Jürgen Roth

Terme *dynamisch*

Eine Lernumgebung zum Änderungsverhalten von Termen

Zielgruppe 7. und 8.Schuljahr

Idee Ausgehend vom Beispiel der Stromtarife wird das Änderungsverhalten linearer und quadratischer Terme in einer vorbereiteten Lernumgebung untersucht

Zeitbedarf 5-6 Unterrichtsstunden

Methode Partner- und Gruppenarbeit

Materialien Lernumgebung unter **www.juergen-roth.de/terme**
Systemvoraussetzung: Excel 97 oder höher; Makros aktivieren

Wie verändert sich eine zugeordnete Größe, wenn die Ausgangsgröße variiert wird? Diese Frage zu beantworten fällt vielen Schülerinnen und Schülern schwer. Im Sinne des Spiralprinzips kann die frühzeitige Einbindung von Aktivitäten zum Änderungsverhalten eine angemessene Antwort auf diese Problematik sein. Die Einführung von Termen im Algebraunterricht bietet hierzu eine Chance. Terme treten im Zusammenhang mit Funktionen, Formeln und Gleichungen auf. Das Änderungsverhalten ist dabei stets von Bedeutung. Für einen verständigen Umgang mit Termen müssen Schülerinnen und Schüler deshalb frühzeitig Erfahrungen nicht nur zum *statischen Zuordnungsaspekt* (jedem Wert einer Variablen wird ein Termwert zugeordnet) sondern insbesondere auch zum *dynamischen Veränderlichenaspekt* von Variablen und Termen sammeln. Es geht dabei um die Entwicklung einer Verständnisgrundlage, die sich langfristig bezahlt macht. So lassen sich z. B. Gleichungen, bei vorhandenen Erfahrungen mit dem Änderungsverhalten von Termen, durch *systematisches Probieren* lösen. Betrachtet man etwa die einfache Gleichung

$$2x + 5 = -3x + 20$$

x	$2x + 5$	$-3x + 20$
0	5	20
1	7	17
2	9	14
3	11	11

Tabelle 1

und setzt $x = 0$, so erkennt man, dass dann die linke Seite (5) kleiner ist als die rechte Seite (20) der Gleichung ist. Da der linke Term um zwei größer wird, wenn man den x-Wert um eins vergrößert und dabei gleichzeitig der rechte Term um 3 kleiner wird, muss man den x-Wert vergrößern, um die beiden Termwerte einander anzunähern. Wie **Tabelle 1** zeigt ist man hier selbst bei naivem Vorgehen schnell am Ziel. Es wird auch sofort klar, dass $x = 3$ die einzige Lösung der Gleichung ist, weil $2x + 5$ bei Vergrößerung von x immer größer wird und $-3x + 20$ immer kleiner.

Ziele des Unterrichtskonzepts

Die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten von Termen für 7. und 8. Klassen basiert auf der Excel-Lernumgebung „Terme *dynamisch*". Schülerinnen und Schüler sollen mit dieser Lernumgebung

- Erfahrungen zum Änderungsverhalten von Termen mit einer Variable (hier mit x bezeichnet) sammeln,
- Variationen von x- und Termwerten an dynamischen Tabellen und dynamischen Balkendiagrammen beobachten, beschreiben und schließlich allein anhand des Terms vorhersagen.

Dadurch lernen sie

- mit qualitativen (größer/kleiner werden, gleichmäßige/ungleichmäßige Änderung, schnellere/langsamere Änderung) und quantitativen (u. a. Maximum, Minimum, f(0) = ?) Aussagen das Änderungsverhalten von Termen zu erfassen,
- sich ohne das Werkzeug Computer, also im Kopf, nur anhand des Terms das Änderungsverhalten von einfachen Termen vorzustellen,
- bei Problemstellungen mit dem Änderungsverhalten zu argumentieren und
- zu erschließen, ob zu einer Gleichung eine Lösung existieren kann bzw. wo sie etwa liegt.

