Bewegliches Denken im Mathematikunterricht

Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von

Jürgen Roth

aus

Würzburg

Würzburg, 2005

Eingereicht am:	22. Juni 2005

bei der Fakultät für Mathematik und Informatik

1. Gutachter:	Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
2. Gutachter:	Prof. Dr. Rudolf vom Hofe

Tag der Disputation:	02. November 2005

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Lehrer, der an die Universität wechselt, um sich aus einer anderen, freieren Perspektive mit dem Mathematikunterricht zu befassen, hat in der Regel das Bedürfnis, Unterrichtswirklichkeit zu beeinflussen und zu gestalten. Aus einer solchen Biografie ergibt sich fast zwangsläufig die Auseinandersetzung mit einer zentralen Fragestellung, die WAGENSCHEIN (1975) auf dem Titelblatt seines Buches „Verstehen lehren" aufwirft:

> „Was kann dagegen getan werden, daß Unterricht für die Weitergabe von Fertigfabrikaten mißbraucht wird?"

Der Titel eben dieses Buches gibt darauf eine, wenn nicht *die* Antwort: Das zentrale Ziel des Mathematikunterrichtes muss es sein, das Verstehen zu lehren. Diese Arbeit will einen Beitrag auf dem Weg zu diesem Ziel leisten und dabei insbesondere die Paradoxie des Verstehens berücksichtigen:

> „Strenge Überlegungen kann man nur verstehen, wenn man bereits anschauliche Vorstellungen hat. Angemessene anschauliche Vorstellungen können sich nur aus strengen Betrachtungen entwickeln." VOLLRATH (1993), S. 48

In dieser Arbeit wird *Bewegliches Denken* als eine Möglichkeit herausgestellt, eine Balance zwischen Anschauung und Entwicklung eines tieferen Verständnisses zu erreichen. Im Idealfall führt das dazu, dass Anschauung und inhaltlich-strukturelles Verständnis sich gegenseitig befruchten. Die Tatsache, dass „Dynamic Mathematics" auch eines von sieben Themen auf der „7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching"[1] ist, verdeutlicht die Aktualität dieser Arbeit. In der Ankündigung zu diesem Thema steht:

> „(…) we are interested in contributions that describe and study the characteristic forms of mathematical thinking that dynamic mathematics environments support."[2]

Dies ist eine neue Dimension der Fragestellung im Zusammenhang mit dynamischer Mathematiksoftware. Es steht damit nicht mehr im Vordergrund, wie man die Software einsetzen kann, sondern welche Art des mathematischen Denkens damit unterstützt

[1] Diese Tagung findet vom 26. bis 28. Juli 2005 in Bristol in England statt. (http://www.ictmt7.org)

wird. Man könnte dies noch erweitern und fragen, welche Fähigkeiten im Zusammenhang mit dem mathematischen Denken notwendig sind, um derartige Software sinnvoll nutzen zu können.

Die Arbeit in der vorliegenden Form konnte nur entstehen, weil eine Reihe von Personen mich konstruktiv begleitet hat. In erster Linie danke ich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Hans-Georg Weigand sehr herzlich. Er hat mich auf die Idee gebracht, dieses Thema zu wählen, und mir dabei von Anfang an sehr viel Entscheidungsspielraum und akademische Freiheit im positivsten Sinn des Wortes zugebilligt. Seine freundliche und umgängliche Art macht es mir sehr leicht und angenehm, für ihn und mit ihm zu arbeiten.

Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, für seine Bereitschaft, als Zweitgutachter für diese Arbeit zu fungieren und insbesondere für das ausführliche Gespräch und die konstruktive Kritik zu den ersten beiden Kapiteln dieser Arbeit.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hans-Joachim Vollrath, der bereits während meines Studiums mein Bild von Mathematikdidaktik geprägt hat. Er hat mich als „aktiver" Emeritus sehr freundlich am Lehrstuhl begrüßt und dem Fortgang meiner Arbeit reges Interesse entgegengebracht. Ich bin ihm für viele intensive und durchaus auch kritische Gespräche zu dieser Arbeit sehr dankbar.

Danken möchte ich allen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik für die freundliche und entspannte Zusammenarbeit, insbesondere auch Herrn Dr. Andreas Schuster, der mir häufig als Diskussionspartner zur Verfügung stand. Darüber hinaus danke ich Frau Dr. Katja Krüger, deren eigene Arbeit KRÜGER (2000b) eine wichtige Inspiration für mich war und die mir Kopien älterer und schwer zugänglicher Arbeiten zum Thema überlassen hat, sowie Herrn Dr. Michael Kleine für eine anregende Diskussion zu Fragen der klassischen Empirie.

Hervorzuheben sind auch die vielen Kolleginnen und Kollegen von bayerischen Gymnasien, die mit ihren Klassen meine Fragebogen ausgefüllt, Unterrichtszeit zur Verfügung gestellt und sich auf meine Unterrichtskonzepte eingelassen haben. Ein besonderer Dank gilt hier den Kolleginnen Claudia Hagan, Ina Hennig und Ingrid Viertel

---

[2] http://www.ictmt7.org/themes/dynamic_maths.cfm, zuletzt aufgerufen am 20.05.2005

sowie den Kollegen Roland Händle und Rüdiger Horn, die mindestens ein Jahr, teilweise sogar zwei Jahre nach meinem Unterrichtskonzept gearbeitet haben. Ohne ihre Bereitschaft zur Mitarbeit wäre der empirische Teil dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Danken möchte ich auch Herrn Roland Ziegler, der die Endfassung dieser Arbeit gewohnt akribisch Korrektur gelesen hat. Verbliebene Fehler gehen allein zu meinen Lasten.

Schließlich bin ich meiner Frau Marion und meinen Kindern Mareike und Tobias dafür sehr dankbar, dass sie über Jahre hinweg mein Arbeitspensum ertragen und mich unterstützt haben.

Einleitung

Beim Lösen mathematischer Probleme ist es oft hilfreich, eine gegebene Situation in Gedanken zu verändern. So kann man z. B. in eine geometrische Figur eine Bewegung hineindenken oder in einer Relation die gegebenen Größen gedanklich variieren. Man versucht dabei, die Auswirkungen der Veränderung zu antizipieren und damit zu argumentieren. In dieser Arbeit geht es um dieses „Bewegliche Denken" als einem Teil des mathematischen Denkens.

In der Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik gab es immer wieder Phasen, in denen das Argumentieren mit Bewegungen bzw. Veränderungen betont wurde, aber auch andere, in denen solche Argumentationen in den Hintergrund traten.

Bereits einer der ersten belegten mathematischen Beweise, nämlich der wahrscheinlich von THALES VON MILET stammende Beweis zu dem Satz, dass der Durchmesser den Kreis halbiert, basiert auf einer vorgestellten Bewegung. Im Gefolge PLATONS, der die *Bewegung als Werden* nicht zur Ideenwelt zählt, wird versucht, Argumente, die sich auf Bewegungen stützen, zu vermeiden. Trotzdem wird natürlich (auch) in Bewegungen bzw. Veränderungen gedacht. Dies lässt sich z. B. daran ablesen, dass PLATON selbst einen sich bewegenden Punkt eine Linie erzeugen lässt und auch in den Elementen des EUKLID die Kugel, der Kegel und der Zylinder im XI. Buch mit Hilfe von Bewegungen definiert werden. Im 17. Jahrhundert sind auf Bewegungen bzw. Veränderungen beruhende Argumentationen im Zuge der von NEWTON und LEIBNIZ begründeten Infinitesimalrechnung wieder von grundlegender Bedeutung. Die Gegenbewegung tritt – spätestens – mit der Entwicklung der Mengenlehre ein, die von CANTOR und DEDEKIND in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begründet wird.

Derartige Wellenbewegungen im Hinblick auf die Befürwortung und Ablehnung von Argumentationen mit Bewegungen und Veränderungen gibt es auch in der Geschichte der Mathematikdidaktik. Am Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts kommt die Forderung nach Integration von Argumentationen mit Bewegungen und Veränderungen, aber auch von dynamischen Visualisierungen in den Mathematikunterricht auf. Den Höhepunkt dieser Entwicklung markiert die Forderung der Meraner Reformer um Felix KLEIN nach der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens", denn für die

Meraner Reformer sind Argumentationen mit Bewegungen und Veränderungen charakteristisch für das funktionale Denken.

Im Zuge des Strukturalismus in der „Neuen Mathematik“ in den 60er und 70er Jahren des 20. Jahrhunderts kommt dynamischen Denkweisen im Mathematikunterricht dann eine geringere Bedeutung zu. Die Mathematikdidaktik stellt allerdings sehr schnell fest, dass dies zu Verengungen und Einseitigkeiten führt. FÜHRER (1985a) plädiert in seinem Aufsatz „‚Funktionales Denken': Bewegtes fassen – das Gefaßte bewegen“ für die Reintegration des Argumentierens mit Bewegungen und Veränderungen in die Schulalgebra. BENDER/SCHREIBER (1985) arbeiten in ihrem Buch „Operative Genese der Geometrie“ heraus, welche wesentliche Rolle Bewegungen und Veränderungen für den Geometrieunterricht spielen. Auch für allgemeine Fragen der Mathematikdidaktik stellt WITTMANN (1985a) im Zusammenhang mit dem operativen Prinzip das Denken in Veränderungen und deren Auswirkungen als wesentlich heraus („Was passiert mit …, wenn …?“). Weitere Fürsprecher von Bewegungen bzw. Veränderungen im Mathematikunterricht aus dieser Zeit sind etwa WEIGAND (1988a), der die Bedeutung der Zeitfunktionen für das Verständnis von Veränderungen im Mathematikunterricht betont, oder auch BENDER (1989), der für „Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen“ plädiert.

Eine neue Dimension in dieser anhaltenden Diskussion eröffnet die Verfügbarkeit neuer Medien. Damit rückt der Aspekt der dynamischen Visualisierung in das Zentrum des Interesses. In den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts sind Filme das Medium der Wahl um dynamische Visualisierungen zu realisieren. Entsprechende Aktivitäten der Mathematikdidaktik spiegeln sich insbesondere in den von KAUTSCHITSCH/METZLER herausgegebenen Tagungsbänden zu den Klagenfurter Workshops zur „Visualisierung in der Mathematik“ wider. Der Aufwand zur Herstellung entsprechender Mathematikfilme ist allerdings ganz erheblich und darüber hinaus haben Unterrichtsfilme den Nachteil, dass Eingriffe in den Ablauf eines einmal erstellten Films nur in geringem Umfang durchführbar sind. Damit sind aber entdeckendes Lernen und das Beschreiten eigener Lernwege nur sehr eingeschränkt möglich. Diese Problematik hat sich durch die Verfügbarkeit von Computern und der Entwicklung von dynamischer Geometriesoftware (DGS), Tabellenkalkulationsprogrammen (TKP) und Computeralgebrasystemen (CAS) grundlegend geändert. Mit ihrer Hilfe können Visualisierungen relativ einfach erzeugt und dynamisch variiert werden. Wichtig im Hinblick auf das Bewegliche Denken ist dabei die Möglichkeit, einzelne Variablen der Konfiguration gezielt zu verändern.

ZIEGLER (1991) schreibt im Zusammenhang mit dem Computereinsatz im Mathematikunterricht von den Vorteilen des „variablen Denkens“, nämlich des Denkens in Bewegungen bzw. Veränderungen. Seitdem ist der Aspekt „Veränderungen und Bewegungen“ (auch unter den Begriffen „Dynamik“ und „Variation“) für den Mathematikunterricht ständig in der didaktischen Diskussion.[3] In den Veröffentlichungen werden vielfach Möglichkeiten zum Einsatz von dynamischer Geometriesoftware (DGS)[4], Tabellenkalkulationsprogrammen (TKP)[5] und auch Computeralgebrasystemen (CAS)[6] diskutiert oder vorgeschlagen. Es gibt einige qualitative Arbeiten, die sich in Fallstudien u. a. damit auseinander setzen, wie Schülerinnen und Schüler mit dynamischer Mathematiksoftware arbeiten.[7] Darüber hinaus gibt es Untersuchungen, die Defizite im Bereich des Denkens in Bewegungen bzw. Veränderungen feststellen.[8]

Betrachtet man die geschichtliche Entwicklung des Umgangs mit Bewegungen und Veränderungen in der Mathematik und ihrer Didaktik und berücksichtigt man die (Visualisierungs-)Möglichkeiten, die der Computereinsatz mit entsprechender Software bietet, so fällt die Vielfalt der Ansätze auf. Bei diesen Ansätzen wird (oft implizit) eine Fülle von Fähigkeiten genannt oder gefordert. Dabei gibt es Überschneidungen, aber es werden auch bereichsspezifische Fähigkeiten angeführt. Was bisher fehlt, ist der Versuch einer themenunabhängigen Zusammenstellung der *Kernfähigkeiten*, die für eine gedankliche Auseinandersetzung mit Bewegungen bzw. Veränderungen grundsätzlich notwendig sind.

---

[3] Seit 1991 finden sich in jedem Jahr mehrere Artikel in der mathematikdidaktischen Literatur, die den genannten Aspekt von sehr verschiedenen Seiten beleuchten. Besonders viele Aufsätze, die sich mit Veränderungen und Bewegungen auseinander setzen, sind 1992 sowie im Zeitraum 1999 bis 2004 erschienen.

[4] Vgl. etwa ELSCHENBROICH (1999), ELSCHENBROICH (2000), SCHUMANN (1991), SCHUMANN (2000a), ULM (2003).

[5] Vgl. etwa THIES (2001), THIES (2002), WEIGAND (2001b) .

[6] Vgl. etwa VOM HOFE (1996a), VOM HOFE (1996b).

[7] Vgl. etwa HÖLZL (1994), HÖLZL (1999a), THIES (2002), VOM HOFE (1998b), VOM HOFE (1999), WEIGAND/WELLER (2001).

[8] Vgl. etwa MONK (1992) und OSSIMITZ (2000).

Aus der Auseinandersetzung mit der Literatur, eigenen Unterrichtserfahrungen und im Hinblick auf das Arbeiten mit dynamischer Geometriesoftware haben sich für mich folgende drei Kernfähigkeiten herauskristallisiert, die ich unter dem Begriff *Bewegliches Denken* zusammenfasse:

- In eine Konfiguration Bewegung hineinsehen und damit argumentieren,
- die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren,
- das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben.

Auf dieser Grundlage ergeben sich drei wesentliche Ziele dieser Arbeit:

- Es soll die Beziehung des durch diese Fähigkeiten charakterisierten Begriffs *Bewegliches Denken* zu ähnlichen Begriffen in der Literatur herausgearbeitet werden.
- Es soll die Rolle der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens für den Mathematikunterricht didaktisch analysiert werden und die Konsequenzen daraus sollen in die Entwicklung eines Unterrichtskonzepts einfließen.
- Es soll empirisch untersucht werden, ob und wenn ja inwieweit Bewegliches Denken im Mathematikunterricht geschult und entwickelt werden kann.

Das **erste Kapitel** klärt den Begriff *Bewegliches Denken*. Zunächst wird das *Fähigkeitsspektrum* herausgearbeitet, das in dieser Arbeit mit dem Namen *Bewegliches Denken* bezeichnet wird. Um dem Leser eine klare Vorstellung von dem hier gebildeten Begriff des Beweglichen Denkens zu geben und um mögliche Fehlvorstellungen gleich zu Beginn auszuschalten, werden die definierenden Fähigkeiten anhand von Beispielen herausgearbeitet und in einem Fähigkeitskatalog zusammengestellt. Das führt zur *Definition* des Beweglichen Denkens.

Nach der Klärung dieses Begriffs, der für diese Arbeit grundlegend ist, wird die Beziehung zu ähnlichen Begriffen aus der didaktischen Literatur untersucht. Dabei geht es darum, jeweils Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten, um so einen Überblick zu erhalten, wie sich der Begriff des Beweglichen Denkens in das *Netz einschlägiger Begriffe* einordnet.

Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels wird anhand von zwei Beispielen aufgezeigt, wie *Problemlösungen* mit Hilfe des Beweglichen Denkens idealtypisch aussehen könnten.

Das **zweite Kapitel** dient der *didaktischen Analyse* der Rolle, die die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens für den Mathematikunterricht einnehmen. Es zeigt anhand von Beispielen die Möglichkeiten auf, die eine Herangehensweise an typische Fragestellungen des Mathematikunterrichts im Sinne des Beweglichen Denkens eröffnen kann. Dabei werden die Bereiche *Begriffsbildung* und *Problemlösen* als Kernbereiche des Mathematikunterrichts beleuchtet. Es wird außerdem der Frage nachgegangen, welchen Beitrag das Bewegliche Denken zum *Verstehen* im Mathematikunterricht leisten kann. Am Beispiel von dynamischer Geometriesoftware wird dann aufgezeigt, welchen Beitrag der *Computereinsatz* zur Entwicklung des Beweglichen Denkens leisten und in welcher Weise der Rechner dabei eingesetzt werden kann.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Wie lässt sich Bewegliches Denken im Mathematikunterricht anregen und fördern?
- Ermöglicht die Förderung Beweglichen Denkens in einem Gebiet den Transfer auf ein anderes Gebiet?
- Wie lassen sich Lehrerinnen und Lehrer dafür gewinnen, ein didaktisches Konzept zur Förderung Beweglichen Denkens in ihrem Unterricht zu übernehmen?

Diese Fragen erfordern eine *empirische* Untersuchung.

Das **dritte Kapitel** beginnt mit der Darstellung der Versuchsplanung. Der erste Abschnitt ist eine Zusammenfassung der *Resultate von Voruntersuchungen*, die im Schuljahr 2001/02 in fünf 7. und einer 8. Klasse an vier bayerischen Gymnasien durchgeführt wurden.

Auf dieser Grundlage und aufbauend auf die didaktische Analyse im zweiten Kapitel wurde ein *Unterrichtskonzept* für den gesamten Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe an Gymnasien erstellt, das darauf ausgelegt ist, das Bewegliche Denken durchgängig zu entwickeln und zu nutzen.

Zu diesem Konzept wurde ein 70-seitiges *Lehrermanuskript* zur Information und als Arbeitsgrundlage für den Unterricht erstellt. Für das Arbeiten der Schülerinnen und Schüler am Computer waren *Lernumgebungen* zu entwickeln. Dazu wurden von mir über 100 EUKLID DynaGeo-Dateien erstellt, die Informationen für die Schülerinnen und Schüler, Aufgabenstellungen sowie Handlungsmöglichkeiten enthalten und die Möglichkeit bieten, Resultate und Beobachtungen zu notieren. Darüber hinaus habe ich u. a. Arbeitsblätter für Gruppenarbeitsphasen angefertigt und (neue) Aufgabenstellungen (auch für Klassenarbeiten) konzipiert. Dieses Konzept einschließlich der *Materialien* wird an einzelnen Beispielen erläutert.

Um didaktische Ideen an Lehrerinnen und Lehrer zu vermitteln, sind *konzeptionelle Überlegungen* und die Entwicklung einer *Strategie* zur Gewinnung und Betreuung der Lehrkräfte notwendig. Die *Umsetzung* dieser Strategie erfordert einen nicht zu unterschätzenden Aufwand für den Didaktiker. Beides wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels dargestellt.

Der dritte Abschnitt widmet sich der *Entwicklung des Leistungstests*. Da ein solcher für die hier zu untersuchende Fragestellung noch nicht vorlag, wurde er im Rahmen dieser Arbeit entwickelt. Auch zu diesem Zweck wurden umfangreiche Voruntersuchungen mit insgesamt 383 Schülerinnen und Schülern aus zehn 7. und sechs 8. Klassen aus neun bayerischen Gymnasien durchgeführt. Diese Entwicklungsarbeit und die Methoden der Durchführung und Auswertung der Vor- und Nachtests werden ebenfalls in diesem Kapitel dargestellt.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Darstellung der Konzeption der Durchführung und Auswertung der *Interviews*, die zum Abschluss des Unterrichtsversuchs mit den beteiligten Lehrkräften geführt wurden.

Das **vierte Kapitel** widmet sich der *Durchführung* und *Auswertung* der empirischen Untersuchung. Es beginnt mit einer Beschreibung der Versuchspopulation der Haupt- und Nachuntersuchung der Arbeit. Im Schuljahr 2002/03 waren fünf siebte Klassen aus drei bayerischen Gymnasien am Unterrichtsversuch beteiligt und drei 7. Klassen eines weiteren bayerischen Gymnasiums dienten als Kontrollgruppe. Die Unterrichtsklassen wurden während des gesamten Schuljahres in Geometrie nach dem Konzept dieser Arbeit unterrichtet. An der Nachuntersuchung des Schuljahres 2003/04 waren zwei Klassen beteiligt, die jeweils von Kollegen unterrichtet wurden, die bereits in der Hauptuntersuchung Unterrichtsklassen nach diesem Konzept unterrichtet hatten. Nun zu den wichtigsten Ergebnissen:

Die Hauptuntersuchung hat gezeigt, dass es durchaus möglich ist, mit meinem Konzept Bewegliches Denken langfristig zu entwickeln und zu fördern. Diese Förderung scheint hauptsächlich Schülerinnen und Schülern des mittleren Leistungsdrittels zugute zu kommen. Sie werden durch den Unterricht auf das Leistungsniveau des oberen Leistungsdrittels gebracht. Das untere Leistungsdrittel steigert seine Leistung ebenfalls stärker als die entsprechende Gruppe der Kontrollklassen, dieses Ergebnis ist aber nicht signifikant.

Obwohl die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen nur in der Geometrie im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichtet wurden, lässt sich auch eine positive Auswirkung auf die Algebra feststellen. Die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen schneiden auch bei Items zur Algebra im Nachtest signifikant besser ab als die Schülerinnen und Schüler der Kontrollklassen. Die empirischen Ergebnisse legen darüber hinaus nahe, dass ein Unterricht, der im Wesentlichen die ersten beiden Fähigkeiten des Beweglichen Denkens schult, tendenziell auch die Lösungswahrscheinlichkeit für Aufgaben vergrößert, die die Fähigkeit „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben" erfordern. In Grenzen erfolgt somit auch ein Transfer hin zu schwierigeren Anforderungen des Beweglichen Denkens.

Die Auswertung der Lehrerinterviews zeigt: Das entwickelte Unterrichtskonzept, die konzipierten Materialien und die gewählte Strategie zur Kommunikation mit den Lehrkräften ermöglichten eine erfolgreiche Durchführung des Unterrichtsversuchs. Nach diesen Erfahrungen waren alle am Unterrichtsversuch beteiligten Lehrkräfte von dem durchgeführten Konzept überzeugt und werden im Wesentlichen nach demselben Konzept in ihren nächsten 7. Klassen wieder unterrichten.

Alle beteiligten Klassen und drei der fünf am Unterrichtsversuch der Hauptuntersuchung beteiligten Lehrerinnen und Lehrer hatten vor dem Unterrichtsversuch kaum Erfahrungen mit Computereinsatz im Unterricht gesammelt und auch Gruppen- oder Partnerarbeit war für die meisten Lehrerinnen und Lehrer sowie Schülerinnen und Schüler eine weitgehend neue Erfahrung. Vor diesem Hintergrund trägt diese Arbeit möglicherweise auch dazu bei, diese Unterrichtsformen stärker im Mathematikunterricht zu verankern.

1 Bewegliches Denken – Eine Annäherung

Zunächst wird der Begriff *Bewegliches Denken* dadurch erläutert, dass anhand von Beispielen aufgezeigt wird, welche Phänomene und Fähigkeiten im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken eine Rolle spielen. Anschließend erfolgt eine Darstellung verschiedener Begriffe aus der Literatur, die sich mit entsprechenden Phänomenen auseinander setzen, wie z. B. dem funktionalen Denken. Dabei werden sowohl Überschneidungen und Bezüge als auch Abgrenzungen diskutiert und so wird der Begriff *Bewegliches Denken* präzisiert.

1.1 Interessierende Phänomene und Fähigkeiten

In einem ersten Zugang zum Begriff *Bewegliches Denken* wird das Wort „beweglich" zunächst als die Möglichkeit zur Änderung der räumlichen Lage eines Objektes gedeutet und „Denken" im Sinne des griechischen Wortes für „denken", nämlich *noein* interpretiert. *Noein* bedeutet ursprünglich „sehen", aber auch, den „wahren Sachverhalt in einer Verhüllung erkennen". Es handelt sich also um die Fähigkeit, bei einem Phänomen vom Unwesentlichen abzusehen und damit das Wesentliche zu erkennen. *Bewegliches Denken* manifestiert sich demnach zunächst in der Fähigkeit, in ein scheinbar statisches Phänomen eine Bewegung hineinsehen und damit argumentieren zu können. Diese Fähigkeit scheint bereits THALES VON MILET (geb. um 624 v. Chr., gest. um 547 v. Chr.[9]) eingesetzt zu haben. So jedenfalls lässt sich die grundlegende Beweisidee des Satzes interpretieren, dass „der Kreis durch den Durchmesser[10] halbiert wird"[11], den nach PROKLUS DIADOCHUS (1945) „zuerst der berühmte THALES nachgewiesen haben"[11]

---

[9] Quelle: Lexikon der Mathematik in sechs Bänden. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2002

[10] Der Begriff „Durchmesser" wird bei PROKLUS DIADOCHUS (1945) wie folgt definiert:

> „Nun gibt es viele Geraden im Kreise, (…) aber (…) Durchmesser (wird) nur die Linie genannt, die durch den Mittelpunkt geht und weder innerhalb der Peripherie aufhört, noch deren Grenze überschreitet, sondern auf beiden Seiten von ihr begrenzt wird." PROKLUS DIADOCHUS (1945), S. 275

[11] PROKLUS DIADOCHUS (1945), S. 275

soll. Der folgende von PROKLUS DIADOCHUS (1945) angegebene Beweis wäre damit einer der ersten mathematischen Beweise überhaupt:

> „Will man dies (…) auf mathematischem Wege beweisen, so denke dir den Durchmesser gezogen und die eine Kreishälfte auf die andere gelegt. Ist sie nicht gleich, so wird sie entweder innerhalb oder außerhalb zu liegen kommen. In beiden Fällen wird sich die Folgerung ergeben, daß die kürzere Gerade gleich ist der längeren; denn alle Linien vom Mittelpunkt an die Peripherie sind einander gleich. Das ist aber unmöglich. Sie werden also so aufeinander passen, daß sie gleich sind. Also halbiert der Durchmesser den Kreis." PROKLUS DIADOCHUS (1945), S. 275f

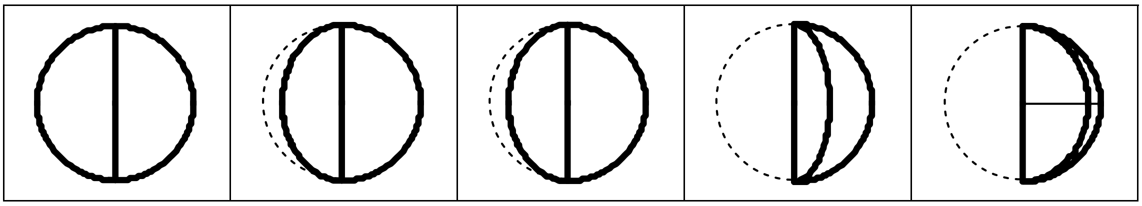


Abb. 1: Beweisfigur zum Satz: Der Durchmesser halbiert den Kreis.

An diesem Beweis ist zunächst einmal interessant, dass er mit einer Bewegung argumentiert. Die alten Griechen haben ihre Skizzen in der Regel in den Sand oder auf Wachstafeln geritzt, das im Beweis benutzte Umklappen der einen „Kreishälfte" um den Durchmesser auf die andere „Kreishälfte" war somit real nicht durchführbar. Hier wird also nicht nur ein statisches Phänomen dynamisch interpretiert, diese Bewegung wurde sogar mit großer Wahrscheinlichkeit nicht mit Material, sondern wohl ausschließlich im Kopf durchgeführt. Auf der Grundlage dieser Bewegung wird die weitere Argumentation aufgebaut. THALES erkennt, dass es nur zwei prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten für die gegenseitige Lage der beiden „Kreishälften" nach dem „Umklappen" der einen gibt. Entweder kommen die beiden „Hälften" exakt zur Deckung, dann sind die beiden Kreisteile gleich groß, oder einer der beiden Teile wird über den anderen Teil hinausragen.[12] Im zweiten Fall gibt es Punkte auf dem Rand des einen Kreisteils, die weiter vom Kreismittelpunkt entfernt sind als Punkte auf dem Rand des anderen Kreisteils. Dies ist aber ein Widerspruch zur Tatsache, dass alle Punkte auf der Peripherie eines Kreises gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind. Die Folge davon ist, dass der

[12] Im letzten Bild der Figurenfolge in **Abb. 1** ist der zweite Fall wiedergegeben.

zweite Fall nicht eintreten kann und deshalb die von einem Durchmesser erzeugten beiden Kreisteile denselben Flächeninhalt haben.

Welche Fähigkeit war notwendig, um diesen Beweis führen zu können? THALES VON MILET musste in ein statisches Phänomen, hier den Kreis mit eingezeichnetem Durchmesser, eine *Bewegung hineinsehen und damit argumentieren* können. Allein die Fähigkeit, sich eine Bewegung vorstellen zu können, reicht offensichtlich nicht aus, um Probleme zu lösen, Zusammenhänge zu entdecken und ganz allgemein (mathematische) Phänomene zu erforschen. Man muss vielmehr mit der hineingesehenen Bewegung auch argumentieren können.

Ein statisches Bild kann die wesentlichen Objekte eines Phänomens wiedergeben. Um aber die Beziehungen zwischen den Objekten sowie in ihnen vorhandene Möglichkeiten und Grenzen zu erfassen, muss man die Gesamtkonfiguration, also das Phänomen und alle an ihm durchführbaren Veränderungen, im Blick haben, sowie in der Lage sein, die Aufmerksamkeit auf jeweils relevante Aspekte zu fokussieren.

Im Folgenden wird dies am Beispiel des Höhensatzes der Satzgruppe des Pythagoras erläutert. Die Höhensatzkonfiguration wird in **Abb. 2** wiedergegeben. Man erkennt alle wesentlichen Komponenten, also das rechtwinklige Dreieck ΔABC, die Höhe h, die Hypotenusenabschnitte x und y, das Quadrat über der Höhe h und das Rechteck mit den Seitenlängen x und y. Damit ist die Aussage des Satzes, dass die markierten Rechtecke flächengleich sind, dass also gilt $h^2 = x \cdot y$, für ein spezielles rechtwinkliges Dreieck visualisiert.

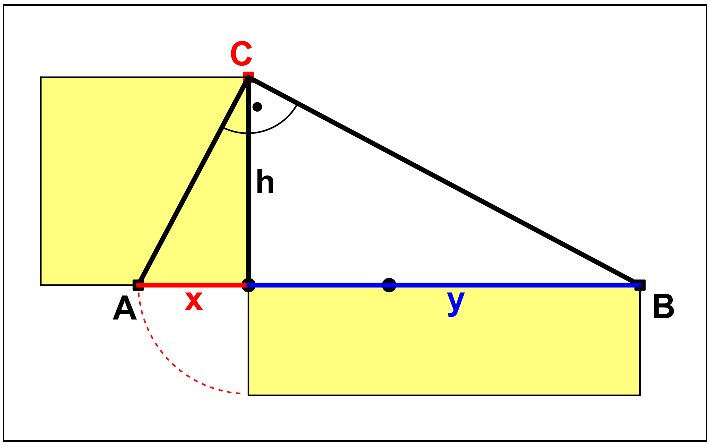


Abb. 2: Konfiguration des Höhensatzes

Stellt man sich diese Konfiguration beweglich vor, so kann man die Aussage des Satzes besser erfassen, denn für alle Dreiecke, die einen rechten Winkel besitzen, nicht nur für das abgebildete, ist die Flächengleichheit der in **Abb. 2** markierten Rechtecke gegeben. Man kann also jeden der Eckpunkte des Dreiecks ΔABC bewegen, muss diese Bewegung allerdings so durchführen, dass der Winkel $\angle ACB$ ein rechter bleibt. Wenn man diese Bewegungen ausführt, dann erkennt man, dass sich der Flächeninhalt des Quadrats – und damit auch des Rechtecks – ändert. *Man kann sich nun z. B. fragen, ob bei diesen Bewegungen jeweils ein Maximum des Flächeninhalts der beiden schraffierten Flächen*[13] *existiert.*

Zunächst soll die Lage des Punktes B so variiert werden, dass $\angle ACB = 90°$ bleibt. Dazu muss B offensichtlich auf dem in C auf AC errichteten Lot bewegt werden. Wird B dabei auf C zubewegt, so wird die Höhe h immer kleiner, weil der Abstand zwischen AB und C abnimmt. Um h und damit die schraffierten Flächen zu vergrößern, muss man B von C wegbewegen. Existiert ein Maximum für die Länge von h bei dieser Bewegung? Die Antwort ist nein, es existiert nur ein Supremum, nämlich die Länge von $[AC]$, das nicht angenommen wird, weil in diesem Fall AB und CB parallel wären, was in einem Dreieck nicht möglich ist. Die Bildfolge (Momentaufnahmen aus einem Film) in **Abb. 3** auf Seite 24 verdeutlicht das.

Zum Erfassen der Gesamtkonfiguration und zu deren Analyse ist es notwendig, den Blick von einem Aspekt zu lösen und auf jeweils relevante Größen und Beziehungen fokussieren zu können. In der gerade durchgeführten Argumentation ist das mehrfach geschehen. Zunächst wurde der Punkt B in den Blick genommen und untersucht, wie er bei festgehaltener Seite $[AC]$ bewegt werden kann, so dass der rechte Winkel im Dreieck ΔABC erhalten bleibt. Um etwas über die Veränderung der Flächeninhalte auszusagen, musste die Fokussierung gewechselt und die Höhe h betrachtet werden. Zur Argumentation über die Länge von h war es notwendig, den Punkt C, die Seite $[AC]$ und deren Abstand in das Zentrum der Aufmerksamkeit zu stellen. Um die Supremumseigenschaft zu entdecken und zu begründen, musste schließlich die gegenseitige Lage der Geraden AB und CB in das Zentrum der Aufmerksamkeit rücken. Aus dieser Aufzählung wird deutlich, dass die *Fähigkeit, die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren* zu können beim Umgang mit Bewegungen bzw. Veränderungen eine zentrale Rolle spielt.

---

[13] Nachdem die beiden Flächen gemäß dem Höhensatz flächengleich sind, reduziert sich die Frage darauf, ein Maximum für den Flächeninhalt einer der Flächen, ich wähle o. B. d. A. das Quadrat über der Höhe, zu suchen.

Diese Fähigkeit wird nun wieder benutzt. Ein anderer Eckpunkt des Dreiecks ΔABC wird in den Blick genommen, die Fokussierung also erneut geändert. Variiert man den Eckpunkt A anstelle von B so, dass $\angle ACB = 90°$ bleibt, dann ergibt sich eine analoge Aussage, allerdings mit der Länge von $[BC]$ als Supremum für die Länge von h.

Auch C kann so variiert werden, dass der Winkel $\angle ACB$ ein rechter bleibt. Dazu muss C auf dem Thaleskreis über [AB] bewegt werden.[14] **Abb. 4** auf Seite 25 zeigt acht Momentaufnahmen dieser Bewegung.[15]

[14] In der Regel wird man die Bewegung bis in die Extremlagen ausführen oder sie sich vorstellen, um auszuloten, welche grundsätzlichen Möglichkeiten bestehen, um also die Gesamtkonfiguration zu erfassen.

[15] Ein von mir entwickeltes DynaGeoX-Applet zu diesem Zusammenhang findet man im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → M → Mittelwerte.

