichti, M. (2021).  
[Funktionales Denken entwickeln und fördern.](#)  
Mathematik lehren, 226, 2-9.

**Grundvorstellung  
Zuordnung**

**Grundvorstellung  
Kovariation**

**Grundvorstellung  
Funktion als Ganzes**

<https://www.geogebra.org/m/gvatuzbs>

- bilden den Rahmen für das selbstständige Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden,
- regen Lernende zu **Prozessen aktiver Wissenskonstruktion** an,
- organisieren und regulieren den Lernprozess über ein **Netzwerk von Aufgaben**, die
  - durch Leitgedanken inhaltlich aufeinander bezogen sind,
  - hinreichend offen sind, um differenzierend zu wirken,
  - bzgl. des zu erarbeitenden Inhalts sowie der intendierten Lernprozesse **sinnvoll strukturiert** sind, sowie
  - **Aufforderungen zur Dokumentation der Vorgehensweisen und Ergebnisse** enthalten
- umfassen **geeignete Medien und Materialien** für die aktive und vielfältige Auseinandersetzung mit einem inhaltlichen Phänomen,
- **fordern zur Kommunikation und Reflexion** über das Erarbeitete heraus,
- **bieten** bei Bedarf individuell abrufbare **Hilfestellungen** sowie die Möglichkeit der **Ergebniskontrolle** und
- **sollten von einem unterrichtlichen Gesamtsetting** gerahmt werden, in dem die Lernenden durch eine Lehrperson auf die Arbeit mit der Lernumgebung vorbereitet, wieder daraus abgeholt und insbesondere beim Systematisieren ihrer gewonnenen Erkenntnisse unterstützt werden.



