Jürgen Roth

Wie parkt man richtig ein?

Einparken am Straßenrand ist häufig nicht nur für Führerscheinneulinge eine echte Herausforderung. Gerade deshalb sind die meisten Schülerinnen und Schüler erfahrungsgemäß spätestens ab der 10. Klasse (also in „Sichtweite" ihrer eigenen Fahrstunden) intrinsisch motiviert, sich mit dieser Thematik auseinanderzusetzen. Kann ein Projekt zum Thema „Wie parkt man am Straßenrand ‚richtig' ein?" aber auch gewinnbringend für den Mathematikunterricht sein? Betrachtet man die verschiedenen Aspekte, die bei der Bearbeitung eine Rolle spielen, so fällt eine Antwort auf diese Frage nicht schwer: Ein Sachproblem des Alltags muss mathematisiert, d. h. mathematisch modelliert werden, wobei geometrische Grundkenntnisse, der Satz des Pythagoras und die Winkelfunktionen zum Einsatz kommen. Zusätzlich müssen Gleichungen aufgestellt und gelöst werden. Schülerinnen und Schülern ab der 10. Klasse bietet das Projekt also die Möglichkeit Kenntnisse und Fähigkeiten, die sie im Mathematikunterricht erworben haben, in einem realen Kontext reflektierend anzuwenden und zu üben. Nebenbei können die Schülerinnen und Schüler dabei die Alltagsrelevanz von Mathematik hautnah erleben.

Zur Klärung der Frage „Wie parkt man am Straßenrand ‚richtig' ein?" kann man Erfahrungen aus dem Alltag einbringen, mit Modellen experimentieren und Daten sammeln. Auf dieser Basis lässt sich der Einparkvorgang von ganz verschiedenen Seiten beleuchten und schließlich mathematisch modellieren. Dabei kann es hilfreich sein, den Vorgang mit Hilfe eines dynamischen Geometriesystems (DGS) zu simulieren. Ein DGS ermöglicht einerseits eine interaktiv-experimentelle Auseinandersetzung mit dem Problem (z. B. durch gezielte Variation der Einflussgrößen), andererseits lassen sich damit die Ortslinien verschiedener Punkte des Autos in der Simulation aufzeichnen und anschließend interpretieren. Konkrete, aus der mathematischen Modellierung gewonnene Ergebnisse können sowohl mit Hilfe der dynamischen Simulation, als auch mit realen Autos überprüft werden. Das Thema erlaubt eine gewinnbringende Verzahnung von Alltagswissen, mathematischem Fachwissen und experimentellem Arbeiten.

Dadurch wird insbesondere eine problemorientierte und arbeitsteilige Projektarbeit ermöglicht, die alle bei Ludwig (2001) genannten wesentlichen Merkmale und Prozesse eines Projekts umfasst (vgl. Abb. 1). Ausgangspunkt ist eine offene Frage, die verschiedene Lösungsansätze erlaubt und von Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeitet werden kann. Dazu ist einerseits Kreativität erforderlich und andererseits ermöglicht die Fragestellung den Schülerinnen und Schülern ihren Spieltrieb auszuleben. Schließlich mündet das Projekt in ein Produkt. Im vorliegenden Fall ist dies insbesondere ein Programm, das nach Eingabe der Fahrzeug- und Parklückendaten alle Parameter eines „optimalen" Einparkvorgangs liefert.

Abb. 1: Projektarbeit

Das Projekt lässt sich ab der 10. Jahrgangsstufe durchführen. Konkret erprobt wurde es mit einer Gruppe von sieben Schülerinnen und Schülern der 11. und 12. Jahrgangsstufe (vgl. Abb. 2) im Rahmen der Schüler-Projekttage Mathematik am Institut für Mathematik der Universität Würzburg. Den Abschluss der Projekttage bildet eine öffentliche Präsentation der Ergebnisse durch die Schülerinnen und Schüler. Darüber hinaus verfasst jede Projektgruppe einen schriftlichen Projektbericht, in dem Prozesse und Ergebnisse der Projektarbeit festgehalten werden. Auf diese Weise ist immer ein Produkt als Ziel vor Augen.