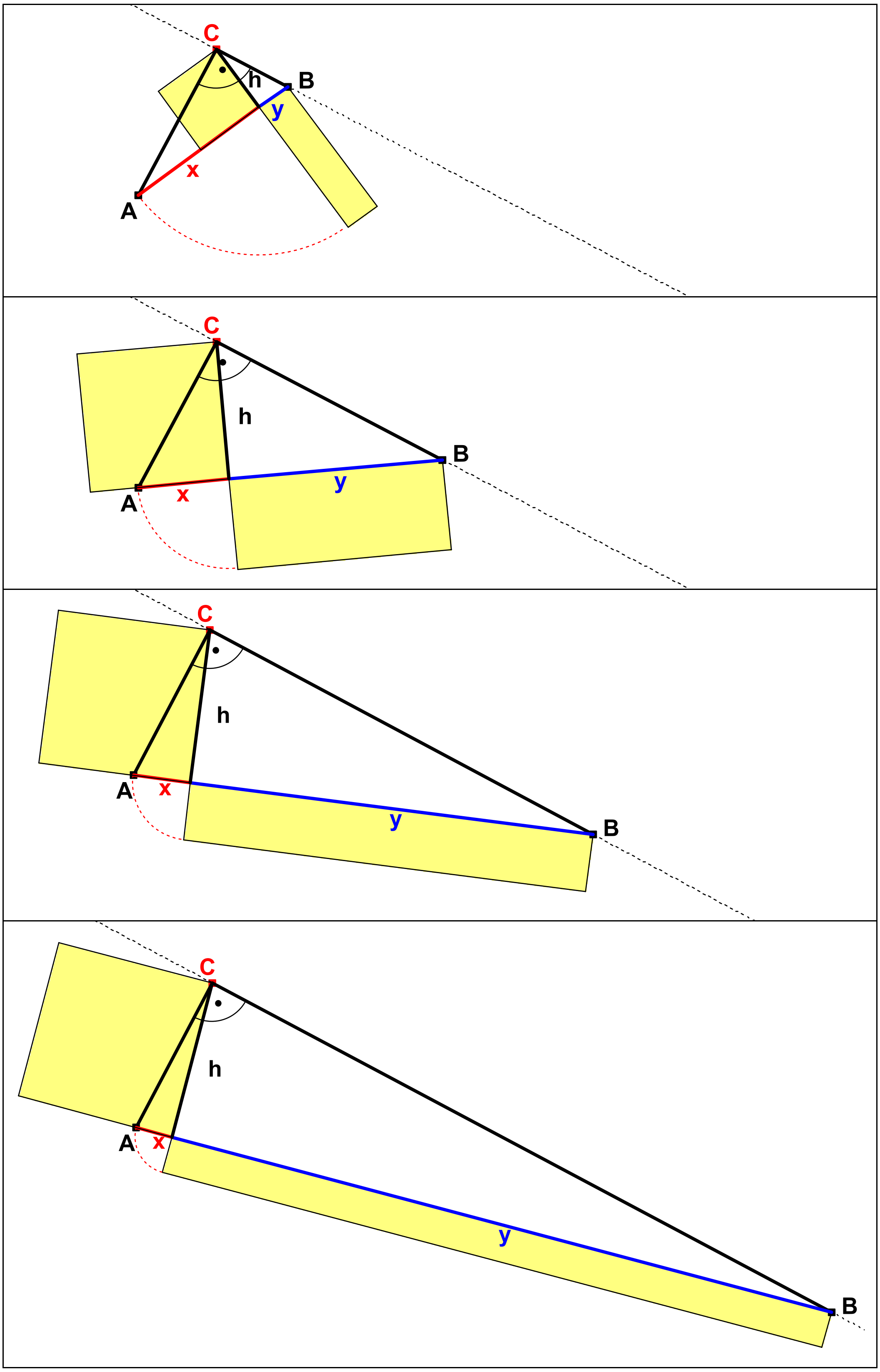


Abb. 3: Variation der Lage von *B* in der Höhensatzfigur

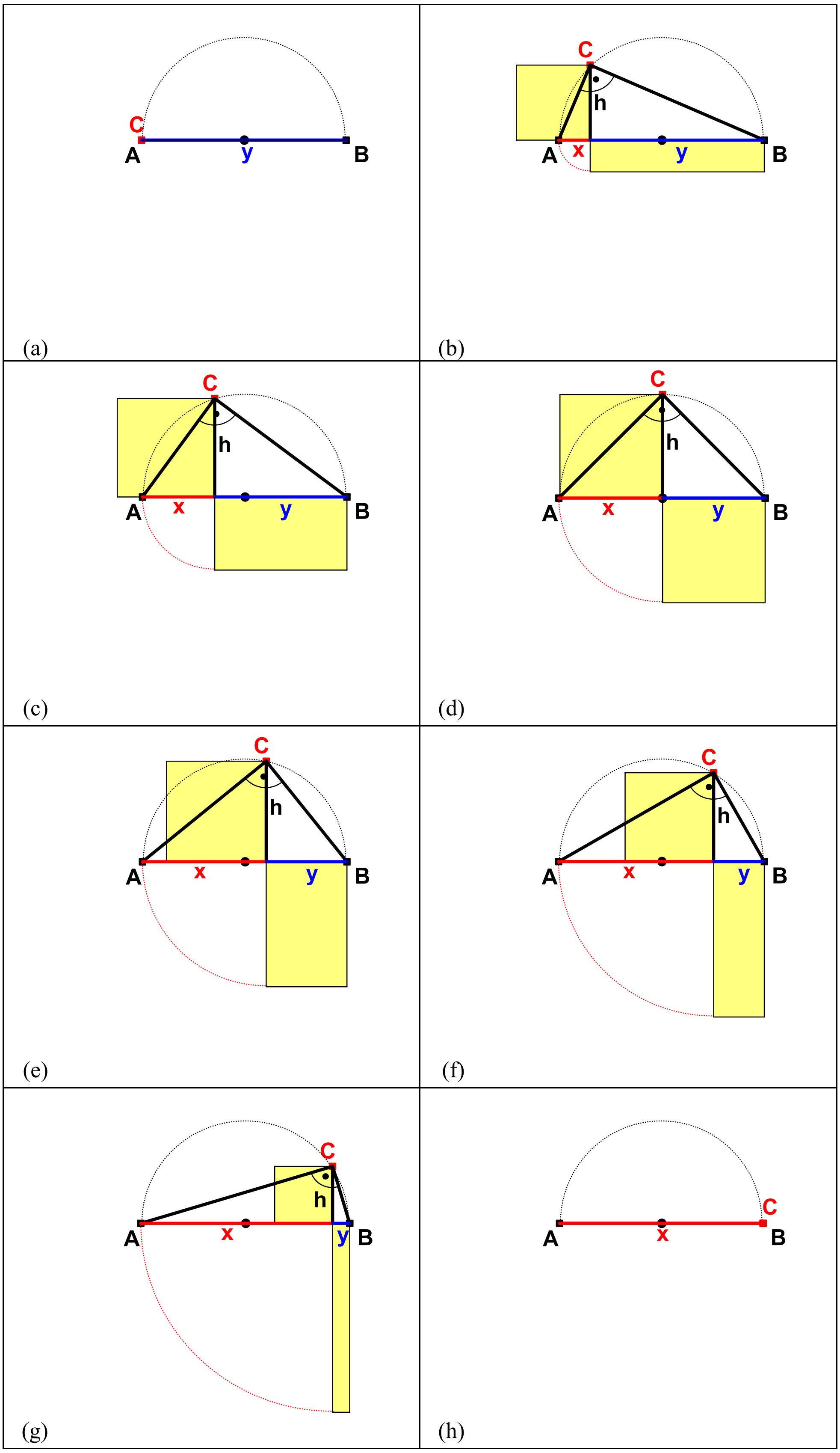


Abb. 4: Variation der Lage von *C* in der Höhensatzfigur

Wenn man die gesamte Bewegung vor Augen hat, wird deutlich, dass das Höhenquadrat genau dann den größten Flächeninhalt besitzt, wenn der Höhenfußpunkt von h mit dem Mittelpunkt des Thaleskreises zusammenfällt (vgl. **Abb. 4**(d)), da die Höhe nur dann dem Radius des Thaleskreises entspricht. In diesem Fall liegt also ein Maximum des Flächeninhalts vor. Die Kantenlänge dieses Höhenquadrats maximalen Flächeninhalts ergibt sich mit Hilfe der beiden Hypotenusenabschnitte x und y zu $h_{\max} = \frac{1}{2}\cdot(x + y)$. Da das Höhenquadrat und das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten aber flächengleich sind (Höhensatz), folgt auch: $h^2 = x \cdot y$. Für die Höhe gilt also $h = \sqrt{x \cdot y}$. Wegen $h \leq h_{\max}$ ergibt sich $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$. Dies ist aber gerade der Zusammenhang zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel. Diese Beziehung, die algebraisch für Schülerinnen und Schüler nur schwer durchschaubar ist, lässt sich nun geometrisch leicht deuten und verstehen als Extremalaussage über die Höhe im rechtwinkligen Dreieck. Mit Hilfe der Fähigkeit, die *Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren*, also jeweils relevante Teilaspekte in den Blick nehmen zu können, wurden hier (unerwartete) Einsichten gewonnen und Verstehen ermöglicht.

Für das Verständnis und die Beurteilung von Entwicklungen ist es unabdingbar, nicht nur die Tatsache der Bewegung bzw. Veränderung als solche im Blick zu haben, sondern sich auch *Rechenschaft darüber geben* zu können, wie, d. h. *auf welche Art und Weise, eine Veränderung abläuft*. Es geht also um die Fähigkeit, das *Änderungsverhalten* zu *erfassen*. Dies verdeutlicht folgendes Beispiel:

In ein gleichseitiges Dreieck ΔABC ist eine Sehne[16] s eingezeichnet. Hält man nun einen Endpunkt der Sehne fest (hier den in **Abb. 5** mit dem Eckpunkt A des Dreiecks zusammenfallenden Endpunkt) und bewegt den anderen Endpunkt Q gleichmäßig entlang der Randlinie des Dreiecks, so ändert sich die Länge der Sehne. Dieses Änderungsverhalten soll im Folgenden näher betrachtet werden.

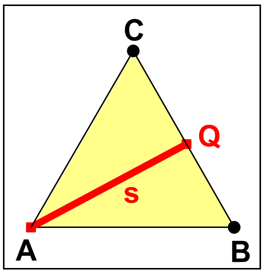


Abb. 5: Dreieckssehne

[16] Eine Dreieckssehne ist, analog zur Kreissehne, eine Strecke, die auf der Berandungslinie des Dreiecks beginnt und endet.

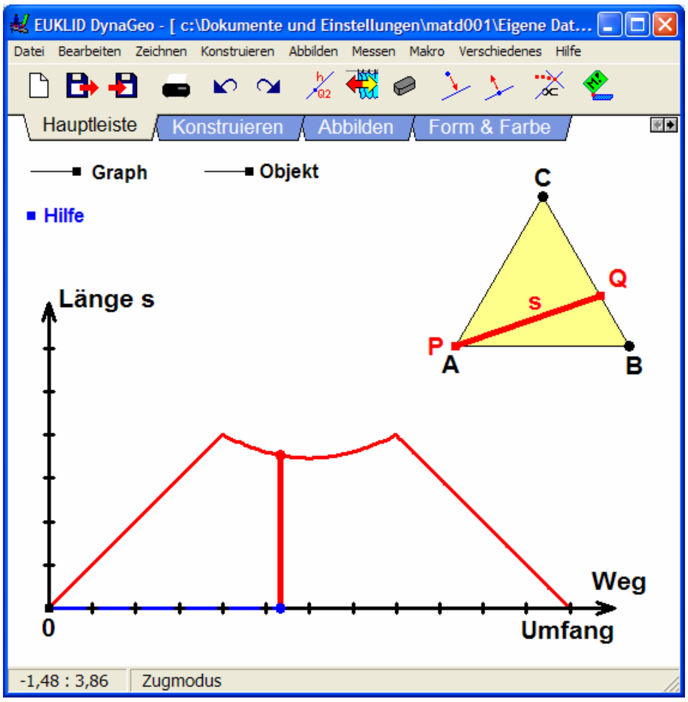


Abb. 6: Grahpische Darstellung der Dreieckssehnenlänge[17]

Die Bewegung des Punktes Q soll in A beginnen. Die Sehne hat dann noch keine Ausdehnung, besitzt also die Länge 0. Lässt man nun Q über B und C wieder nach A wandern, so verlängert sich die Sehne auf $[AB]$ zunächst, ab B wird sie kürzer bis zum Mittelpunkt von $[BC]$, dann wird sie wieder länger bis zum Punkt C.[18] Von da ab wird sie wieder kürzer, um in A wiederum die Länge 0 anzunehmen. Auffällig ist, dass sich auf $[AB]$ und $[BC]$ nur eine Zunahme bzw. eine Abnahme beobachten lassen. In den Punkten B und C sowie innerhalb von $[BC]$ findet jeweils ein Wechsel des Änderungsverhaltens vom Längerwerden zum Kürzerwerden bzw. umgekehrt statt.

Man kann dieses Änderungsverhalten anhand eines Graphen (vgl. **Abb. 6**) deutlich machen, bei dem die Länge der Sehne s über dem von A aus zurückgelegten Weg des Punktes Q auf der Dreiecksperipherie aufgetragen ist. Vergleicht man den Graphen mit der Figur[19], dann erkennt man deutliche Unterschiede zwischen dem Änderungsverhalten der Sehnenlänge, wenn Q sich auf den von A ausgehenden Seiten bzw. auf der A gegenüberliegenden Seite bewegt.

Läuft Q auf $[AB]$ bzw. $[CA]$, so erfolgt die Längenänderung gleichmäßig, weil dabei die Bewegung des Punktes vollständig in eine Längenänderung der Sehne s umgesetzt

---

[17] Das hier wiedergegebene DynaGeoX-Applet des Autors zu diesem Zusammenhang findet man im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → K → Kurvenerzeugende Sehnen → Dreieckssehne.

[18] Das Kürzer- und wieder Längerwerden der Sehne, wenn sich der Punkt Q auf $[BC]$ von B nach C bewegt, lässt sich z. B. wie folgt einsehen: Würde Q auf einem Kreisbogen mit Mittelpunkt in A von B nach C bewegt, so würde sich die Länge der Sehne s dabei nicht ändern, da sie immer Radius des Kreisbogens bliebe. Da die Strecke $[BC]$ Sehne des genannten Kreisbogens ist, muss die Strecke s, wenn sich ihr Endpunkt Q auf der Strecke $[BC]$ bewegt, zunächst kürzer und dann wieder länger werden.

[19] Gemeint ist das Dreieck mit der Sehne.

wird. Von *B* nach *C* nimmt die Länge zunächst ab, dann wieder zu. Dabei ändert sich aber auch die Stärke der Abnahme bzw. Zunahme. Das lässt sich geometrisch erklären: Eine Bewegung des Punktes *Q* in Richtung der „aktuellen Streckenrichtung"[20] führt zu einer Veränderung der Länge der Strecke. Dagegen bewirkt eine Bewegung von *Q* senkrecht zur aktuellen Streckenrichtung keine Längenänderung, sondern „nur" eine Änderung der Ausrichtung der Strecke in der Ebene.[21] Damit wird deutlich, dass eine Bewegung von *Q* eine umso stärkere Änderung der Länge von *s* bewirkt, je größer der Anteil der Bewegung in die aktuelle Streckenrichtung ist.[22] Da bei einer Bewegung von *Q* auf der Strecke [*BC*] von *B* bis zur Mitte der Strecke der Anteil der Bewegung in Streckenrichtung (zu Gunsten des Anteils senkrecht dazu) immer mehr abnimmt, ändert sich auch die Länge der Strecke *s* dabei immer weniger (vgl. **Abb. 7**(b) bis (f)). Analog überlegt man sich, dass bei der Bewegung von *Q* von der Mitte der Strecke [*BC*] nach *C* die Änderung der Streckenlänge immer mehr zunimmt.

[20] Die „aktuelle Streckenrichtung" ist die durch die aktuelle Lage der beiden Endpunkte der Strecke *s* und deren Verbindungsvektor markierte Richtung.

[21] Wird *Q* konsequent senkrecht zur jeweils „aktuellen Streckenrichtung" bewegt, so führt das zu einer Kreisbewegung. Die Strecke *s* bleibt dabei immer Kreisradius, ändert also ihre Länge nicht.

[22] Zur Verdeutlichung zeigt **Abb. 7** die entsprechenden Bewegungsanteile in Streckenrichtung und senkrecht dazu in Form von Vektoren. Der Vektor der Gesamtbewegung ergibt sich durch eine Vektoraddition aus den beiden genannten Vektoren. Die Darstellung findet man als dynamisches DynaGeoX-Applet im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → A → Änderungsverhalten → Sehnen geometrischer Figuren → Dreieckssehne (Am Punkt „Hilfe" ziehen!).

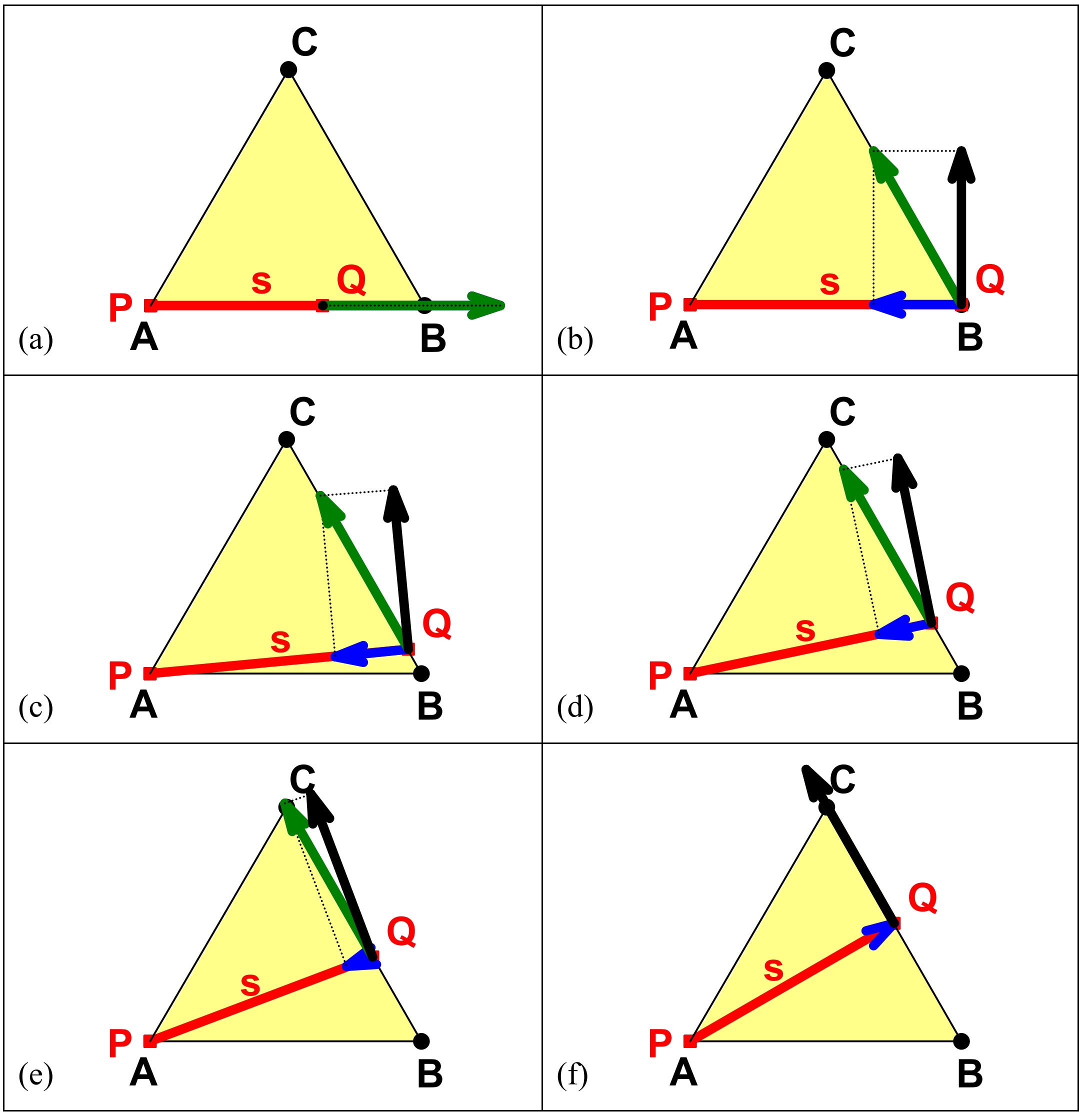


Abb. 7: Zerlegung der Bewegung von Q in die Bewegungsanteile in „aktuelle Streckenrichtung“ und senkrecht dazu.

Die Betrachtung dieses Beispiels wird hier unterbrochen, obwohl es noch sehr viele weitere Aspekte zu entdecken gäbe.[23] Allerdings soll noch einmal die Fähigkeit des

[23] Weiterführende Fragen sind z. B.: Wie lässt sich die Art der Änderung der Länge der Strecke s anhand des Graphen ablesen? Wie ändert sich der Graph, wenn man den ersten Endpunkt der Strecke s auf der Peripherie des Dreiecks verschiebt? Wie würde sich die Form des Graphen verändern, wenn man die Länge der Strecke s nicht über dem zurückgelegten Weg des zweiten Endpunktes, sondern über dem Winkel aufträgt, der von den beiden Endpunkten der Strecke s und dem Mittelpunkt des Dreiecks als Scheitelpunkt gebildet wird? Lässt sich für ein anderes Polygon als Grundfigur die Anzahl der Eckpunkte und die Lage des ersten Endpunktes der Strecke s nur anhand des Graphen bestimmen? … Für eine Auseinandersetzung mit diesen Fragen lohnt es sich, den Artikel ROTH (2005a) und die auf DynaGeoX-Applets basierende Aufgabensequenz des Autors anzusehen, die man im Internet unter der Adresse „http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → K → Kurvenerzeugende Sehnen“ findet.

Beweglichen Denkens betont werden, die bei diesem Beispiel eine zentrale Rolle gespielt hat: Es ist die Fähigkeit, *die Art und Weise einer Veränderung, also das Änderungsverhalten* zu *erfassen und* zu *beschreiben*.

Die oben aufgeführten Beispiele haben gezeigt, dass die dort genannten Fähigkeiten des Beweglichen Denkens mit verschiedenen Anspruchsniveaus verbunden sind. Sie beginnen auf einem Niveau, das als intuitiv bezeichnet werden kann und die Anschauung fördert, führen dann aber in sehr anspruchsvolle Bereiche, in denen sich Bewegliches Denken in fortgeschrittenen mathematischen Überlegungen manifestiert. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Entwicklung Beweglichen Denkens ein langwieriger Prozess ist, ein Weg, der, um erfolgreich zu sein, möglichst bewusst beschritten werden muss.

Was sind nun aber die Fähigkeiten, die unter dem Begriff *Bewegliches Denken* zusammengefasst werden? Im Folgenden werden die angesprochenen drei Komponenten des Beweglichen Denkens noch einmal zusammengestellt. Es ist allerdings darauf hinzuweisen, dass sie je nach Problemstellung mehr oder weniger fließend ineinander übergehen und in wechselnden Kombinationen vorkommen. Es wird darüber hinaus selten nur eine der Fähigkeiten alleine genutzt werden. Die Komponenten werden sich in aller Regel gegenseitig ergänzen und zusammenwirken.

Komponenten des Beweglichen Denkens:
Bewegung hineinsehen und damit argumentieren
Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren
Änderungsverhalten erfassen und beschreiben

Tabelle 1: Komponenten des Beweglichen Denkens

Bewegung hineinsehen und damit argumentieren

Hier geht es um die Fähigkeit, in ein (statisches) Phänomen eine Bewegung bzw. eine Veränderung hineinsehen zu können. Darüber hinaus gehört zu dieser Komponente des Beweglichen Denkens aber auch die Fähigkeit, diese vorgestellte Bewegung/Veränderung zur Argumentation beim Lösen von Problemen, Entdecken von Zusammenhängen und ganz allgemein beim Erforschen von (mathematischen) Phänomenen benutzen zu können.

Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren

Zum Beweglichen Denken gehört die Fähigkeit, eine reale bzw. vorgestellte („hineingesehene“) Bewegung/Veränderung in ihren Auswirkungen auf die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren zu können. Dies erfordert, die Fokussierung auf bestimmte Aspekte wechseln und so jeweils für gerade betrachtete Fragestellungen relevante Veränderungen bzw. Invarianten in den Blick nehmen zu können.

Änderungsverhalten erfassen und beschreiben

Der dritte Aspekt des Beweglichen Denkens ist die Fähigkeit, die Frage nach der Art und Weise der Veränderung beantworten, also das Änderungsverhalten qualitativ erfassen und beschreiben zu können.

1.2 Begriffsumfang und Abgrenzung gegen verwandte Begriffe

Im ersten Abschnitt wurden Fähigkeiten des Beweglichen Denkens an einzelnen Beispielen analysiert und damit eine Verständnisgrundlage gebildet. Auf diese Basis aufbauend werden nun verwandte Begriffe aus der Literatur untersucht, um mit ihrer Hilfe den Inhalt und Umfang des Begriffs *Bewegliches Denken* herauszuarbeiten und ihn gegenüber anderen Begriffen abzugrenzen.

1.2.1 Denken – Der Versuch einer Eingrenzung

Es ist nicht möglich, den Begriff „Denken" im Rahmen dieser Arbeit auch nur annähernd eingrenzen oder beschreiben zu wollen, da selbst in der Kognitionspsychologie und ihrem Teilgebiet der Denkpsychologie keine einheitliche Theorie des menschlichen Denkens vorliegt. In ANDERSON (2001), einem Standardwerk der kognitiven Psychologie, sucht man denn auch vergeblich nach einer Definition von „Denken". Hier, wie auch in anderen entsprechenden Werken, wird „nur" dargelegt, wie die Denkpsychologie in verschiedenen Ansätzen versucht, die „Arten und Formen des D(enkens) aus dem Umgang mit bestimmten Aufgaben oder Problemen und den daraus resultierenden sprachlichen oder sprachfreien Verhaltenskonsequenzen"[24] zu erschließen.[25] Dies ist umso verständlicher, als das Denken, als interner subjektiver Prozess, der direkten Beobachtung nicht zugänglich ist. Man kann nur versuchen, indirekt[26] Rückschlüsse auf zu Grunde liegende Denkprozesse zu ziehen, also nach ZIMBARDO (1995, S. 358) das „Nichtbeobachtbare beobachtbar (zu) machen".[27]

---

[24] FRÖHLICH (2003), S. 620

[25] Man fühlt sich hier an den axiomatischen Aufbau der Geometrie erinnert, bei dem die Axiome die Beziehungen zwischen Objekten, die Punkte, Geraden und Ebenen genannt werden, mathematisch vollständig beschreiben, die Objekte selbst aber nicht definiert werden. (vgl. HILBERT (1999), S. 2)

[26] z. B. durch Introspektion, lautes Denken, Beobachtung des Verhaltens, Messungen von Reaktionszeiten, Augenbewegungen, Gehirnwellen u. ä.

[27] Die Neurophysiologie würde diesen Satz übrigens nicht (mehr) gelten lassen. Mit modernen bildgebenden Verfahren wie der Positronenemissionstomographie (PET) und der funktionellen Magnetresonanztomographie (FMRT) ist es prinzipiell möglich bestimmte (Denk-)Leistungen (die auf die Aktivierung bestimmter Bereiche des neuronalen Netzes zurückgeführt werden) im Gehirn zu lokalisieren. (Vgl. SPITZER (2002), S. 37ff).

Ein weiterer Gesichtspunkt, der es schwierig macht „das Denken“ zu erfassen, liegt darin, dass das Denken von einer ganzen Reihe von Aspekten abhängt und bei jedem denkenden Individuum unterschiedlich abläuft. Einflussfaktoren sind z. B. der Stand der kognitiven Entwicklung[28], die Vorerfahrungen des Individuums, die Art der jeweiligen Codierung bzw. Repräsentation (sensomotorisch, bildhaft-anschaulich, sprachlich-symbolisch)[29], die Präferenz für eine Denkform[30], der Denkstil[31] u. a.

Auf Grund dieser Schwierigkeiten ist es nicht verwunderlich, dass Versuche, das Denken zu definieren in der Regel in Aufzählungen von Tätigkeiten oder Fähigkeiten bestehen, die mit „Denken“ verbunden werden. Bei ZIMBARDO (1995) findet sich folgende Definition für Kognition[32]:

> „**Kognition** ist der allgemeine Begriff für alle Formen des *Erkennens* und *Wissens*. Dazu gehören etwa: Aufmerksam sein, Erinnern, Urteilen, Vorstellen, Antizipieren, Planen, Entscheiden, Problemlösen und das Mitteilen von Ideen. Kognition umfaßt auch die Prozesse der *mentalen Repräsentation*. Dazu gehören beispielsweise Klassifizieren und Interpretieren. Sie umfaßt ebenfalls Prozesse, die wir intern generieren, wie beispielsweise in Träumen und Phantasien, und die Inhalte dieser Prozesse, wie Begriffe, Faktenwissen und Erinnerungen.“ ZIMBARDO (1995), S. 357

Bei HÄCKER/STAPF (1998) findet man:

> „**Denken**, (…) die interpretierende und ordnungstiftende Verarbeitung von Informationen; auch Bez. für den Einsatz der intellektuellen Funktionen oder für kognitives Verhalten, wie Begriffsbildung und versch. Operationen mit Begr. oder anderen Schemata unterschiedlichen Abstraktionsgrades (Kognitionen, kognitive Strukturen) zum Wiedererkennen, Entdecken, Erfinden von Beziehungen, die zw. ihnen gelten; Bez. für Problemlösen.“ HÄCKER/STAPF (1998), S. 171

Die angebotenen „Listen“ sind nicht einheitlich, als gemeinsamen Aspekt findet man aber, dass Denken (erst) dann einsetzt,

---

[28] Hier sei auf die Entwicklungspsychologie und insbesondere die Arbeiten von PIAGET verwiesen.
[29] vgl. FRÖHLICH (2003), S. 619
[30] Hier werden u. a. archaisches Denken, analoges Denken, kausal-lineares Denken und vernetztes Denken unterschieden.
[31] Man unterscheidet u. a. zwischen diskursivem, intuitivem, divergentem (bzw. produktivem) und konvergentem Denken.
[32] Denken kann laut ZIMBARDO als wesentlicher Teil der Kognition aufgefasst werden. Interessanterweise wird Denken selbst bei ZIMBARDO nicht definiert.

> „wenn keine automatischen, d. h. zur Routine gewordenen Wege verfügbar sind, ein Erkenntnisziel zu erreichen oder ein Problem zu lösen.“ FRÖHLICH (2003), S. 618

Hier fällt zum wiederholten Mal ein zentraler Begriff im Zusammenhang mit Denken, nämlich der Begriff „Problemlösen“. Es gibt eine Reihe von Autoren, die Denken und Problemlösen sogar synonym verwenden. Ein Paradebeispiel hierfür ist sicher POLYA (1995)[33]. Sein Buch „Schule des Denkens“ trägt den Untertitel „Vom Lösen mathematischer Probleme“.

Neben dem Begriff „Problemlösen“ ist der Begriff „Struktur“ im Zusammenhang mit dem Denken wesentlich. Die folgende, aus dem Buch „Produktives Denken“ des Gestaltpsychologen WERTHEIMER (1957)[34] stammende Definition des Denkens fußt z. B. vollständig auf dem Begriff der Struktur und dem Umgang mit Strukturen.

> „Denken besteht aus dem Bemerken und Ins-Auge-Fassen struktureller Züge und struktureller Forderungen; dem Vorgehen im Einklang mit, und geleitet von, diesen Forderungen; wobei man die Situation in Richtung struktureller Verbesserung verändert, was einschließt:
>
> - daß Lücken, verworrene Stellen, Störungen, Oberflächlichkeiten gesehen und strukturell behandelt werden;
> - daß nach inneren strukturellen Beziehungen – Passen oder Nichtpassen – an solchen Störungen, an der gegebenen Situation als ganzer und an ihren verschiedenen Teilen gesucht wird;
> - daß strukturelle Operationen, wie Gruppierung und Sonderung, Zentrierung usw. stattfinden;
> - daß die Operationen selbst gemäß ihrer strukturellen Stelle, Rolle und dynamischen Bedeutung gesehen und behandelt werden, einschließlich der Erfassung der Änderungen, die das mit sich bringt;
>
> aus dem Bemerken struktureller Transponierbarkeit, struktureller Hierarchie, und aus der Scheidung strukturell äußerlicher von wesentlichen Zügen – ein besonderer Fall der Gruppierung;
> aus dem Blick auf die strukturelle, nicht die stückhafte Wahrheit.“ WERTHEIMER (1957), S. 221

Für DIENES/JEEVES (1968, S. 130) bedeutet Denken, bei der Beschäftigung mit neuen Situationen die gespeicherten Informationen neu zu ordnen, also Strukturen zu erzeugen

[33] Die englische Originalausgabe „How to Solve it“ erschien bereits im Jahr 1945.
[34] Die englische Originalausgabe „Productive Thinking“ erschien bereits im Jahr 1945. WERTHEIMER erläutert Produktives Denken darin übrigens fast ausschließlich anhand von mathematischen Beispielen.

oder vorhandene Strukturen zu bearbeiten. Auch RUBINSTEIN bezieht sich auf das Arbeiten mit Strukturen, wenn er schreibt:

> „Der Denkprozeß ist vor allem ein Analysieren und ein Synthetisieren dessen, was die Analyse ergeben hat; er ist ferner Abstraktion und Verallgemeinerung, die sich aus Analyse und Synthese ableiten (…)." RUBINSTEIN (1968), S. 31

Dieser Fokus auf die Struktur im Zusammenhang mit dem Denken ist weit verbreitet und spielt gerade auch in den Arbeiten PIAGETS eine zentrale Rolle. Er stellt heraus, dass das Denken und der bei ihm damit eng verbundene Begriff „Intelligenz" sich in dem Maße entwickeln, in dem Strukturen herausgebildet und erfasst werden. Wichtig ist ihm dabei, dass Denken letztlich verinnerlichtes Handeln ist und sich als solches aus der konkreten Handlung entwickelt.

> „ (…) man braucht notwendigerweise das Handeln. Die Intelligenz ist ein System von Operationen (…). Die Operation ist nichts anderes als ein Handeln; es ist ein wirkliches Handeln, das sich innerlich vollzieht und ‚reversibel' geworden ist. Damit es dem Kind gelingt, Operationen zu kombinieren (…), muß es notwendigerweise zunächst hantiert haben. Es muß gehandelt, experimentiert haben, aber nicht nur mit Zeichnungen, sondern mit wirklichem Material, mit körperlichen Gegenständen. Dann verinnerlichen sich diese Handlungen. Indem sie sich verinnerlichen, koordinieren sie sich, werden reversibel und bilden sich zu ‚Operationen' um. Die Operation ist nichts anderes als das ursprüngliche Handeln, das mit anderen Handlungen koordiniert ist, sie gestaltet reversible Kompositionssysteme wie die Gruppen in der Geometrie, die Zahlengruppen usw." PIAGET (1967)[35], S. 72

AEBLI (1980), ein Schüler PIAGETS, bringt dies auf den Punkt, wenn er bereits im Titel seines zweibändigen Werkes das Denken als „Ordnen des Tuns" definiert. Er umschreibt das Denken mit Kognition und Reflexion und erläutert:

> „Das ist das Wesen der Kognition. Sie hat die Struktur und ihre Ordnung zum Gegenstand. (…)
>
> Das ist Reflexion: Innehalten in der praktischen Tätigkeit und Austausch des praktischen Tuns gegen eine Tätigkeitsform, die die Strukturanalyse erleichtert (…), kurz: Zentrierung der Struktur. (…) Denken, Reflexion ist also eine Metatätigkeit über dem konkreten Handeln. (…) In der Vorstellung, auf symbolischen Daten operierend, mit Worten statt mit wirklichen Taten und Gegenständen handelnd, ist es beweglicher. Im innerlichen und abstrakten Probehandeln – im „Operieren" – werden die wesentlichen Beziehungen rascher und sicherer geknüpft. Die Struk-

[35] Die erste Auflage dieses Artikels erschien 1964.