# Digitale Lernumgebungen

## Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“



### Aktivurlaub

Funktionale Zusammenhänge

Ansehen



### Round the world

Funktionale Zusammenhänge der

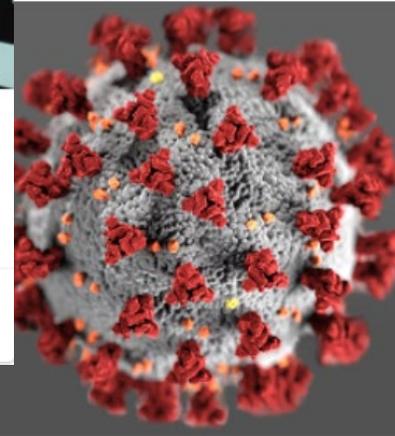
Ansehen



### USA - ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Integralrechnung

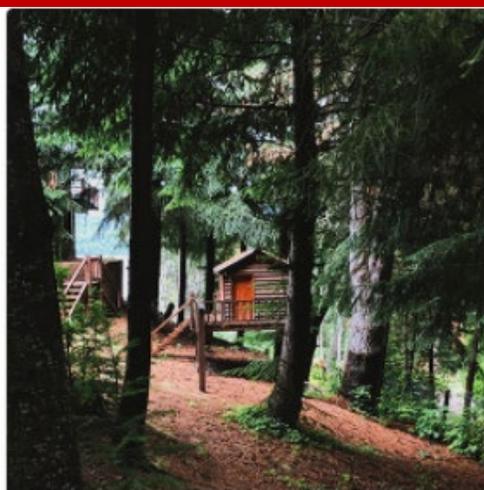
Ansehen



### Wort des Jahres

Integralrechnung

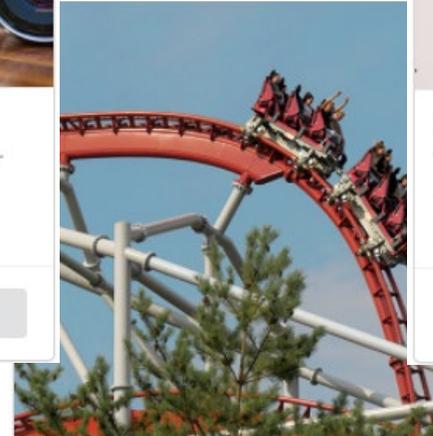
Ansehen



### Das Baumhaus-Projekt

Funktionale Zusammenhänge

Ansehen

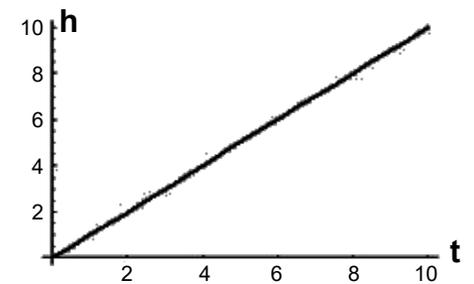
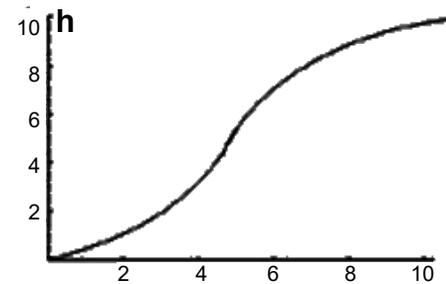
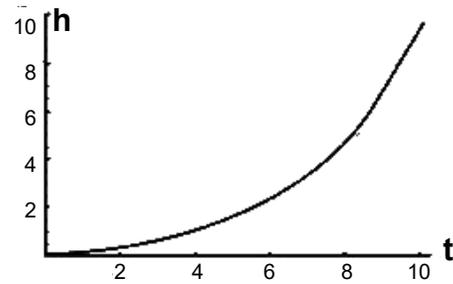
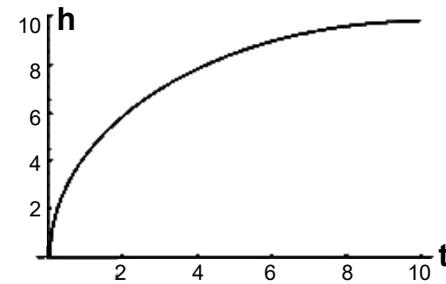
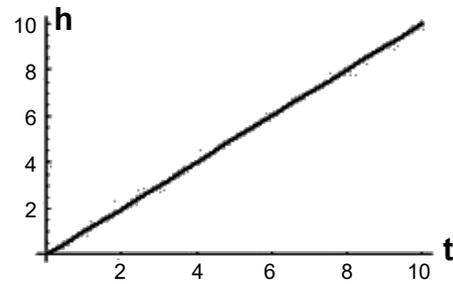