Erfahrungsgemäß sind Schülerinnen und Schüler der 7. Jahrgangsstufe noch sehr stark auf das Rechnen mit Zahlen fixiert. Im hier vorgestellten Ansatz wird darauf aufgebaut und sie erhalten die Chance auf dieser Basis erste Erfahrungen mit dem Änderungsverhalten zu sammeln. Dazu bietet sich als Hilfsmittel die Tabelle in besonderem Maße an, weil sie einerseits mit konkreten Zahlenwerten arbeitet, andererseits aber durch das Untereinanderstellen von aufeinander folgenden Werten der Veränderlichencharakter des x- und des Termwertes deutlich hervortreten kann. Eine nächste Stufe auf dem Weg zum Verständnis des Änderungsverhaltens wäre die Einbeziehung von (Funktions-)Graphen. Da Funktionen und ihre Graphen in der Regel erst später in den Lehrplänen auftreten und weil es hier um eine erste Grundlegung geht, wird hier davon abgesehen. In der Lernumgebung stellen allerdings die den dynamischen Tabellen hinzugefügten dynamischen Balkendiagramme ein Bindeglied zu den Funktionsgraphen dar. Die so gewonnenen Erfahrungen sollten beim Übergang zu Funktionsgraphen aufgegriffen und genutzt werden.

Phasen des Unterrichtskonzepts **1**

Für die gesamte Unterrichtssequenz zur Lernumgebung (LU) „Terme *dynamisch*“ muss eine Arbeitszeit von ca. fünf bis sechs Unterrichtseinheiten (UE) eingeplant werden. Sie ist in fünf Phasen gegliedert:

1. Partnerarbeit oder Unterrichtsgespräch (abhängig vom Vorwissen der Schüler) zur Einführung in die Problematik des Änderungsverhaltens (Abschnitt „Stromtarife“ der LU) [1 UE]
2. Partnerarbeit am Computer (Abschnitt „Termänderung“ der LU) [2-3 UE]
3. Unterrichtsgespräch zur Sicherung der Ergebnisse [½ UE]
4. Gruppenarbeit ohne Computer zum Finden von Gleichungslösungen mit Hilfe des Änderungsverhaltens (Gleichungen siehe Abschnitt „Termvergleich“ der LU) [½ UE]
5. Präsentation der Gruppenarbeitsergebnisse und deren Diskussion anhand von dynamischen Tabellen (Abschnitt „Termvergleich“ der LU) im Plenum [1 UE]

Kasten 1

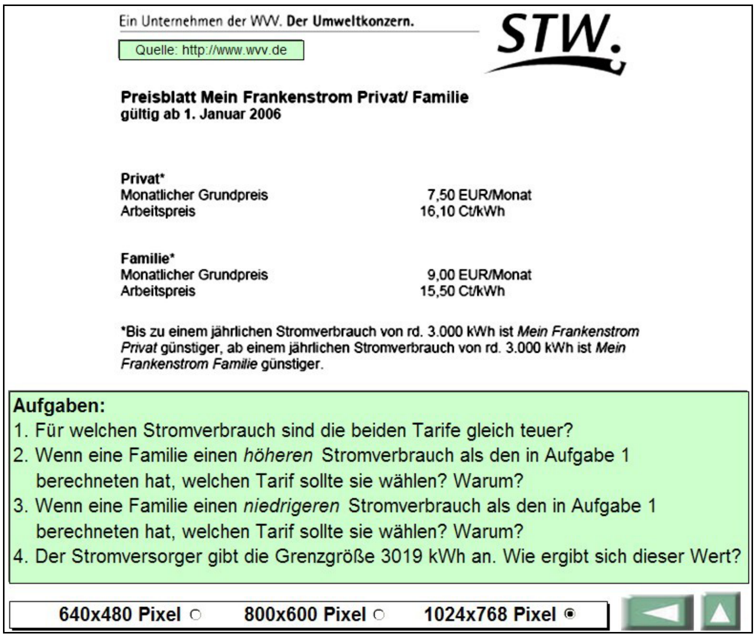
Aufbau der Lernumgebung und der dynamischen Tabellen

Die auf Excel basierende Lernumgebung bildet die Grundlage für eine aus fünf Phasen bestehende Unterrichtssequenz (vgl. **Kasten 1**). **Abb. 1** zeigt die Einstiegsseite mit einem Verweis zu den Programminformationen. Hier finden Lehrkräfte Hinweise zum Einsatz des Programms im Unterricht und Schüler eine Anleitung zum Arbeiten mit der Lernumgebung.