Abb. 2: Projektgruppe „Einparken“ (2006)

Im Folgenden werden Organisation, Durchführung und Ergebnisse des Projektdurchlaufs anhand der stattfindenden Prozesse dargestellt.

Zielsetzung

Im Verlauf der Projektarbeit haben die Schülerinnen und Schüler die Prozesse der Zielsetzung und Planung mehrfach durchlaufen. Zunächst wurden in einem Brainstorming verschiedenste Aspekte zum Einparken zusammengetragen (vgl. Abb. 3). Man kann in Abhängigkeit von der Parklücke z. B. quer, senkrecht oder parallel zur Fahrtrichtung und vorwärts oder rückwärts einparken. Aus Rücksicht auf den fließenden Verkehr sollte der Einparkvorgang nicht zu lange dauern. Es darf kein anderes Auto, keine Hauswand und dergleichen berührt werden. Mit dem letztgenannten Aspekt sind die Fragen aufgeworfen, welche Mindestabstände man zu Hindernissen einhalten und wie lang die Parklücke mindestens sein muss, damit erfolgreiches Einparken überhaupt möglich ist. Den Schülerinnen und Schülern war wichtig zu überprüfen, wie gut die Tipps sind, die man von Fahrlehrern zum Einparkvorgang erhält. Interessant kann daneben auch die Frage sein, entlang welcher Kurve man beim Einparken fährt …

Abb. 3: Ergebnisse des Brainstormings

Am Ende des Brainstormings haben sich die Schülerinnen und Schüler sehr schnell dafür entschieden, das am schwierigsten erscheinende parallele Einparken am Straßenrand und die Fahrschulmethode genauer zu untersuchen. Damit war die offene Frage „Wie parkt man am Straßenrand ‚richtig‘ ein?“ konkretisiert und ein Ziel abgesteckt. Es soll der von vielen Fahrlehrern für das parallele Einparken am Straßenrand vermittelte „Einparkalgorithmus“ untersucht werden, der in etwa wie folgt formuliert wird: Eine geeignete Startposition wählen, das Lenkrad voll nach rechts einschlagen, bis zu einem bestimmten Punkt rückwärts fahren, stehen bleiben, im Stand vollständig gegenlenken und dann weiter fahren, bis man in der Parklücke steht. Versucht man diesen „Einparkalgorithmus“ abzuarbeiten, dann stellen sich eine ganze Reihe von Anschlussfragen: Wie lang muss die Parklücke für mein Fahrzeug mindestens sein? Wo genau sollte ich zu Beginn des Einparkvorgangs stehen? Wann bzw. wo muss ich gegenlenken?