> tursicherung und -verbesserung gelingt eher als in der schwerfälligen praktischen Handlung.
>
> Was wir bisher beschrieben haben, heißt im Jargon der Psychologie Problemlösen.
>
> (…) Wie immer (…) die Gegebenheiten beschaffen sind, Denken sucht ihre Struktur zu klären und dort, wo Beziehungen unscharf sind, die notwendigen neuen Verbindungen zu schaffen." AEBLI (1980), S. 21ff

Die moderne psychologische und neuropsychologische Lehr-Lern-Forschung, die u. a. auf die Untersuchung von Gehirnreaktionen mit Hilfe bildgebender Verfahren basiert, stützt den bei PIAGET und AEBLI herausgestellten Zusammenhang zwischen Handeln und Denken. STERN, eine Kognitionspsychologin, erklärt z. B.:

> Zu den interessanten Ergebnissen der neueren Gehirnforschung gehört auch, dass wir uns bei der Erforschung höherer geistiger Prozesse, die dem Menschen vorbehalten sind, nicht auf die Betrachtung der Großhirnrinde beschränken dürfen. Dazu gehört beispielsweise, dass sich die Funktion des Kleinhirns nicht – wie ich noch aus dem Grundstudium mitgenommen habe – auf die Regelung des Gleichgewichts beschränkt, sondern dass es auch an anspruchsvollen Lern- und Denkvorgängen beteiligt ist. In der psychologischen Lernforschung häufen sich Befunde, die zeigen, dass es enge Zusammenhänge zwischen Körperhandlungen und Denken gibt, wie z. B. beim Gestikulieren. Es kann erwartet werden, dass die Zusammenführung von Befunden aus der Psychologie und der Gehirnforschung mittelfristig zur Entwicklung integrativer Theorien des Denkens und Verhaltens führt. STERN (2004), S. 351f

1.2.2 Beweglichkeit des Denkens – Eine Abgrenzung

In der Psychologie ist im Zusammenhang mit Denken auch immer wieder von Beweglichkeit die Rede, womit die Fähigkeit eines flexiblen Umgangs mit Wissen gemeint ist, also die Fähigkeit, Wissen umstrukturieren, aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten und auf neue Ziele anwenden zu können. Der Psychologe KÖHLER (1963)[36] verweist z. B. darauf, dass zum intelligenten Denken und Handeln die Fähigkeit gehört, auch Umwege benutzen zu können, um zum Ziel zu gelangen, und für WERTHEIMER (1957)[34] ist ein Aspekt des produktiven Denkens die Fähigkeit zur Umstrukturierung. Damit Umwege gegangen oder Probleme umstrukturiert werden können, ist es notwendig, die

[36] Die erste Auflage des Buches „Intelligenzprüfung an Menschenaffen" erschien 1921.

Gesamtsituation im Blick zu haben. Auch und gerade PIAGET (1972b)[37] arbeitet den Zusammenhang zwischen Systemhaftigkeit und Beweglichkeit des Denkens heraus. Für ihn ist Beweglichkeit immer Beweglichkeit in einem System.[38] Entwicklung der Intelligenz bedeutet, dass das Denken systematischer und beweglicher wird. Wer ein Gesamtsystem und dessen interne Beziehungen (Gesetze) kennt, der kann sich gut innerhalb dieses Systems bewegen, d. h. verschiedene Perspektiven einnehmen, Umwege beschreiten u. ä. Es gilt aber auch, dass derjenige, der sich auf vielen verschiedenen Wegen durch das System bewegt hat, das Gesamtsystem kennt. Für PIAGET ist die Beweglichkeit des Denkens im Rahmen der kindlichen Denkentwicklung auch notwendig zur Überwindung des Egozentrismus, also der Unfähigkeit des kleinen Kindes, sich in die Lage anderer Menschen versetzen und erkennen zu können, dass Urteile über Dinge und Beziehungen sich verändern können, wenn man sie von einem anderen Standpunkt aus betrachtet. Aufbauend auf PIAGET fasst AEBLI (2001)[39], der hier von beweglichem Denken und Handeln spricht, den Begriff der Beweglichkeit zusammen und gibt eine Reihe von Aspekten an, deren Kernaussagen hier zusammengestellt sind:

> „Die elementarste Form der geistigen Beweglichkeit (…) ist die Fähigkeit, Veränderungen im Geiste nachzuvollziehen."
>
> „Beweglichkeit bedeutet (…) die Fähigkeit, sich auf fremde Standpunkte zu stellen und zu erkennen, dass die Perspektive von verschiedenen Standpunkten verschieden ausfällt."
>
> „Die Planung von Handlungen erfordert (…) Beweglichkeit. Der Handelnde sollte seine Handlungspläne den sich wandelnden Bedingungen anpassen, wenn nötig die Zwischenziele verändern können, um auf einem neuen Weg zum Ziel zu gelangen." AEBLI (2001), S. 311ff

Vergleicht man diese Fähigkeiten mit denen, die weiter oben unter dem Begriff *Bewegliches Denken* subsumiert wurden,[40] so erkennt man Gemeinsamkeiten, aber auch deutliche Unterschiede. Veränderungen „im Geiste nachzuvollziehen"[41] impliziert, sie vorher bereits wahrgenommen zu haben. Die Fähigkeit Veränderungen, wenn sie sich er-

---

[37] Die französische Originalausgabe „La Psychologie de l'Intelligence" erschien bereits im Jahr 1947.
[38] Dieses System kann angefangen beim anschaulichen System verbundener Räume bis hin zum System verknüpfter Operationen sehr unterschiedlich realisiert sein.
[39] Die erste Fassung dieses Buches erschien bereits 1963 unter dem Titel „Grundformen des Lehrens".
[40] Für einen Zusammenstellung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens siehe Abschnitt 1.1 auf den Seiten 19f.
[41] vgl. obiges AEBLI-Zitat

eignen, als solche bewusst wahrzunehmen, ist sicher eine Voraussetzung dafür, sich Veränderungen auch dann vorzustellen, wenn sie nicht real ablaufen und damit sinnlich wahrgenommen werden können. Mir geht es beim Beweglichen Denken gerade darum, Bewegungen/Veränderungen in ein Phänomen hineinzusehen, bei dem zunächst keine Bewegung vorhanden ist bzw. diese nicht geeignet wahrgenommen werden kann. Es geht also nicht um ein Nachvollziehen von bereits vorhandenen Veränderungen, sondern um das bewusste, aktive Verändern einer evtl. zunächst statischen Konfiguration einschließlich der Reflexion der Konsequenzen dieser Veränderung, um neue Einsichten in Zusammenhänge zu bekommen.

„Sich auf fremde Standpunkte stellen“[41] korrespondiert mit der Fähigkeit des Beweglichen Denkens, die Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren. Um eine Veränderung in ihren Auswirkungen auf die Gesamtkonfiguration zu erfassen ist es notwendig, jeweils relevante Veränderungen bzw. Invarianten zu fokussieren und ggf. miteinander in Beziehung zu setzen.

„Zwischenziele verändern können“[41] spielt beim Beweglichen Denken dann eine Rolle, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade bewusst variiert wird, um die Konsequenzen einer Veränderung besser analysieren zu können.[42]

In dem von mir für mathematikdidaktische Zwecke geprägten Begriff des Beweglichen Denkens tritt zu den bereits bei AEBLI genannten noch ein weiterer Aspekt hinzu, nämlich die Fähigkeit Änderungsverhalten erfassen und beschreiben zu können. Diese Fragestellung nach der Art und Weise der Veränderung der abhängigen Größen bei gleichmäßigem Durchlaufen des bzw. eines Definitionsbereiches ist für viele mathematische Sachverhalte relevant und muss deshalb mit Blick auf den Mathematikunterricht aufgenommen werden.

Weitere Aspekte zur „Beweglichkeit des Denkens“ finden sich bei LOMPSCHER ET AL. (1976). Dort schreibt HASDORF:

> „Das geistige – beim Probieren mit praktischen Handlungen verbundene – Verändern der jeweiligen Beziehungen der Dinge und Eigenschaften zueinander ist der eigentliche Kern der Beweglichkeit des Denkens.“ LOMPSCHER ET AL. (1976), S. 16

---

[42] Vgl. die Schritte des Gedankenganges beim „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ auf Seite 78f.

Er unterscheidet folgende Formen der Beweglichkeit des Denkens:

> „a) Aktives *Umformen* von Gegebenheiten (auch Umstrukturieren): Durch Variationen der Bezugsetzung werden die jeweils wesentlichen Merkmale eines Dinges expliziert beziehungsweise ‚neue' Merkmale gefunden, zum Beispiel durch Veränderung der Beziehungen des Wesentlichen zum Unwesentlichen (Veränderung der Betonung), durch Funktionsveränderungen von Elementen oder der Beziehungen Teil – Ganzes.
>
> b) *Reversibilität*: Es werden Gedankenfolgen umgekehrt, wobei Bedingungen und Ziele beziehungsweise Ergebnisse in ihren Positionen zueinander gewechselt werden. Umkehren kann Herstellen eines reziproken Verhältnisses oder auch vollständiges Zurückkehren auf den Ausgangspunkt (Inversion) bedeuten.
>
> c) Wechseln von *Annahmen* oder Kriterien: Ein Standpunkt beziehungsweise ein Gesichtspunkt hinsichtlich der Erklärungen, Lösungswege, Ordnungsprinzipien usw. wird zielgerichtet und begründet verändert.
>
> d) Erfassen und Anwenden der *Relativität*: Die Abhängigkeit von Dingen wird erkannt, und die Bezugsetzung eines Dinges zu anderen Dingen wird verändert.
>
> e) *Gleichzeitiges Beachten mehrerer Aspekte*: Die Ergebnisse verschiedener Aspektbetrachtungen eines Dinges werden zueinander in Beziehung gesetzt beziehungsweise miteinander kombiniert." LOMPSCHER ET AL. (1976) S. 16f

Das aktive *Umformen* von Gegebenheiten spielt auch bei der Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren" des Beweglichen Denkens eine Rolle. Allerdings werden beim Beweglichen Denken z. B. keine „Funktionsveränderungen von Elementen" vorgenommen, sondern es wird jeweils eine Variable gezielt in ihrem Definitionsbereich variiert und dabei die Veränderungen von abhängigen Größen (bzw. die Invarianten) in den Blick genommen. *Reversibilität*[43] spielt beim Beweglichen Denken bei der Fähigkeit eine Rolle, die Fokussierung auf bestimmte Aspekte einer Konfiguration wechseln zu können. Bei LOMPSCHER ET AL. (1976) kommt die Reversibilität dagegen eher in den Punkten „Wechseln von Annahmen oder Kriterien" sowie „Erfassen und Anwenden der Relativität" zum Tragen. Aus der Sicht des Beweglichen Denkens würde auch der Punkt „Gleichzeitiges Beachten mehrerer Aspekte" unter die Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren" zu subsumieren sein.

Im Hinblick auf mathematikdidaktische Anforderungen ist es notwendig Bewegliches Denken unter anderen Gesichtspunkten zu sehen, als dies in der Psychologie der

[43] Reversibilität ist ein zentraler Begriff bei PIAGETS Theorie der Gruppierung.

Fall ist. Insbesondere muss das Änderungsverhalten und die Fähigkeit, es erfassen und beschreiben zu können, für mathematikdidaktische Zwecke hinzukommen.

Abschließend sei noch auf ein mehrfach reproduziertes Ergebnis der psychologischen Forschung verwiesen, das in LOMPSCHER ET AL. (1976, S. 17) referiert wird. Offensichtlich ist die Beweglichkeit des Denkens, so wie HASDORF sie in LOMPSCHER ET AL. (1976) beschreibt, stark abhängig von den konkreten Inhalten der Denkprozesse.

Im nächsten Abschnitt werden Denkprozesse weniger inhalts- als vielmehr personenbezogen betrachtet. SCHWANK berichtet in ihren Untersuchungen zum prädikativen und funktionalen Denken von personenbezogenen und sehr stabilen Präferenzen für einen „Denkstil".

1.2.3 Denkstile: Prädikatives versus funktionales Denken

SCHWANK hat in ihren Arbeiten Unterschiede in den Strukturen und Strategien mathematischen Denkens herausgearbeitet,[44] nämlich einerseits Denkweisen, die eher statisch und andererseits solche, die eher dynamisch sind, d. h. in Bewegungen bzw. Veränderungen argumentieren. Diese beiden Denkstile nennt SCHWANK in obiger Reihenfolge prädikatives bzw. funktionales Denken[45] und erläutert sie wie folgt:

> „Wir kennen einmal [a] die Empfänglichkeit eines Gehirns für Gleichheiten (etwas anspruchsvoller: für Ähnlichkeiten/Verwandschaften), die in Gedanken genutzt werden können, um Elemente in einen systematischen, strukturellen Zusammenhang zu bringen, die Gleichartigkeit fungiert dabei als Ordnungskriterium; zum anderen [b] die Empfänglichkeit eines Gehirns für Unterschiedlichkeiten, die in Gedanken genutzt werden können, um Elemente durch einen diese Unterschiedlichkeiten bewirkenden Konstruktionsprozess (etwas anspruchsvoller: durch Verkettungen von mehreren unterschiedlichen Konstruktionsprozessen) auf die Reihe zu bringen, die Unterschiedlichkeit fungiert dabei als Herstellungskriterium. Um diese beiden verschiedenartigen kognitiven Herangehensweisen zu unterscheiden, führen wir die Begriffe »prädikatives Denken« respektive »funktionales Denken« ein. Hierbei erinnert »prädikativ« daran, dass bei [a] das wiederholte Zutreffen von Prädikaten überprüft wird, und »funktional« daran, dass bei [b] das wiederholte Funktionieren der Konstruktionsschritte getestet wird." SCHWANK (2003), S. 70

[44] Vgl. etwa SCHWANK (1996) und SCHWANK (2003).
[45] Funktionales Denken wird bei SCHWANK (1996), wie sie selbst betont, nicht im Sinne von VOLLRATH (1989) als Denken im Zusammenhang mit Funktionen gebraucht. Näheres zum funktionalen Denken in diesem letzteren Sinn findet sich in Abschnitt 1.2.8 auf den Seiten 69ff.

Wenn man die eben zitierten Definitionen für prädikatives bzw. funktionales Denken heranzieht, so wird nicht besonders deutlich, dass das Argumentieren mit Bewegungen bzw. Veränderungen, also das funktionale Denken in SCHWANKS Nomenklatur mit der im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken interessierenden Kompetenz „Bewegungen hineinsehen und damit argumentieren" korrespondiert. Betrachtet man allerdings Beispiele von Problemlöseprozessen, an denen SCHWANK ihre Unterscheidung festmacht, so sind die Überschneidungen offensichtlich. Zur Illustration werden deshalb im Folgenden zwei verschiedene korrekte Lösungen einer Mustergänzungsaufgabe[46] dargestellt:

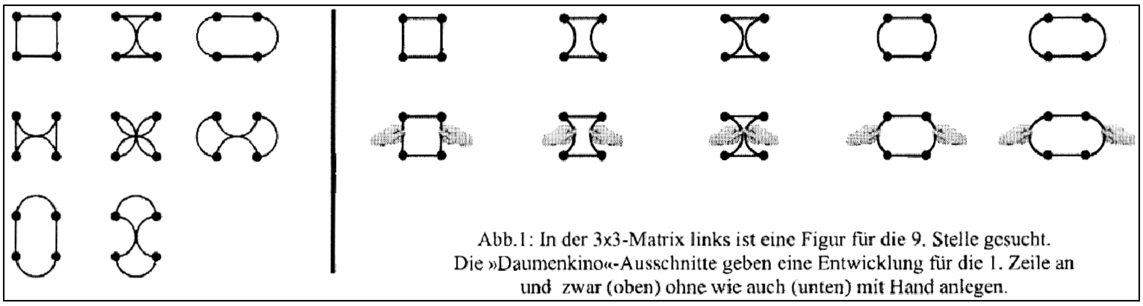


Abb. 8: Prädikatives versus funktionales Denken: Mustergänzungsaufgabe aus SCHWANK (2003), S. 71

In der in **Abb. 8** auf der linken Seite dargestellten Bildermatrix soll die Figur rechts unten passend ergänzt werden. Die *prädikative Analyse* stützt sich darauf, dass in den Zeilen die „Deckel" und „Böden" der Figuren jeweils die gleiche Form haben, während in den Spalten jeweils die „Seitenwände" gleiche „Gestalt" haben. Damit ist klar, wie die aus „Deckel", „Boden" und zwei „Seitenwänden" bestehende Figur in der dritten Reihe und Spalte aussehen muss. Bei ihr sind alle vier Seiten nach außen gewölbt. Dagegen erkennt die *funktionale Analyse*, dass sich die Seitenwände in den Zeilen verändern und sieht einen Vorgang des Zusammendrückens und anschließenden Auseinanderziehens der Seiten in die „Bildfolge" hinein.[47] In gleicher Weise wird auch Zusammendrücken und Auseinanderziehen von Deckel und Boden in die „Spaltenbildfolgen"

[46] Dieser Problemtyp ist einer der inhaltlichen Schwerpunkte, an denen SCHWANK ihre empirischen Untersuchungen zu prädikativem versus funktionalem Denken durchgeführt hat.
[47] Vgl. die Bildfolgen auf der rechten Seite der Abb. 8 auf Seite 41.

hineingesehen. Auf diese Weise ergibt sich, dass die Figur rechts unten „herausgezogene“ Seiten und Deckel sowie Boden besitzt.

Die „funktionale Analyse“ kann im Sinne des Beweglichen Denkens als „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ charakterisiert werden. SCHWANK scheint mit ihrem Begriff „funktionales Denken“ genau diese grundlegende Fähigkeit des Beweglichen Denkens zu meinen. Da die Fähigkeit, Bewegungen bzw. Veränderungen in eine Konfiguration hineinsehen und damit argumentieren zu können, meiner Einschätzung nach grundlegend für den Aufbau der weiteren (und komplexeren) Fähigkeiten des Beweglichen Denkens ist, werden wir hier noch einige Ergebnisse der Arbeiten SCHWANKS anführen.

SCHWANK hat in ihren Arbeiten zum prädikativen und funktionalen Denken herausgearbeitet, dass Individuen eine Präferenz entwickeln hin zu „einer mehr statischen oder mehr dynamischen internen begrifflichen Repräsentation“. Ihre Untersuchungen mit Grundschulkindern[48] zeigen, dass eine entsprechende Neigung bereits im Grundschulalter vorhanden ist. Darüber hinaus stellt SCHWANK (2000, S. 579) auf Grund mehrerer Untersuchungen fest, „dass es bei Schülern der Sek I stabile Präferenzen für prädikatives versus funktionales Denken gibt“. Diese Aussage gilt offensichtlich dann, wenn keine bewusste Förderung einer der beiden Denkweisen erfolgt. Darüber hinaus konstatiert SCHWANK (1996, S. 178): „Wie (…) Förderprogramme zum Denken aussehen müßten, einmal zum Training prädikativen Denkens (…), zum anderen zum Training funktionalen Denkens (nicht in Sicht), ist unklar (…).“ Wenn es aber solche Trainingsprogramme geben sollte, dann müsste „immer wieder Gelegenheit gegeben werden, um Denken auszuprobieren und so Denken immer wieder in Anwendung zu bringen.“ Das Unterrichtskonzept, das im Rahmen dieser Arbeit von mir entwickelt wurde, versucht auf dieser Überlegung aufbauend Bewegliches Denken anzubahnen und zu fördern.[49]

Eine Problematik im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken wird von SCHWANK (2003) in der Gegenüberstellung von prädikativem und funktionalem Denken herausgearbeitet. Es geht dabei um die Frage der Verbalisierung von Beweglichem

[48] vgl. SCHWANK (1996), S. 180
[49] vgl. Kapitel 3 ab Seite 135

Denken. Im Hinblick auf funktionale Erklärungen der Lösung der Aufgabe aus **Abb. 8** auf Seite 41 stellt sie fest:

> „Worauf soll die erklärende Person zeigen. wenn sie den *Prozess* anspricht, der die eine Figur in die nächste überführt? Auf dem Blatt gibt es keine Bewegung, es ereignet sich nichts: das Passieren ist ein mentales Konstrukt. Versuche, dieses sichtbar zu machen, etwa mit einem Daumenkino oder einer kleinen Animation auf dem Computermonitor, führen auf ein nächstes Problem. Die bloße Darstellung des Ablaufs (…) bleibt unbefriedigend; es ist nicht die passive Beobachtung des Werdens, die den Kern des funktionalen Zurechtlegens trifft, sondern die aktive Verursachung und Inganghaltung der Handlung, die benötigt wird. Es geht weniger ums bloße Schauen als vielmehr ums Hand anlegen und damit um ein Einlassen auf das tatsächliche Tun: die Handlungen brauchen einen sie verursachenden/ausführenden Täter (…). In den Zwischenresultaten wie auch dem Endresultat ist die Erzeugungshandlung gleichsam erloschen.“ SCHWANK (2003), S. 71

Wenn SCHWANK hier vom „Hand anlegen“ spricht, dann ist darunter nicht unbedingt ein enaktives Operieren zu verstehen. Entscheidend ist die denkende Auseinandersetzung mit der Bewegung. Es muss also im Sinne der ersten Kompetenz des Beweglichen Denkens erst eine Bewegung in ein zunächst statisches Phänomen hineingesehen werden.

1.2.4 Systemisches Denken

Die ökonomischen, ökologischen, politischen und sozialen Gegebenheiten unserer Umwelt bestehen aus derart vielen Größen, die sich gegenseitig beeinflussen, dass nur der Versuch einer globalen Betrachtung solcher Einheiten als System zu adäquaten Problemlösungen beitragen kann. Dazu ist eine besondere Art des Denkens, nämlich das systemische Denken erforderlich. Diese Art zu denken definiert OSSIMITZ (2000, S. 52ff), indem er vier grundlegende Dimensionen des systemischen Denkens, nämlich Denken in Modellen, vernetztes Denken, dynamisches Denken und systemisches Handeln benennt und beschreibt. Im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken ist naturgemäß die Dimension „dynamisches Denken“ von zentralem Interesse. Um die Gesamtproblematik des systemischen Denkens und damit den Anteil des dynamischen Denkens darin besser einschätzen zu können, werden hier die vier Aspekte kurz erläutert.

- Denken in Modellen

  Um sich überhaupt mit komplexen Systemen auseinander setzen zu können, ist es notwendig, mit Modellen zu arbeiten, die bestimmte Aspekte des Systems hervorheben und andere zwangsläufig vernachlässigen. Modelle enthalten in der Regel erhebliche Vereinfachungen im Vergleich zum realen System. Es ist also notwendig, sich der Reichweite eines Modells bewusst zu sein. Dies bedeutet auch, dass man es gegebenenfalls anpassen oder sogar verwerfen muss.

- Vernetztes Denken

  Die in einem System enthaltenen Größen (Elemente) hängen in vielfältiger Weise voneinander ab. Um diese Zusammenhänge erfassen zu können, muss man in Wirkungsnetzen und Wirkungsketten denken, sowie eskalierende und stabilisierende Rückkopplungen berücksichtigen.

- Dynamisches[50] Denken

  Der wahrscheinlich wesentlichste Aspekt des systemischen Denkens ist die Tatsache, dass ein System nicht allein durch eine Reihe von statischen „Momentaufnahmen“ erfasst werden kann. Hier greift das dynamische Denken, das die zeitlichen Veränderungen des Systems berücksichtigt.[51]

- Systemisches Handeln

  Diese Dimension des systemischen Denkens setzt die anderen oben genannten Fähigkeiten voraus, denn hier geht es um die Fähigkeit zur praktischen Steuerung von Systemen.

Eine der größten Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit dem systemischen Denken auftreten, besteht nach Untersuchungen von SWEENEY/STERMAN (2000) und OSSIMITZ (2001) darin, dass der Unterschied zwischen Bestandsgrößen[52] und Größen, die die absolute Änderung in einem Zeitintervall (Bewegungsgrößen) bzw. die relative Änderung pro Zeiteinheit (Flussgrößen[53]) bezeichnen, nicht richtig beurteilt wird. Es scheint also die Dimension „dynamisches Denken“ zu sein, die die entscheidenden Probleme verursacht. Diese Schwierigkeit lässt sich im Zusammenhang mit dem Be-

[50] Das Wort „dynamisch“ wird hier offensichtlich als Gegensatz zu statisch verstanden und nicht in seiner primären Bedeutung „die Dynamik betreffend, voller Kraft“.
[51] Diese zeitliche Eigendynamik des Systems kann sich z. B. in Verzögerungen, Schwingungen o. ä. bemerkbar machen.
[52] Bestandsgrößen (engl. stock) werden auch als Zustandsgrößen oder Sammelgrößen bezeichnet.

weglichen Denken gut nachvollziehen. Auch hier ist der dem dynamischen Denken verwandte Aspekt „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“ die intellektuell anspruchsvollste Komponente.

Obwohl Bestandsgrößen und ihre Änderungen (Zu- und Abflüsse) im Alltag weit verbreitet sind, wie die Beispiele in **Tabelle 2** illustrieren, haben selbst Studenten[54] erhebliche Probleme, sich z. B. aus Zu- und Abflüssen den daraus resultierenden Bestand zu erschließen.

Bestandsgröße	**Zuflüsse**	**Abflüsse**
Anzahl der Studierenden einer Universität	Immatrikulationen	Exmatrikulationen, Ausscheiden aus der Universität
Benzinmenge im Tank	Tanken an der Tankstelle	Benzinverbrauch, Verdunstung
Kontostand	Zubuchung	Abbuchungen
Anzahl der Gäste eines Hotels	ankommende Gäste	abreisende Gäste
Staatsverschuldung	Staatseinnahmen	Staatsausgaben

Tabelle 2: Beispiele für Bestandsgrößen und zugehörige Zu- bzw. Abflüsse.

Zur Illustration soll folgende Aufgabe aus OSSIMITZ (2003) dienen:

> „Die Graphik[55] zeigt die Ankünfte und Abreisen in einem Alpenhotel vom 18.12. bis zum 10.1. Nun die Frage: Wann waren die meisten Gäste im Hotel?“ OSSIMITZ (2003), S. 61

[53] Flussgrößen (engl. flow) werden auch als Änderungsraten bezeichnet.
[54] Die Studie von SWEENEY/STERMAN (2000) wurde mit Studierenden einer „elite business school“, die Untersuchung von OSSIMITZ (2001) wurde im Wesentlichen mit Studierenden der Betriebswirtschaftslehre unterer Semester durchgeführt.
[55] vgl. **Abb. 9**

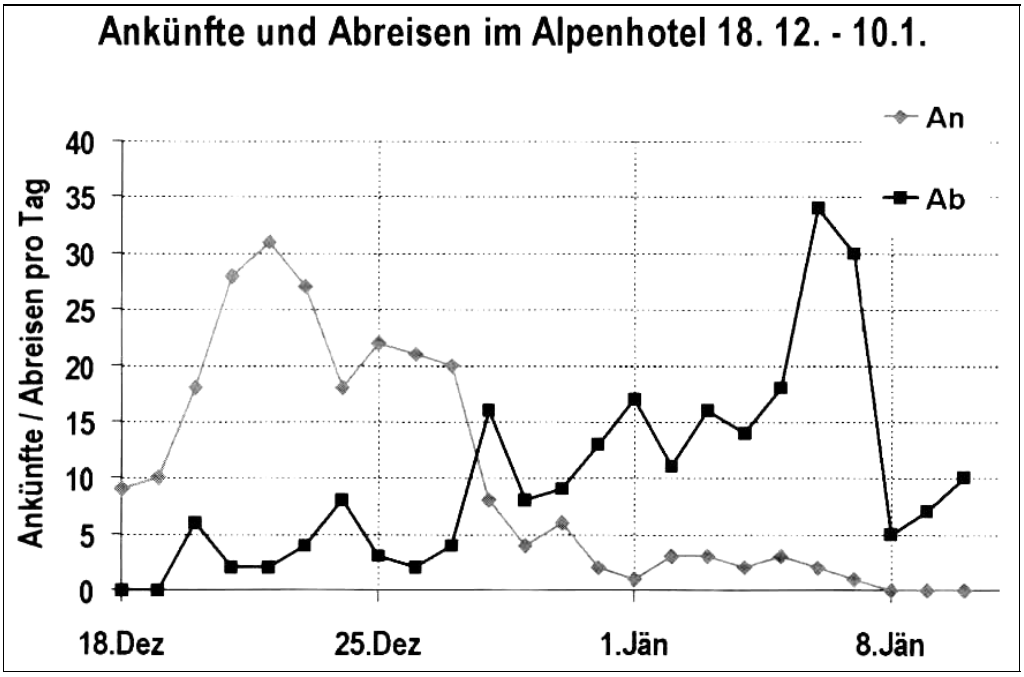


Abb. 9: Ankünfte und Abreisen im Alpenhotel – wann waren die meisten Gäste im Hotel? Aus OSSIMITZ (2003), S. 61.

Im Sinne des Beweglichen Denkens fokussiert die Aufgabe einen Aspekt der Komponente „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben". Es geht nämlich darum, die Ankünfte und Abreisen der Gäste jeweils als Änderungen der Anzahl der Gäste des Hotels zu interpretieren und zu realisieren, dass die Anzahl der Gäste so lange größer wird, solange die Ankünfte die Abreisen übersteigen.[56] Der Graphik in **Abb. 9** ist zu entnehmen, dass dies am 27.12. letztmalig der Fall war. Nur 22 % der Versuchspersonen hat diese Frage richtig beantwortet[57], aber 60 % haben angegeben, dass der Tag mit den meisten Ankünften im Hotel der Tag ist, an dem das Hotel die meisten Gäste beherbergt. Fragt man hingegen nach dem Tag, an dem die meisten Gäste abreisen, so erhält man fast durchweg korrekte Antworten. Die Versuchspersonen scheinen also Maxima eines (Funktions-)Graphen relativ sicher angeben zu können, sind aber mehrheitlich

[56] Genauer betrachtet spielen bei dieser Aufgabe alle Komponenten des Beweglichen Denkens eine Rolle. Zunächst muss man in die Daten der Graphik einen Bewegung hineinsehen, sich also einen Veränderung der Gästezahl vorstellen. Anschließend ist die Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren, d. h. die beiden Änderungen des Systems „Hotel" müssen in ihrer Gegenläufigkeit erfasst und gemeinsam, sozusagen als Änderungssaldo, fokussiert werden. Erst diese beiden Gedankengänge zusammen gestatten eine Realisierung des Änderungsverhaltens.

[57] Im Test von OSSIMITZ (2001) wurden die Antworten „27.12.", „28.12." und „Die Nacht vom 27. auf den 28.12." als richtig gewertet.

nicht in der Lage, das Maximum einer Bestandsgröße vom Maximum einer zugehörigen Flussgröße unterscheiden zu können. Es bestehen also erhebliche Probleme bei der Differenzierung zwischen einer Größe und ihrer (zeitlichen) Änderung. Insbesondere der Schluss von einem Fluss auf den zu Grunde liegenden Bestand fällt vielen schwer. In so einem Fall werden vielfach Flussgrößen und Bestandsgrößen einfach gleichgesetzt. Eine Hoffnung meines Ansatzes ist, dass solche Probleme sich durch frühzeitige und durchgängige Schulung des Beweglichen Denkens mindern lassen.

1.2.5 Mathematisches Denken – Eine Annäherung

In dieser Arbeit wird Bewegliches Denken als eine spezifische Herangehensweise an mathematische Problemstellungen verstanden. Insofern ist es sicher als Bestandteil dessen aufzufassen, was man gemeinhin „mathematisches Denken" nennt. Auch dieser Begriff wird in der Literatur, wenn überhaupt, nicht scharf definiert.

Für FREUDENTHAL ist mathematisches Denken nicht definierbar, aber sehr wohl exemplarisch vorführbar. Er spricht von Denkmethoden der Mathematik und konstatiert:

> „Was sind nun diese Denkmethoden? Auf diese Frage kann man keine bündige Antwort geben, ebensowenig wie auf die Frage »Wie schwimmt man?«. Wohl kann man jemandem zeigen, wie man schwimmt, damit er es nachmache. So kann man einem auch etwas mathematisch vordenken, damit er es nachdenke." FREUDENTHAL (1968), S. 7

WAISMANN (1947) geht in seinem Buch mit dem Titel „Einführung in das mathematische Denken" mit keinem Wort auf den Begriff mathematisches Denken ein. Er beschreibt allerdings einige Teilgebiete der Mathematik und geht auf wesentliche Fragestellungen dieser Gebiete ein. Bei MAYER (1978) wird unter der Überschrift „Meaningfullness and Mathematical Reasoning" der Begriff „meaningfullness" ausführlich beschrieben, aber mit keinem Wort erläutert, was unter „mathematical reasoning" zu verstehen ist. Auch dort werden „einfach" einige mathematische Probleme bearbeitet. PRATT (2002) erklärt seine Sicht von mathematischem Denken im Zusammenhang mit Schülerinnen und Schülern so:

> „I would argue that children can already think and that what they need is the opportunity to learn to apply this thinking in a mathematical context – to learn mathematical thinking." PRATT (2002), p. 37

Offensichtlich ist für FREUDENTHAL, WAISMANN, MAYER und PRATT *jedes Denken in einem mathematischen Kontext* mathematisches Denken.[58]

Mit diesem Aspekt des mathematischen Denkens rückt die nicht minder schwierige Frage in den Blick, was einen mathematischen Kontext ausmacht. In ihrem Buch „Erfahrung Mathematik" gehen DAVIS/HERSH (1985) auf dieses Problem ein und zitieren im ersten Abschnitt C. S. PEIRCE: „Mathematik ist die Wissenschaft, notwendige Schlüsse zu ziehen." Sie stellen fest, dass darin das, was den Inhalt von Mathematik ausmacht, nicht vorkommt und bringen den Kern dieser Definition mit folgendem Satz auf den Punkt:

> „Mathematik könnte sich mit jedem beliebigen Thema befassen, solange dieses Thema die Struktur Annahme-Folgerung-Schluß aufweist." DAVIS/HERSH (1985), S. 3

Im letzten Abschnitt ihres Buches kommen DAVIS/HERSH noch einmal auf diese Frage zurück:

> „Die Existenz des Gegenstandes Mathematik ist eine Tatsache, keine Frage. Und diese Tatsache bedeutet nicht mehr und nicht weniger als die Existenz von Denk- und Argumentationsweisen, mit deren Hilfe man zwingend und schlüssig mit Ideen umgehen kann, «nicht-kontrovers, wenn man sie einmal verstanden hat»." DAVIS/HERSH (1985), S. 435

Ein erster Versuch, mathematisches Denken zu fassen, könnte auf dieser Basis darin bestehen, es als *Denken in logischen Strukturen und den darauf beruhenden Schlüssen* zu definieren.

Mathematisches Denken beruht nach dem Buch „Was ist Mathematik?" von COURANT/ROBBINS (1962), genau wie die zu Grunde liegende Wissenschaft, die Mathematik, auf einer Verbindung von Antithesen:

> „Sie vereint Logik und Anschauung, Analyse und Konstruktion, Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen. Wenn auch Mode oder Tradition den einen oder anderen Gesichtspunkt betonen mögen, so beruht doch auf einem Zusammenspiel dieser Antithesen und dem Streben nach Synthese die Vitalität und der letzte Wert der mathematischen Wissenschaft." COURANT/ROBBINS (1962), S. XIII

[58] Hier fühlt man sich an VOLLRATH (1989, S. 248) erinnert, der funktionales Denken definiert als „eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist."

Diese *Synthese von Gegensätzen* im mathematischen Denken fasst STRUNZ (1968, S. 272) noch knapper. Für ihn bewegt sich mathematisches Denken im Spannungsfeld zwischen dem Bedürfnis nach anschaulichen Vorstellungen und der Notwendigkeit zur Abstraktion.

Ähnliches liest man bei POLYA (2002). Er umschreibt mathematisches Denken als das Denken, das man in der Mathematik lernen kann. Dieses Denken manifestiert sich in seinen Augen in der *Fähigkeit, mit Abstraktionen und abstrakten Strukturen umgehen zu können und insbesondere in der Fähigkeit*, Mathematik zu betreiben. Letzteres bedeutet für ihn in erster Linie *mathematische Probleme zu lösen*.