Abb. 1: Terme *dynamisch* Titelblatt

„Stromtarife“: Einführung in das Phänomen des Änderungsverhaltens

Da sich die Schüler hier in der Regel zum ersten Mal bewusst mit dem Änderungsverhalten von Termen auseinandersetzen, wird diese Thematik mit einer Problemstellung aus dem Alltag, der Auswahl eines Stromtarifs, aufgegriffen. Dies hat den Vorteil, dass die Änderung (das Wachstum) der Stromkosten (K) hier der „Arbeitspreis“ (AP) ist, also eine anschaulich interpretierbare Größe.


Ein Unternehmen der WVV. Der Umweltkonzern.
Quelle: http://www.wvv.de
STW.

Preisblatt Mein Frankenstrom Privat/ Familie
gültig ab 1. Januar 2006

Privat*
Monatlicher Grundpreis 7,50 EUR/Monat
Arbeitspreis 16,10 Ct/kWh

Familie*
Monatlicher Grundpreis 9,00 EUR/Monat
Arbeitspreis 15,50 Ct/kWh

*Bis zu einem jährlichen Stromverbrauch von rd. 3.000 kWh ist *Mein Frankenstrom Privat* günstiger, ab einem jährlichen Stromverbrauch von rd. 3.000 kWh ist *Mein Frankenstrom Familie* günstiger.

Aufgaben:
1. Für welchen Stromverbrauch sind die beiden Tarife gleich teuer?
2. Wenn eine Familie einen *höheren* Stromverbrauch als den in Aufgabe 1 berechneten hat, welchen Tarif sollte sie wählen? Warum?
3. Wenn eine Familie einen *niedrigeren* Stromverbrauch als den in Aufgabe 1 berechneten hat, welchen Tarif sollte sie wählen? Warum?
4. Der Stromversorger gibt die Grenzgröße 3019 kWh an. Wie ergibt sich dieser Wert?

640x480 Pixel 800x600 Pixel 1024x768 Pixel

Abb. 2: „Stromtarif“: Aufgabenblatt

Abhängig von den Vorerfahrungen der Schüler wird der Arbeitsauftrag aus **Abb. 2** in Partnerarbeit gelöst oder im Unterrichtsgespräch erarbeitet.

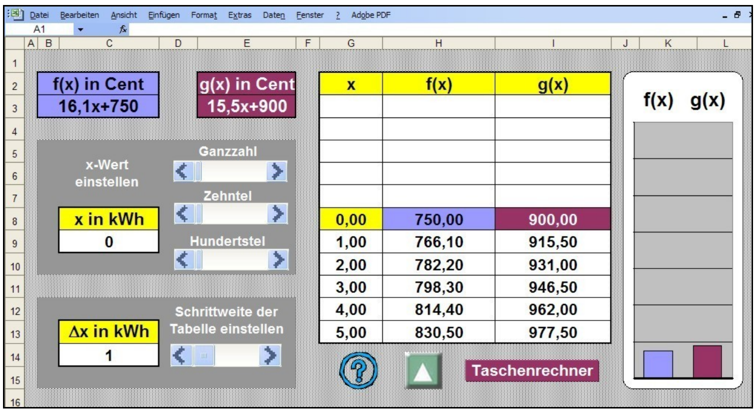


Abb. 3: „Stromtarif“: Dynamisches Tabellenblatt

Die beiden Tarife „Privat“ und „Familie“ unterscheiden sich im verbrauchsunabhängigen Grundpreis (GP), der beim „Privattarif“ kleiner ist als beim „Familientarif“, und im Arbeitspreis, d. h. im Preiszuwachs pro „verbrauchte“ Kilowattstunde elektrischer Energie.