Planung

Nachdem damit das Ziel etwas genauer abgesteckt war, musste geklärt werden, welche Teilprojektgruppen gemäß der notwendigen Arbeitsschritte zu bilden sind. Man hat sich darauf geeinigt, zunächst zwei Teilgruppen zu bilden, nämlich die Gruppe „Daten“, die Abmessungen von Autos und Parkplätzen beschaffen sollte und die Gruppe „Bobby-Car“, die mit einem Modellauto den Einparkvorgang gemäß Fahrschulregel experimentell genauer untersuchen sollte. Die Idee dabei war, dass immer dann, wenn eine Gruppe Ergebnisse erreicht hatte oder Diskussionsbedarf bestand, ein Plenum einberufen wurde. Dies geschah zum ersten Mal, als fast zeitgleich die Gruppe „Daten“ ihre Ergebnisse präsentieren wollte und die Gruppe „Bobby-Car“ Schwierigkeiten mit der Interpretation von experimentell erhaltenen Ortslinien hatte. Nach längeren Diskussionen und ersten Ergebnissen wurde beschlossen in drei (neuen) Gruppen weiterzuarbeiten. Die Gruppe „Bobby-Car“ überprüfte die theoretischen Überlegungen experimentell, während die neu gebildete Gruppe „DGS“ den Einparkvorgang mit der dynamischen Geometriesoftware EUKLID DynaGeo auf der Grundlage des entwickelten Modells dynamisch-geometrisch simulierte. Parallel dazu hat die Gruppe „Video“ reale Einparkvorgänge von Autos aufgezeichnet und analysiert. Auf diese Weise wurden nach und nach insgesamt acht Projektteilgruppen gebildet (vgl. Abb. 4). Die Ausführung erfolgte in Kleingruppenarbeit (je zwei bis vier Schülerinnen und Schüler) teilweise gleichzeitig aber auch nacheinander. In von einzelnen Teilgruppen nach Bedarf initiierten Treffen im Plenum, wurden die Ergebnisse und Probleme der Gruppen vorgestellt, diskutiert und bei Bedarf neue Teilprojektgruppen gebildet, andere neu besetzt, personell verstärkt, reduziert oder ganz aufgelöst. Zwei Schüler erhielten den Auftrag, parallel zu ihrer Teilgruppenarbeit, die im Plenum dargestellten Teilgruppenergebnisse und durchgeführten Diskussionen sowie Erarbeitungsschritte zu protokollieren. Diese Mitschriften bildeten später die Grundlage für die Teilgruppe „Projektbericht“.

Abb. 4: Projektgruppen

Ausführung und Ergebnisse

Die Gruppe „**Daten**“ hat relevante Größen an realen Parkplätzen und Autos vermessen, im Internet sowie in Kraftfahrzeugscheinen recherchiert und Wendekreisradien, die nur schwer in Erfahrung zu bringen sind, experimentell bestimmt. Der Wendekreis ist der Kreis mit dem kleinsten Radius, den ein Fahrzeug noch fahren kann. Fährt man bei voll eingeschlagenem Lenkrad einen Linkskreis, dann ist der Wendekreisradius der Radius des Kreises, den die vordere rechte Ecke des Autos beschreibt (vgl. Abb. 5). Dieser Kreis lässt sich über Kreidemarkierungen auf einem Asphaltplatz experimentell gut bestimmen und vermessen.

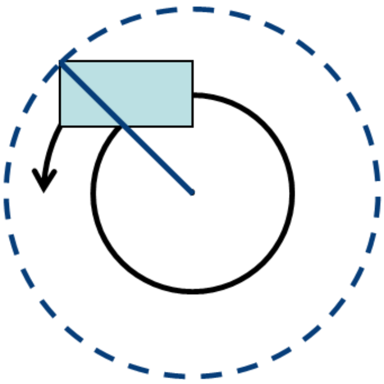
Abb. 5: Wendekreisradius

In der Gruppe „**Bobby-Car**“ wurde an einem Realmodell der Einparkvorgang experimentell untersucht. Interessanterweise haben die Schülerinnen und Schüler ohne zu zögern das Bobby-Car als Realmodell gewählt, obwohl auch ein ferngesteuertes Auto und ein lenkbarer Traktor im Maßstab 1:36 zur Verfügung stand. Offenbar spielt die Größe des Modells eine nicht zu unterschätzende Rolle.