### Freizeitpark

Differentialrechnung

Ansehen

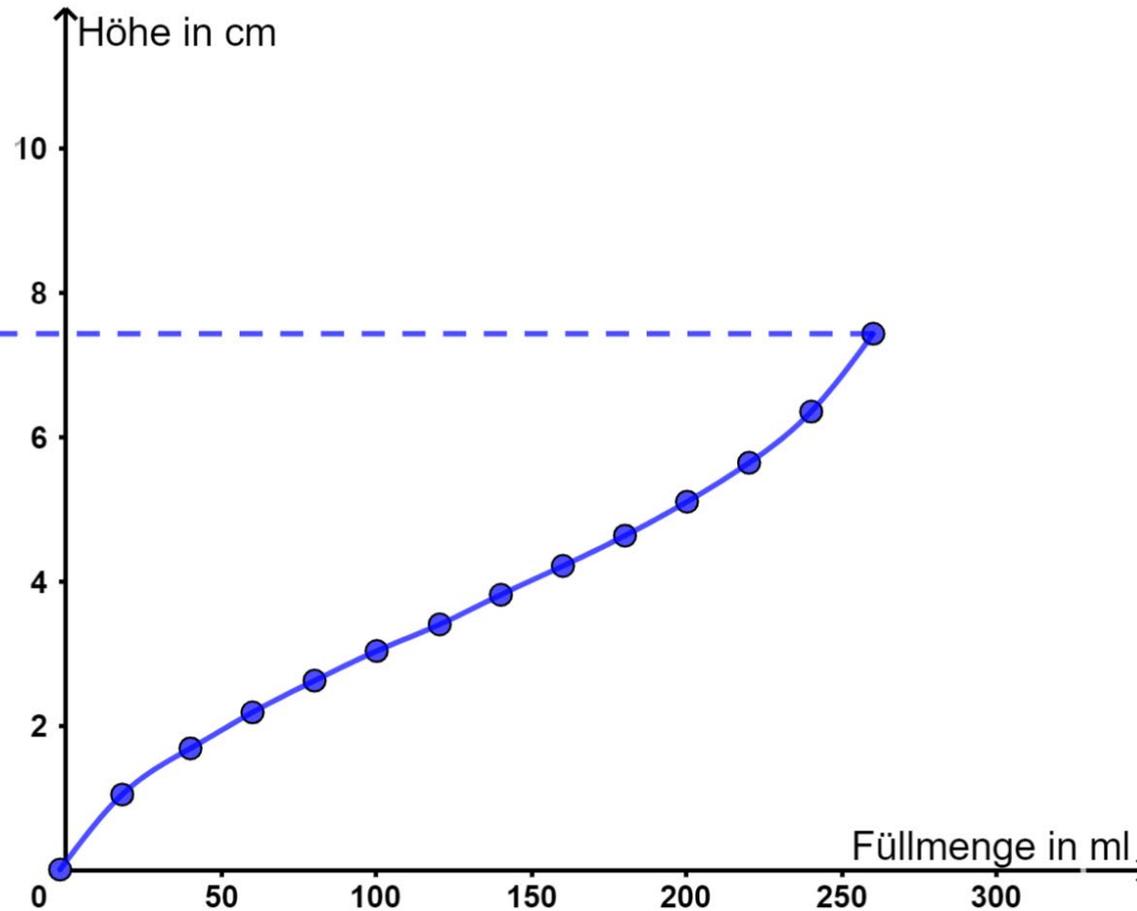
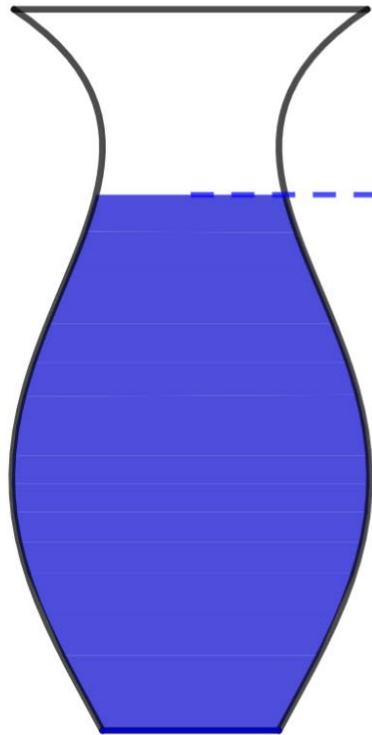
# Gefäß: Füllmenge $\rightarrow$ Füllhöhe