In beiden Tarifen steigt der monatlich zu zahlende Betrag mit dem „Stromverbrauch“ an, beim „Privattarif“ wird er allerdings schneller größer als beim „Familientarif“. (K_{Privat} nimmt pro Kilowattstunde um 16,10 Cent zu und K_{Familie} um 15,50 Cent.) Da beide bei gleichmäßig wachsendem Stromverbrauch gleichmäßig wachsen, muss es einen Stromverbrauch geben, für den beide Tarife genau gleich teuer sind. **Abb. 4** zeigt, dass dies bei einem Stromverbrauch von 250 kWh im Monat der Fall ist. Da der „Privattarif“ bei steigendem Stromverbrauch schneller wächst als der „Familientarif“, ist der „Privattarif“ für jeden Verbrauch über 250 kWh im Monat teurer als der „Familientarif“. Eine Familie, deren Stromverbrauch größer als 250 kWh im Monat ist sollte also den Familientarif wählen! Entsprechend lässt sich für einen monatlichen Stromverbrauch unter 250 kWh argumentieren. (Anmerkung: Die in Abb. 4 zusammengefasste Lösung entspricht inhaltlich genau dem Lösungsverfahren durch Äquivalenzumformung der Gleichung $K_{\text{Privat}}(x) = K_{\text{Familie}}(x)$. Diese Überlegungen können Schülerinnen und Schülern also auch helfen, ein inhaltliches Verständnis für Äquivalenzumformungen bei linearen Gleichungen zu entwickeln.)

x: Stromverbrauch in kWh K(x): Monatliche verbrauchsabhängige Kosten in Cent
$K_{\text{Privat}}(x) = \overbrace{750}^{\text{GP}} + \overbrace{16{,}10 \cdot x}^{\text{AP}}$ $K_{\text{Familie}}(x) = \underbrace{900}_{\text{GP}} + \underbrace{15{,}50 \cdot x}_{\text{AP}}$
$K_{\text{Privat}}(0) = 750 < 900 = K_{\text{Familie}}(0)$
Grundpreisdifferenz: 900 – 750 = 150
„Wachstumsdifferenz“ pro kWh: $16{,}10 - 15{,}50 = 0{,}60 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
Anzahl der kWh bis zum Ausgleich der Grundpreisdifferenz: $150 : \frac{3}{5} = \frac{150}{3} \cdot 5 = 50 \cdot 5 = 250$

Abb. 4: Mögliche Erarbeitungsschritte

Im Anschluss an diese Erarbeitungsphase werden die Ergebnisse im Unterrichtsgespräch anhand einer dynamischen Tabelle (vgl. **Abb. 3**) überprüft und vertieft. Dabei wird auch der Umgang mit den dynamischen Tabellen erläutert.

Aufbau und Handhabung der dynamischen Tabellen

Tabellen sind ein geeignetes Hilfsmittel, um Erfahrungen mit dem Änderungsverhalten von Termen zu erwerben und es zu analysieren. Dies gilt insbesondere dann, wenn der x-Wert wirklich dynamisch verändert und dabei gleichzeitig die Änderung des Termwertes erfasst werden kann. Derartige Tabellenblätter bilden deshalb auch den zentralen Bestandteil der Lernumgebung „Terme *dynamisch*“ (vgl. **Abb. 5**). Oben links steht jeweils der Term, der untersucht wird, um den Zusammenhang zwischen dem Änderungsverhalten und dem Term immer im Blick zu behalten. Darunter wird der ak-