Mit Hilfe von angeklebten Stiften wurden Ortslinien verschiedener Punkte des Modells beim Einparkvorgang aufgezeichnet (vgl. Abb. 6), die die Schülerinnen und Schüler zunächst nicht interpretieren konnten (vgl. Abb. 7). Erst in der gemeinsamen Diskussion im Plenum kam die Idee auf, nur voll in eine Richtung einzuschlagen und rückwärts ohne gegenzulenken zu fahren. Dies führt zu einer Kreisbewegung des Bobby-Cars, bei der eine der vorderen Ecken des Autos den Wendekreis durchläuft. Auf der Grundlage dieser Überlegung wurde die Vermutung aufgestellt, dass sich die Ortslinien jeweils aus zwei Kreisbogenstücken zusammensetzen. Dieser Denkvorgang erfordert eine Idealisierung der gesammelten Erfahrungen, weil die mit dem Bobby-Car als Realmodell aufgezeichneten Ortslinien nicht sofort als Kreisbogenstücke erkennbar sind (vgl. Abb. 7). Darüber hinaus ist den Schülerinnen und Schülern aufgefallen, dass sich für Punkte am Heck des Bobby-Cars „glatte“ Kurven ergeben, während die Ortslinien für Punkte an der Front des Bobby-Cars „Knicke“ haben (vgl. Abb. 8).

Abb. 6: Ortslinien aufzeichnen

Abb. 7: Ortslinien interpretieren

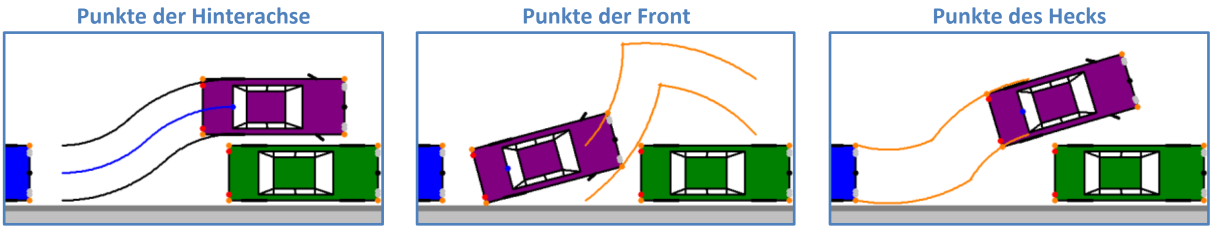

Abb. 8: Ortslinien für verschiedene Punkte des Autos beim parallel Einparken nach Fahrschulregel

Woran kann das liegen? Durch systematisches Variieren der Einflussgrößen (wie etwa der Fahrzeugabmessungen, der Startposition oder dem „Zeitpunkt“ des Gegenlenkens) können wesentliche Ideen gewonnen werden, die zu einer geometrischen Modellierung des Vorgangs führen. In Abb. 9 wurde das Auto auf seine Hinterachse reduziert und damit eine weitere Idealisierung vorgenommen. Daran lässt sich ablesen, dass für das parallele Einparken, bei dem die Anfangs- und Endposition des Autos parallel zueinander sind, die beiden durchfahrenen Kreisbogenstücke gleich lang sein müssen, also den gleichen Mittelpunktswinkel besitzen müssen. Darüber hinaus muss sich der Mittelpunkt der jeweils konzentrischen Kreise auf der Verlängerung der (nicht lenkbaren) Hinterachse befinden.

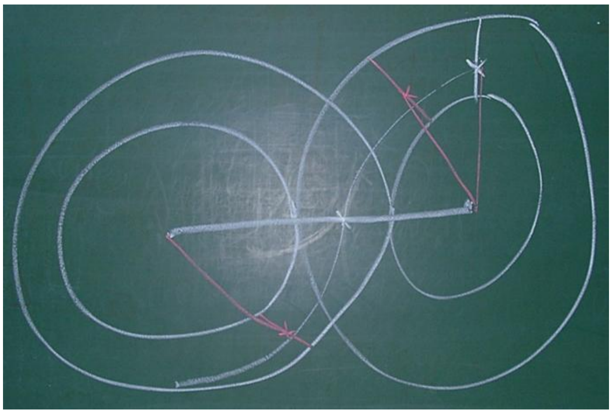

Abb. 9: Idealsierung der gewonnenen Erfahrungen

Diese Erkenntnisse reichten zwei Schülerinnen der Projektgruppe „**DGS**“ aus, um mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware das Problem (bzw. dessen Modellierung) dynamisch-geometrisch zu simulieren (vgl. Abb. 10). Der große Vorteil einer solchen dynamisch-geometrischen Simulation ist, dass man damit noch besser als mit Realmodellen geometrisch experimentieren kann. Die systematische Variation ist damit erheblich einfacher zu bewerkstelligen als mit dem Realmodell und auch die Ergebnisse der Variation sind – etwa in Form von Ortslinien – leichter zu überblicken. Auf diese Weise wird eine noch genauere Analyse des Einparkvorgangs möglich.