> „In der Tat hat die Mathematik zwei Aspekte, sie ist die strenge Wissenschaft Euklids, aber sie ist auch etwas anderes. Nach Euklid dargestellt, erscheint die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft; aber die Mathematik im Entstehen erscheint als experimentelle induktive Wissenschaft. Beide Aspekte sind so alt wie die Mathematik selbst." POLYA (1995), S. 9

Diese Dualität der Mathematik spiegelt sich für POLYA im mathematischen Denken und damit auch in den Tätigkeiten von Mathematikern wider.

> „Die auffälligsten Tätigkeiten des Mathematikers sind das Entdecken strenger Beweise und der Bau von Axiomensystemen. Aber es gibt andere Tätigkeiten, welche im abgeschlossenen, veröffentlichten Werk nur wenig Spuren hinterlassen haben und somit weniger auffallen. Sie sind aber dennoch nicht weniger wichtig; ich meine: das Herauslösen und Erkennen eines mathematischen Begriffs aus einer konkreten Situation, weiter das Vermuten in unterschiedlicher Gestalt, die Vorwegnahme eines Ergebnisses oder der großen Linie eines Beweises, bevor Einzelheiten ausgefüllt werden. „Vermuten" umfaßt Verallgemeinern von beobachteten Fällen, induktives Argumentieren, Analogiedenken etc." POLYA (1980), S. 3

Gerade diese anderen, weniger offensichtlichen Tätigkeiten eines Mathematikers, die POLYA hier prägnant zusammenfasst, sind die Bereiche der Mathematik, in denen die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens ihr Potenzial am besten entfalten und häufig (mehr oder weniger unbewusst) genutzt werden.

POLYAS Eingehen auf Tätigkeiten der Mathematiker deutet einen gangbaren Weg an, wie man sich dem Phänomen „mathematisches Denken" nähern kann. Betrachten wir also *charakteristische Tätigkeiten, die beim Umgang mit mathematischen Fragestellungen auftreten*. MASON (1992, S. 200f) nennt *Spezialisieren*, *Verallgemeinern*, *Vermuten* und *Beweisen* als Hilfsmittel, die beim mathematischen Denken benutzt werden. Auch BALL (2002) geht diesen Weg, wenn sie im Zusammenhang mit dem Problemlösen Vorgehensweisen benennt, die mathematisches Denken umreißen sollen. Sie stellt das, was sie unter „Mathematical Thinking“ versteht, mit dem Schaubild in **Abb. 10** dar. Wie den beiden „leeren Wolken“ zu entnehmen ist, erhebt BALL keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie ergänzt ihre Ausführungen unter Berufung auf WATSON/MASON (1998) auch noch um folgende Liste von Tätigkeiten, die in ihren Augen charakteristisch für das mathematische Denken sind:

- „Exemplifying, Specialising;
- Completing, Deleting, Correcting;
- Comparing, Sorting, Organising;
- Changing, Varying, Reversing, Altering;
- Generalising, Conjecturing;
- Explaining, Justifying, Verifying, Convincing, Refuting.“

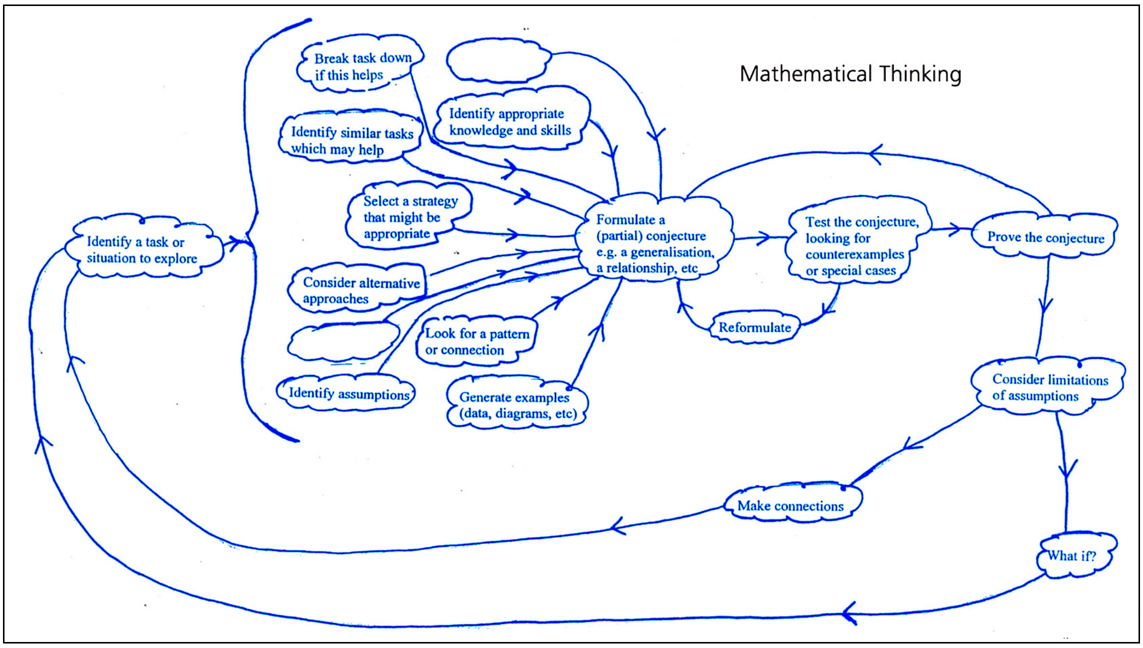


Abb. 10: Mathematical Thinking aus BALL (2002)

Auch WINTER (1972, S. 162ff) gibt eine Liste von Tätigkeiten an, in denen sich in seinen Augen die „charakteristischen Züge der Stoffstruktur ‚Mathematik‘“ widerspiegeln. Er teilt sie ein in die *allgemeinen Haltungen und Fähigkeiten argumentieren (beweisen)*, *sich kreativ verhalten*, *mathematisieren* und die *geistigen Grundtechniken klassifizieren*, *ordnen*, *generalisieren/spezialisieren*, *analogisieren*. Der in **Tabelle 3** auf Seite 52 abgedruckte, wohl umfassendste Katalog mathematischer Tätigkeiten[59] findet sich bei BAUER (1978, S. 47f). Für viele dieser Tätigkeiten kann eine Herangehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens gewinnbringend sein. Ich werde auf einige davon noch näher eingehen.

[59] BAUER (1978) nennt sie „allgemeine mathematische Prozesse“.

Allgemeine mathematische Prozesse
Analysieren; Fallunterscheidungen treffen
Synthetisieren; verschiedene Fälle zu einem Ganzen zusammenfassen
Abstrahieren 1. intensionales Abstrahieren 2. extensionales Abstrahieren
Konkretisieren
Klassifizieren 1. intensionales Klassifizieren 2. extensionales Klassifizieren
Generalisieren
Spezialisieren
Kombinieren
Ordnen, Systematisieren, Strukturieren 1. Beziehungen herstellen 2. Lokales Ordnen 3. Globales Ordnen, insbesondere Axiomatisieren
Definieren
Schließen 1. Prämisse finden 2. Konklusion finden
Beweisen, Begründen
Experimentieren
Umstrukturieren
Plausibles Schließen 1. Analogisieren 2. Induzieren 3. Anschauliches Schließen
Strategie entwerfen
Verfahren benutzen
Mathematisieren
Repräsentieren, Darstellen 1. Enaktivieren 2. Ikonisieren 3. Verbalisieren 4. Formalisieren

Tabelle 3: Allgemeine mathematische Prozesse (vgl. BAUER (1978), S. 47f)

1.2.6 Räumliches Denken

> „Räumliches Denken beruht sehr stark auf der Fähigkeit, sich *Bewegungen* von Körpern vorstellen zu können.“ BESUDEN (1984), S. 79

Auf Grund dieser Erkenntnis plädiert BESUDEN dafür, den Prozess der Verinnerlichung von Bewegungen bei Schülerinnen und Schülern bewusst zu fördern. Er spricht damit die Fähigkeit an, eine Bewegung in ein zunächst statisches Phänomen hineinsehen zu können, die grundlegend für das Bewegliche Denken ist. Man überinterpretiert BESUDEN sicher nicht, wenn man festhält, dass eine Person, deren Kompetenz im Bereich des räumlichen Denkens[60] besonders stark ausgeprägt ist, in der Regel auch über mindestens grundlegende Fähigkeiten im Beweglichen Denken verfügt. Um diesen Zusammenhang besser beleuchten zu können, nutze ich das von MAIER (1999a und 1999b) in den „fünf wesentlichsten Komponenten räumlich-visueller Qualifikationen“[61] zusammengefasste Fähigkeitsprofil des räumlichen Denkens.[62] Ich setze mich dabei insbesondere mit der Frage auseinander, bei welchen der Komponenten Bewegliches Denken eine Rolle spielt. Wie aus der **Tabelle 4** abzulesen ist, werden einige als rein statische Denkvorgänge bezeichnet und andere als ausschließlich oder zumindest weitgehend dynamisch charakterisiert. Wie der ersten Spalte der **Tabelle 4** zu entnehmen ist, wird bei den Komponenten des räumlichen Denkens auch die Frage berücksichtigt, ob die denkende Person sich mental in die Aufgabensituation hineinversetzt und darin agiert oder die Situation von außen analysiert. Im Einzelnen finden sich bei MAIER (1999a und 1999b) folgende Aspekte des räumlichen Denkens:

---

[60] In der Literatur findet man auch die, im Wesentlichen synonym zum Begriff „räumliches Denken“ verwendeten Bezeichnungen „räumliche Intelligenz“, „räumliches Anschauungsvermögen“, „Raumvorstellung“ u. ä. Da es mir hier darum geht, Fähigkeiten im Zusammenhang mit dem Denken aufzuzeigen und zu analysieren, bevorzuge ich den Begriff „räumliches Denken“.

[61] MAIER (1999A, S. 51) stützt sich auf die Arbeiten vieler Autoren, fasst für seine Komponenten der Raumvorstellung aber im Wesentlichen zwei jeweils aus drei Faktoren bestehende Kategoriesysteme von LINN/PETERSEN sowie THURSTONE zusammen. Die teilweise als eigenständiger Aspekt genannte Fähigkeit zur Unterscheidung zwischen Rechts und Links sieht MAIER, im Einklang mit anderen Autoren, als Teilaspekt der räumlichen Orientierung.

[62] Auch wenn man beim Begriff „räumliches Denken“ zunächst den dreidimensionalen Raum im Blick hat, sollte man nicht übersehen, dass viele Komponenten des räumlichen Denkens auch bei einem Denken innerhalb der zweidimensionalen euklidischen Ebene zum Tragen kommen!

Standpunkt der Probanden	Dynamische Denkvorgänge Räumliche Relationen am Objekt veränderlich	Statische Denkvorgänge Räumliche Relationen am Objekt veränderlich; Relation der Person zum Objekt veränderlich
Person befindet sich außerhalb	Veranschaulichung	Räumliche Beziehungen
	Vorstellungsfähigkeit von Rotationen	Räumliche Wahrnehmung
Person befindet sich innerhalb	Räumliche Orientierung	Rechts-Links-Unterscheidung

Tabelle 4: Die Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens. Nach MAIER (1999a), S. 52 und MAIER (1999b), S. 14

Räumliche Wahrnehmung (spatial perception)

Bei dieser Komponente, die die Fähigkeit charakterisiert, die Senkrechte und Waagrechte identifizieren zu können, spielt Bewegliches Denken in der Regel wohl eher eine untergeordnete oder sogar überhaupt keine Rolle.

Veranschaulichung (räumliche Visualisierung)

Hiermit wird die Fähigkeit bezeichnet, sich gedanklich Aktivitäten wie Verschieben, Falten und Schneiden von räumlichen Objekten oder Objektteilen vorstellen zu können. Die in **Abb. 11** wiedergegebene, für MAIER (1999b) charakteristische Beispielaufgabe zu dieser Kompetenz macht deutlich, dass es hier darum geht, eine Bewegung hineinzusehen, nämlich entweder das Auffalten des Quaders zum Netz oder das Zusammenfalten des Netzes zum Quader. Auf diese Weise kann man argumentieren, welche Kanten von Netz und Flächenmodell des Quaders einander entsprechen. Diese Auffassung deckt sich mit der von MAIER (1999a und 1999b) vorgenommenen Zuordnung zu den dynamischen Denkvorgängen (vgl. **Tabelle 4** auf Seite 54).

Mentale Rotation (Vorstellungsfähigkeit von Rotationen)

So wird die Fähigkeit benannt, sich Rotationen von zwei- oder dreidimensionalen Objekten vorstellen zu können. Diese Fähigkeit wird unter anderem an der bekannten Aufgabe aus **Abb. 12** festgemacht. Auch hier ist wieder der Zusammenhang zum „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ des Beweglichen Denkens deutlich zu erkennen.

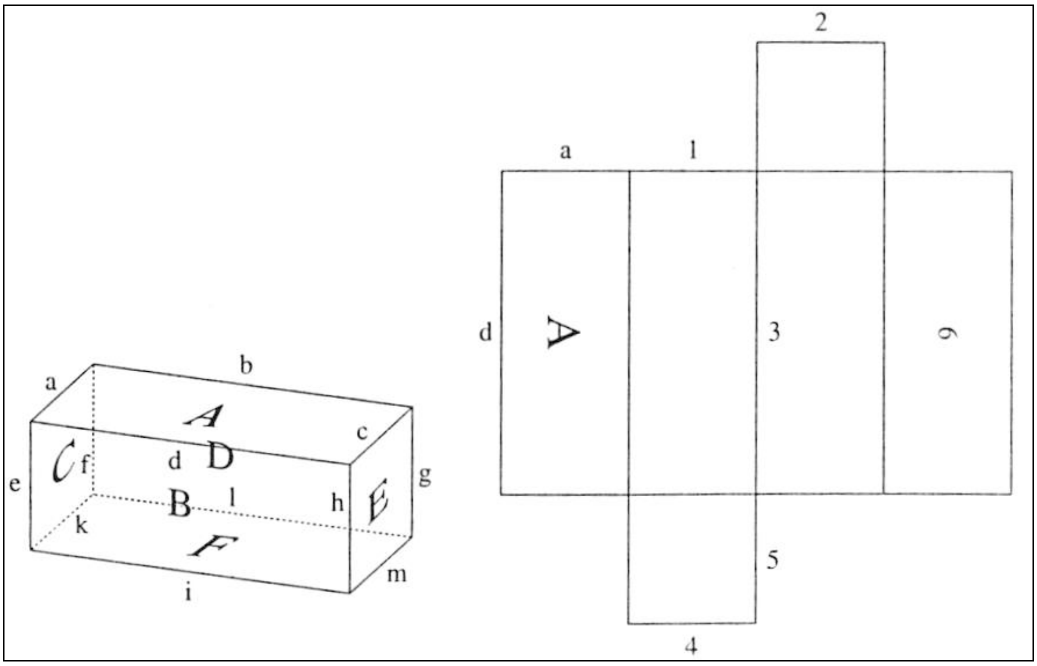


Abb. 11: Welche Buchstaben des Schrägbilds entsprechen den Ziffern im Netz? Aus MAIER (1999b), S. 11.

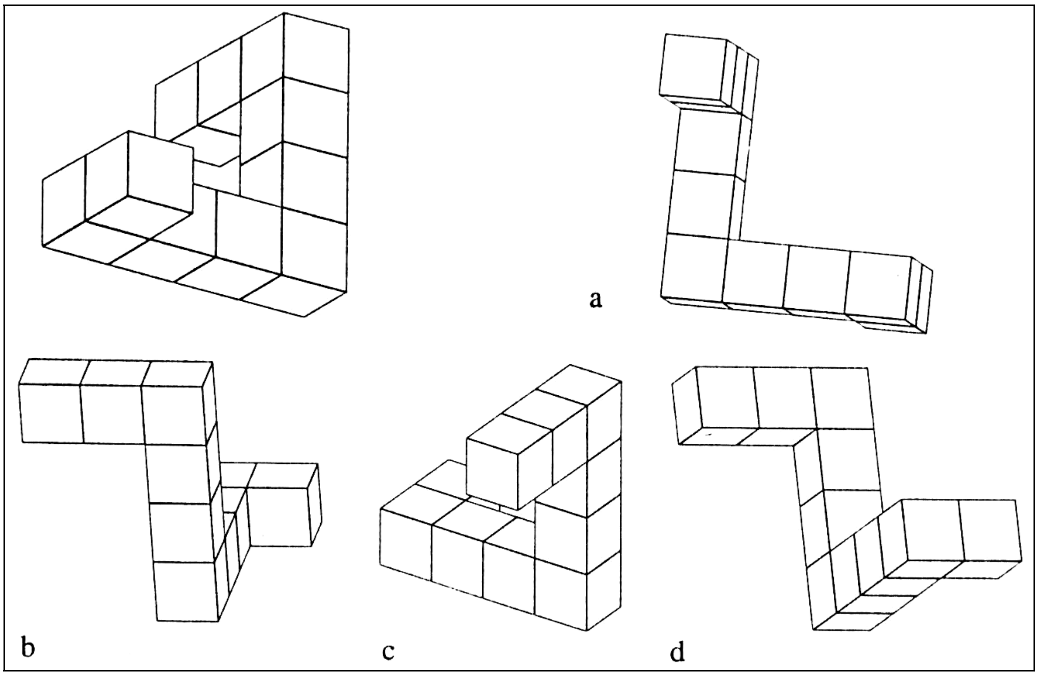


Abb. 12: Welche der vier Figuren (a – d) stimmen mit der oben links überein? Aus MAIER (1999b), S. 12.

Räumliche Beziehungen

Diese Komponente charakterisiert die Fähigkeit räumliche Konfigurationen von mehreren Objekten oder Objektteilen zu erfassen. MAIER (1999a) hält diese räumlich-visuelle Qualifikation für einen statischen Denkvorgang und tatsächlich lässt sich die zugehörige

Aufgabe in **Abb. 13** auf Grund der Orientierung der aufgedruckten Buchstaben über einen reinen Mustervergleich der Würfelschrägbilder lösen.[63] Es ist aber z. B. ebenfalls möglich, einen vorgestellten Würfel mental zu rotieren und so zur Lösung zu gelangen. Ein weiterer Weg wäre, in Gedanken ein Würfelnetz zu konstruieren (evtl. statisch), es anschließend mental zu einem Flächenmodell zusammenzufalten und das Ergebnis in die gezeichneten Lagen zu bringen. Die beiden letzten Lösungen sind entweder vollständig oder mindestens teilweise als dynamisch zu betrachten. Hier spielen die Komponenten „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren" sowie „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren" des Beweglichen Denkens eine entscheidende Rolle bei der Lösungsfindung. Zumindest bei dieser Aufgabe ist eine Zuordnung zu den rein statischen Denkvorgängen, wie bei MAIER geschehen, nicht einleuchtend. Dieser Problemtyp ist eher in die Klasse der Probleme einzuordnen, die sowohl statisch als auch dynamisch gelöst werden können. Für solche Fälle sollten im Unterricht beide Herangehensweisen an die Lösung thematisiert werden.

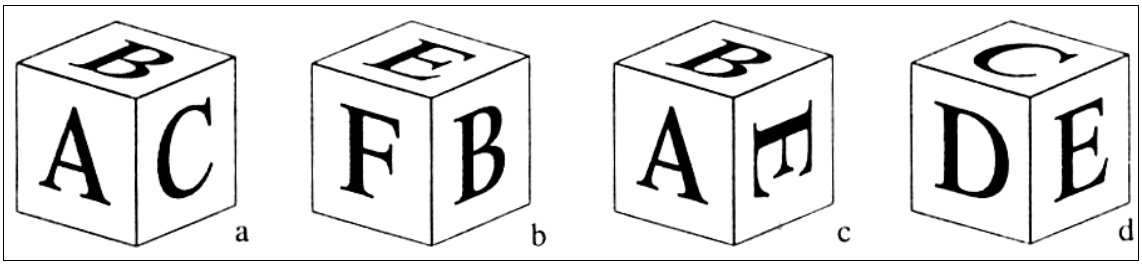


Abb. 13: Drei der vier Schrägbilder zeigen denselben Würfel. Welches Bild zeigt einen anderen? Aus MAIER (1999b), S. 12.

Räumliche Orientierung (spatial orientation)

Hier geht es um die Fähigkeit, den Standort der eigenen Person, also die Perspektive, unter der etwas betrachtet wird, zu wechseln. Befasst man sich mit der Aufgabe in **Abb. 14**, die MAIER (1999b) in diesem Zusammenhang für ein charakteristisches Beispiel hält, so fällt auf, dass es sehr viel schneller gelingt, die Bilder in eine sinnvolle Reihenfolge zu bringen, wenn man sich in Gedanken auf das Boot setzt und die Fahrt wirklich durchführt.

---

[63] Unter der zusätzlichen Prämisse, dass jede Würfelseite mit einem anderen Buchstaben markiert ist, ist dieses Vorgehen einfach, andernfalls relativ mühsam.

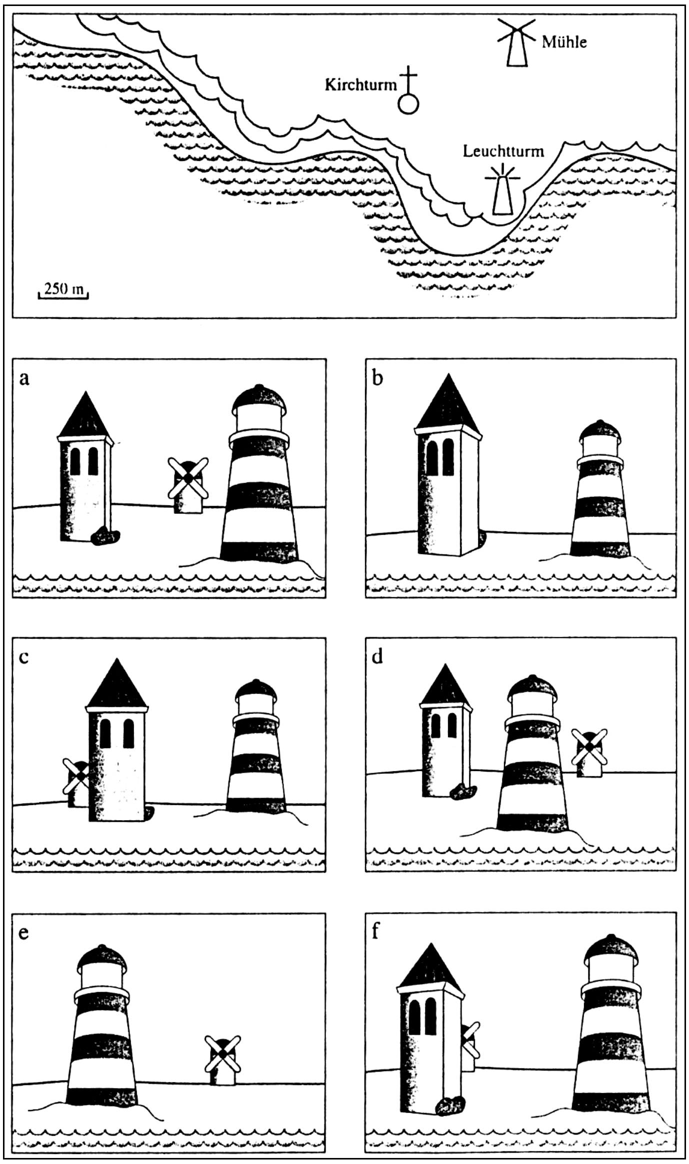


Abb. 14: Ein Urlauber ist mit dem Boot von Westen kommend die Küste entlanggefahren (vgl. obige Karte). In welcher Reihenfolge hat er die sechs Fotografien aufgenommen? Aus MAIER (1999b), S. 13.

Es ist hier günstiger, eine Bewegung hineinzusehen und damit zu argumentieren, welche Änderung diese Bewegung der Reihe nach für die wahrgenommene gegenseitige Lage der drei markanten Gebäude hat, als sich z. B. für jedes Bild die passende Lage des Bootes zu suchen und die Bilder auf diesem statischen Weg in eine Reihenfolge zu bringen. MAIER ordnet die räumliche Orientierung folgerichtig im Wesentlichen den dynamischen Denkvorgängen zu. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe wird neben der Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren" auch noch die Fähigkeit benötigt, die Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren, denn man muss jeweils auf die relevante Paarung von Gebäuden achten, wenn man die Bilder richtig interpretieren will.

Es lohnt sich, am Ende dieses Abschnittes noch einmal den Blickwinkel zu ändern. Wir haben bisher festgestellt, dass die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens in erheblichem Umfang für das räumliche Denken benötigt werden. Aus der Perspektive des Beweglichen Denkens kann man auch argumentieren, dass die anschaulichen Bewegungen im Raum Prototypen für jegliche Art von Veränderungen und damit grundlegend für die Entwicklung des Beweglichen Denkens sind. Es bleibt festzuhalten, dass beide Fähigkeitskataloge „Räumliches Denken“ und „Bewegliches Denken“ jeweils in der Fähigkeit zur Vorstellung von räumlichen Bewegungen ihre Wurzeln haben.

1.2.7 Kinematisches Denken und das „Prinzip der Bewegung“

Ein Denken in Bewegungen und Veränderungen hat gerade in der Mathematik eine lange Tradition. Allerdings wird der Begriff „Bewegung“ hier, wie auch in anderen Zusammenhängen, in deutlich verschiedenen Nuancen gebraucht, je nachdem, welcher Bezugsrahmen betrachtet wird (z. B. Kongruenzabbildungen, Alltagssprache, Psychologie[64], Philosophie, Physik). Im Folgenden werden einzelne dieser Aspekte dargestellt und daraus durch Vergleich und Abgrenzung herausgearbeitet, was im Zusammenhang mit der Entwicklung und Nutzung des Beweglichen Denkens im Mathematikunterricht mit „Bewegung“ gemeint ist.

In der *Philosophie* ist Bewegung[65], im Sinne von Veränderung, eine Grunderscheinung der Welt. Diese Veränderung manifestiert sich in einem Wechsel der Beschaffenheit, der Menge oder der Form von Dingen, die selbst bestehen bleiben. Es handelt sich um einen Übergang zu einem qualitativ neu bestimmten Anderssein, der nach Umfang, Richtung, innerer Gesetzmäßigkeit, Dauer und Geschwindigkeit verschieden sein kann. Bereits bei ARISTOTELES umfasst der Begriff „Bewegung“ nicht nur die Orts- bzw. Lageveränderung, sondern jede Zustandsänderung. Er schreibt:

---

[64] Ausführungen zum Bewegungsbegriff der Psychologie finden sich in Abschnitt 1.2.2.
[65] vgl. FAULBACH (1965): Der philosophische Begriff der Bewegung

> „Die Tiere und deren Teile, die Pflanzen und die einfachen unter den Körpern, wie Erde, Feuer, Luft und Wasser; von diesen und Ähnlichem sagen wir ja, es sei von Natur aus. (…) Von diesen hat nämlich ein jedes in sich selbst einen Anfang von Veränderung[66] und Bestand, teils bezogen auf Raum, teils auf Wachstum und Schwinden, teils auf Eigenschaftsveränderung." ARISTOTELES (1987), Buch II, Kapitel 1, S. 51

> „Es ist (z. B.) dieser Erzklumpen der Möglichkeit nach ein Standbild, trotzdem ist hier nicht das Zur-Wirklichkeit-Kommen des Erzes, insofern es eben Erz ist, die Veränderung; »Erz-sein« und »der-Möglichkeit-nach-etwas-sein« sind ja nicht dasselbe, indessen, wenn dies ohne weiteres und dem Begriffe nach dasselbe wäre, dann wäre (hier) eben das Zur-Wirklichkeit-Kommen des Erzes als Erz die Veränderung. Es ist aber, wie gesagt, nicht dasselbe (…) Das Zur-Wirklichkeit-Kommen des Möglichen, insofern es möglich ist, das ist ganz offenkundig: Veränderung. ARISTOTELES (1987), Buch III, Kapitel 1, S. 105

Diese Beschreibung von Bewegung ist sehr weit gefasst. So ist z. B. die Entwicklung von der Kaulquappe zum Frosch in der oben skizzierten philosophischen Sicht von Bewegung enthalten. Dies ist im Hinblick auf den Mathematikunterricht sicher nicht von Interesse. Allerdings verweist der Bewegungsbegriff bei ARISTOTELES durch seine synonyme Verwendung von Bewegung und (Ver-)Änderung darauf, dass Bewegung sich nicht in einer räumlichen Ortsänderung von Körpern erschöpft. Für den Mathematikunterricht weitet sich damit der Blick von Lageänderungen im Raum bzw. in der euklidischen Ebene z. B. hin zur Kovariation von abhängigen und unabhängigen Größen in funktionalen Zusammenhängen.

In der *Physik* ist Bewegung zunächst eine Ortsveränderung eines (starren) Körpers in Bezug zu einem anderen Körper oder zu einem durch andere Körper festgelegten Bezugssystem. Jede Bewegung ist also eine Relativbewegung. In der Kinematik[67] wird der Frage nachgegangen, *wie* sich ein Körper bewegt. Die Dynamik[68] dagegen beschäftigt sich mit der Frage, *warum* sich ein Körper bewegt, d. h. welche Kräfte auf ihn wirken. Im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken im Mathematikunterricht ist weniger von Interesse, warum sich etwas bewegt, als vielmehr welche Auswirkungen eine Bewegung von bestimmten Teilen einer Konfiguration hat, also *wie* sich die abhängigen

[66] Im griechischen Original steht hier das Wort *kínesis*, das soviel wie Bewegung, Veränderung, Wechsel bedeutet.
[67] Von griechisch *kinēma* „Bewegung".
[68] Von griechisch *dýnamis* „Kraft".

Teile bewegen. Dies erinnert an das von WITTMANN (1985a) formulierte operative Prinzip der Mathematikdidaktik, bei dem die Frage „Was geschieht mit …, wenn …" zentral ist.

In der *Mathematik* tritt der Begriff „Bewegungen" als Bezeichnung für die Kongruenzabbildungen als Untergruppe der affinen Abbildungen auf. Dieser Bewegungsbegriff ist im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken *nicht* gemeint. Zwar wird gerade auch im Geometrieunterricht zur Erarbeitung der Kongruenzabbildungen auf der intuitiven Ebene gerne mit stetigen Übergängen gearbeitet, aber beim Ziel, dem (geometrischen) Abbildungsbegriff, interessiert nicht die Art des Übergangs vom „Urbild" zum „Bild", sondern es kommt im Wesentlichen auf die Zuordnung, im Sinne der Bewegung also nur auf den Anfangs- und Endzustand an.[69] Trotzdem spielt das Bewegliche Denken im Zusammenhang mit Kongruenzabbildungen bei der intuitiv-propädeutischen Begriffsverankerung und der Frage, wie sich verschiedene „Wege durch den Definitionsbereich" auf den „Weg durch den Wertebereich" auswirken, eine Rolle.

In der *Mathematik* kommen Bewegungen auch unter einem ganz anderen Gesichtspunkt vor. Es geht dabei um ein Denken in Bewegungen und Veränderungen, das eine mögliche Herangehensweise an (mathematische) Fragestellungen darstellt. Ansätze dazu finden sich in der Mathematikgeschichte immer wieder. Bereits PLATON zählt zwar die Bewegung als Werden nicht zur Ideenwelt, lässt aber trotzdem einen bewegten Punkt eine Linie erzeugen. THALES VON MILET benutzt im Beweis des Satzes, dass der Durchmesser die Kreisfläche halbiert, eine Bewegungsvorstellung.[70] In den Elementen des EUKLID (1997) werden die Kugel, der Kegel und der Zylinder im XI. Buch mit Hilfe von Bewegungen definiert.[71]

---

[69] Für einen Überblick über die didaktische Diskussion zur Problematik der Abbildungsgeometrie im Mathematikunterricht sei auf BENDER (1982) verwiesen.

[70] vgl. Seite 19

[71] So wird der Kegel z. B. wie folgt erklärt:

> „Ein **Kegel** ist der Körper, der umschlossen wird, wenn ein rechtwinkliges Dreieck, während eine der Seiten um den rechten Winkel fest bleibt, durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurückgebracht wird, von der es ausging." EUKLID (1997), XI. Buch, Definition 18, S. 316 (Hervorhebung im Original)

Übrigens lässt sich z. B. auch die Definition der Pyramide dynamisch interpretieren:

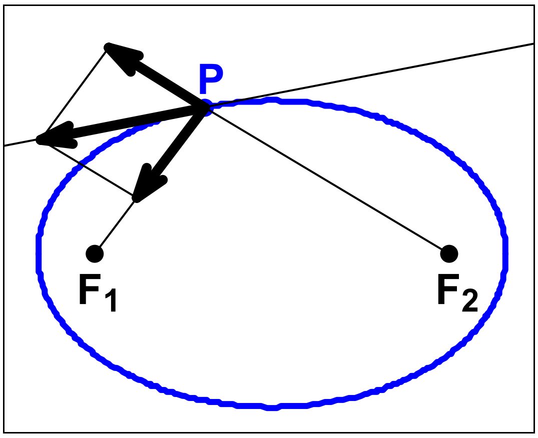


Abb. 15: Die Tangente an die Ellipse nach ROBERVAL

Im Jahr 1638 findet ROBERVAL[72] eine kinematische Methode zur Bestimmung der Tangente an eine Kurve. Er betrachtet dazu die Kurve als Bahn eines Punktes. Für einen Punkt auf einer Ellipse gilt z. B., dass die Summe seiner Entfernungen zu den beiden Brennpunkten der Ellipse konstant ist. Dies impliziert aber, dass sich der Punkt auf der Ellipsenperipherie genauso schnell vom einen Brennpunkt wegbewegt, wie er sich auf den anderen Brennpunkt zubewegt. Wie in **Abb. 15** dargestellt, ergibt sich die Tangentenrichtung damit aus der Richtung des Summenvektors der beiden Geschwindigkeitsvektoren.[73]

Das 17. Jahrhundert markiert den Beginn des systematischen Denkens in Veränderungen und Bewegungen. Diese Entwicklung in der Mathematik ist untrennbar mit den Namen NEWTON und LEIBNIZ verbunden, die von den 60er bis zu den 80er Jahren des 17. Jahrhunderts den Grundstein dessen legten, was heute Infinitesimalrechnung genannt wird. Besonders NEWTONS Kalkül basiert auf kinematischen Vorstellungen. Er „definiert" die Bezugsobjekte seines Kalküls sogar über die Anschauung eines stetigen „Fließens":

> „(…) in the sequel I consider quantities as though they were generated by continuous increase in the manner of a space which a moving object describes in its course.
>
> We can, however, have no estimate of time except in so far as it is expounded and measured by an equable local motion, and furthermore quantities of the same kind alone, and so also their speeds of increase and decrease, may be compared

> „Eine **Pyramide** ist ein von ebenen Flächen umfaßter Körper, der von einer Fläche zu einem Punkt zusammengeht." EUKLID (1997), XI. Buch, Definition 12, S. 316 (Hervorhebung im Original)

[72] vgl. JAHNKE (1999), S. 64f

[73] Diese Methode funktioniert nicht für die Tangenten an die Ellipse in den Schnittpunkten der Gerade durch die Brennpunkte mit der Ellipsenperipherie. An diesen beiden Punkten addieren sich die beiden Geschwindigkeitsvektoren zum Nullvektor.