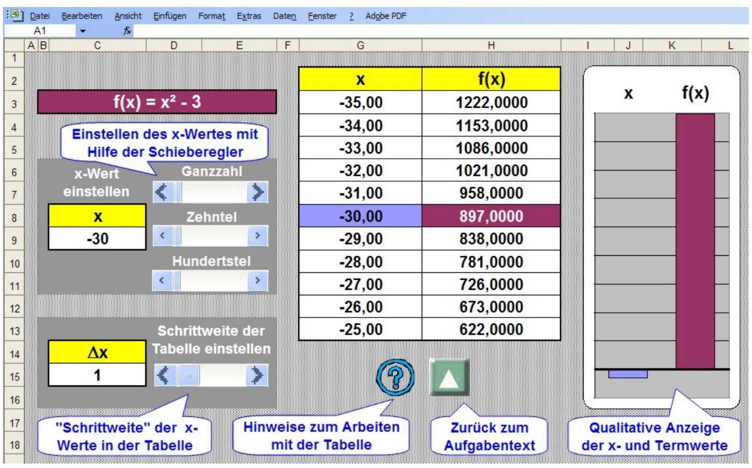


Abb. 5: Termänderung: Beispiel einer dynamischen Tabelle mit Bedienungshinweisen

tuelle x-Wert ausgegeben und daneben befinden sich drei Schieberegler, mit denen der x-Wert in Schritten von eins bzw. einem Zehntel oder einem Hundertstel variiert werden kann. Auf diese Weise ist es möglich, die jeweils sinnvolle bzw. notwendige Genauigkeit der Variation selbst zu bestimmen. In der Mitte des Tabellenblatts befindet sich eine Tabelle, in der nebeneinander die x-Werte und deren zugehörige Termwerte ausgegeben werden. Der links mit den Schiebereglern eingestellte x-Wert und der zugehörige Termwert sind in der Mitte der Tabelle dunkel gekennzeichnet. Darüber und darunter befinden sich jeweils fünf weitere Tabelleneinträge, die sich bei Veränderung des aktuellen x-Wertes entsprechend mit verändern. Die Schrittweite der Einträge für die x-Werte in dieser Tabelle kann über den Δx-Schieberegler (in **Abb. 5** links unten) je nach Bedarf auf eins, ein Zehntel oder ein Hundertstel eingestellt werden. Entsprechend werden die x-Werte in der Tabelle in Einser-, Zehntel- oder Hundertstelabständen ausgegeben. Auf der rechten Seite befindet sich ein dynamisches Balkendiagramm an dem man den aktuellen x- und Termwert sowie insbesondere bei der Variation des x-Wertes das Änderungsverhalten von x- und Termwert qualitativ erfassen kann. Unterrichtsversuche haben gezeigt, dass es Schülerinnen und Schüler gibt, die sich zunächst am dynamischen Balkendiagramm orientieren um einen qualitativen Eindruck vom Änderungsverhalten zu bekommen und erst für Detailanalysen die Tabelle zu Rate ziehen. Daneben gibt es aber auch Schülerinnen und Schüler die fast ausschließlich mit der Tabelle arbeiten. Unabhängig von persönlichen Vorlieben lernen die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise aber mit Tabellen umzugehen und aus ihnen mehr abzulesen als den jeweils zu einem x-Wert gehörigen Termwert.

Partnerarbeit am Computer

Auf der Grundlage dieser Einführungsstunde arbeiten die Schülerinnen und Schüler in den nächsten zwei bis drei Unterrichtsstunden in Partnerarbeit mit der Lernumgebung „Terme dynamisch“ am Computer. Im Abschnitt „Termänderung“ befassen sie sich mit dem Änderungsverhalten von linearen und einfachen quadratischen Termen. Sie können mit Hilfe von "Schiebereglern" den x-Wert variieren und an Hand der dynamischen Tabellen und Balkendiagramme die Auswirkungen auf den Termwert studieren. Wichtig ist, dass sie nicht nur mechanisch „Regler verstellen" oder "mit der Maus ziehen“, sondern sich gedanklich mit den entstehenden Veränderungen auseinandersetzen. Diese aktive gedankliche Auseinandersetzung wird