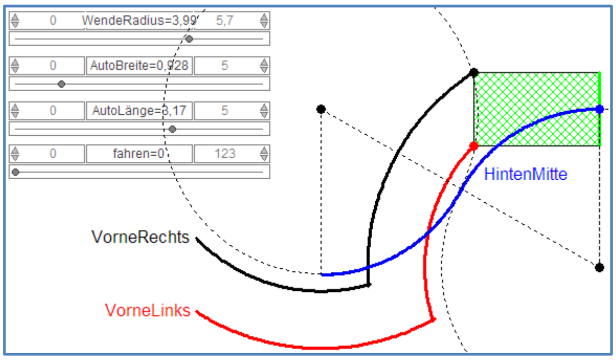

Abb. 10: DGS-Modell von Schülerinnen mit Ortslinien

Die Bildserie in Abb. 11 zeigt etwa die Auswirkung der Variation des Abstandes der Front des Autos von der Hinterachse auf die Ortslinien. Dabei wird deutlich, dass nur Punkte auf der Hinterachse eine differenzierbare Ortslinie besitzen, also „knickfrei“ sind. Den Hintergrund dieser Tatsache kann man erschließen, wenn man, wie in Abb. 12 geschehen, Hilfslinien einzeichnet. Nur für Punkte auf der Hinterachse berühren sich die beiden an der Ortslinie beteiligten Kreise um M_1 bzw. M_2. Für alle anderen Punkte schneiden sie sich.

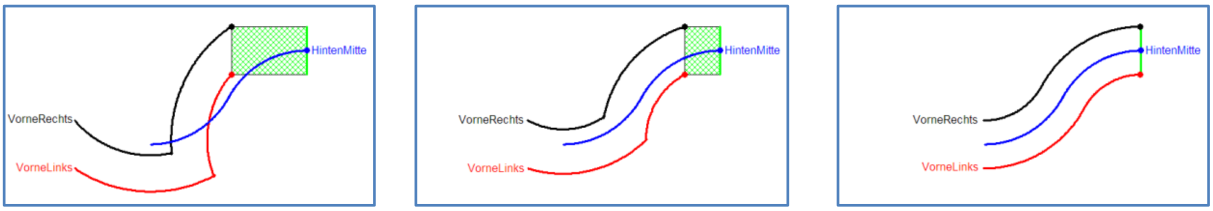

Abb. 11: Variation des Abstandes „Front↔Hinterachse“ – Analoges ergibt sich für den Abstand „Hinterachse↔Heck“