> one with another. For these reasons I shall, in what follows, have no regard to time, formally so considered, but from quantities propounded which are of the same kind shall suppose some one to increase with an equable flow: to this all the others may be referred as though it were time, and so by analogy the name of 'time' may not improperly be conferred upon it. And so whenever in the following you meet with the word 'time' (…), by that name should be understood not time formally considered but that other quantity through whose equable increase or flow time is expounded and measured.
>
> But to distinguish the quantities which I consider as just perceptibly but indefinitely growing from others (…) I will hereafter call them fluents and designate them by the final letters v, x, y and z. And the speeds with which they each flow and are increased by their generating motion (which I might more readily call fluxions or simply speeds) I will designate by the letters $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ and $\dot{z}$ (…)."
> NEWTON (1670/71), p. 73

Für den *Mathematikunterricht* wird ein Denken in Bewegungen und Veränderungen erst im Zuge der Meraner Reformvorschläge von 1905 *auch* vor dem Hintergrund der industriellen Revolution und dem damit verbundenen mechanistischen Weltbild propagiert.[74] Kernpunkt ist dabei eine beweglich-kinematische Sichtweise des funktionalen Denkens.[75] Für den Geometrieunterricht finden sich Aspekte eines kinematischen Denkens, teilweise unter der Bezeichnung „Prinzip der Bewegung", bereits seit Ende des 19. Jahrhunderts in Lehrbüchern der Elementargeometrie für die höheren Schulen. Das bekannteste und am weitesten verbreitete war das dreibändige „Lehrbuch der Elementar-Geometrie" von HENRICI/TREUTLEIN.[76] Das Besondere an diesem Werk ist, dass geometrische Objekte als auseinander hervorgehend gesehen werden, und zwar in Form von kontinuierlichen Bewegungen bzw. Veränderungen im Raum und in der Zeit. TREUTLEIN (1911) stellt später in seinem Buch „Der geometrische Anschauungsunterricht" wesentliche Aspekte des Prinzips der Bewegung heraus:

> „Als einer der Hauptunterschiede altgriechischer und neuzeitlicher Geometrie gilt das, daß in jener die Figuren sämtlich als starr und fest gegeben angenommen werden, in dieser als beweglich und gewissermaßen fließend, *in stetem Übergang von einer Gestaltung zu anderen* begriffen. Sollen unsere Schüler in die heutige Form der Wissenschaft und gar gelegentlich in deren Anwendung eingeführt werden, so müssen auch sie beizeiten daran gewöhnt werden, die Figuren als jeden Augenblick veränderlich zu denken und dabei auf die gegenseitige Abhängigkeit

[74] Eine ausführliche Darstellung dieser Zeit findet sich bei KRÜGER (2000b).
[75] Vgl. für nähere Ausführungen zum Zusammenhang zwischen funktionalem Denken und Beweglichem Denken den Abschnitt 1.2.8 ab S. 69.
[76] HENRICI/TREUTLEIN (1891), HENRICI/TREUTLEIN (1897), HENRICI/TREUTLEIN (1901)

> ihrer Stücke zu achten, diese zu erraten, bald auch die dabei herrschende Gesetzmäßigkeit erfassen und beweisen zu können.
>
> Der Auffassung der Figuren als starrer Gebilde kann und muß in verschiedener Weise entgegen gearbeitet werden.
>
> Das eine hierzu Erforderliche ist das *Beweglichmachen der Teile einer Figur*. Modelle, möglichst solche mit Gelenken oder Scharnieren, tun hierbei die besten Dienste. Man wird zeigen, daß das Quadrat in eine Raute, daß das Rechteck in ein schiefes Parallelogramm übergeführt werden kann, und daß die Abänderung der Größe eines Winkels hierbei die Abänderung der übrigen drei Winkel (aber nicht der Seiten) bedingt. (…)
>
> Hierbei kann wohl auch ein *zweites* miterledigt werden: die *Erzeugung der Grenzfälle*. Man wird bei dem benützt gedachten Quadrat- oder Rechteckmodell durch volles Zusammenlegen der Stäbe die Strecke erzeugen; (…) man wird aus dem Viereck durch allmähliche Vergrößerung eines Winkels, bis dieser ein gestreckter geworden, das Dreieck ableiten (…) u. dgl. m. (…)." TREUTLEIN (1911), S. 202f

Ziel dieses Arbeitens mit Bewegungen und Veränderungen war es, den Schülerinnen und Schülern die anschaulichen Bewegungen und Veränderungen als Strategie beim mathematischen Arbeiten an die Hand zu geben. Damit sollten durch stetige Übergänge verschiedene geometrische Objekte miteinander in Beziehung gesetzt werden. Sätze sollten Bewegungsinvarianten angeben und Begriffe durch dynamische Veränderungen von Figuren hinsichtlich Inhalt und Umfang exploriert werden. In Kategorien des Beweglichen Denkens gesprochen ging es darum, geometrische Objekte nicht mehr ausschließlich statisch wahrzunehmen, sondern Bewegungen in sie hineinzusehen und mit ihnen zu argumentieren. Dies sollte auch dazu dienen, die Gesamtkonfiguration und zugehörige wesentliche Aspekte (z. B. Grenzlagen) besser erfassen und analysieren zu können. Der Versuch einer konsequenten und möglichst weitgehenden Umsetzung des Prinzips der Bewegung für den Geometrieunterricht findet sich z. B. auch in dem (1928 erschienenen) für den Schulgebrauch bestimmten Buch „Los von Euklid" von KUSSEROW (1985) und im Schulbuch „Bewegungsgeometrie" von BOTSCH (1958). Ansätze davon sind auch noch bei LIETZMANN (1959) in seinem für den Unterrichtsgebrauch geschriebenen Buch „Experimentelle Geometrie" zu finden. Leider sind diese Ansätze im Zuge der Strukturorientierung der „Neuen Mathematik" mit ihrer Betonung der abbildungsgeometrischen Methode verdrängt worden.

In den 60er Jahren des 20. Jahrhunderts wird der Begriff „kinematisches Denken" explizit verwendet. Es geht dabei

> „ … um die *Veränderung* mathematischer Größen und, soweit diese räumlich darstellbar sind, auch um Bewegungen. (…) Im folgenden soll (…) unter Bewegung immer eine Veränderung, genauer: ein Veränderungsprozeß verstanden werden, und zwar im allgemeinen ein stetiger, der in der Zeit abläuft.“ STRUNZ (1968, S. 211)

Für STRUNZ gibt es zwar Gegenstandsbereiche, die stärker zum kinematischen Denken anregen als andere, in seinen Augen ist aber der individuelle Strukturtyp des Denkens der entscheidende Einflussfaktor für eine eher kinematische oder eine eher statische Denkweise.[77] Trotzdem sei es möglich kinematisches Denken zu schulen, und zwar insbesondere in der Geometrie durch

> „die Besprechung von Aufgaben, bei denen verlangt wird, im Geiste Veränderungen an einzelnen Teilen einer Figur vorzunehmen und sich dann vorzustellen, welche Bahnkurven und welche neuen Figuren diese Variationen ergeben.“[78] STRUNZ (1968), S. 151

Aus dem Blickwinkel des Beweglichen Denkens betrachtet, beschreibt STRUNZ hier die Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“.

Die Wichtigkeit des kinematischen Denkens betont STEINER (1967), wenn er zunächst offensichtlich bedauernd feststellt:

> „ (…) die an der ‚Abhängigkeit von veränderlichen Größen‘ orientierte kinematische Denkweise, die in der Forderung des funktionalen Denkens immer mitgemeint war, scheint einer mehr statischen Denkweise weichen zu müssen. Das wäre ohne Zweifel ein Verlust an Vorstellungen, die bei all ihrer Ungenauigkeit für die produktive mathematische Arbeit wie für das über das Formale hinausgehende Verständnis mathematischer Begriffe, und damit auch für den Unterricht, unentbehrlich sind. Hierzu ist jedoch zu sagen, daß die ‚*kinematische Denkweise*‘ im Rahmen einer modernen Funktionenlehre keineswegs verlorenzugehen braucht, ohne daß man wieder von veränderlichen Größen und Abhängigkeiten zwischen diesen redet. Man wird sie da entwickeln, wo sie genauer zu fassen ist, und das auch bewußt machen, nämlich an den Beispielen, bei denen im Definitions- und Wertebereich eine Ordnungsrelation (oder ein Umgebungsbegriff) gegeben ist. So

[77] Dies erinnert stark an die von SCHWANK untersuchten personenbezogenen Präferenzen für prädikatives bzw. funktionales Denken.

[78] STRUNZ spekuliert im Anschluss an dieses Zitat darüber, ob der Unterrichtsfilm nicht zur Ausbildung des kinematischen Denkens beitragen kann, wobei ihm folgendes Vorgehen vorschwebt:

> „Zuerst werden dem Schüler die Bilder im Film dargeboten, später möge er ohne dieses Hilfsmittel nur mit vorgestellten Bildern arbeiten, mit eigenen inneren Bildern, welche seine produktive Vorstellungskraft nunmehr selbstständig nach mathematischen Gesichtspunkten variiert“. STRUNZ (1968), S. 151

> wird man Feststellungen zulassen und auch pflegen, bei denen etwa gesagt wird: Wenn ich den geordneten Definitionsbereich in einem bestimmten Sinne durchlaufe, so werden die Werte des Wertebereiches vermöge der Zuordnung f in dem und dem Sinne durchlaufen. Dazu müssen dann natürlich strengere Formulierungen treten, wie sie etwa in der Definition der Monotonieeigenschaft vorliegen: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$ (usw.)". STEINER (1967), S. 170f

STEINER spricht hier einen wesentlichen Punkt an. Sich unter kinematischem Denken einfach Größen irgendwie veränderlich vorzustellen, reicht für Argumentationen nicht aus. Die Veränderungen müssen bewusst und gezielt vorgenommen werden. Dazu ist es aber in der Tat notwendig, Veränderungen in einem Definitionsbereich durchzuführen, der eine Ordnungsrelation aufweist und durch die funktionale Abhängigkeit auch eine Ordnungsrelation im Wertebereich induziert. Nur auf dieser Basis kann das Änderungsverhalten erfasst werden und eine strengere, quantifizierbare Auseinandersetzung mit der Art und Weise der Änderung erfolgen.[79] Diesen wichtigen Aspekt im Zusammenhang mit dem kinematischen Denken, der bei STRUNZ nicht angesprochen und bei STEINER nur mit dem Hinweis auf die Monotonieeigenschaft angedeutet wird, arbeiten BENDER/SCHREIBER (1985) heraus. In ihrem Buch mit dem Titel „Operative Genese der Geometrie" wird die räumliche Bewegung als anschaulicher Prototyp jeglicher Bewegung bzw. Änderung betrachtet.

> „Schon in den lebensweltlichen Anfängen operativer Begriffsbildung[80] spielt die Analyse funktionaler Abhängigkeiten eine wesentliche Rolle. – Wie wirken sich an Gegenständen Änderungen von gewissen Teilen (Bewegung, Verformung) auf andere Teile aus (beim Wankelmotor, beim Scheibenwischer, beim Korkenzieher, usw.)? Solche Überlegungen, deren mathematische Fassung für viele einfache Objekte gar nicht so elementar ist, bilden die Grundlage für ein abstrakteres funktionales Denken in der Mathematik im Sinne der Meraner Reformvorschläge von 1905: Wenn bei einer Funktionsvorschrift der Definitionsbereich in irgendeiner

[79] Auf den Seiten 78f dieser Arbeit arbeite ich Schritte beim „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren" heraus, bei denen es unter anderem auch darum geht, den Definitionsbereich im Rahmen der zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade geeignet auszuwählen bzw. die Freiheitsgrade einzuschränken. Erst dadurch werden vorgenommene Veränderungen überschaubar und so für Argumentationen nutzbar.

[80] BENDER/SCHREIBER formulieren das Prinzip der operativen Begriffsbildung wie folgt:

> „Geometrische Begriffe sind operativ zu bilden, d. h.: Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen, zumeist Homogenitätsforderungen, werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe." BENDER/SCHREIBER (1985), S. 26

Weise durchlaufen wird, wie sieht dann der zugehörige Weg durch den Wertebereich aus?

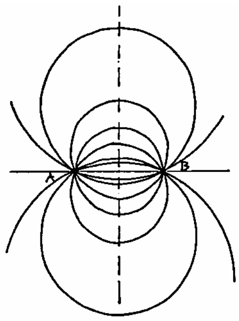


Abb.163 Umfangswinkelsatz

Zur Ausbildung eines solchen Denkens ist die Geometrie besser geeignet als die Analysis, weil sie mit Ebene und Raum als Punktmengen reichhaltigere Definitionsbereiche anbietet, in denen man auch wirklich unterschiedliche Wege gehen kann. Beispiel: Für zwei gegebene, verschiedene, feste Punkte A, B wird jedem anderen Punkt X das Winkelmaß $w(X) := w(AXB)$ zugeordnet. Wie ändert sich $w(X)$, wenn man X variiert, z. B. speziell auf einem Kreis durch A und B?

Auch Figurenmengen liefern in der Geometrie sinnvolle Definitionsbereiche. Eine Bewegung (ein ‚Wandern') ist dann nichts anderes als eine Abfolge von Elementen dieses Bereichs (bzw. von Teilmengen des euklidischen Raums), eine Abfolge von Lagen, bei der funktionale Betrachtungen angestellt werden können, z. B.: Wie ändert sich das Volumen einer Figur bei einer (als Bewegung gedachten) Streckung?

Erst in der Veränderlichkeit zeigt sich die Abhängigkeit, und es ergibt sich u. U. die Notwendigkeit, Definitions- und Wertebereich einzurichten und die Abbildungsvorschrift genauer zu spezifizieren (…)." BENDER/SCHREIBER (1985), S. 203f

In neuerer Zeit gibt es, auch im Zuge der flächendeckenden Einführung von dynamischer Geometriesoftware (DGS) an den Schulen, wieder mehr Befürworter eines Geometrieunterrichtes, der Bewegungen und Veränderungen einbezieht und als Argumentationsgrundlage zulässt. Ein vehementer Verfechter ist z. B. BENDER (1989), der für „Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen" plädiert. Er hat die folgende umfangreiche Liste der Funktionen stetiger Bewegungen bzw. Verformungen bei elementargeometrischen Beweisen zusammengestellt und an Beispielen illustriert:

A. „Sie liefern den Beweis selbst (z. B. Existenznachweis mit Stetigkeitsargumenten).
B. Sie vertiefen den Glauben an den Beweis, indem sie ihn plausibel bzw. plausibler machen (z. B. mit der Idee der Freiheitsgrade).
C. Sie unterstützen die Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer Behauptung, indem sie viele Fälle zeigen, Sonderfälle in allgemeine Fälle einbetten (und sie so hervorheben) und überhaupt Übergänge zwischen Fällen demonstrieren.

D. Sie erzeugen Vermutungen, Sätze, Beweisideen, indem sie Veränderungen und Invarianten zeigen (s. Rotweinbeweis[81]).
E. Sie visualisieren den Ablauf eines Beweises und strukturieren ihn, indem sie einzelne Beweis‚stationen‘ verbinden und die Umstrukturierungsoperationen leiten (z. B. ‚Scherungsbeweis‘ des Kathetensatzes).
F. Sie stehen für Handlungen und machen die geometrischen Operationen dadurch zugänglicher, plausibler.
G. Sie regen eine allgemeine Sichtweise geometrischer Figuren als beweglich bzw. veränderlich an, die grundsätzlich geometrischen und außergeometrischen Denkweisen förderlich ist.“ BENDER (1989), S. 129

Die von BENDER (1989) genannten Aspekte machen deutlich, dass das Prinzip der Bewegung das Potenzial hat, bei geometrischen Argumentationen Zusammenhänge deutlicher herauszustellen, Beweise griffig zu strukturieren und das intuitive Verständnis (gemeint ist hier die Plausibilität) durch die Beweisführung zu erhöhen. Ein Ansatzpunkt zur Nutzung der genannten Möglichkeiten im Unterricht könnte die Verwendung dynamischer Visualisierungen sein, für die DANCKWERTS/VOGEL (2003) plädieren. Die folgende Passage stützt sich auf die Diskussion einer Herangehensweise an den Satz des Pythagoras, deren Kern eine dynamische „Stuhl der Braut“-Konfiguration[82] ist.

„Nach der Analyse der verblüffend konstruktiven Rolle dynamischer Visualisierung bei der Entdeckung und Begründung des Satzes des Pythagoras wagen wir einen ersten Anlauf programmatischer Orientierung.

1. Ehe die dynamische Visualisierung zum Zuge kommen konnte, mussten wir dem ehrwürdigen Satz des Pythagoras eine operative Sicht abgewinnen.
   Vielleicht ist die Möglichkeit, einen eher statisch formulierten mathematischen Satz *operativ zu fassen*, einer der Schlüssel, um das Instrument dynamischer Visualisierung mit Gewinn einsetzen zu können. Wer sich also der medialen Chancen dynamischer Visualisierung bedienen will, wird im Allgemeinen zunächst eine veränderte Perspektive auf den mathematischen Gegenstand einnehmen müssen.

---

[81] BENDER bezieht sich hier auf den von HEIDENREICH vorgestellten Beweis für den Satz, dass das Kantenmittensechseck des Würfels eben und regelmäßig ist:

„Man denkt sich einen Glaswürfel voll mit Rotwein auf eine Ecke gestellt (etwa auf einem dreibeinigen Gestell), so daß eine Raumdiagonale lotrecht ist, und läßt den Rotwein durch ein Loch ganz unten auslaufen. Die 3 Würfelkanten, die an die Spitze stoßen, haben alle dieselbe Neigung gegen die Lotrechte, d. h. alle Kanten des Würfels, die ja zu einer der 3 an der Spitze parallel sind, haben dieselbe Neigung. Beim Auslaufen erreicht der Rotweinspiegel zunächst gleichzeitig die 3 Ecken, die zur Würfelspitze benachbart liegen, und dann gleichzeitig die 6 Kantenmitten. Damit ist die Ebenheit nachgewiesen. Für den Beweis der Regelmäßigkeit muß man sich noch ein paar, allerdings nicht allzu fern liegende, Gedanken machen.“ BENDER (1989), S. 120

[82] Ein entsprechendes DynaGeoX-Applet des Autors findet sich im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → P → Pythagoras → Stuhl der Braut.

2. Der Einsatz dynamischer Visualisierung hatte sich deshalb gelohnt, weil es möglich wurde, die Gesamtheit aller konkurrierenden Konfigurationen in den Blick zu nehmen.
   Vermutlich wird sich dynamische Visualisierung in Situationen lohnen, in denen es für das Verstehen zwingend ist, die volle Variabilität konkurrierender Konstellationen mitzudenken.
3. Zur Not hätte man sich die Folgen einer Variation des Punktes P auch ‚im Kopf' mit einiger Mühe vorstellen können. Aber der Einsatz dynamischer Visualisierung hat diese Vorstellung wirksam und nachhaltig unterstützt.
   Dynamische Visualisierung wird sich lohnen, wenn eine gesuchte Lösung nur schwer im Kopf vorstellbar ist.
   Das Medium Computer mit der Möglichkeit zur dynamischen Visualisierung soll helfen,
   - wesentliche inhaltliche Orientierungen in der Mathematik zu unterstützen (‚adäquates Bild von Mathematik'; *wissenschaftstheoretischer Aspekt*)
   - den explorierenden Umgang mit Mathematik zu stärken (‚heuristische Wirksamkeit'; *lerntheoretischer Aspekt*)." DANCKWERTS/VOGEL (2003), S. 21

Die Ausführungen zum kinematischen Denken und dem „Prinzip der Bewegung" für den Geometrieunterricht machen deutlich, dass verschiedene Autoren im Zusammenhang mit diesen Begriffen jeweils ganz unterschiedliche Aspekte in den Mittelpunkt stellen. Im Hinblick auf das kinematische Denken lassen sie sich im Wesentlichen mit den beiden Fähigkeiten „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren"[83] sowie „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben", also der ersten und der dritten Fähigkeit des Beweglichen Denkens umschreiben. Beim „Prinzip der Bewegung" für den Geometrieunterricht steht wieder die Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren" im Vordergrund. Hier wird mit Hinweis auf Sonder- und Grenzfälle allerdings auch Wert auf die Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und beschreiben" gelegt, die im Zusammenhang mit dem kinematischen Denken nicht genannt wird. Der Begriff „Bewegliches Denken" ist als Synthese dieser sich gegenseitig bedingenden Fähigkeiten zu verstehen. Meiner Einschätzung nach ist ein Arbeiten mit Bewegungen und Veränderungen im Mathematikunterricht nur dann Gewinn bringend für Schülerinnen und Schüler, wenn sie über diese Fähigkeiten verfügen bzw. wenn diese im Unterricht bewusst gefördert werden.

[83] Der Begriff „Bewegung" umfasst hier neben der räumlichen Bewegung auch andere Veränderungen, wie z. B. die Kovariation (vgl. Fußnote 87 auf Seite 69) von abhängigen und unabhängigen Größen in funktionalen Zusammenhängen.

1.2.8 Funktionales Denken

In welcher Beziehung steht die Fähigkeit zum Umgang mit Veränderungen und dem daraus resultierenden Änderungsverhalten[84] zum funktionalen Denken[85]? Um diese Frage zu beantworten, werden zunächst (die) zentrale(n) Aspekte des funktionalen Denkens zusammengestellt.[86] VOLLRATH (1989) geht von folgender Auffassung aus:

> „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist." VOLLRATH (1989), S. 6

Auch wenn es bei vielen empirischen Untersuchungen zum Funktionsbegriff um die Frage geht, ob Schülerinnen und Schüler eine korrekte (DIRICHLETsche) Definition des Begriffs „Funktion" angeben und zwischen Beispielen und Gegenbeispielen für Funktionen unterscheiden können (vgl. MÜLLER-PHILIPP (1994), S. 30–63) ist das nicht der Kern des funktionalen Denkens. Bei VOLLRATH geht es nicht nur um die Kenntnis und den verständigen Umgang mit dem DIRICHLETschen Funktionsbegriff. Er hält vielmehr folgende drei Aspekte beim gedanklichen Umgang mit Funktionen für zentral:

(1) den **Zuordnungscharakter**,
(2) das **Änderungsverhalten**[87] und
(3) die **Sicht als Ganzes**.[88]

Diese Punkte erläutert er wie folgt:

> (1) „Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen. (…) Die Ausprägung funktionalen

---

[84] Dies ist eine Umschreibung des Beweglichen Denkens!

[85] KRÜGER (2000b) liefert eine umfassende historische Darstellung der Entwicklungsgeschichte des funktionalen Denkens im Zuge der Meraner Reform von 1905 und eine Würdigung der Konsequenzen für den Mathematikunterricht bis in die heutige Zeit. Da die vorliegende Arbeit nur einen kurzen Abriss bieten kann, sei für eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Thema auf dieses Werk verwiesen.

[86] Zum Thema „funktionales Denken und Funktionen im Mathematikunterricht" gibt es umfangreiche angloamerikanische Literatur. Einen guten Überblick bietet der von DUBINSKY/HAREL (1992) herausgegebene Sammelband „The Concept of Funktion".

[87] MALLE (2000b) verwendet statt „Änderungsverhalten" synonym den Begriff „Kovariation", der auch in der neueren angloamerikanischen Literatur als „covariation" gängig ist, und begründet das wie folgt:

> „Er drückt meines Erachtens in recht einprägsamer Weise aus, worum es geht, nämlich um ein ‚Ko-Variieren', das heißt ‚Miteinander-Variieren' der beiden Variablen." MALLE (2000b), S. 8

[88] VOLLRATH (2003), S. 129f

> Denkens zeigt sich an dem Grad der Beherrschung dieser Ausdrucksmittel zum Erfassen und Lösen von Problemen.
>
> (2) Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken. (…) Die Ausprägung des funktionalen Denkens zeigt sich also auch daran, in welcher Weise Änderungen geplant, durchgeführt, analysiert und zur Lösung von Problemen eingesetzt werden können. (…)
>
> (3) Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes. (…) Die Ausprägung des funktionalen Denkens zeigt sich an der Fähigkeit, in unterschiedlichen Darstellungen von Funktionen das Ganze der Funktion zu erfassen und in der Fähigkeit, vom Einzelnen aufs Ganze und umgekehrt vom Ganzen aufs Einzelne ‚umzuschalten'." VOLLRATH (1989), S. 8-16

VOLLRATH erfasst hier also sowohl den statischen Aspekt der Zuordnung, als auch den dynamischen Aspekt der Änderung und schließlich mit der „Sicht als Ganzes" einen Aspekt der ein Durchlaufen des „gesamten" Definitionsbereiches nahe legt, wenn nicht nur lokal argumentiert werden soll. Die Integration von statischen Aspekten in das funktionale Denken steht, wie VOLLRATH selbst erklärt[89], in Kontrast zu der Auffassung des funktionalen Denkens, wie es im Umfeld der Meraner Vorschläge von 1905 verstanden und als Schlagwort geprägt wurde. Dort ging es bei der „Erziehung zum funktionalen Denken", wie KRÜGER (2000b) in ihrem gleichnamigen Buch herausarbeitet, um Denkgewohnheiten, für die bewegliche, kinematische Sichtweisen von Mathematik charakteristisch sind. Diese Denkweisen entsprechen dem, was im Abschnitt über das kinematische Denken und das „Prinzip der Bewegung" im Geometrieunterricht[90] dargestellt wurde. RUDERT (1919) schreibt dazu:

> „Die Untersuchung über die Grundlagen des funktionalen Denkens hat zu beginnen mit der Feststellung, in welchem Falle oder genauer von welchem Augenblicke an *die Vorstellung einer Zuordnung als funktional zu gelten* hat. Damit, daß jemand der Quadratseite von 1 cm Länge den Flächeninhalt 1 cm^2, der von 4 cm Länge den Flächeninhalt 16 cm^2 und der von 6 cm Länge den Flächeninhalt von 36 cm^2 zuordnet, damit allein hat er die Abhängigkeit noch nicht funktional erfaßt, andererseits aber beginnt das funktionale Vorstellen nicht erst mit der Fähigkeit, sich zu einer *stetig* variierenden Seitenlänge die zugehörige also ebenfalls stetig variierende Quadratfläche vorzustellen. Funktional *kann* die Vorstellung bereits dadurch werden, daß einander zugeordnet werden: Seite 1 cm, Fläche 1 cm^2;

[89] VOLLRATH (1989), S. 7
[90] Vgl. S. 58f

> Seite 2 cm, Fläche 4 cm^2; Seite 3 cm, Fläche 9 cm^2; Seite 4 cm, Fläche 16 cm^2; … ohne Rücksicht auf die Quadrate, die zwischen den angegebenen liegen. Die notwendige Bedingung aber für ein funktionales Erfassen einer solchen Anzahl von Wertepaaren ist, daß dieselben nicht als Einzelprobleme aufgefasst werden, sondern dass sie untereinander, jedes mit seinem Nachbarn, in Beziehung gesetzt, verglichen werden.“ RUDERT (1919), S. 31

Hier wird deutlich, dass die gleichmäßige Veränderung einer Größe und das Erfassen der Änderung der abhängigen Größe(n) das entscheidende Kriterium des funktionalen Denkens im Sinne der Meraner Reform war. Dabei muss die Veränderung des Arguments nicht unbedingt stetig, aber doch stets gleichmäßig erfolgen. Auch ein diskretes Variieren ist möglich, wie man an RUDERTS Beispiel deutlich erkennt.[91] Er erläutert auch, warum die Veränderung des Arguments gleichmäßig erfolgen muss:

> „Darin besteht ja die eigenartige Schwierigkeit des funktionalen Vorstellens, daß es das *gleichzeitige Bewußtsein zweier Größenreihen* zur Voraussetzung hat, derart, daß beim Durchlaufen der einen die andere gleichzeitig mit abläuft, der ersten sich zuordnend. Um diese Arbeit zu erleichtern, bezw. überhaupt zu ermöglichen, muß die Argumentreihe eine einfache Form annehmen.“ RUDERT (1919), S. 37f

Wie hängt nun Bewegliches Denken mit dem funktionalen Denken zusammen? Zunächst ist Bewegliches Denken eine Synthese des kinematischen Denkens mit dem „Prinzip der Bewegung“ für den Geometrieunterricht und damit weitgehend deckungsgleich mit dem Verständnis des funktionalen Denkens der Meraner Reform. Dies wiederum bedeutet, dass das Bewegliche Denken gerade den dynamischen Anteil des funktionalen Denkens im Sinne VOLLRATHS[92] repräsentiert und folglich eine echte Teilmenge des so verstandenen funktionalen Denkens ist. Es ist mir wichtig, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass das Bewegliche Denken sich *nicht* im Aspekt „Änderungsverhalten“ bzw. „Kovariation“ des funktionalen Denkens nach VOLLRATH erschöpft, sondern

[91] Diese Möglichkeit des diskreten, aber gleichmäßigen Variierens wird in Diskussionen zum Thema „funktionales Denken“ oft übersehen. Welchen wertvollen Beitrag dieses diskrete Vorgehen zur Entwicklung des Funktionsbegriffs und zur Propädeutik der Analysis leistet, hat THIES (2002) herausgearbeitet.

[92] Betrachtet man die Fähigkeiten, die nach VOLLRATH im Fokus von Untersuchungen zur Entwicklung des funktionalen Denkens stehen sollten, dann werden der statische und der dynamische Anteil des funktionalen Denkens noch einmal sehr deutlich:

> „(1) Zusammenhänge zwischen Größen festzustellen, anzugeben, anzunehmen und zu erzeugen;
> (2) Hypothesen über die Art eines Zusammenhanges und über den Einfluß von Änderungen zu bilden, zu kontrollieren und gegebenenfalls zu revidieren.“ VOLLRATH (1989), S. 28

auch den Aspekt „Sicht als Ganzes“ mit umfasst. Die „Sicht als Ganzes“ kommt insbesondere in der Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ des Beweglichen Denkens zum Tragen.

In dieser Arbeit geht es darum, ob und wenn ja, wie Bewegliches Denken im Mathematikunterricht entwickelt werden kann. Dass es notwendig ist, Veränderungen und das damit zusammenhängende Änderungsverhalten der abhängigen Größen stärker im Mathematikunterricht zu thematisieren und ein besseres Verständnis dafür zu entwickeln, wird an Defiziten von Schülerinnen und Schülern in diesem Bereich deutlich. Exemplarisch sei hier auf drei Ergebnisse verwiesen, die bei unterschiedlichen Repräsentationsformen von funktionalen Zusammenhängen auftreten: JANVIER (1978) stellt im Zusammenhang mit dem Lesen und Interpretieren von Graphen funktionaler Zusammenhänge in Umweltsituationen die Schwierigkeit fest, stetige Veränderlichkeit nachvollziehen zu können. Dies manifestiert sich unter anderem darin, dass große Zunahmen mit großen (absoluten) Werten verwechselt werden.[93] Weiterhin können die Schüler bei einer Darstellung die Veränderung der Werte, und damit die Dynamik der dargestellten Situation, nicht nachvollziehen, da sie nicht über ein „Punkt-für-Punkt-Verständnis“[94] hinaus zu einem Intervall- bzw. Variablenverständnis kommen. Ähnliches schreibt VOLLRATH (1989) in seinem Artikel über das funktionale Denken:

> „Im Umgang mit Wertetabellen überwiegt die Betrachtung ‚horizontaler‘ Zusammenhänge zwischen den Spalten; ‚vertikale‘ Zusammenhänge treten zurück.“ VOLLRATH (1989), S. 31

Schülerinnen und Schüler scheinen demnach beim Arbeiten mit Wertetabellen im Wesentlichen den Zuordnungscharakter („Einem ‚x-Wert‘ wird ein Funktionswert zugeordnet.“) zu sehen und den Änderungscharakter („Wie ändert sich der Funktionswert, wenn der ‚x-Wert‘ verändert wird?“) tendenziell zu vernachlässigen. Diese Problematik findet sich auch bei MONK (1992), der hier von „Pointwise questions“ und „Across-Time questions“ spricht und davon berichtet,

---

Mit der ersten Fähigkeit wird stärker der statische Zuordnungsaspekt erfasst, während die zweite Fähigkeit den dynamischen Aspekt in den Blick nimmt.

[93] JANVIER (1978) schreibt: „Large increases are identified with large values of the variables. (…) The idea of ‘faster‘ is meaningless and confused with that of ‘higher‘.“ JANVIER (1978), S. 10.20f

[94] „(…) the impossibility to go beyond point-by-point reading.“ JANVIER (1978), S. 10.18

> „(…) that students find Across-Time questions much more difficult than Pointwise questions. (…) For instance, a student could use a table of position vs. time to calculate distances covered by a car over various time intervals and yet not be able to determine whether or not the car is speeding up." MONK (1992), p. 176

MÜLLER-PHILIPP (1994) beschreibt Probleme von Schülerinnen und Schülern mit dem Begriff „Steigung" und seiner Realisierung in Funktionsgleichungen und Funktionsgraphen, die auf ein fehlendes inhaltliches Verständnis des Änderungsverhaltens zurückzuführen sind:

> „Vor allem der Begriff der Steigung scheint nicht inhaltlich verankert zu sein (Steigung ist ein Verhältnis? Verhältnis wovon? Wo findet man dieses Verhältnis in einer Gleichung/in einem Graphen?). Diese Aussage gilt nicht nur für viele Schüler der Sekundarstufe I, sondern auch für zahlreiche ältere Schüler und sogar Studenten. Zudem ist zu beobachten, dass dort, wo bestimmte Fakten erinnert werden (z. B. eine nach unten geöffnete Parabel hat einen negativen Streckfaktor), oft keine Begründungen für diese Fakten bekannt sind, was den Transfer der an einer exemplarischen Funktionenklasse erworbenen Kenntnisse auf andere Klassen erschweren muß." MÜLLER-PHILIPP (1994), S. 89f

1.2.9 Zusammenfassung des Begriffsgefüges

Das Bewegliche Denken ist Teil eines größeren Begriffsgefüges. Es gibt Denkweisen, die echte Teilaspekte des Beweglichen Denkens sind, wie das funktionale Denken im Sinne der Gegenüberstellung „prädikatives versus funktionales Denken" von SCHWANK, das kinematische Denken, das „Prinzip der Bewegung" und der Aspekt „dynamisches Denken" im Umfeld des systemischen Denkens. Sie beleuchten aus verschiedenen Blickwinkeln jeweils einzelne der im Beweglichen Denken zusammengefassten Fähigkeiten:

- „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren"
- „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren"
- „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben"

Das funktionale Denken bei VOLLRATH umfasst im Gegensatz zum Beweglichen Denken neben dynamischen auch statische Aspekte. Es handelt sich um einen Oberbegriff des Beweglichen Denkens.[95] Beim räumlichen Denken sind ebenfalls statische und dy-

[95] Das funktionale Denken im (ursprünglichen) Sinne der Meraner Reformer deckt sich dagegen weitgehend mit dem Beweglichen Denken.

namische Aspekte enthalten, die statischen Aspekte decken sich allerdings nicht mit denen des funktionalen Denkens im VOLLRATHschen Sinn. Dementsprechend handelt es sich hier um eine teilweise Begriffsüberschneidung (Schnittmengenbildung) mit dem Beweglichen Denken bzw. mit dem funktionalen Denken. Alle genannten Denkweisen sind sicher Teilaspekte von mathematischem Denken, also von Denkweisen, die in der Mathematik bedeutsam sind. Die **Abb. 16** gibt einen Überblick über den Zusammenhang der genannten Begriffe.[96]

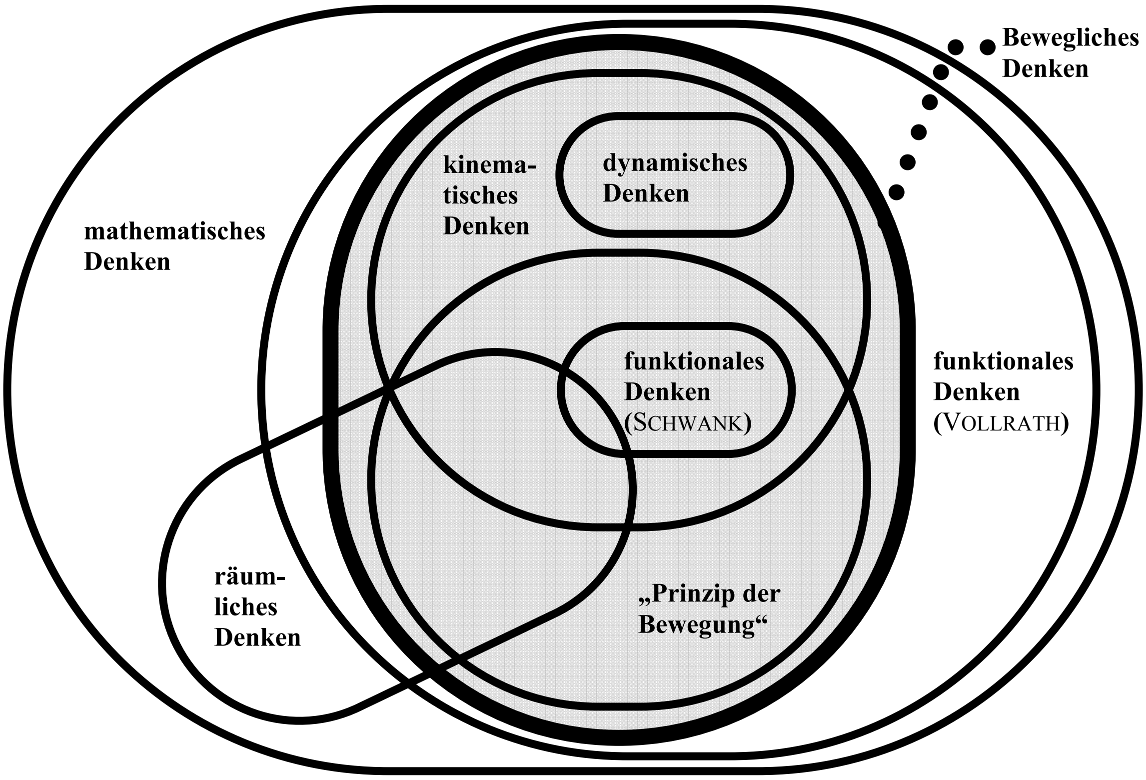


Abb. 16: Bewegliches Denken im Gefüge verwandter Begriffe

[96] In **Abb. 16** kommt der Begriff „Beweglichkeit des Denkens“ nicht vor. Dies liegt daran, dass er etwas quer zu den sonstigen Denkweisen liegt. Die zugehörige Fähigkeit, die man grob mit Flexibilität im Denken umreißen könnte, ist nämlich unabhängig von der benutzten Denkweise wünschenswert. Flexibel kann man sowohl im Beweglichen Denken als auch beim statischen Denken sein.