# Gefäß: Füllmenge → Füllhöhe

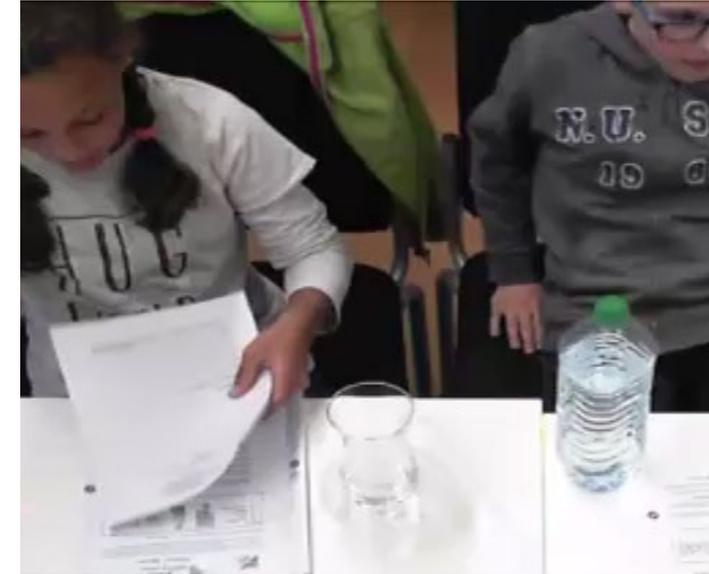
Digel, S. & Roth, J. (2021). [Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?!](#) In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.