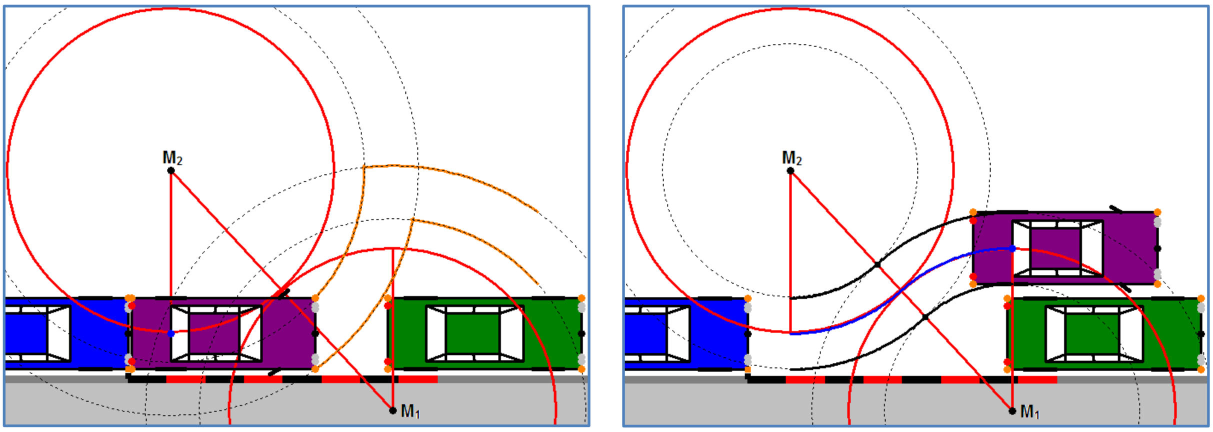

Abb. 12: Hilfslinien zur Verdeutlichung der Entstehung der „Knicke“ in den Ortslinien

Die Projektgruppe „**Video**“ hat die Tragfähigkeit des Modells durch Videoaufzeichnungen eines realen Einparkvorgangs getestet. Dazu wurde der Einparkvorgang (fast) senkrecht von oben aufgezeichnet. Dies gelang, indem aus einem dritten Stockwerk eines Hauses ein möglichst nahe an der Hausmauer einparkendes Auto gefilmt wurde. Mit einer geeigneten Videoanalysesoftware (Suleder, 2003) lassen sich Bewegungsbahnen in Videoclips automatisch markieren, analysieren, die gemessenen Punktkoordinaten bei Bedarf im Excel-Format exportieren und dort weiterverarbeiten (vgl. Abb. 13).[1] Den Schülerinnen und Schülern hat es aber gereicht, die per Videoanalyse erhaltenen Ortslinien visuell (vgl. Abb. 14) mit dem Modell zu vergleichen.

[1] Mittlerweile liegt vom selben Autor eine ausgereifte Version dieser Software zur automatischen Videoanalyse von Bewegungen unter dem Namen „measure Dynamics“ vor, die noch mehr Möglichkeiten bietet. Informationen dazu findet man im Internet unter http://www.phywe.de/framenav.php?nav1=60&nav2=7&cscol=son&ref=nav (Abgerufen: 04.09.2007).