1.3 Bewegliches Denken exemplarisch

Nachdem im Abschnitt 1.2 der Begriffsumfang des Beweglichen Denkens in Form einer Einordnung in und Abgrenzung gegen benachbarte Begriffe ausgelotet wurde, soll der vorliegende Abschnitt dazu dienen, die Möglichkeiten, die Bewegliches Denken eröffnet, an zwei Beispielen aufzuzeigen. Im Sinne einer theoretischen Idealvorstellung wird der Gedankengang eines Problemlösers nachgezeichnet, für den das Bewegliche Denken zum kognitiven Standardrepertoire gehört. Dabei wird versucht wesentliche Schritte des Gedankenganges herauszuarbeiten und jeweils angegeben, welche der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens gerade benötigt werden.

1.3.1 Beispiel 1: Gleichschenklige Dreiecke mit mindestens einem Innenwinkel von 45°

Problem: Man bestimme alle gleichschenkligen Dreiecke mit mindestens einem 45°-Innenwinkel, wenn eine Dreiecksseite fest vorgegeben ist.

Diese Problemstellung legt sicher nicht direkt eine Herangehensweise mit beweglichen Argumentationen nahe. Trotzdem lässt sich, wie im Folgenden gezeigt werden wird, auf dem Niveau des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I mit Hilfe von Bewegungen argumentieren, wenn einige der oben unter der Bezeichnung *Bewegliches Denken* zusammengefassten Fähigkeiten vorhanden sind und flexibel genutzt werden können.

Man denke sich o. B. d. A. eine Strecke $[AB]$ als fest vorgegebene Seite[97] eines Dreiecks ΔABC. Damit ist die Lage des Eckpunktes C nicht festgelegt und man kann ihn sich folglich als in der euklidischen Ebene beweglich vorstellen (vgl. **Abb. 17**).

[97] „Fest vorgegebene Dreiecksseite" bezieht sich sowohl auf die Länge der Strecke $[AB]$ als auch auf ihre Lage in der euklidischen Ebene, da letztere das Problem nicht berührt.

Um Nutzen aus diesem Bild ziehen zu können, ist die Fähigkeit notwendig, in ein statisches Dreieck eine *Bewegung* des Eckpunktes *C hineinsehen*[98] *und (damit) argumentieren* zu können, dass durch diese Bewegung die Seitenlängen von [*AC*] und [*BC*] sowie Winkelgrößen des Dreiecks verändert werden.

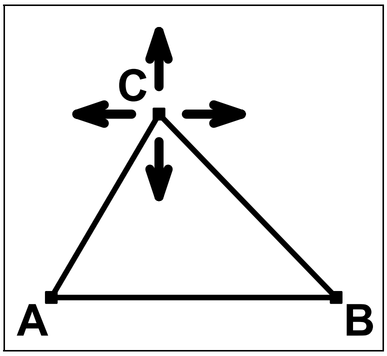


Abb. 17: Der Punkt C des Dreiecks *ΔABC* kann bei fest vorgegebener Seite [AB] frei in der euklidischen Ebene bewegt werden.

Da die Fragestellung offensichtlich zwei Forderungen enthält, erscheint es sinnvoll, zunächst eine dieser Forderungen zu erfüllen. Hier soll mit folgender Frage begonnen werden:

Für welche Lagen von *C* entstehen Dreiecke, die gleichschenklig sind?

Als bekannt wird vorausgesetzt, dass die Mittelsenkrechte einer Strecke die Ortslinie aller Punkte ist, die von den Endpunkten gleich weit entfernt sind. Damit ist klar, dass für alle Lagen von *C* auf der Mittelsenkrechten $m_{[AB]}$ von [*AB*] gleichschenklige Dreiecke entstehen.

Sind damit aber alle möglichen gleichschenkligen Dreiecke erfasst, oder gibt es evtl. noch andere Linien, auf denen *C* bewegt werden kann, so dass das Dreieck *ΔABC* stets gleichschenklig bleibt? Um diese Frage beantworten zu können, ist die Fähigkeit erforderlich, die *Gesamtkonfiguration* als Ganzes *erfassen und* jeweils relevante Teilaspekte fokussieren, also die Figur *analysieren* zu können. Im konkreten Fall bedeutet das zu erkennen, dass bei der Bewegung von *C* nicht nur die Längen der beiden sich ändernden Seiten [*AC*] und [*BC*] verglichen werden müssen, sondern auch die von der Bewegung von *C* zunächst nicht berührte Strecke [*AB*] in den Blick genommen werden muss. Denn die Längen der beiden anderen Seiten ändern sich natürlich auch im Vergleich zur konstanten Länge der Seite [*AB*]. Zu überprüfen ist, *ob* bzw. *wann* die Länge von [*AC*] (bzw. [*BC*]) gleich der Länge der festen Strecke [*AB*] wird. Gefragt ist hier eine Bewegung von *C*, die den Abstand von *C* zu *A* (bzw. *B*) konstant gleich der Länge der Stre-

[98] Ich werde im Folgenden nur Bewegungen von *C* in der Halbebene betrachten, die durch *AB* und die Ausgangslage von *C* (vgl. Abb. 17) festgelegt ist. Bewegt sich *C* auf *AB*, so entartet das Dreieck zu einer Strecke, bewegt sich *C* in der anderen Halbebene, so ergibt sich, aus Gründen der Achsensymmetrie der euklidischen Ebene bzgl. jeder in ihr verlaufenden Geraden, nichts wesentlich Neues.

cke $[AB]$ hält. Alle Punkte, die einen festen Abstand zu einem vorgegebenen Punkt haben, liegen aber auf einem Kreis um den vorgegebenen Punkt mit dem festen Abstand als Radius. Als weitere mögliche Linien, auf denen sich C bewegen kann, erhält man folglich die Kreise um A und B mit dem Radius $\overline{AB}$, also $k\left(A;\overline{AB}\right)$ und $k\left(B;\overline{AB}\right)$.

Damit sind alle Lagen von C bestimmt, die gleichschenklige Dreiecke ΔABC liefern, nämlich

$$C \in m_{[AB]} \cup k\left(A;\overline{AB}\right) \cup k\left(B;\overline{AB}\right).$$

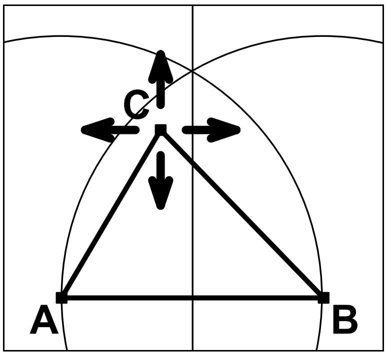


Abb. 18: Beispiel 1: Ortslinien für C, so dass das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist.

Die entsprechenden Kurven, auf denen C bewegt werden kann, sind in **Abb. 18** durch dünne Linien dargestellt.

Wendet man sich nun der zweiten Forderung zu, dass mindestens ein Innenwinkel des Dreiecks ΔABC 45° betragen soll, dann ist es nahe liegend, dies für die drei möglichen Ortslinien einzeln zu betrachten. Unter Ausnutzung des Basiswinkelsatzes für gleichschenklige Dreiecke und des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck ergibt sich dabei jeweils:

(1) $C \in m_{[AB]}$, d. h. $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Aus $|\alpha| = 45°$ folgt $|\beta| = 45°$ und damit $|\gamma| = 90°$.

Aus $|\gamma| = 45°$ folgt $|\alpha| = |\beta| = 67{,}5°$.

(2) $C \in k\left(A;\overline{AB}\right)$, d. h. $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Aus $|\alpha| = 45°$ folgt $|\beta| = |\gamma| = 67{,}5°$.

Aus $|\beta| = 45°$ folgt $|\gamma| = 45°$ und damit $|\alpha| = 90°$.

(3) $C \in k\left(B;\overline{AB}\right)$, d. h. $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Aus $|\alpha| = 45°$ folgt $|\gamma| = 45°$ und damit $|\beta| = 90°$.

Aus $|\beta| = 45°$ folgt $|\alpha| = |\gamma| = 67{,}5°$.

Damit ist das Problem gelöst.

Wie sieht die Lösung des Problems mit beweglichen Argumentationen aus, wenn man mit der zweiten Forderung, also mit folgender Frage beginnt?

> Für welche Lagen von C besitzt das Dreieck ΔABC, bei fest vorgegebener Strecke $[AB]$, mindestens einen 45°-Innenwinkel?

Die in der ersten Lösung des Problems dargestellte Herangehensweise eignet sich für viele Fragestellungen, die man mit den genannten Fähigkeiten des Beweglichen Denkens bearbeiten kann. Im Folgenden wird wieder so vorgegangen. Dabei werden die wesentlichen *Schritte des Gedankenganges* deutlich herausgestellt.

Auch hier wird wieder damit begonnen, in die statische Figur eine Bewegung hineinzusehen.

Bewegung hineinsehen und damit argumentieren

1. Herausarbeiten der Freiheitsgrade des Problems. Es gilt festzustellen, welche Bewegungen bzw. Veränderungen im Rahmen der Vorgaben überhaupt möglich sind.

   Wie oben handelt es sich hier um die Möglichkeit, die Lage von C zu verändern.

2. Untersuchen bzw. Durchdenken der für das Problem relevanten Konsequenzen einer Variation im Rahmen der Freiheitsgrade.

   Für das aktuelle Problem müssen die Innenwinkel des Dreiecks ΔABC betrachtet werden. Für die Innenwinkel α und β ist jeweils ein Schenkel durch die Strecke $[AB]$ fest vorgegeben, während der andere Schenkel durch die Lage des Punktes C festgelegt wird. Damit impliziert eine Bewegung von C in der Regel auch eine Veränderung der Winkelgrößen von α und β. Es stellt sich nun die Frage, ob man den Punkt C auch so bewegen kann, dass eine Winkelgröße, z. B. die des Winkels α, immer konstant gleich 45° bleibt.

3. Einschränken der möglichen Freiheitsgrade zur besseren Analyse der Konsequenzen.

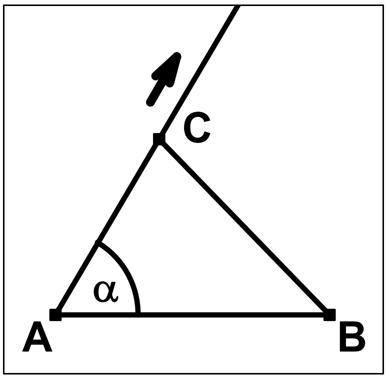


Abb. 19: Beispiel 1 – 3. Schritt

Eine mögliche Herangehensweise an die oben gestellte Frage ist es, zunächst *eine* geeignete Lage von C zu suchen. Dies ist im vorliegenden Fall einfach, man muss nur einen 45°-Winkel in A an AB antragen. Setzt man C auf den zweiten Schenkel dieses Winkels, so besitzt das entstehende Dreieck ΔABC offensichtlich einen Innenwinkel des Winkelmaßes 45°, nämlich α. Um eine Lage von C zu finden, für die das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist, kann man C auf dem zweiten Schenkel des Winkels α bewegen. Dabei ändert die Seite $[BC]$ ihre Länge (vgl. **Abb. 19**). Beginnt man die Bewegung von C in A, so wird $[BC]$ zunächst kürzer, bis sie senkrecht auf $[AC$ steht. In dieser Lage ist die Länge der Strecke $[BC]$ minimal. Bewegt man C weiter, so nimmt $[BC]$ jede Länge an, die größer als die minimale Länge ist. An einem bestimmten Punkt sind die Längen von $[BC]$ und $[AB]$ gleich. Damit ist eine erste Antwort gefunden. In diesem Fall ist $|\beta| = 45°$ und damit $|\gamma| = 90°$.

Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren

4. In den Blick nehmen der Gesamtkonfiguration und Analyse aller auftauchenden veränderlichen Größen und Invarianten im Hinblick auf die Relevanz für die betrachtete Fragestellung.

   Hier macht man sich bewusst, dass bei der Bewegung von C auch noch ein anderes gleichschenkliges Dreieck entstehen kann, nämlich wenn $\overline{AC} = \overline{AB}$ wird. Damit ist eine zweite Antwort gefunden. Hier sind $|\beta| = |\gamma| = 67{,}5°$.

Die Überlegungen verlaufen entsprechend für $|\beta| = 45°$. Schwieriger sind sie, wenn $|\gamma| = 45°$ ist. Die Suche nach einer Linie auf der C bewegt werden kann, so dass der Winkel γ dabei immer ein Winkelmaß von 45° behält, ist offensichtlich nicht ganz so leicht, wie bei den anderen Innenwinkeln. Mit dem Umfangswinkelsatz und seiner Umkehrung kann man zeigen:[99] Die Ortslinie für *C* zu der Eigenschaft $|\gamma| = 45°$ ist der Fasskreisbogen zum Winkel 45° in der durch *AB* und *C* festgelegten Halbebene. Genau dann, wenn C auf dieser Ortslinie bewegt wird, hat der Innenwinkel γ des Dreiecks ΔABC ein Winkelmaß von 45°. Mit der Forderung der Gleichschenkligkeit ergeben sich nun die drei Fälle $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ und $\overline{AB} = \overline{BC}$.

In beiden beschriebenen Lösungswegen wurden zunächst Ortslinien für *C* bestimmt, so dass bestimmte Eigenschaften erfüllt sind. Diese Ortslinien sind in **Abb. 20** eingezeichnet. Im zweiten Lösungsweg wurde für jeden Innenwinkel des Dreiecks ΔABC eine Kurve gefunden, für die gilt: Genau dann, wenn C auf dieser Ortslinie bewegt wird, hat der entsprechende Innenwinkel von ΔABC ein Winkelmaß von 45°. Die Kurven sind in **Abb. 20** als fette Linien eingezeichnet. Zusammen mit den in **Abb. 20** als dünne Linien eingezeichneten Ortslinien von *C* für die Eigenschaft „ΔABC ist gleichschenklig“, die im ersten Lösungsweg erarbeitet wurden, lässt sich durch visuell unterstützte Schnittmengenbildung die Lösung unseres Ausgangsproblems von Seite 75 erhalten. **Abb. 20** ist zu entnehmen, dass es, bei vorgegebener Seite [*AB*], sechs Dreiecke mit mathematisch positivem Umlaufsinn gibt, die gleichschenklig sind und (mindestens) einen 45°-Innenwinkel besitzen.[100]

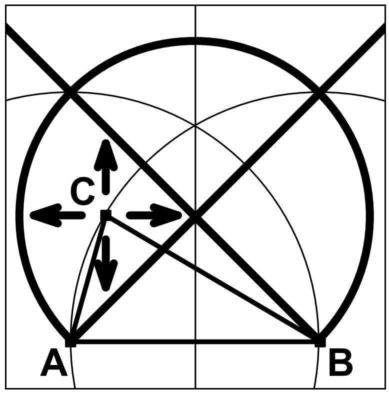


Abb. 20: Lösungsskizze zu Beispiel 1

Im vorliegenden Beispiel wurde das Problem insbesondere durch die Nutzung der ersten beiden Fähigkeiten des beweglichen Denkens gelöst. Mit Hilfe des nächsten Bei-

[99] Wenn der Umfangswinkelsatz und seine Umkehrung noch nicht zur Verfügung stehen, führt der zweite Lösungsweg mit beweglicher Argumentation nur zu einer Teillösung des Problems. Soll der Umfangswinkelsatz erarbeitet und bewiesen werden, so schwebt mir ein Vorgehen wie bei WITTMANN (1987, S. 139ff) vor. Den Beweis der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes würde ich analog zu SCHUPP (1998, S. 41) führen, wobei ich in das dort verwendete Bild eine Bewegung hineinsehen und damit argumentieren würden. Trotzdem stützen sich beide angesprochenen Beweise im Wesentlichen auf statische Argumente.

[100] Akzeptiert man Dreiecke mit negativem Umlaufsinn, so erhält man zwölf Dreiecke (Symmetrie bzgl. *AB*). Variationen der Aufgabenstellung ergeben vertiefende Fragestellungen. (Zum Beispiel: Welchen Einfluss hat eine Änderung der Bedingung „45°-Winkel“ auf die Anzahl der entsprechenden gleichschenkligen Dreiecke?)

spiels soll nun die dritte Fähigkeit „*Änderungsverhalten erfassen und beschreiben*“ illustriert werden.

1.3.2 Beispiel 2: Änderung des Abstands eines rotierenden Kreispunktes von einem Punkt außerhalb des Kreises

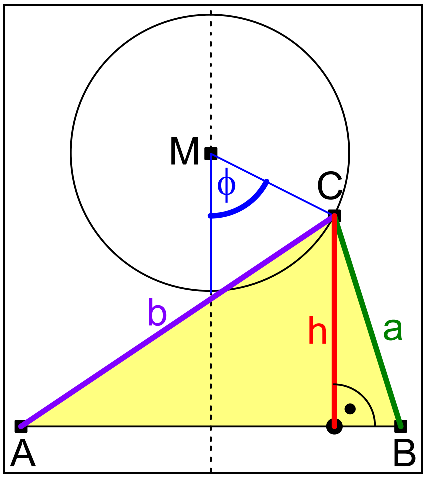


Abb. 21: Beispiel 2 – Problemskizze

Problem: Der Punkt *C* wird in **Abb. 21** gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises bewegt.[101] Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke *b*? Für welche Lage von *C* ist die Strecke b am längsten bzw. am kürzesten? Ändert sich die Länge der Strecke *b* überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von *C*, in denen sich die Streckenlänge schneller und andere, in denen sie sich langsamer ändert?

Grundsätzlich wird die Strecke $b = [AC]$ dann länger, wenn *C*, der eine Endpunkt der Strecke, sich vom anderen Endpunkt *A* wegbewegt und entsprechend kürzer, wenn *C* sich auf *A* zubewegt. Da der Punkt *C* sich auf dem Kreis bewegt, ist er dem Punkt *A* am nächsten, wenn die Länge der Strecke $b = [AC]$ dem Abstand der Kreislinie von *A* entspricht. Am weitesten entfernt von *A* ist *C*, wenn er sich genau auf der gegenüberliegenden Seite der Kreislinie befindet, wenn sich also zum Abstand zwischen Kreis und Punkt *A* noch die Länge des Kreisdurchmessers addiert. Damit ergeben sich die Lagen von *C*, für die die Strecke *b* am kürzesten bzw. am längsten ist, als Schnittpunkte der Kreislinie mit der Geraden *AM*. Die genannte Gerade teilt die Kreislinie in zwei Kreisbögen. Bewegt sich *C* nun gegen den Uhrzeigersinn auf dem – von *A* aus gesehen – rechten Kreisbogen, so wird die Strecke *b* länger und bei einer Bewegung auf dem linken Kreisbogen kürzer. Für die Geschwindigkeit der Änderung der Streckenlänge ist es entscheidend, ob C sich in die durch die aktuelle Lage der Strecke b ausgezeichnete Richtung („Streckenrichtung“) bewegt oder senkrecht dazu. Im ersten Fall wird die Bewegung von C vollständig in eine Längenänderung der Strecke b umgesetzt, im zweiten Fall ändert sich die Länge der Strecke gar nicht. Um sich diese Tatsache klarzumachen, betrachte man folgendes

> „*Gummibandmodell*“:
> Man stelle sich die Strecke b als Gummiband vor, das man an einer Seite festhält und spannt. Wie (d. h. in welche Richtung) muss man am anderen Ende ziehen, damit sich die Länge des Gummibandes maximal bzw. überhaupt nicht ändert? Die maximale Längenänderung erfolgt offensichtlich, wenn man in die durch die aktuelle Lage des Gummibandes festgelegte Richtung weiterzieht. Keine Änderung erfolgt, wenn man senkrecht zur aktuellen „Streckenrichtung“ zieht. Konsequente Fortsetzung dieser Zugweise führt zu einer Kreisbewegung der Hand, wobei das Gummiband als Radius des Kreises seine Länge nicht verändert.[102]

Entsprechend ändert sich die Streckenlänge fast gar nicht, wenn C sich auf einem Kreislinienstück bewegt, das nahezu senkrecht zur aktuellen „Streckenrichtung“ verläuft. Für die Strecke b sind das Bewegungen auf der Kreislinie in der Nähe der Punkte C_1 und C_2 (vgl. **Abb. 22**).

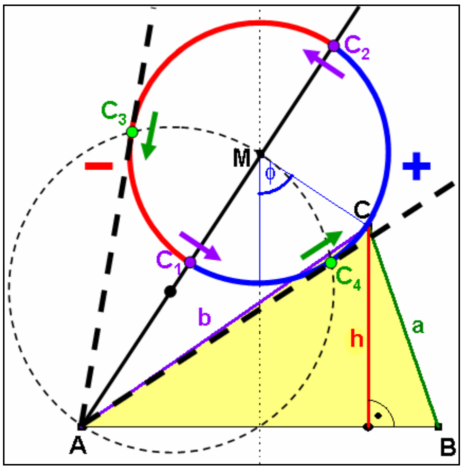


Abb. 22: Beispiel 2 – Lösungsskizze

Die Streckenlänge ändert sich am schnellsten, wenn C sich auf einem Teil des Kreises bewegt, der fast in Richtung der aktuellen „Streckenrichtung“ verläuft, wenn sich C also gerade so bewegt, dass die aktuelle Lage der Strecke eine Tangentiallage zum Kreis ist mit C als Berührpunkt. Die entsprechenden Lagen von C lassen sich leicht als Berührpunkte der beiden Tangenten durch A an den Kreis konstruieren (vgl. C_3 und C_4 in **Abb. 22** auf Seite 82). Auf diese Weise haben wir die Extreme des Änderungsverhaltens für die Länge der Seite b gefunden, wenn sich der Punkt C gleichmäßig[103] gegen den Uhrzeiger-

[101] Gemeint ist eine Bewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit.
[102] Auf der enaktiven Ebenen, wenn also z. B. mit einem realen Spanngummi gearbeitet wird, können Schülerinnen und Schüler auf diese Weise über die aufzuwendende Zugkraft die Geschwindigkeit der aktuellen Längenänderung sogar „fühlen“.
[103] Gemeint ist eine Bewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit.

sinn auf der Kreislinie bewegt. Wenn man sich nun bewusst macht, dass sich für jede andere Lage von *C* die aktuelle Bewegungsrichtung zusammengesetzt denken lässt aus einem Bewegungsanteil in „Streckenrichtung" von *b* und einem Bewegungsanteil senkrecht dazu[104], so lässt sich daraus leicht ein qualitatives Profil des Änderungsverhaltens für die Länge der Strecke *b* herleiten. Trägt man die zu einer Lage des Punktes *C* auf der Kreislinie[105] gehörende Länge der Strecke *b* graphisch auf, so erhält man einen Funktionsgraphen und kann nun die Konfiguration und den Graphen wechselseitig interpretieren. In **Abb. 23** bis **Abb. 26** werden Momentaufnahmen für ausgezeichnete Lagen von *C* wiedergegeben.[106]

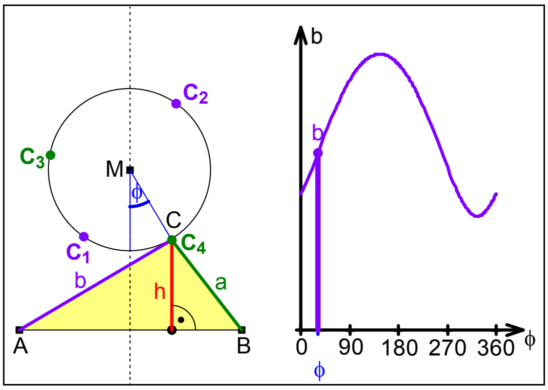


Abb. 23: Beispiel 2, Momentaufnahme 1

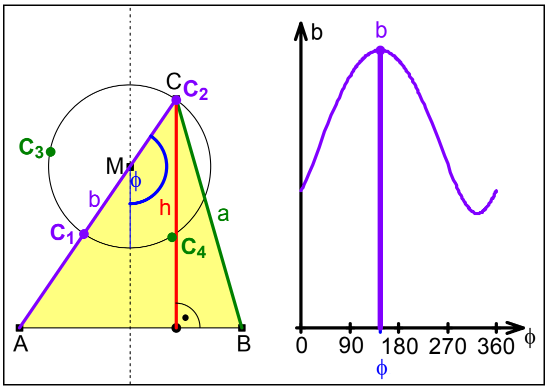


Abb. 24: Beispiel 2, Momentaufnahme 2

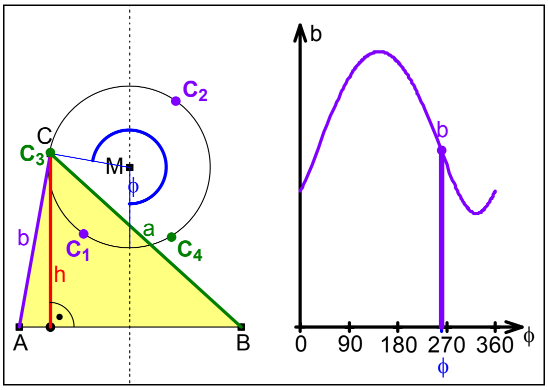


Abb. 25: Beispiel 2, Momentaufnahme 3

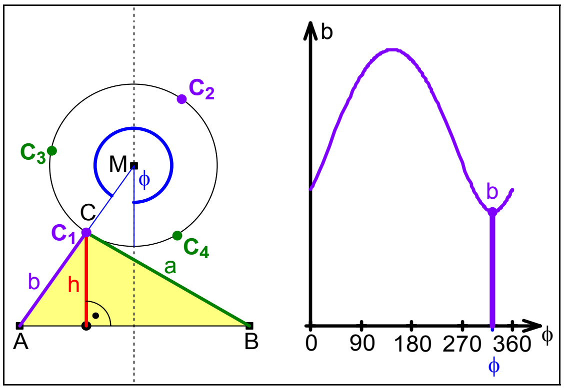


Abb. 26: Beispiel 2, Momentaufnahme 4

[104] Man denke an eine Vektoraddition.
[105] Die Lage von *C* wird durch die Größe des Mittelpunktswinkels ϕ gekennzeichnet.

Die dargestellten Beispiele legen auf Grund ihrer Komplexität die Vermutung nahe, dass die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens im Mathematikunterricht nur langfristig aufgebaut werden können. Das in Kapitel 3 ab Seite 135 vorgestellte Unterrichtskonzept für den gesamten Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe setzt sich zum Ziel, die kognitiven Fähigkeiten, die wir unter dem Begriff *Bewegliches Denken* zusammenfassen, langfristig und durchgängig zu entwickeln und gewinnbringend anzuwenden. Dies kann allerdings nur ein erster Schritt auf dem Weg zur Entwicklung des Beweglichen Denkens sein. Dieses Prozessziel muss den Mathematikunterricht darüber hinaus über alle Jahrgangsstufen hinweg leiten, um langfristig zum Erfolg zu führen.

[106] Die Fragen zur Länge von *b* lassen sich in gleicher Weise natürlich auch zu den Längen der Strecken *a* und *h* stellen und beantworten. Ein DynaGeoX-Applet zu dieser Aufgabe finden Sie im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → A → Änderungsverhalten → Beispiel 2.

2 Bewegliches Denken im Mathematikunterricht

Im ersten Kapitel wurde der Versuch unternommen, den Begriff *Bewegliches Denken* zu erfassen und einzuordnen. Jetzt rückt die Frage in den Mittelpunkt, welche Rolle das Bewegliche Denken im Mathematikunterricht spielt bzw. spielen kann, wenn der Unterricht entsprechend ausgerichtet ist. Es liegt nahe, davon auszugehen, dass das Bewegliche Denken bei inner- und außermathematischen Problembereichen nützlich ist, die per se einen dynamischen Charakter haben. Mich interessiert aber darüber hinaus, ob auch bei zunächst eher statisch anmutenden Phänomenen eine Herangehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens Gewinn bringend sein kann. Im Folgenden soll an Beispielen aus dem Mathematikunterricht der Sekundarstufen die Bandbreite der „Entwicklungsmöglichkeiten" des Beweglichen Denkens aufgezeigt werden.

2.1 Begriffsbildung und Bewegliches Denken

Begriffsbildung basiert auf Verständnis. „Verstehen" lässt sich in diesem Zusammenhang in Form eines Fähigkeitsprofils präzisieren, das von VOLLRATH (1984) aufgestellt wurde. Es handelt sich um die Fähigkeiten,

- eine Definition des Begriffs angeben zu können,
- für ein gegebenes Objekt entscheiden zu können, ob es unter einen Begriff fällt oder nicht,
- Beispiele für den Begriff nennen zu können,
- Eigenschaften des Begriffs zu kennen,
- den Begriff und seine Eigenschaften zur Beschreibung von Sachverhalten und zur Lösung von Problemen nutzen zu können und
- wichtige Unter- und Oberbegriffe zu kennen und sich der Beziehungen zwischen ihnen bewusst zu sein.

Ich werde im Folgenden an Beispielen aufzeigen, dass das Bewegliche Denken zur Entwicklung nahezu aller dieser Fähigkeiten einen Beitrag leisten kann.

Wenn eine *Definition* eines Begriffs nicht charakterisierend, sondern *genetisch*[107] gegeben ist, dann ist die Fähigkeit zum Hineinsehen von Bewegungen geradezu Grundvoraussetzung dafür, die Definition überhaupt erfassen zu können. Um dies zu illustrieren, wird beispielhaft die von VOLLRATH angegebene genetische Definition für ein senkrechtes Prisma betrachtet:

> „Ein senkrechtes Prisma ist ein Körper, der entsteht, wenn man ein Vieleck senkrecht im Raum verschiebt.“ VOLLRATH (2001), S. 226

Wenn man diese Definition aus der Textversion begreifen will, ist es notwendig, sich eine Konkretisierung des Vielecks vorzustellen und in dieses vorgestellte Objekt eine Bewegung, nämlich die genannte Verschiebung in Richtung der Flächennormalen, hineinzusehen. Um das Prisma als den durch diese Bewegung erzeugten Körper zu erfassen, ist es darüber hinaus notwendig, die durch die einzelnen Bewegungssituationen erzeugte Gesamtkonfiguration zu überblicken. Wird diese Definition dagegen als Bildfolge (vgl. **Abb. 27**), als Film bzw. Applet[108] oder sogar in Form eines gegenständlichen Gummifadenmodells dargeboten, so sind die genannten Fähigkeiten des Beweglichen Denkens nicht mehr zum Erfassen, wohl aber zur Reproduktion der Definition erforderlich.

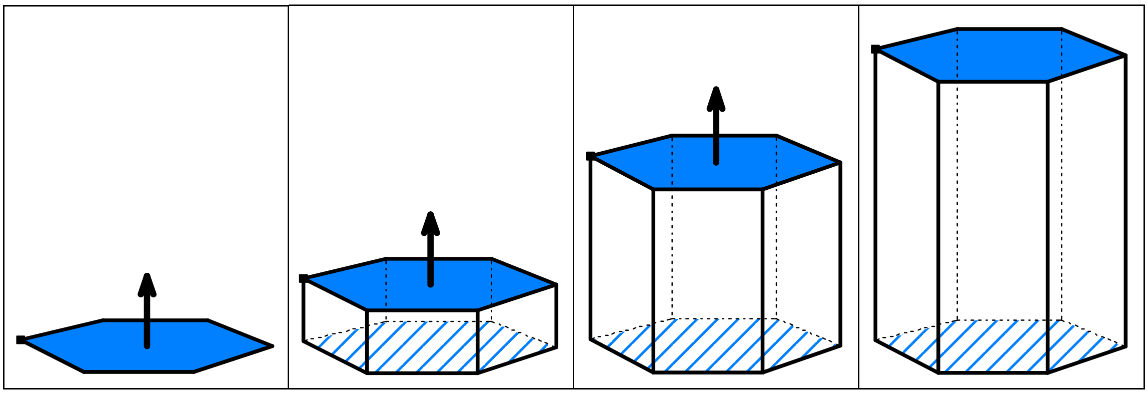


Abb. 27: Genetische Definition des Prismas

[107] Bei einer charakterisierenden Definition werden charakteristische Eigenschaften angegeben, bei einer genetischen Definition wird beschrieben, wie der Begriff entsteht.

[108] Ein von mir erstelltes DynaGeoX-Applet, mit dem die Entstehung eines Prismas dynamisch betrachtet werden kann, findet man im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → P → Prisma (genetische Definition).

Ich gehe ähnlich wie DANCKWERTS/VOGEL (2003) davon aus, dass solche dynamischen Visualisierungen von genetischen Definitionen einerseits das Erfassen der Definitionen erleichtern können, andererseits aber auch einen Einstieg in das Bewegliche Denken ermöglichen, weil mit ihrer Hilfe auf einem niedrigen Abstraktionsniveau erste Erfahrungen mit beweglichen Argumentationen gesammelt werden können.

Um *entscheiden* zu können, *ob ein gegebenes Objekt unter einen Begriff fällt*, kann es häufig notwendig sein, das gesamte Objekt bzgl. jeder charakteristischen Eigenschaft systematisch zu überprüfen. Wenn die Aufgabe z. B. darin besteht, zu untersuchen, ob die beiden Kurven in **Abb. 28** Funktionsgraphen sein können, so ist es hilfreich, sich eine Parallele zur y-Achse vorzustellen, deren Schnittpunkt mit der x-Achse sich *entlang der gesamten x-Achse bewegt*. Die Anzahl der Schnittpunkte der Parallelen mit der entsprechenden Kurve gibt dann Auskunft darüber, ob es sich (im betrachteten Bereich) um eine eindeutige Zuordnung handelt oder nicht. Hier werden offensichtlich die Fähigkeiten „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ (für die Vorstellung der Bewegung der Geraden und das Registrieren der jeweiligen Schnittpunkte der Geraden mit den Graphen) sowie „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ (für das Antizipieren aller möglichen Anzahlen der Schnittpunkte) des Beweglichen Denkens benötigt.