Füllmenge in ml: 260



+ 20 ml

Gefäß leeren

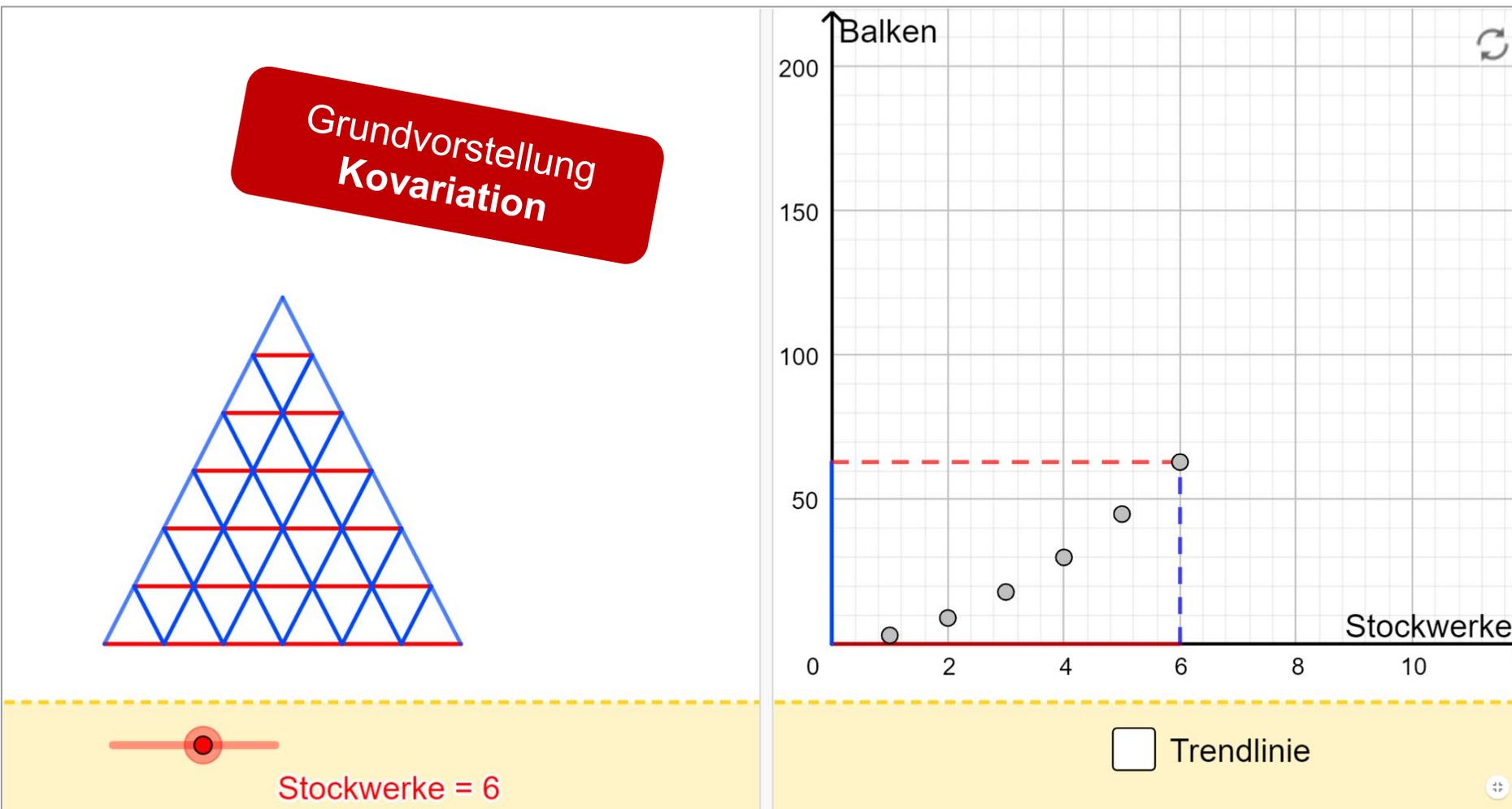


Grundvorstellung  
Kovariation

<https://www.mathe-labor.de/stationen/baumhaus-2020/a/teil3/>

# Kartenhaus: Anzahl Stockwerke $\rightarrow$ Anzahl Balken

Digel, S. & Roth, J. (2021). [Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