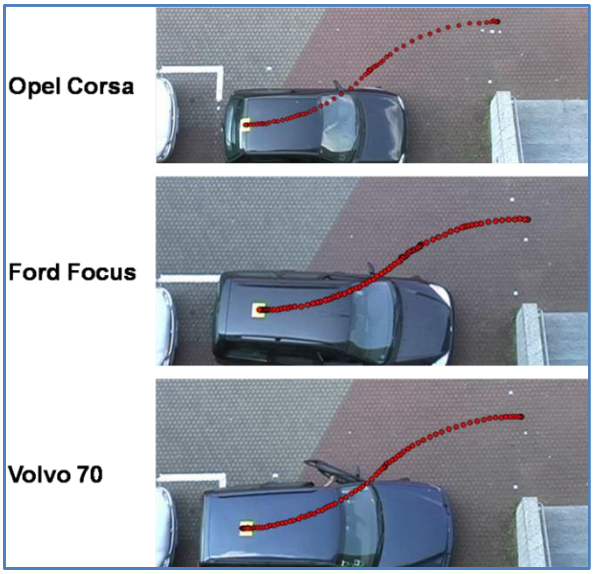

Abb. 13: Videoanalyse von Einparkvorgängen

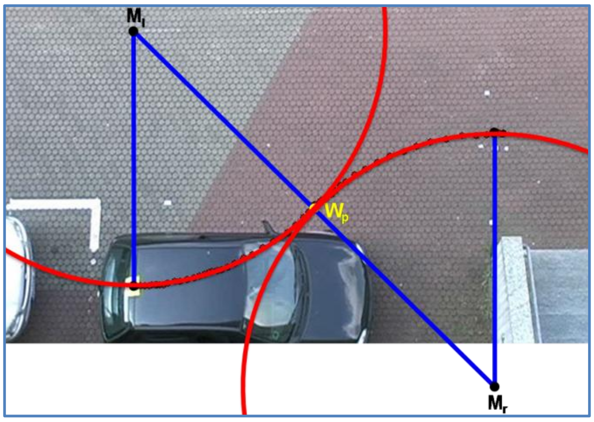

Abb. 14: Vergleich der Videoanalyse mit dem Modell

Die Projektgruppe „**Formalisierung**“ war dafür zuständig, auf Grund der gewonnenen Ergebnisse Gleichungen aufzustellen und zu lösen. Sie sollte auf diese Weise aus gegebenen Fahrzeug- und Parklückendaten für den Einparkvorgang relevante Größen ermitteln. Dazu mussten die Schülerinnen und Schüler auf die Erkenntnisse der anderen Projektteilgruppen zurückgreifen. Anhand der Tatsache, dass die mit dem Bobby-Car aufgezeichneten Ortslinien von einigen Schülerinnen und Schülern zunächst für Sinuskurven gehalten wurden, werden die Probleme deutlich die bei der Modellierung des Einparkvorgangs auftreten und die aus der Perspektive der vorliegenden Ergebnisse gar nicht mehr erkennbar sind. Als ganz entscheidend bei der Erarbeitung hat sich die heuristische Strategie der Idealisierung herausgestellt. Die Reduzierung des Autos auf einen Punkt hat bei der Erkenntnis geholfen, dass es wohl nur einen Punkt gibt, bei dem sich die Ortslinie aus zwei Kreisbogenstücken zusammensetzt, die denselben Radius besitzen. Die Reduzierung des Autos auf die Hinterachse (Beobachtung einer Kreisbewegung eines Lineals und später Variation der Längenausdehnung des Autos in der dynamisch-geometrischen Simulation) hat die Einsicht ermöglicht, dass der Mittelpunkt der Wendekreise immer auf der Verlängerung der Hinterachse liegt. Auf diese Weise wurde der Mittelpunkt der Hinterachse als ausgezeichneter Punkt beim Einparkvorgang ermittelt (vgl. Abb. 12).

Damit war die Grundlage gelegt, um anhand von ***bekannten bzw. messbaren Größen*** (vgl. Abb. 15), wie

- Breite B des Autos
- Länge L des Autos
- Abstand Hinterachse-Front l
- Wendekreisradius R
- seitlicher Sicherheitsabstand s zu Beginn des Einparkvorgangs

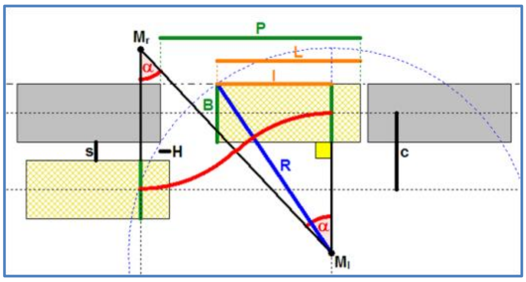

Abb. 15: Relevante Größen

für den Einparkvorgang benötigte Kenngrößen wie z. B. die folgenden zu bestimmen:

- Mindestlänge P der Parklücke
- Mittelpunktswinkel α
- Abstand H zwischen dem Heck des einparkenden und dem Heck des vor der Parklücke stehenden Autos zu Beginn des Einparkvorgangs

Unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras und grundlegender Kenntnisse über trigonometrische Funktionen lassen sich anhand der Abb. 16, Abb. 17 und Abb. 18 die in Abb. 19 dargestellten exemplarischen Ergebnisse der Projektgruppe „Formalisierung“ nachvollziehen.