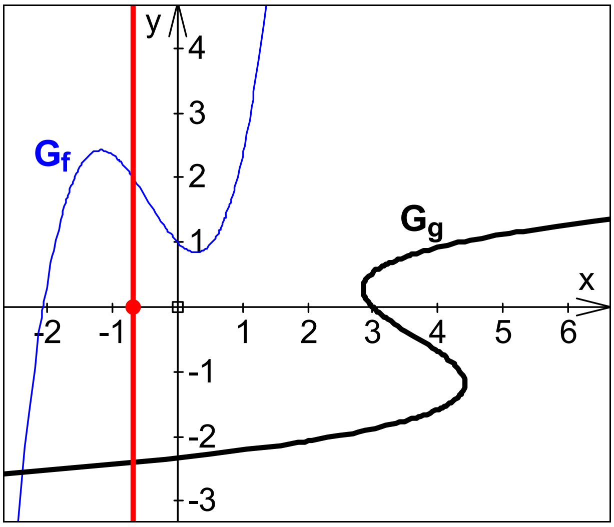


Abb. 28: Funktionsgraphen?

Um *Ober- und Unterbegriffe* eines Begriffs zu kennen und sich der Beziehungen zwischen ihnen bewusst zu werden, ist es notwendig, sich die *Einbettung des Begriffs in eine Begriffshierarchie* zu *erarbeiten*. Ein gangbarer Weg zur Erarbeitung einer solchen Begriffshierarchie besteht darin, Verbindungen zwischen verwandten Begriffen zu untersuchen bzw. herzustellen. Dabei geht man von einer Realisierung[109] des Begriffs aus

[109] Eine Realisierung eines Begriffs ist ein konkretes Element der durch den Begriffsumfang festgelegten Menge.

und überlegt, ob sie unter Beibehaltung ihrer charakteristischen Eigenschaften in eine Realisierung eines verwandten Begriffs verändert werden kann. Ist dies der Fall, so handelt es sich beim verwandten Begriff um einen Unterbegriff. Müssen beim Übergang in den verwandten Begriff dagegen eine oder mehrere der charakteristischen Eigenschaften aufgegeben werden, so handelt es sich bei dem verwandten Begriff um einen Oberbegriff. Bei der Veränderung ist zu beachten, dass sie nicht „irgendwie“ erfolgt, sondern gemäß einer Strategie, die festlegt, was auf welche Art und Weise verändert wird. Nur bei einer derart kontrollierten Veränderung ist es möglich, den Überblick zu behalten und Zusammenhänge zu erfassen.

Zur Illustration dieser und der folgenden Ausführungen wird das Beispiel der Familie der Vierecke in der euklidischen Ebene betrachtet. Ich gehe dabei zunächst von einer Realisierung eines „allgemeinen“ konvexen Vierecks[110] aus und ändere die Lage einer Vierecksseite, indem ich sie, unter Erhaltung ihrer Länge, um einen ihrer Endpunkte soweit drehe, bis sie parallel zur gegenüberliegenden Vierecksseite ist. Diese Drehung der Seite hat mehrere Konsequenzen:

- Die beiden an der *gedrehten Vierecksseite*[111] anliegenden Innenwinkel ändern ihre Größen.
- Die am nicht fixierten Endpunkt der gedrehten Strecke *anliegende Seite*[112] des Vierecks ändert ihre Länge.
- Die eben erwähnte Längenänderung der anliegenden Seite ist nur möglich, wenn sich gleichzeitig entweder die Länge der gedrehten Strecke ändert (das wurde bei der Festlegung der Veränderung aber gerade ausgeschlossen) oder die Lage der anliegenden Strecke. Die Änderung der Lage der Strecke entspricht aber gerade einer Drehung um ihren festgehaltenen zweiten Endpunkt und damit einer Änderung der Winkelgröße des dort anliegenden Innenwinkels.
- Wenn das Augenmerk auf die Diagonalen des Vierecks fällt, so ist offensichtlich, dass eine, nämlich die Verbindungsstrecke der beiden Drehpunkte, unver-

[110] Gemeint ist ein konvexes Viereck mit paarweise verschieden langen und nicht parallelen Seiten sowie paarweise verschieden großen Innenwinkeln.
[111] In **Abb. 29** auf Seite 90 die obere Vierecksseite.
[112] In **Abb. 29** auf Seite 90 die rechte Vierecksseite.

ändert bleibt, während die andere sowohl ihre Lage als auch ihre Länge verändert.

Wie aus obiger Liste zu entnehmen ist, sind die Veränderungen, die sich am Viereck ergeben, erheblich, obwohl eine klare und überschaubare Vorgabe für die Art der Veränderung des Vierecks festgelegt wurde. Unter Einsatz der beiden Fähigkeiten „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren" und „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren" des Beweglichen Denkens kann man diese Veränderungen analysieren und daraus den Schluss ziehen, dass es grundsätzlich möglich ist, ein „allgemeines" konvexes Viereck auf die beschriebene Weise in ein „allgemeines" Trapez[113] zu verformen. Solche Überlegungen lassen sich im Mathematikunterricht anregen, wenn nach der Erarbeitung der konvexen Vierecksgrundformen Drachenviereck, Parallelogramm, Quadrat, Raute, Rechteck und Trapez die Frage aufkommt, ob und gegebenenfalls wie man ein gegebenes Viereck in einen anderen Viereckstyp verformen kann. Hierbei ergeben sich u. a.

- Anlässe zu mathematischen Gesprächen und Diskussionen,
- Anregungen für eine mathematische Forschungshaltung,
- Einsichten in die Notwendigkeit mathematische Konfigurationen nicht nur lokal, sondern global, d. h. in einer Gesamtsicht zu erfassen,
- neue Einsichten zum Inhalt und Umfang bereits bekannter Begriffe,
- Anlässe zur Entwicklung heuristischer Strategien.

Erfahrungen aus eigenen Unterrichtsversuchen geben Anlass zur Hoffnung, dass diese Effekte durch dynamische Visualisierung der gewünschten Veränderungen deutlich verstärkt werden.[114]

---

[113] Gemeint ist ein Trapez mit paarweise verschieden langen Seiten, paarweise verschieden großen Innenwinkeln und einem Paar gegenüberliegender nicht paralleler Seiten.

[114] Ein von mir entwickeltes DynaGeoX-Applet, mit dem Übergänge zwischen Drachenviereck, Parallelogramm, Quadrat, Raute, Rechteck und Trapez erzeugt und analysiert werden können, findet man unter der Internet-Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → V → Vierecke - Begriffshierarchie: Drachenviereck, Parallelogramm, Quadrat, Raute, Rechteck, Trapez. Der oben beschriebene Übergang vom „allgemeinen" konvexen Viereck zum „allgemeinen" Trapez lässt sich im Applet durch Ziehen am Punkt 1 realisieren. Im Vergleich zu der relativ umständlichen verbalen Beschreibung des Vorgangs stellt sich die dynamische Realisierung recht übersichtlich dar und erleichtert eine Diskussion der beschriebenen Effekte. Gerade auch im Hinblick auf Fokussierungsphasen im Unterricht, in dem Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler aufgegriffen und gebündelt werden, ist eine (wenn irgend möglich dynamische) Visualisierung der Bewegung äußerst hilfreich.

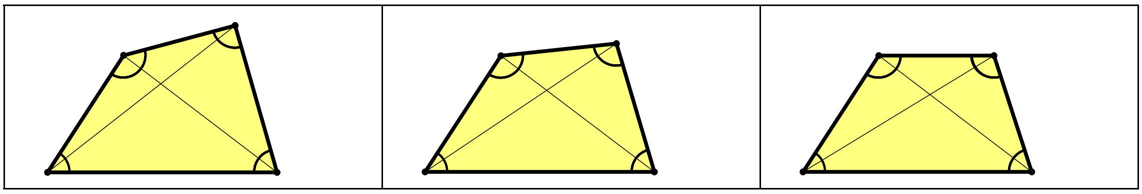


Abb. 29: Übergang vom „allgemeinen“ Viereck zum Trapez

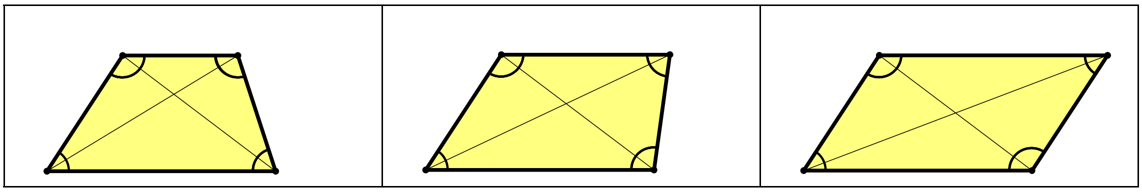


Abb. 30: Übergang vom „allgemeinen“ Trapez zum Parallelogramm

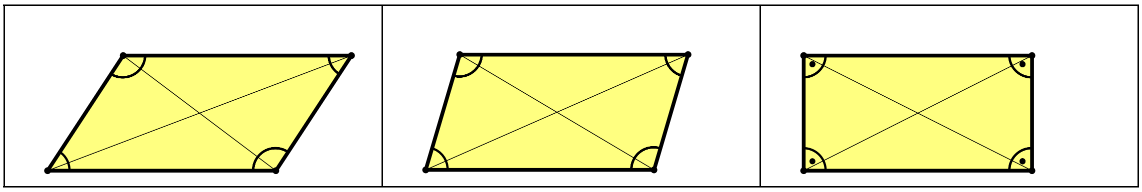


Abb. 31: Übergang vom „allgemeinen“ Parallelogramm zum Rechteck

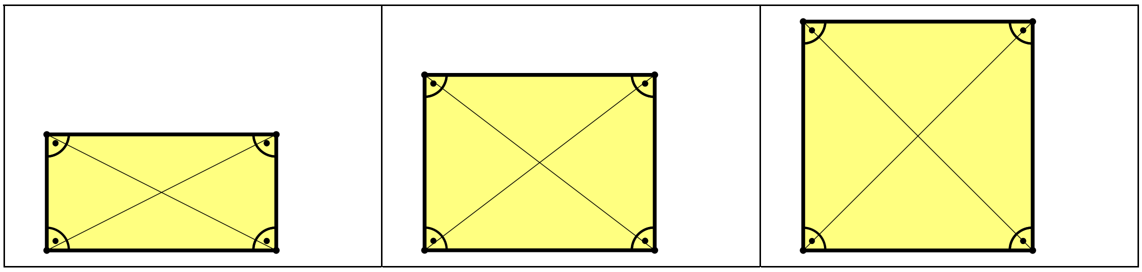


Abb. 32: Übergang vom „allgemeinen“ Rechteck zum Quadrat

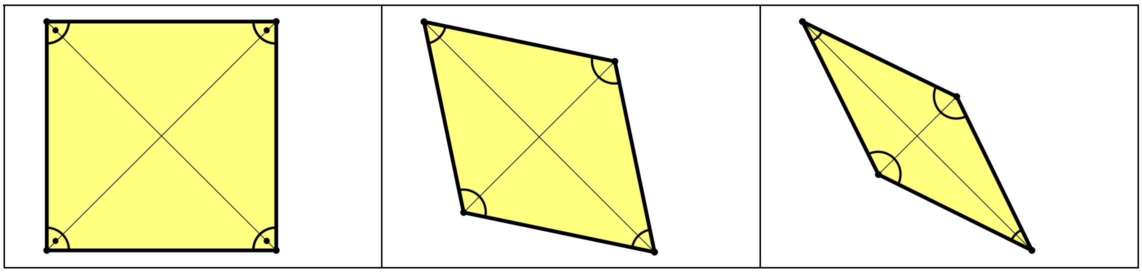


Abb. 33: Übergang vom Quadrat zur „allgemeinen“ Raute

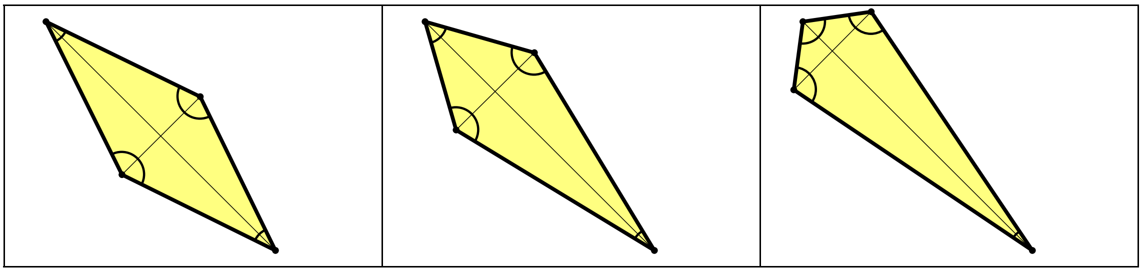


Abb. 34: Übergang von der Raute zum „allgemeinen“ Drachenviereck

Im Hinblick auf die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens tritt bei einer entsprechenden Visualisierung das Hineinsehen von Bewegungen in den Hintergrund. Abhängig davon, ob mit dem Visualisierungsinstrument beliebige Veränderungen möglich oder bereits gezielte Veränderungswege eingebaut sind, ist es die Aufgabe der Schüler, die Art der Veränderung zu planen oder die vorgegebene Veränderung zu erfassen. Unabhängig von der Art der Realisierung kann durch die dynamische Visualisierung der Veränderung das Gedächtnis entlastet werden[115] und dadurch das Argumentieren mit Bewegungen, das Begründen von entdeckten Zusammenhängen sowie das Erfassen und Analysieren der Gesamtkonfiguration an Bedeutung gewinnen.[116]

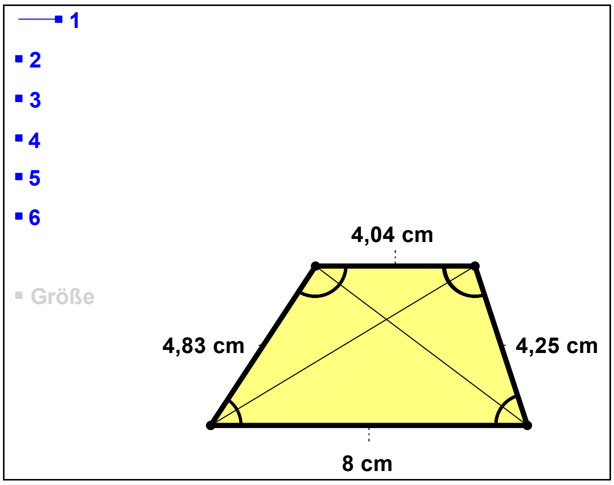


Abb. 35: DynaGeoX-Applet „Vierecke“

Betrachten wir zur Illustration eine dynamisch visualisierte Veränderung eines „allgemeinen“ Trapezes, wie sie in der Bildfolge der **Abb. 30** auf Seite 90 mit drei Einzelsituationen (Ausgangs-, Übergangs- und Endform) angedeutet wird. Diese Veränderung lässt sich mit dem in Fußnote 114 auf Seite 89 genannten DynaGeoX-Applet dynamisch realisieren. Ausgangssituation ist dabei die in **Abb. 35** gezeigte Stellung der Schieberegler links oben. Wird nun der Schieberegler 2 nach rechts gezogen, so ändert sich die Länge der oberen Trapezseite, wobei ihr linker Endpunkt seine Lage beibehält. Analysiert man diese Veränderung, so fällt auf, dass sich

[115] Die Entlastung des Gedächtnisses kann dadurch eintreten, dass der Zusammenhang zwischen zwei verschieden Viereckstypen nicht im Gedächtnis gespeichert werden muss, sondern jederzeit durch die Verformung des einen Typs in den anderen beobachtet werden kann. Dies gilt insbesondere dann, wenn es das Visualisierungsinstrument erlaubt, die Veränderung in der selbst gewählten Geschwindigkeit durchzuführen, wieder rückgängig zu machen und an beliebigen Stellen anzuhalten um Einzelsituationen zu analysieren.

[116] Grundsätzlich ist bei der sprachlichen Begleitung von auf Bewegungen beruhender Begriffsbildung das Problem der „resultative(n) Adjektive“ zu beachten, das MAIER/SCHWEIGER (2001) u. a. mit folgendem Beispiel illustrieren: „Ein Rhombus ist ein verschobenes Quadrat.“ Das Problem besteht darin, dass hier zwar Zusammenhänge gesehen werden, die Formulierung aber sprachlogisch die sachlich falsche Beziehung suggeriert, dass der Rhombus ein spezielles Quadrat sei. Ich gehe weiter unten bei der Beschreibung des Übergangs vom Trapez zum Parallelogramm darauf ein, wie man einen solchen Fehlschluss vermeiden kann.

dabei die Ausrichtung der Seite in der euklidischen Ebene nicht verändert, sie also parallel zur gegenüberliegenden Seite bleibt.[117] Schließlich erreicht die obere Seite genau die Länge der unteren Seite. Bei dieser Verformung des Ausgangstrapezes haben sich zwar die Länge der rechten Seite des Vierecks, die an ihr anliegenden Innenwinkel und die Länge und Lage einer der beiden Diagonalen des Vierecks verändert, die charakteristische Trapezeigenschaft, nämlich die Parallelität von zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks blieb aber erhalten. Damit ist das Viereck auch in der Endform ein Trapez. Es hat aber offensichtlich (mindestens) eine zusätzliche Eigenschaft gewonnen, nämlich die, dass die beiden parallelen Seiten nun auch gleich lang sind. Dies führt dazu, dass das Viereck in seiner Endform ein Parallelogramm ist.[118] Aus dieser Überlegung heraus wird deutlich, dass jedes Parallelogramm auch ein Trapez ist, aber nicht jedes Trapez ein Parallelogramm, da beim Rückgängigmachen der Längenänderung wesentliche Parallelogrammeigenschaften verloren gehen, aber immer noch ein Trapez vorliegt. Auf diese Weise können Schülerinnen und Schüler erfassen, dass der Begriff „Parallelogramm“ ein Unterbegriff des Begriffs „Trapez“ ist.

Mit dem genannten Applet lassen sich nacheinander verschiedene Übergänge zwischen den Vierecksgrundformen „allgemeines“ konvexes Viereck, Trapez, Parallelogramm, Rechteck, Quadrat, Raute und Drachenviereck realisieren.[119] Dabei können Zusammenhänge zwischen den Nachbarn dieser Reihe erforscht und es kann nach und nach eine Hierarchie entsprechend **Abb. 36**[120] aufgebaut werden. In der Erarbeitungsphase ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler nach dem vom Applet durch die Schieberegler angelegten linearen Durchlauf durch die verschiedenen Vierecksformen die Schieberegler in beliebigen Kombinationen durchtesten und so die Querbezüge im Haus der Vierecke erforschen. Dabei geht es im Sinne des Beweglichen Denkens auch

[117] Dies lässt sich ggf. auch mit der Konstruktion einer Parallelen zur unteren Vierecksseite durch einen der beiden Endpunkte der oberen Seite verifizieren.
[118] Dies lässt sich z. B. mit Hilfe einfacher Kongruenzargumente *oder* der Betrachtung einer Punktspiegelung am Mittelpunkt einer der Diagonalen des Vierecks nachweisen.
[119] Vgl. hierzu die **Abb. 29** bis **Abb. 34** auf Seite 90f.
[120] Die Pfeile in **Abb. 36** sind als „ist Oberbegriff von“ zu lesen.

darum, die Art der Veränderung zu erfassen, also zu erkennen, was die Schieberegler jeweils bewirken.[121]

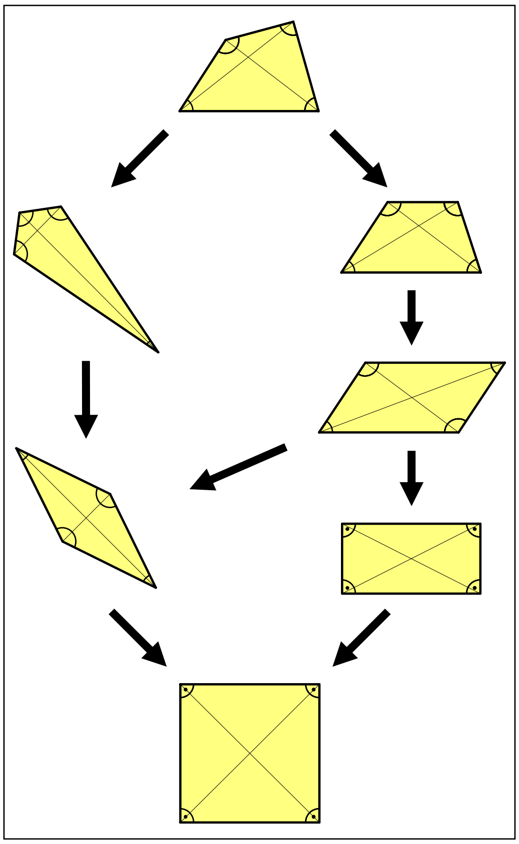


Abb. 36: Haus der Vierecke

Wer einen Begriff und seine Einbettung in eine Begriffshierarchie auf eine derartige Weise erforscht hat, dem fällt es vermutlich leichter, Beispiele und Gegenbeispiele für

[121] Kritiker könnten hier einwenden, dass das beschriebene Applet die Schüleraktivitäten zu sehr steuert und vorschlagen, einfach ein Viereck mit vier frei verziehbaren Eckpunkten vorzugeben. Dies hätte zur Konsequenz, dass die Schüler sich selbst Übergänge zwischen den einzelnen Vierecksformen überlegen und bestimmen könnten. Dem ist entgegenzuhalten, dass es nur dann möglich ist, eine Veränderung in ihren Auswirkungen zu erfassen, wenn ein klarer „Veränderungspfad" vorgegeben oder funktional gedacht wird, wenn also der Definitionsbereich und die Art und Weise, in der er durchlaufen wird, festgelegt sind. Dies lässt sich ohne eine (dynamische) Visualisierung bei entsprechender Erfahrung mit dem Beweglichen Denken durchaus planen, aber auch hier ist es schwierig, dabei die Gesamtkonfiguration und alle Auswirkungen der gezielten Veränderung zu erfassen. Bei einem völlig frei veränderbaren Viereck ist es, ausgehend von einer Vierecksform, sehr schwierig, die Veränderungen so auszuführen, dass eine gewünschte Vierecksform als End- oder Zwischenform auch tatsächlich erreicht wird. Außerdem, dies wiegt noch schwerer, ist es anschließend nahezu unmöglich, sich Rechenschaft über die genaue Art der erzwungenen Veränderung sowie über die dabei erzeugten weiteren Veränderungen bzw. die dabei auftretenden Invarianten zu geben. Ich plädiere daher bei komplexen Veränderungsprozessen dafür, die Schülerinnen und Schüler zunächst an einer Vielzahl von vordefinierten Veränderungsmöglichkeiten

den Begriff zu nennen und zu erkennen, Eigenschaften des Begriffs zu rekonstruieren und schließlich den Begriff und seine Eigenschaften zur Beschreibung von Sachverhalten und zur Lösung von Problemen zu nutzen. Dies liegt insbesondere daran, dass sich mit Hilfe des Beweglichen Denkens der Begriffsinhalt und -umfang sehr gut erkunden und – hoffentlich – behalten lassen. Die im letztgenannten Aspekt ausgedrückte Hoffnung des leichteren Erinnerns beruht darauf, dass Eigenschaften nicht als Einzelfakten abgespeichert werden, sondern geeignete Zusammenhänge erzeugende Veränderungen in Erinnerung bleiben, mit deren Hilfe man sich Eigenschaften schnell wieder erschließen kann. Dies kann, wie im nächsten Abschnitt aufgezeigt wird, auch beim Problemlösen eine wichtige Rolle spielen.

2.2 Problemlösen und Bewegliches Denken

Jede echte Auseinandersetzung mit (mindestens subjektiv) neuen mathematischen Fragestellungen initiiert einen Problemlöseprozess. Beim eigenständigen Lösen von Aufgaben, bei denen ein benutzbarer Kalkül nicht durch den Kontext nahe gelegt wird, schneiden deutsche Schülerinnen und Schüler den Ergebnissen der internationalen Vergleichsstudien TIMSS[122] und PISA[123] zufolge[124] im Schnitt eher mittelmäßig bis unterdurchschnittlich ab. Auf Grund dieser Resultate liegt es nahe, mit Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten des Umgangs mit echten Problemaufgaben zu erarbeiten und ihnen die Gelegenheit und die nötige Zeit zu geben, sich selbstständig mit unterschiedlich offenen Problemstellungen auseinander zu setzen. Wo spielt dabei das Bewegliche Denken eine Rolle? Um diese Frage beantworten zu können, werden zunächst einige der Heurismen betrachtet, die POLYA (1995) in seinem Buch „Schule des Denkens“ zusammenstellt.[125] POLYA unterscheidet vier Schritte beim Problemlösen,

---

forschen zu lassen. Dies schließt nicht aus, dass anschließend nach eigenen „Veränderungspfaden“ gesucht und eine Realisierung dieser Veränderungen angestrebt wird.

[122] Third International Mathematics and Science Study

[123] Programme for International Student Assessment

[124] Vgl. etwa BAUMERT/LEHMANN (1997) und DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM (2001).

[125] WINTER (1989) hat dieses Buch von POLYA (1995) als „die Bibel der Heuristik“ bezeichnet. Unter der Überschrift „Wie sucht man die Lösung?“ findet man dort im Klappentext folgende, als Fragen an den Problemlöser formulierte Heurismen:

nämlich das Verstehen der Aufgabe, das Ausdenken des Planes, das Ausführen des Planes und die Rückschau. Bereits beim ersten Punkt, dem Verstehen der Aufgabe, kann Bewegliches Denken eine wichtige Rolle spielen. Dies gilt insbesondere für die Frage, wie die Bedingungen die Gesamtkonfiguration beeinflussen. Bei der Auseinandersetzung mit dieser Frage, aber auch im Hinblick auf das Bewegliche Denken ganz allgemein, ist POLYAS Hinweis „Zeichne eine Figur!“ von zentraler Bedeutung. Eine

---

„VERSTEHEN DER AUFGABE

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

AUSDENKEN EINES PLANES

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte bat.
- *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgend ein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

AUSFÜHREN DES PLANES

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?

RÜCKSCHAU

- Kannst Du das *Resultat kontrollieren*? Kannst Du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
- Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?“ POLYA (1995) [Hervorhebungen im Original]

Figur erleichtert es, die Gesamtkonfiguration im Auge zu behalten, und für den Problemlöser ist es mit ihrer Hilfe einfacher, geeignete Variationsmöglichkeiten ins Auge zu fassen. Von den im Zusammenhang mit dem Problemlösen immer wieder ins Spiel gebrachten heuristischen Hilfsmitteln[126] kann neben der Figur auch die Tabelle das Bewegliche Denken fördern, weil sich mit ihrer Hilfe gezielte Veränderungen relativ leicht bewerkstelligen und auch deren Auswirkungen auf die Gesamtkonfiguration beobachten lassen.[127]

Zur Illustration einer Herangehensweise an eine Aufgabe[128] im Sinne des Beweglichen Denkens soll folgendes Problem betrachtet werden (vgl. auch **Abb. 37**):

> Die Winkelhalbierende des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck teilt das Quadrat über der Hypotenuse in zwei Teilflächen gleichen Flächeninhalts.

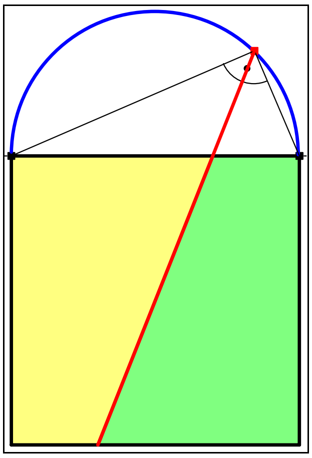


Abb. 37: Halbierung des Hypotenusenquadrats

Den Einfluss, den die *Bedingungen* auf ein Problem haben, kann man am einfachsten abschätzen, wenn man sie *jeweils einzeln variiert und dabei die anderen Bedingungen konstant hält*. So kann man es zunächst bei einem rechtwinkligen Dreieck belassen und sich überlegen, wie sich die Konfiguration verändert, wenn man die Winkelhalbierende (hier als Halbgerade betrachtet) um den Scheitel des rechten Winkels dreht. Dabei ändert sich offenbar die Aufteilung der beiden Anteile des rechten Winkels. Der eine Anteil wird auf Kosten des anderen Anteils immer größer. Dreht man die „Winkelhalbierende" in **Abb. 37** gegen den Uhrzeigersinn, so wird der rechte Teilwinkel des 90°-Winkels kleiner, bis er in der Extremlage zum Nullwinkel wird. Gleichzeitig wird offenbar auch die rechte Teilfläche des Hypotenusenquadrats immer kleiner und verschwindet schließlich. Analoges gilt für eine Drehung der „Winkelhalbierenden" im Uhrzeigersinn. Da es sich hier um einen stetigen Übergang handelt, bei dem die eine Teilfläche gerade immer auf Kosten der anderen zu- bzw. abnimmt, liegt es nahe zu vermuten, dass die „Winkelhalbierendenlage" gerade die

[126] Wichtige heuristische Hilfsmittel sind die informative Figur, die Tabelle und die Gleichung (vgl. etwa BRUDER (2002)).
[127] Dies gilt in besonderem Maße, wenn die informative Figur mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) bzw. die Tabelle mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (TKP) erzeugt wurde.

Lage der Halbgeraden ist, die das Hypotenusenquadrat halbiert. Die Winkelhalbierendeneigenschaft ist hier also eine unverzichtbare Bedingung.

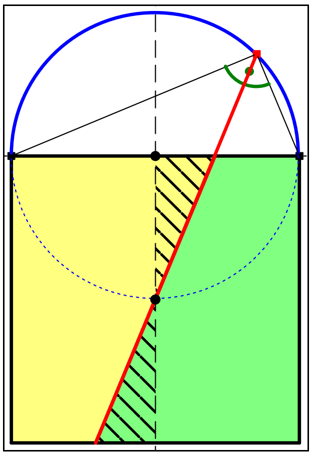


Abb. 38: Lösung

Bisher wurde ein bestimmtes rechtwinkliges Dreieck zu Grunde gelegt. Da über die Form des rechtwinkligen Dreiecks in den Bedingungen keine Aussage gemacht wird, soll nun die Lage des der Hypotenuse gegenüberliegenden Eckpunktes variiert werden. Lässt man den Eckpunkt auf dem Thaleskreis „wandern“, dann ändert sich dabei auch die Lage der Winkelhalbierenden des rechten Winkels. Man kann vermuten, dass es sich um eine Drehung handelt. Es stellt sich die Frage, um welchen Punkt diese Drehung erfolgt. Oft hilft es – zur Klärung von Fragen wie dieser – die *Veränderungen bis hin zu Extremlagen auszuführen*. Wendet man diese Strategie auf die hier betrachtete Bewegung an, so bedeutet das, den Punkt auf dem Thaleskreis so weit zu ziehen, dass er (fast) mit den Endpunkten der Hypotenuse zur Deckung kommt. In diesen Lagen scheint die Winkelhalbierende jeweils (näherungsweise) mit einer der Diagonalen des Hypotenusenquadrates zusammenzufallen. Die Diagonalen schneiden sich aber im Mittelpunkt des Quadrates. Dies legt die Vermutung nahe, dass der Drehpunkt der Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Hypotenusenquadrates ist. Das ist besonders deshalb interessant, weil sich in diesem Punkt auch die Mittelsenkrechte der Hypotenuse und der Thaleskreis schneiden. *Diese Vermutung ist der Kern der Problemlösung.* Sie liegt bei einer Herangehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens relativ nahe.[129] Falls die Winkelhalbierende wirklich durch den Mittelpunkt des Quadrates verläuft, lässt sich mit Hilfe einer einfachen Kongruenzüberlegung[130] leicht zeigen, dass die Winkelhalbierende das Hypotenusenquadrat in zwei flächengleiche Teilflächen zerlegt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass die Winkelhalbierende des rechten Winkels

[128] Das Wort „Aufgabe“ wird hier in der POLYA’schen Terminologie im Sinne von „Problem“ benutzt.

[129] Die beschriebene Argumentation kann einfacher nachvollzogen werden, wenn man sich das von mir entwickelte DynaGeoX-Applet zu diesem Problem ansieht, mit dem die Konfiguration dynamisch variiert werden kann. Eine Betrachtung macht deutlich, wie überaus suggestiv eine wirklich durchgeführte und visuell beobachtbare dynamische Variation ist. Man findet das DynaGeoX-Applet im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → K → Knobelaufgabe.

wirklich durch den Diagonalenschnittpunkt des Hypotenusenquadrates verläuft. Für die Durchführung dieses Beweises bieten sich hier statische Argumentationen an. Bewegliches Denken bewahrt den Problemlöser in solchen Fällen aber davor, Skizzen wie die aus **Abb. 39** rein statisch zu interpretieren. *Auf diese Weise werden evtl. notwendige Fallunterscheidungen mit großer Wahrscheinlichkeit erkannt.*

Im vorliegenden Fall ist keine Fallunterscheidung notwendig. Dies macht man sich aber erst dann bewusst, wenn man die im Rahmen der zu Grunde liegenden Bedingungen erlaubten Variationen mindestens gedanklich durchgeführt und dabei das Augenmerk auf relevante Veränderungen und Invarianten gelenkt hat.[131] Dazu ist die Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ des Beweglichen Denkens erforderlich.

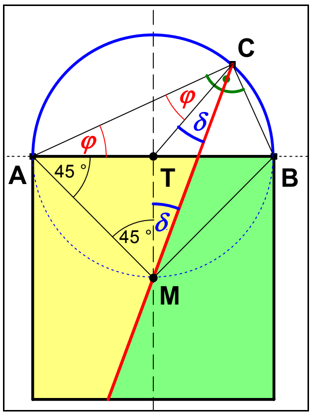


Abb. 39: Situation 1

$$2\varphi + 2\delta + 2\cdot 45° = 180°$$
$$2\cdot(\varphi+\delta) = 90°$$
$$\varphi + \delta = 45°$$

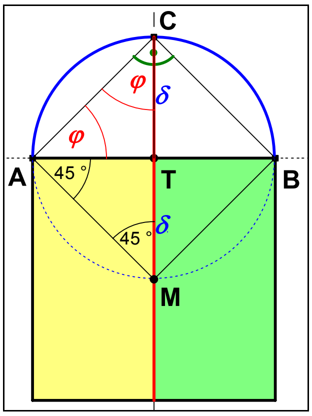


Abb. 40: Situation 2

$$2\varphi + 2\cdot 45° = 180°$$
$$2\varphi = 90°$$
$$\varphi = 45°$$

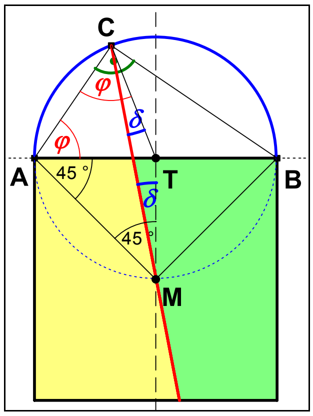


Abb. 41: Situation 3

$$2\varphi - \delta + 2\cdot 45° - \delta = 180°$$
$$2\cdot(\varphi-\delta) = 90°$$
$$\varphi - \delta = 45°$$

Bewegliches Denken kann im Rahmen des Problemlöseprozesses (und nicht nur da) auch *Entdeckungen ermöglichen*, die bei statischer Herangehensweise (mindestens für Schülerinnen und Schüler) eher unwahrscheinlich sind. Ich komme dazu im Beispiel

---

[130] Kongruenzsatz WSW angewandt auf die beiden schraffierten Dreiecke in **Abb. 38** auf Seite 97.
[131] vgl. die Momentaufnahmen in **Abb. 39**, **Abb. 40** und **Abb. 41**

noch einmal auf die Variation der Lage der „Winkelhalbierenden“ zurück.[132] Wenn man irgendeine andere Aufteilung der Winkelgrößen der Teilwinkel wählt und anschließend den Scheitelpunkt des rechten Winkels wieder entlang des oberen Halbbogens des Thaleskreises bewegt, kann man entdecken, dass die „ehemalige Winkelhalbierende“ dabei jeweils um einen Fixpunkt gedreht wird, der auf dem unteren Halbbogen des Thaleskreises liegt.[133] Diese Vermutung ergibt sich mit Hilfe des Beweglichen Denkens fast von selbst, während sie sich mit statischen Mitteln nur schwer erschließt.