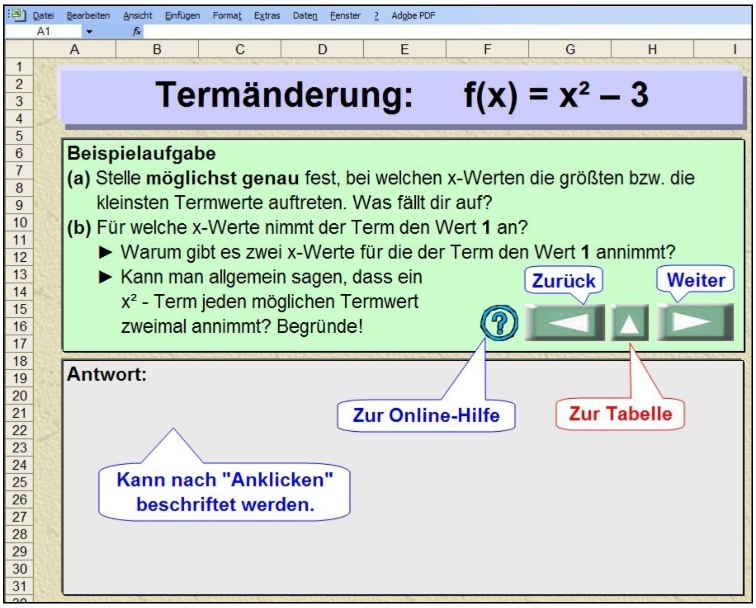
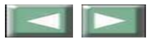


Abb. 6: Termänderung: Beispielseite mit Arbeitsaufträgen und Bedienungshinweisen

Dr. Jürgen Roth | Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg | ☎ (0931) 888 5598
http://juergen-roth.de | Am Hubland, 97074 Würzburg | ✉ mail@juergen-roth.de

dadurch unterstützt, dass schriftliche Vorhersagen, Begründungen und Problemlösungen sowie deren Diskussion mit dem Banknachbarn eingefordert werden. Dabei erzielte Vorhersagen und Ergebnisse werden direkt auf dem Bildschirm in dafür vorgesehene Eingabefenster geschrieben. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler ihre Bearbeitung zusammen mit den dynamischen Tabellen abspeichern und so jederzeit kontrollieren, nacharbeiten, wiederholen oder verbessern.

Abb. 6 zeigt eine kommentierte Bildschirmkopie einer Beispielaufgabe. Im Kopfbereich ist jeweils der Term angegeben, der aktuell untersucht und diskutiert wird. Zu jedem Term gibt es eine ganze Aufgabenserie, durch die man mit den Knöpfen  navigieren kann. Bei jeder Aufgabe der Serie ist der Aufgabentext in einen grünen Kasten gesetzt, während die von den Schülerinnen und Schülern auszufüllenden Antwortkästen darunter grau hinterlegt sind. Von diesen kombinierten Aufgaben- und Bearbeitungsblättern abgesetzt, sind die oben vorgestellten dynamischen Tabellenblätter, die über einen eigenen Knopf  aufgerufen werden können. Auch dies soll zu einer vertieften Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit den Aufgaben und den zugrunde liegenden Termen beitragen.

Mit Hilfe von gestuften Arbeitsaufträgen (vgl. **Kasten 2**) werden die Schülerinnen und Schüler an das Änderungsverhalten von linearen Termen herangeführt. Beginnend mit reinen Beobachtungs- und Beschreibungsaufgaben an den dynamischen Tabellen, die hier als „Forschungsinstrument" dienen, werden dann Begründungen der Beobachtungen anhand des Terms verlangt. Auf diese Erfahrungen aufbauend schließen sich Fragen zur Vorhersage von Extrema des Termwertes in vorgegebenen Intervallen an. An dieser Stelle werden die dynamischen Tabellen als Kontrollinstanz benutzt. Es folgen Fragen zur systematischen Einschachtelung eines vorgegebenen Termwertes mit Hilfe der dynamischen Tabelle (Für welchen x-Wert nimmt der Term den Wert a an?) und schließlich soll eine entsprechende Aufgabe im Kopf anhand der erarbeiteten Kenntnisse über das Änderungsverhalten erschlossen werden. Auf ähnliche Weise werden die Terme $2x$, $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $-3x + 2$ und $x^2 - 3$ untersucht. Anschließend werden mehrere lineare Terme paarweise untersucht und nur noch gefragt, worin ihr Änderungsverhalten sich unterscheidet, bzw. worin es übereinstimmt. Am Ende der selbstständigen Arbeitsphase muss die Frage beantwortet und schriftlich festgehalten werden, wie das Änderungsverhalten eines linearen x-Terms vom Vorfaktor von x abhängt.