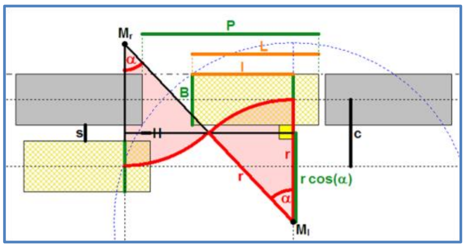

Abb. 16: Erarbeitungshilfe 1

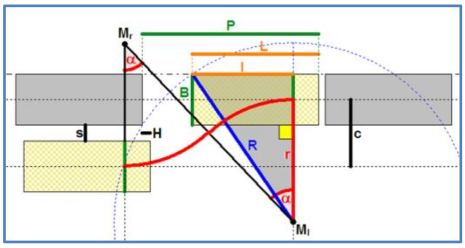

Abb. 17: Erarbeitungshilfe 2

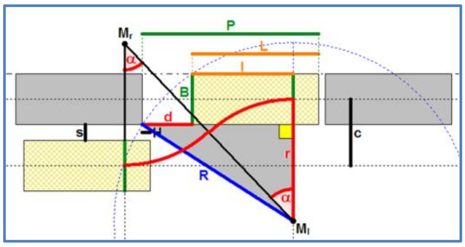

Abb. 18: Erarbeitungshilfe 3

$$r \cdot \cos\alpha = r - \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(1 - \frac{c}{2r}\right) = \arccos\left(1 + \frac{B+s}{B - 2\sqrt{R^2 - l^2}}\right)$$

$$P = d + L$$

$$= \sqrt{l^2 + 2B\sqrt{R^2 - l^2} - B^2} - l + L$$

$$c = B + s$$

$$R^2 = l^2 + \left(r + \frac{B}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - l^2} - \frac{B}{2}$$

$$(d + l)^2 = R^2 - \left(r - \frac{B}{2}\right)^2$$

Abb. 19: Exemplarische Ergebnisse der Projektgruppe „Formalisierung“

Die Projektgruppe „**Programmierung**“ hat schließlich die gewonnenen Ergebnisse in ein Programm umgesetzt und dieses optimiert, das zu den Fahrzeugdaten jedes beliebigen Fahrzeugs die „optimalen“ Einparkparameter (Start-, Gegenlenkposition, minimale Parklückenlänge, usw.) ausgibt. Dieses Programm und alle weiteren Materialien, die im Rahmen dieses Projekts entstanden sind, also auch die Ergebnisse Gruppe „**Projektbericht**“ und die von der Gruppe „**Präsentation**“ erstellte PowerPoint-Datei können im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de/einparken/ abgerufen werden.

Anmerkung

Das hier beschriebene Projekt wurde mit einer kleinen Schülergruppe durchgeführt. Soll es mit einer ganzen Klasse wiederholt werden, so können einzelne Teilgruppen stärker parallel arbeiten. So kann etwa die Gruppe „Video“ gleich zu Beginn der Projektarbeit ihre Arbeit aufnehmen. Daneben können noch andere Projektteilgruppen gebildet werden. Z. B. können weitere Projektgruppen versuchen Lösungsansätze zum Einparkproblem aus der Literatur (vgl. Herrmann (2006)) zu verstehen und auf ihre Praxistauglichkeit hin zu untersuchen oder sich an den Bau und die Programmierung eines Lego-Roboters wagen, der selbstständig in eine Parklücke einparkt. Der Kreativität sind hier kaum Grenzen gesetzt.

Literaturverzeichnis

Herrmann, N. (2006). *Mathematik ist überall* (2. Ausg.). München: R. Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

Ludwig, M. (2001). Die Struktur von Projekten. In M. Ludwig (Hrsg.), *Projekte im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht* (S. 11-30). Hildesheim: Franzbecker.

Suleder, M. (2003). *AVA - Automatische Videoanalyse.* Zuletzt abgerufen am 04.09.2007 von http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/~suleder/software/ava/