?!](#) In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.



# Kerze: Brenndauer $\rightarrow$ Länge

 <https://youtu.be/mq2caj9O-bs> (Zeitraffer)

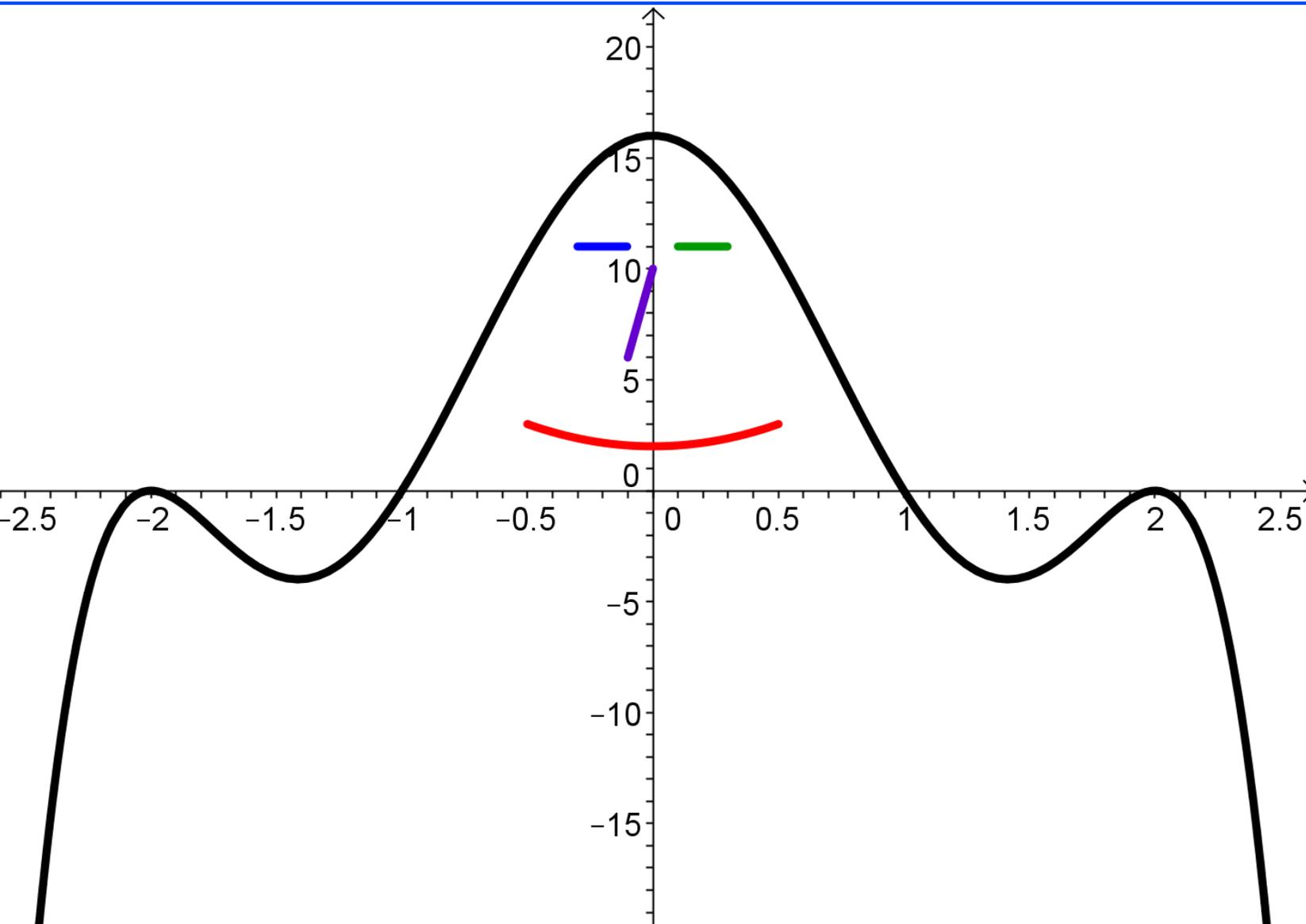
[https://youtu.be/IOQNSsSvH\\_U](https://youtu.be/IOQNSsSvH_U) (Originallänge) 