Auf ähnliche Weise sammeln die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen mit quadratischen Termen der Form $ax^2 + b$. Ziel ist dabei die Erkenntnis, dass der Termwert sich bei gleichmäßiger Änderung des x-Wertes *nicht* gleichmäßig ändert, sondern sich umso schneller ändert, je größer der Betrag des x-Wertes ist.

Arbeitsaufträge zum Term f(x) = ½ x + ¾

2

1. Aufgabe

Wie verändert sich der Termwert, wenn du nur ganzzahlige x-Werte einsetzt und diese immer größer machst?

- Wird der Termwert immer größer oder immer kleiner?
- Notiere hier das Ergebnis deiner Untersuchungen.
- Sieht man dem Term $f(x)$ an, dass die Änderung so erfolgt, wie du sie beschrieben hast? Woran erkennst du das?

2. Aufgabe

Wie verändert sich der Termwert, wenn du nur ganzzahlige x-Werte einsetzt und diese immer kleiner machst?

- Wird der Termwert immer größer oder immer kleiner?
- Hätte man sich das auch ohne die Tabelle überlegen können? Beschreibe wie!

3. Aufgabe

Der x-Wert wird gleichmäßig vergrößert. Verändert sich der Termwert schneller oder langsamer als der x-Wert?

- Sieht man dem Term $f(x)$ an, dass die Änderung so erfolgt, wie du sie beschrieben hast? Schreibe auf, woran du das erkennst.

4. Aufgabe

Überlege ohne die Tabelle zu benutzen:

- Für welchen x-Wert im Bereich von – 10 bis 10 nimmt $f(x)$ den
  - (a) den größten Termwert an?
  - (b) den kleinsten Termwert an?
- Erkläre deinem Nachbarn wie du dir das überlegt hast.

5. Aufgabe

Überprüfe deine Vorhersage aus Aufgabe 4, indem du in der Tabelle die von dir vorhergesagten x-Werte einstellst.

- War deine Vorhersage richtig?

6. Aufgabe

Für welchen x-Wert nimmt der Term den Wert 5,46 an? Versuche diesen x-Wert möglichst genau herauszufinden. Gehe dazu schrittweise vor.

a) Zwischen welchen benachbarten ganzen Zahlen liegt der gesuchte x-Wert? Schreibe sie auf.
b) Untersuche nun die Lage des gesuchten x-Wertes auf eine Dezimale genau und schreibe dein Ergebnis auf.
c) Stelle jetzt die Lage des gesuchten x-Wertes auf zwei Dezimalen genau fest und schreibe dein Ergebnis auf.

7. Aufgabe

Überlege ohne die Tabelle zu benutzen:

Für welchen ungefähren x-Wert nimmt der Term den Wert – 4 an?

- Überlege dir dies an Hand des Änderungsverhaltens des Terms.
- Schreibe deine Vorhersage auf. Notiere auch, wie du dir das überlegt hast.
- Überprüfe deine Vorhersage schrittweise mit der Tabelle.
- Schreibe alle Zwischenschritte und das Ergebnis in den Kasten.

Kasten 2: Aufgabenbeispiele aus der Lernumgebung

Gruppenarbeit „Termvergleich“

Nach der Partnerarbeitsphase werden die gewonnenen Ergebnisse im Unterrichtsgespräch zusammengetragen und diskutiert. Anschließend nutzen die Schülerinnen und Schüler ihre zum Änderungsverhalten von linearen und einfachen quadratischen Termen gewonnenen Erfahrungen, um in Gruppenarbeit zu einer Gleichung des Typs $x^2 = x + 100$ die Lösungen möglichst genau zu bestimmen. Als Hilfsmittel dürfen dabei nur Papier und Bleistift verwendet werden. Die Ergebnisse werden anschließend im Plenum vorgestellt und anhand von dynamischen Tabellen wie der in **Abb. 6** überprüft und vertieft