 <https://www.geogebra.org/m/we6ftunf#chapter/542845>

<https://www.geogebra.org/m/fyvuvfst> 

# Mit Graphen Bilder malen



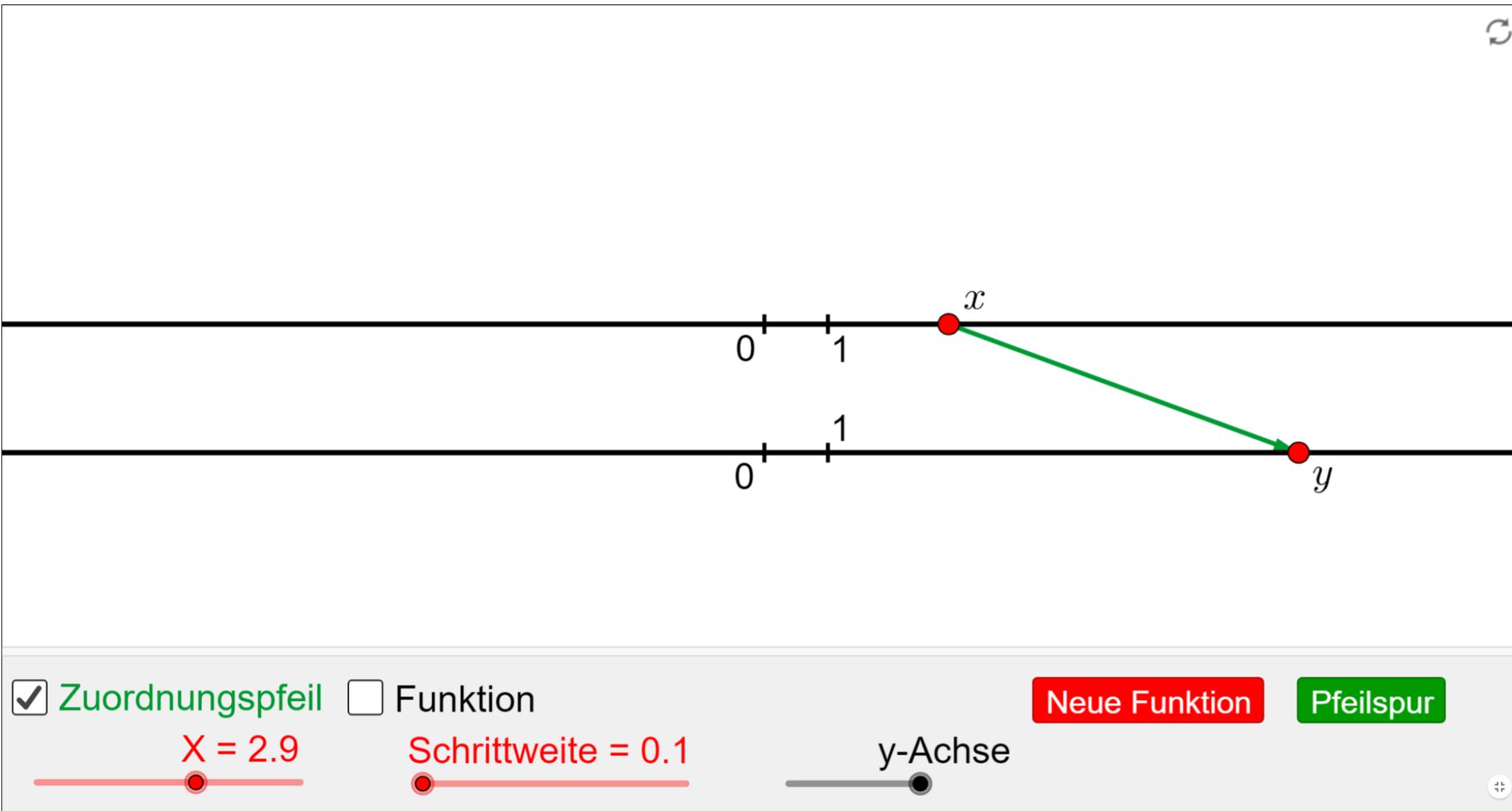
Versuche das Gespenst nachzuzeichnen, indem du Funktionsterme in die Eingabezeile schreibst.