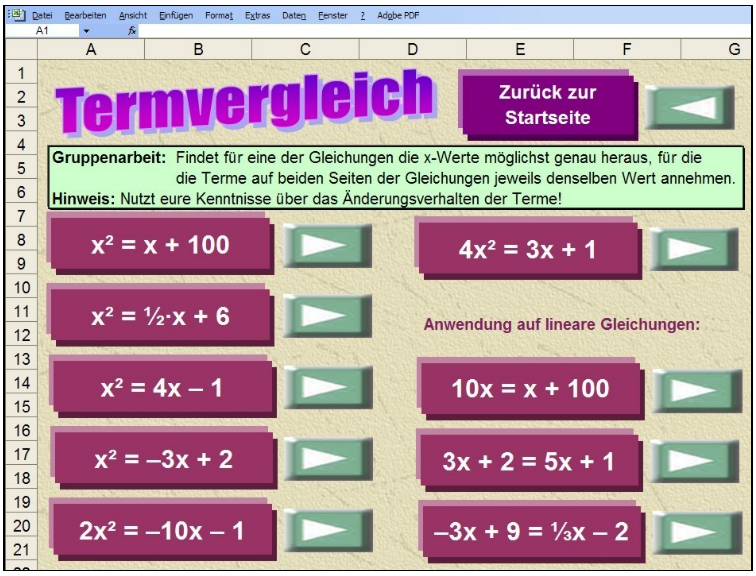


Abb. 7: Termvergleich: Arbeitsauftrag und Gleichungen

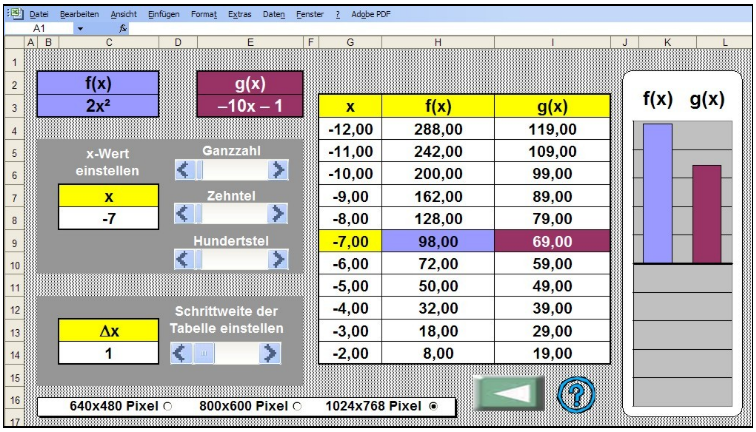


Abb. 8: Termvergleich: Beispiel einer dynamischen Tabelle

Vielseitigkeit der Tabellenkalkulationsprogramme

Die Artikel dieses Hefts zeigen, dass Tabellenkalkulationsprogramme im Mathematikunterricht für ein weites Spektrum mathematischer Inhalte einsetzbar sind. Anhand der hier vorgestellten Lernumgebung „Terme *dynamisch*“ wird deutlich, dass ein Tabellenkalkulationsprogramm darüber hinaus auch methodisch in vielfältiger Weise eingesetzt werden kann. Es dient als

- Demonstrationsmedium,
- Lernumgebung zum Entdecken von Zusammenhängen,
- Kontrollinstanz für Vorhersagen und
- Mittel zur Vertiefung der Ergebnisse einer Gruppenarbeitsphase mit Papier und Bleistift.

Das Programm-Paket „Terme *dynamisch*“ kann mit allen notwendigen Unterrichtsmaterialien unter der Adresse http://www.juergen-roth.de/terme heruntergeladen werden.

Literatur:

Bürger, H.: Funktionale Zusammenhänge. – In: Mathematik lehren, Heft 75, April 1996, S. 14-18
Malle, G.: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1993
Monk, Steve: Students’ Understanding of a Function Given by a Physical Model. In: Dubinsky, Ed; Harel, Guershon (Eds.): The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 25, 1992, p. 175-193

Ossimitz, Günther: Entwicklung systemischen Denkens. Theoretische Konzepte und empirische Untersuchungen. In: Kaiser, Gabriele (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 468-471

Sweeney, Linda Booth; Sterman, John D.: Bathtub dynamics: initial results of a systems thinking inventory. In: System Dynamics Review, Vol. 16 No. 4 (Winter 2000), S. 249-286

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Wolters Kluwer Deutschland, München, 2004

Vollrath, H.-J.: Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin 2003