Grundvorstellung  
Funktion als Ganzes

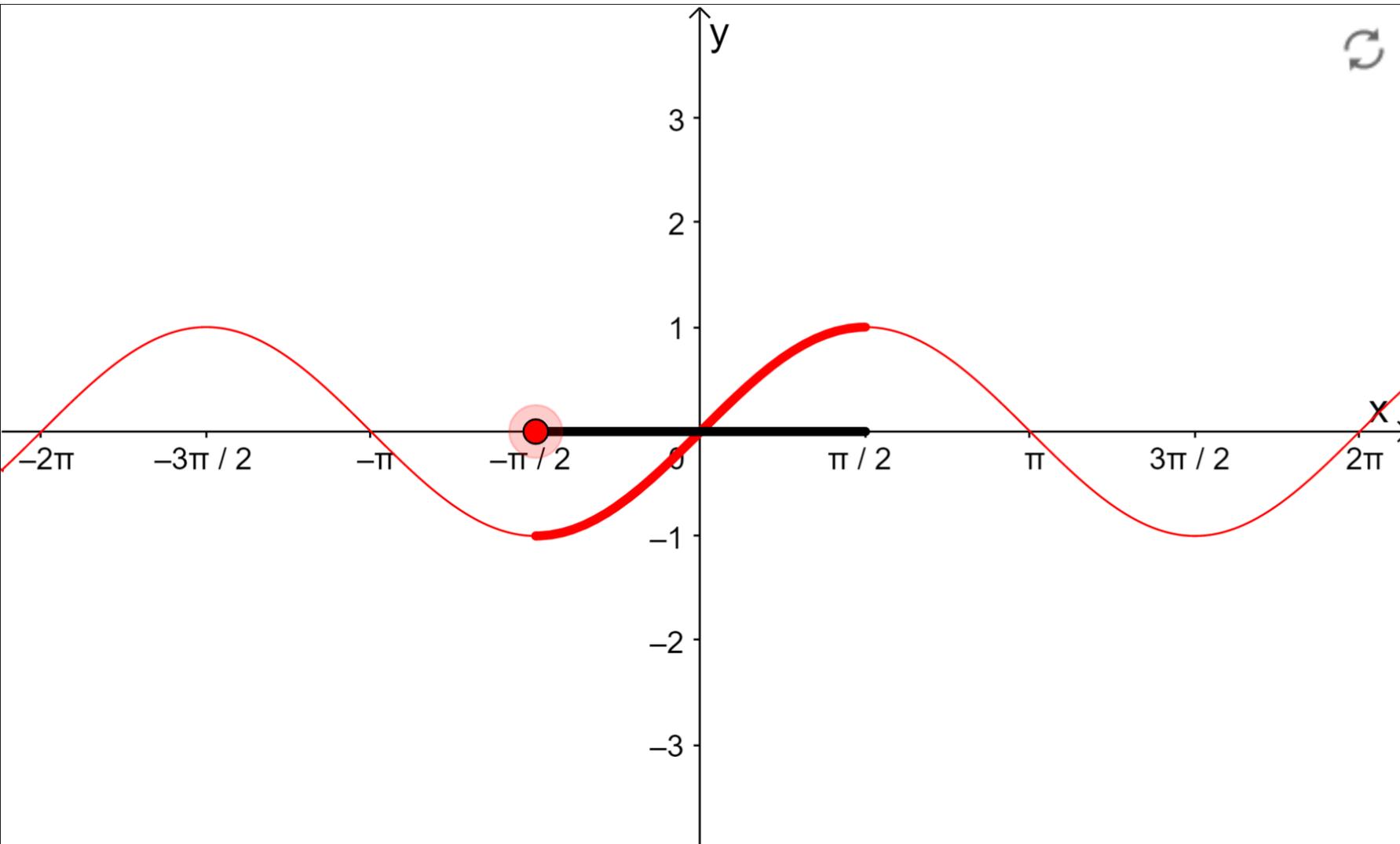
# Dynagraph und Funktionsgraph

Roth, J. & Lichti, M. (2021).  
[Funktionales Denken  
entwickeln und fördern.](#)  
Mathematik lehren, 226, 2-9.

Grundvorstellung  
Kovariation



# Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



sin

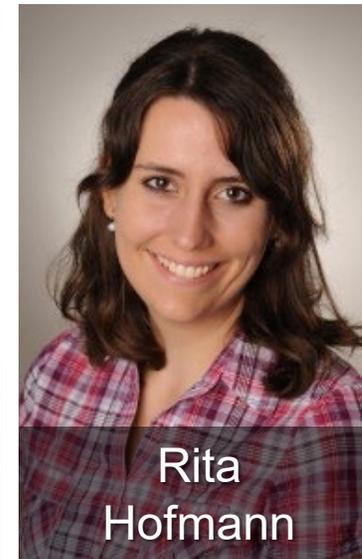
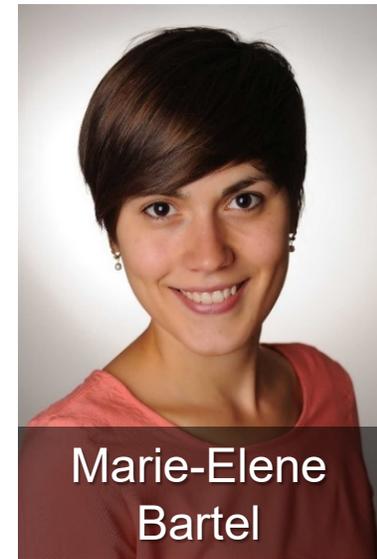
cos

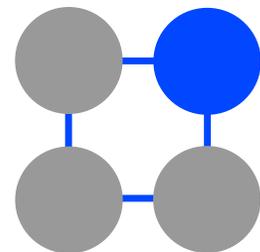
tan

Funktionstest

Umkehrbarkeitstest

Winkelhalbierende (I, III)





**Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit**  
[dms.uni-landau.de](https://dms.uni-landau.de)