Bei einigen heuristischen Strategien spielt Bewegliches Denken eine besondere Rolle, sie sind ohne Bewegliches Denken nur schwer denkbar oder anwendbar. Eine davon ist die von POLYA mit folgender Frage umschriebene Strategie:

> „Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern?“ POLYA (1995)[134]

Ein Spezialfall dieser heuristischen Strategie, die „n–1-Strategie“, findet sich immer wieder in der Literatur.[135] Bei ihr ist die *kontrollierte Veränderung*, die charakteristisch für das Bewegliche Denken ist, ein zentraler Aspekt. Von einer gegebenen Bedingung wird abgesehen und damit die Zahl der Freiheitsgrade um eins erhöht. Variiert man die Konfiguration im Rahmen dieses zusätzlichen Freiheitsgrades, so verändern sich in der Regel weitere Teilaspekte der Gesamtkonfiguration. Um daraus eine entscheidende Idee bzw. Vermutung im Hinblick auf die Lösung des Problems zu gewinnen, muss man in der Lage sein, die Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren. Nur mit dieser Fähigkeit ist es möglich, relevante Veränderungen und evtl. deren Ortslinie bzw. Invarianten zu erkennen und im Hinblick auf das zu lösende Problem zu analysieren. So können wichtige Vermutungen aufgestellt werden, die anschließend (oft statisch) bewiesen werden müssen. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die konsequente Nutzung

[132] Hier wurde (auch weiter oben) nur eine Bedingung, nämlich die Teilung des rechten Winkels durch die „Winkelhalbierende“ betrachtet und verändert. Natürlich kann und sollte man beim Versuch, ein „Gespür“ für ein Problem zu bekommen, auch jede andere in der Aussage steckende Bedingung variieren. Mit dem in Fußnote 129 genannten DynaGeoX-Applet kann z. B. auch die Winkelgröße des „rechten“ Winkels dynamisch verändert werden.

[133] Dies lässt sich übrigens ähnlich leicht zeigen wie die Tatsache, dass die Winkelhalbierende des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck immer durch den Diagonalenschnittpunkt des Hypotenusenquadrates verläuft (siehe oben).

[134] vgl. auch die Fußnote 125 auf Seite 94.

[135] vgl. etwa BOCK/WERGE (1992a), DANCKWERTS/VOGEL (2003), HÖLZL (1999b), KERST (1916), SCHUPP (2002), WETH (2002)

des *Beweglichen Denkens dem Problemlöser die Ideenfindung erleichtert*, die oft als „schwierigster" und „nicht planbarer" Teil des Problemlöseprozesses eingeschätzt wird.

2.3 Verstehen und Bewegliches Denken

Ich habe in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels kurz umrissen, welche Bedeutung das Bewegliche Denken für die Begriffsbildung und das Problemlösen besitzen kann. Mir ist es ein besonderes Anliegen, *dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht zu einem um Verständnis bemühten Umgang mit mathematischen Inhalten und Prozessen angeleitet werden*. Dies beinhaltet insbesondere, Sachverhalte nicht einfach als gegeben zu akzeptieren, sondern sie zu hinterfragen und zu versuchen, sie zu schon Bekanntem in Beziehung zu setzen. Das operative Prinzip mit seiner Kernfrage „Was geschieht, wenn …" kann hierbei leitend sein. Um dieses didaktische Prinzip Gewinn bringend einsetzen zu können, werden insbesondere die im Beweglichen Denken zusammengefassten Fähigkeiten benötigt. Eigene Unterrichtserfahrungen und die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Voruntersuchungen veranlassen mich davon auszugehen, dass die Entwicklung dieser Fähigkeiten sich am ehesten dadurch anstoßen lässt, dass die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht mit Argumenten konfrontiert werden, die sich auf dynamische Veränderungen stützen. Weiterhin scheint es förderlich zu sein, wenn ihnen Lernanlässe und Lernumgebungen geboten werden, die sie dazu herausfordern, eigenständig in Bewegungen bzw. Veränderungen zu denken und entsprechende Argumente selbst zu produzieren. Im Einklang mit der in der Mathematikdidaktik vorherrschenden Auffassung propagiere ich also einen Umgang mit Mathematik, der von Denkaktivitäten, Eigenkonstruktionen und reflektiertem Vorgehen der Schülerinnen und Schüler geprägt ist. Verändern, dies sei hier noch einmal betont, ist kein Selbstzweck, sondern es geht mir um die reflektierte Auseinandersetzung mit Veränderungen und ihren Konsequenzen. Es geht also um einen problemorientierten Zugang zur Mathematik, wie er auch im Zuge von TIMS- und PISA-Studie immer wieder gefordert wurde und wird.[136] BLUM (2001) hat in diesem Zusammenhang u. a. mehr

[136] vgl. etwa BAUMERT/LEHMANN (1997), BAPTIST (2001), BLUM (2001), DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM (2001)

Vernetzung, weniger Verfahren und Kalküle, mehr Denkaktivitäten und Eigenkonstruktionen der Schüler und mehr Reflexionen für den Mathematikunterricht gefordert. Das DEUTSCHE PISA-KONSORTIUM schließt sich dem an und schreibt:

> „Diese Liste deckt sich genau mit den Merkmalen, die bei PISA ein höheres Niveau mathematischer Grundbildung beschreiben: Verknüpfung bzw. Verallgemeinerung/Reflexion, weniger Kalkülorientierung, Offenheit der Mathematisierungen, Umgang mit vielfältigen Lösungsmöglichkeiten. Die zentrale Forderung, Mathematik als ‚Denk-Werkzeug' zur Modellierung zu vermitteln, verbindet PISA mit der TIMS-Studie (…).
> (…) Nun haben allerdings die Analysen (…) [der PISA-Studie] ergeben, dass die Problematik des deutschen Mathematikunterrichts vor allem im unteren Leistungsbereich liegt – bei jenem Viertel der 15-Jährigen, die höchstens elementare Rechnungen auf Grundschulniveau bewältigen können. Müssten hier nicht zunächst einfaches Rechnen geübt und elementare Grundbegriffe erlernt werden, bevor Modellierungen in Angriff genommen werden können?
> Das PISA-Konzept wendet sich – in Übereinstimmung mit neueren didaktischen und psychologischen Argumenten – dezidiert gegen eine solche Forderung. Ihre Einlösung würde die Kalkülorientierung des deutschen Mathematikunterrichts nur noch mehr befördern. Stattdessen muss versucht werden, auch schwächere Schüler – anhand einfacher mathematischer Inhalte – an Modellierungsprozesse und offenere Aufgaben heranzuführen. Nicht die Reduktion, sondern die Verstärkung des Anspruchsniveaus – nicht des ‚technischen' Niveaus – ist gefordert. Dies bedeutet vor allem, dass vermehrt auf allen Schulstufen die Gestaltung ‚substanzieller mathematischer Lernumgebungen' (…), die das Kennenlernen innermathematischer Strukturen mit Anwendungsfähigkeiten verbinden, angestrebt werden muss. Auch ließe sich (…) argumentieren, dass im herkömmlichen Unterricht – nicht nur der Grundschule – das verständnisfördernde Potenzial von visuellen Darstellungsformaten noch lange nicht ausgenutzt ist." DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM (2001), S. 186f

Dies ist auch eines der zentralen Anliegen des in dieser Arbeit entwickelten Unterrichtskonzepts: Die Entwicklung von Verständnis als angestrebtes Ziel des Unterrichts darf gerade nicht wegen der vermeintlich schwächeren Schülerinnen und Schüler zurückgenommen werden. Gerade ihnen muss es durch geeignete Maßnahmen ermöglicht werden, sich selbstständig denkend mit mathematischen Fragestellungen auseinander zu setzen. In Bezug auf das Bewegliche Denken werde ich im 3. Kapitel bei der Vorstellung meines Unterrichtskonzepts für den Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe des Gymnasiums darauf eingehen, wie geeignete Maßnahmen aussehen könnten. Dabei spielt der Einsatz des Computers gerade auch im Hinblick auf die oben genannten visuellen Darstellungsformate eine nicht zu unterschätzende Rolle.[137] Ich gehe dort auch auf methodische Fragen im Zusammenhang mit der Erarbeitung des Beweglichen Denkens ein.

Eine weitere *methodische Anregung*, um Verständnis zu fördern, das Denken in Veränderungen im Unterricht zu verankern und Schülerinnen und Schülern eine selbstständig denkende Auseinandersetzung mit Mathematik zu ermöglichen, ist die von SCHUPP (2002) propagierte „*Aufgabenvariation*". Dabei geht es darum, Schülerinnen und Schüler Aufgaben selbstständig abändern und sich mit diesen abgeänderten Aufgaben beschäftigen zu lassen. Dabei werden Fähigkeiten des Beweglichen Denkens benötigt. Hier sollen Schülerinnen und Schüler lernen, im Sinne der beiden vorhergehenden Abschnitte, Zusammenhänge zu entdecken und sich, motiviert durch die selbst erzeugte Aufgabe, Herangehensweisen an herausfordernde Problemaufgaben anzueignen.[138] Unter den von SCHUPP (2002) angegebenen Strategien zur Variation von Aufgaben, die in **Tabelle 5** zusammengefasst sind, findet sich neben anderen auch eine ganze Reihe von

---

[137] vgl. auch Abschnitt 2.5 Bewegliches Denken und Computereinsatz

[138] Folgender Unterrichtsverlauf hat sich laut SCHUPP bei der „Aufgabenvariation" bewährt:

1. „Eine Aufgabe wird in üblicher Weise gestellt und gelöst.
2. Die Lerngruppe wird aufgefordert, die Aufgabe zu variieren.
3. Die Variationsvorschläge werden ohne Lehrerkommentar und ohne vorschnelle Bewertung gesammelt. Erfahrungsgemäß wirken solche Eingriffe in brain-storming-Phasen eher restriktiv.
4. Die gesammelten Vorschläge werden gemeinsam geordnet, strukturiert und einzuschätzen versucht. Für die Weiterarbeit geeignete Varianten werden ausgewählt und zugeteilt, andere zurückgestellt bzw. als sinnlos oder banal abgelehnt (…).
5. Das geschieht anhand von Fragen wie ‚Was gehört zusammen?', ‚Was erscheint leicht (sinnlos, banal, machbar, schwer, wohl zu schwer für uns)?', ‚Worauf beschränken wir uns?', ‚Womit fangen wir an?', ‚Was kann zur gleichen Zeit erledigt werden?', ‚Wer übernimmt was?' usw. und von zu begründenden Antworten.
6. Die ausgewählten Varianten werden möglichst selbständig bearbeitet, Verlauf und Resultat der Arbeit schriftlich fixiert. Hierbei sind alle aus Literatur und Praxis bekannten Sozial-, Differenzierungs- und Arbeitsformen möglich. Welche sich anbietet, kann nicht vorentschieden werden, sondern hängt ab von Quantität und Qualität des ausgewählten Materials, von den Vorerfahrungen inhaltlicher und arbeitstechnischer Art und der aktuellen Situation der Lerngruppe sowie von den Absichten der Lehrperson.
7. Die Arbeitsergebnisse werden im Plenum vorgestellt und diskutiert (wenn sie nicht dort schon entwickelt worden sind). Hierbei sollten insbesondere auch die benutzten Variationsstrategien genannt bzw. aufgedeckt werden. Naheliegend ist jetzt auch das Kombinieren bisher getrennt behandelter Variationen.
8. Gemeinsam wird eine Schlusseinschätzung der geleisteten Arbeit vorgenommen, werden ihre Vorzüge und Schwächen aufgedeckt und möglicherweise eine schriftliche Zusammenfassung erstellt." SCHUPP (2003), S. 6

Herangehensweisen, die die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens erfordern oder sie zumindest anstoßen. Ich denke hier insbesondere an die in **Tabelle 5** von mir grau hinterlegten Strategien.

(1) **geringfügig ändern** („wackeln“)	(2) **analogisieren** („ersetzen“ bzw. „ändern” von Bedingungen)	(3) **verallgemeinern** („weglassen“ von Bedingungen)
(4) **spezialisieren** („hinzufügen“ von Bedingungen)	(5) **Grenzfälle betrachten** („ausloten“)	(6) **Lücken beheben** („dicht machen“)
(7) **in Beziehung setzen** („vergleichen“)	(8) **umorientieren** („Ziel ändern“)	(9) **sinnvoll machen** („be-sinnen“)
(10) **zerlegen** („trennen“)	(11) **kombinieren** („vereinigen“)	(12) **umzentrieren** („Blick wechseln“)
(13) **umkehren** („Richtung wechseln“)	(14) **Kontext ändern** („Rahmen wechseln“)	(15) **iterieren** („weitermachen“)
(16) **anders bewerten** („interessant machen“)	(17) **Frage anschließen** („nachfragen“)	(18) **Daten ändern** („aktualisieren“)
(19) **kritisieren** („verbessern“)	(20) **Variation variieren** („ausweiten“)	(21) **Schwierigkeitsgrad abändern** („schwerer oder leichter machen“)
(22) **extremalisieren** („ausreizen“)	(23) **visualisieren** (auf verschiedene Weisen)	(24) **einen Umweltbezug herstellen** („anwenden“)
(25) **dokumentieren/ präsentieren** für unterschiedliche Adressaten	(26) **Beziehungsnetze herstellen** (unterschiedlicher Art)	(27) **lokal ordnen**

Tabelle 5: Strategien zur Variation von Aufgaben (vgl. SCHMIDT (2003))

Ein um Verständnis bemühter Umgang mit Mathematik benötigt „*Verständnisgrundlagen*“, auf die sich das Individuum bei der persönlichen Wissens(re)konstruktion und bei Problemlöseprozessen stützen und bei Schwierigkeiten evtl. zurückziehen kann. Verständnisgrundlagen stehen in enger Beziehung zu „Prototypen“, deren Bedeutung DÖRFLER (1991) in Anlehnung an LAKOFF[139] wie folgt umreißt:

> „Sehr vereinfacht dargestellt, werden Kategorien (Klassen) bzw. Allgemeinbegriffe nach Lakoff mittels prototypischer Repräsentanten oder Vertreter kognitiv verfügbar gemacht für kognitive Funktionen wie Gedächtnis, Problemlösen, Schlußfolgerungen, Herstellen von Beziehungen zwischen Klassen u. a. m. Es wird also mental i. a. nicht abstrakt mit definierenden Eigenschaften oder Bündeln, Systemen von Eigenschaften operiert, sondern gegenständlich mittels der mentalen Vorstellung charakteristischer Exemplare (des Begriffs, der Klasse) oder sogar direkt an materiellen prototypischen Repräsentanten. Die konstitutiven Eigenschaf-

[139] LAKOFF, G.: Women, Fire and Dangerous Things. The University of Chicago Press, Chicago, 1987

ten (für die Klassenzugehörigkeit) bleiben dabei weitgehend implizit und werden auch nicht verbalisiert. Dadurch sind allerdings stets auch mehr Eigenschaften simultan verfügbar, als sie in einer (oft wohl gar nicht möglichen) Definition oder Festlegung der Klasse in einer Minimalformulierung expliziert werden. Die allgemeine Argumentation, der allgemeine Schluß (über im Prinzip alle Elemente der Klasse) wird anhand des Prototyps ausgeführt. Dieser Prototyp steuert aufgrund seiner gegenständlich verfügbaren Eigenschaften diese kognitiven Prozesse. Einige Schlüsse über Eigenschaften des Prototyps (und damit in aller Regel über die durch ihn repräsentierte Klasse) sind sozusagen am Prototyp ablesbar, andere ergeben sich erst durch geeignete Transformationen und Manipulation am und mit dem gegenständlichen Prototyp. (...) Man könnte verkürzt sagen, Prototypen leisten für das Individuum die Repräsentation des Allgemeinen im Besonderen. (…) Damit ein Gegenstand (materiell oder vorgestellt) für ein Individuum als Prototyp wirksam wird, muß dieses eine bestimmte Sichtweise auf diesen Gegenstand entwickeln. Diese kann kurz als die Fähigkeit bezeichnet werden, den Gegenstand eben nicht als solchen sondern als prototypischen, paradigmatischen Vertreter der jeweils relevanten Klasse anzusehen. Dies bedeutet die Konzentration der Aufmerksamkeit auf ganz bestimmte Eigenschaften des Prototyps und auf Beziehungen an ihm, die ihn eben als Element der Klasse auszeichnen.“ DÖRFLER (1991), S. 70

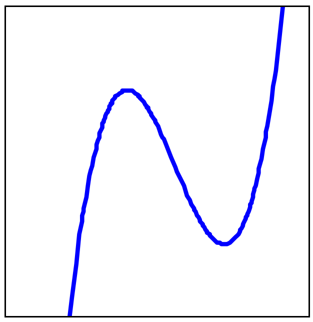


Abb. 42: Typischer Funktionsgraph

Was ich mir unter „Verständnisgrundlagen“ vorstelle, möchte ich im Folgenden an einem Beispiel erläutern. Wenn mathematisch geschulte Menschen nach Eigenschaften eines bestimmten Funktionstyps, etwa einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, gefragt werden, sehen sie einen „typischen“ Funktionsgraph vor ihrem geistigen Auge (vgl. **Abb. 42**). Dieser „typische Funktionsgraph“ ist, im Sinne DÖRFLERS, ein Prototyp für die Klasse der ganzrationalen Funktionen dritten Grades. Ein mentales Bild eines Prototyps birgt einige Vorteile:

- Es ermöglicht eine Gesamtsicht auf das Phänomen bzw. die Konfiguration.
- Mit ihm lassen sich Eigenschaften des Phänomens bzw. der Konfiguration (wieder) erschließen bzw. herleiten.
- Es ist intuitiv erfassbar und (deshalb) relativ leicht memorierbar.

Am Beispiel des „typischen Funktionsgraphen“ einer ganzrationalen Funktion dritten Grades wird aber auch deutlich, dass ein Prototyp nur dann Gewinn bringend genutzt werden kann, wenn der Interpretationskontext dem Nutzer geläufig ist. So ist der Graph z. B. im Deutungsrahmen „kartesisches Koordinatensystem“ zu sehen. Darüber hinaus müssen, z. B. bei einer Überlegung im Hinblick auf lokale Extrema oder Nullstellen, Vorstellungen über die grundsätzlichen Veränderungsmöglichkeiten von Form und Lage des Funktionsgraphen (in Abhängigkeit von den Parametern der speziellen Funktion) vorhanden sein. Wenn ich von „Verständnisgrundlagen" spreche, dann meine ich das Zusammenwirken eines Prototyps (der als Bild, Symbol, Vorgang o. ä. konkretisiert sein kann) mit dem zugehörigen Erklärungskontext, ohne den, wie ich am Beispiel des Funktionsgraphen gezeigt habe, ein Prototyp nicht sinnvoll verwendbar ist.[140] Mit Hilfe einer solchen Verständnisgrundlage ist es möglich, den zu Grunde liegenden Begriff oder das zu Grunde liegende Phänomen zu erfassen, zusammen mit seinen Eigenschaften zu rekonstruieren und für mathematisches Arbeiten nutzbar zu machen. **Abb. 43** fasst die beschriebene Wechselbeziehung noch einmal zusammen.

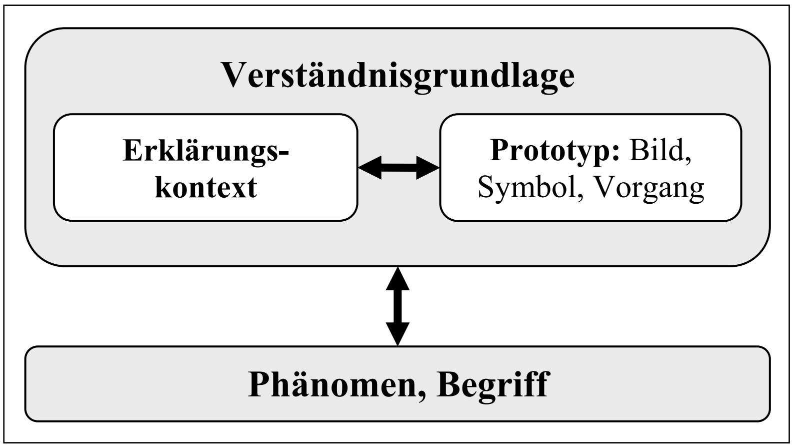


Abb. 43: Verständnisgrundlage

Erfolgreicher Mathematikunterricht muss meiner Meinung nach solche Verständnisgrundlagen anbieten, also Prototypen und deren Bedeutungs- bzw. Interpretationsrahmen mit Schülerinnen und Schülern erarbeiten. Genau an dieser Stelle kommt das Bewegliche Denken ins Spiel. Der Erklärungskontext einer Verständnisgrundlage erfasst immer auch mögliche Veränderungen, die am Prototyp vorgenommen werden können, ohne dass er seine Eigenschaft als Prototyp dabei verliert. Zum Durchführen geeigneter Transformationen an und mit gegenständlichen bzw. vorgestellten Prototypen sind die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens notwendig.

---

[140] Ähnlich wie beim epistemologischen Dreieck (vgl. BROMME/STEINBRING (1990), S. 159ff) muss also zum Prototyp noch ein Erklärungskontext hinzutreten, um damit ein Phänomen, einen Begriff oder Ähnli-

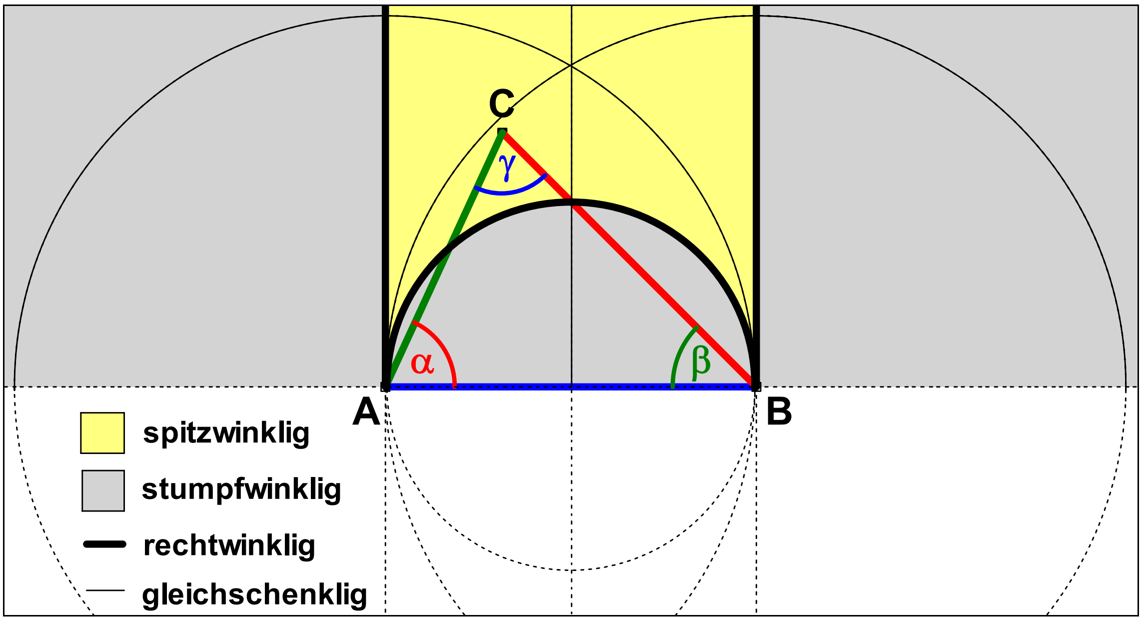


Abb. 44: Verständnisgrundlage zu Dreiecksgrundformen

Im Zusammenhang mit Verständnisgrundlagen wird Bewegliches Denken aber nicht nur im Hinblick auf den Erklärungskontext benötigt. Es kann auch dazu beitragen, einen geeigneten Prototyp zu erarbeiten. Ich erläutere dies im Kapitel 3 bei der Darstellung meines Unterrichtskonzepts am Beispiel der Dreiecksgrundformen. Die in **Abb. 44** dargestellte zugehörige Verständnisgrundlage entsteht aus Bewegungen. Es sind nämlich z. B. die Ortslinien eingezeichnet, auf denen sich der Punkt C bewegen kann, so dass bei festgehaltener Seite $[AB]$ das Dreieck ΔABC immer gleichschenklig bleibt. Bewegt man nun C durch die von AB berandete obere Halbebene, so lässt sich jederzeit die jeweilige Dreiecksform und die Beziehungen zwischen diesen Formen erschließen bzw. rekonstruieren.

Ich habe in diesem Abschnitt versucht an einigen wenigen Beispielen aufzuzeigen, dass Bewegliches Denken eine zentrale Rolle in einem Mathematikunterricht spielen kann, in dem Verstehen-Lehren ernst genommen wird. Dies ist insbesondere im Zusammenhang mit dem Begriffsbilden und dem Problemlösen wichtig, da diese Tätigkei-

---

ches fassen, d. h. verstehen zu können.

ten nach meiner Einschätzung Schwerpunkte des Mathematikunterrichts bilden (sollten).

Im Rahmen dieser Arbeit ist es natürlich nicht möglich, die Relevanz des Beweglichen Denkens für alle Standardthemen des Mathematikunterrichts aufzuzeigen. Im nächsten Abschnitt gehe ich aber auf ein Thema ein, das auf das Engste mit dem Beweglichen Denken verzahnt ist.

2.4 Änderungsverhalten und Bewegliches Denken

Die im Abschnitt 1.2.4 im Zusammenhang mit dem systemischen Denken zitierten Untersuchungen[141] legen die Vermutung nahe, dass es vielen Menschen sehr schwer fällt, die Art und Weise einer Veränderung zu erfassen oder zumindest die Änderungsrate vom aktuellen Bestand einer Größe zu unterscheiden. Insbesondere bereitet es vielen Schwierigkeiten, anhand von Anfangsbeständen und Änderungsraten auf zugehörige (End-)Bestände zu schließen. Nun ist aber gerade diese Fähigkeit zur rationalen Entscheidungsfindung und zur reflektierten Teilnahme an öffentlichen Diskussionen von zentraler Bedeutung. Ich will dies hier an einem Beispiel illustrieren. Das Bundesfinanzministerium will die Staatsverschuldung der Bundesrepublik Deutschland reduzieren und plant deshalb, wie in **Abb. 45** dargestellt, eine deutliche Verringerung der jährlichen Nettokreditaufnahme des Bundes. Diese Senkung der jährlichen Vergrößerung des Schuldenstandes (Änderungsrate!) bedeutet, entgegen leider immer wieder in der öffentlichen Diskussion zu hörenden anders lautenden Aussagen, keine Budgetkonsolidierung. Ein Fortschreiben der Graphik in **Abb. 46** mit den Daten aus **Abb. 45** führt zur Erkenntnis, dass die Bundesrepublik im Jahr 2008, selbst wenn die Bundesregierung bis dahin einen ausgeglichenen Haushalt vorlegen sollte, auf einem Schuldenberg von über 900 Milliarden € sitzt, aus dem *jährliche Zinszahlungen* von ca. 40 Milliarden €[142] resultieren.

[141] vgl. OSSIMITZ (2001) und SWEENEY/STERMAN (2000)
[142] vgl. BUNDESMINISTERIUM DER FINANZEN (2003), S. 14

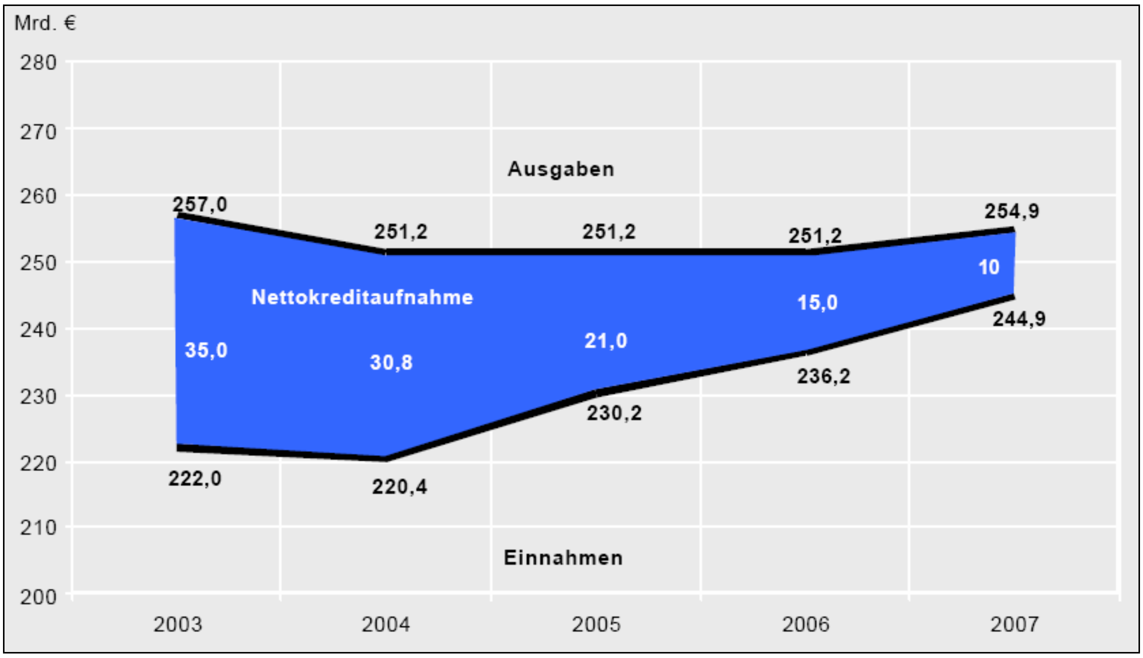


Abb. 45: Entwicklung von Einnahmen, Ausgaben und Nettokreditaufnahmen des Bundes von 2003 bis 2007 (2003: erwartetes Ist / 2004 – 2007: Soll). Aus BUNDESMINISTERIUM DER FINANZEN (2003), S. 9

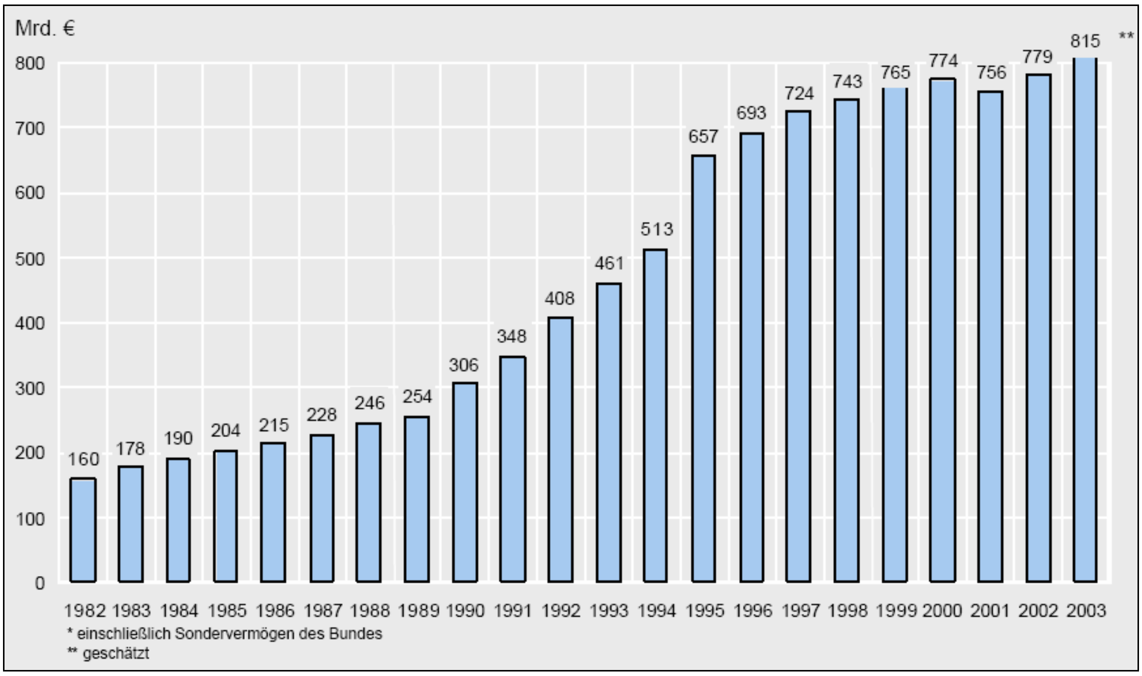


Abb. 46: Entwicklung der Schulden des Bundes 1982 bis 2002. Aus BUNDESMINISTERIUM DER FINANZEN (2003), S. 6

Warum können häufig selbst Abiturienten nicht mit dem Änderungsverhalten argumentieren? Eine mögliche Antwort wäre, dass das Änderungsverhalten im Unterricht erst sehr spät, nämlich je nach Bildungs- bzw. Lehrplan[143] erst in der 10. oder 11. Jahrgangsstufe behandelt wird und wenn, dann gleich tendenziell kalkülhaft im Zusammenhang mit der Ableitung einer Funktion. Stattdessen wäre es im Sinne der Ausbildung von Verständnisgrundlagen und des Spiralprinzips sinnvoll, bereits frühzeitig das Änderungsverhalten immer wieder im Unterricht aufzugreifen.

MALLE (1993) schlägt vor, dies anhand von funktionalen Aspekten von Formeln bereits vor der expliziten Einführung des Funktionsbegriffs zu beginnen, da für ihn der „verständige" Umgang mit Formeln die Auseinandersetzung mit Fragen wie den folgenden erfordert:

- „Wie ändert sich eine Größe, wenn sich eine andere Größe in einer bestimmten Weise ändert?
- Wie muß eine Größe geändert werden, damit sich eine andere Größe in bestimmter Weise ändert?" MALLE (1993), S. 79

Diese Fragen zielen auf elementarem Niveau genau auf die Fähigkeit „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben" des Beweglichen Denkens ab. Ich bin, genau wie MALLE (1993), der Überzeugung, dass diese Fähigkeit stark mit dem Veränderlichenaspekt von Variablen[144] verbunden ist, der im aktuellen Mathematikunterricht meiner Einschätzung nach zu Unrecht oft nur eine untergeordnete Rolle spielt. Es bietet sich an, das Sammeln von ersten Erfahrungen mit dem Änderungsverhalten und die Erarbeitung des Veränderlichenaspekts von Variablen zu verbinden. Ich sehe, wie MALLE (1993), im Umgang mit Formeln einen guten Ansatzpunkt zur Erarbeitung des Änderungsverhaltens, weil diese so gewählt werden können, dass der zugehörige Sachzusammenhang

---

[143] vgl. etwa KULTUSMINISTERIUM BW (2004) oder KULTUSMINISTERIUM BY (2003)

[144] Zur Einordnung des Veränderlichenaspektes von Variablen schreibt MALLE (1993):

> „Eine Variable kann Zahlen aus einem bestimmten Bereich auf verschiedene Arten ‚repräsentieren'. Je nach der Art dieser Repräsentation kann man zumindest die folgenden *Variablenaspekte* unterscheiden:
>
> 1. *Einzelzahlaspekt*: Variable als beliebige, aber feste Zahl aus dem betreffenden Bereich. Dabei wird nur eine Zahl aus dem Bereich repräsentiert.
> 2. *Bereichsaspekt*: Variable als beliebige Zahl aus dem betreffenden Bereich, wobei jede Zahl des Bereichs repräsentiert wird. Dieser Aspekt tritt wiederum in zwei Formen auf:
>   - *Simultanaspekt*: Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden gleichzeitig repräsentiert.
>   - *Veränderlichenaspekt*: Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden in zeitlicher Aufeinanderfolge repräsentiert (wobei der Bereich in einer bestimmten Weise durchlaufen wird)." MALLE (1993), S. 80

den Schülerinnen und Schülern vertraut ist und somit als Verständnisgrundlage dienen kann. Für erste Erfahrungen mit dem Änderungsverhalten eignen sich allerdings geometrische Zusammenhänge noch besser, weil die Veränderungen hier ebene bzw. räumliche Bewegungen darstellen und damit den Alltagserfahrungen von Schülerinnen und Schülern näher sind als Veränderungen innerhalb einer Zahlenmenge. Ein Erschließen des Zusammenhangs zwischen verschiedenen Variablen in Form eines Terms ist sicherlich anspruchsvoller (da abstrakter) als das geometrische Arbeiten. Deshalb plädiere ich dafür, geometrische Zusammenhänge erst in einem letzten Schritt in Terme zu fassen oder sogar ganz davon abzusehen.

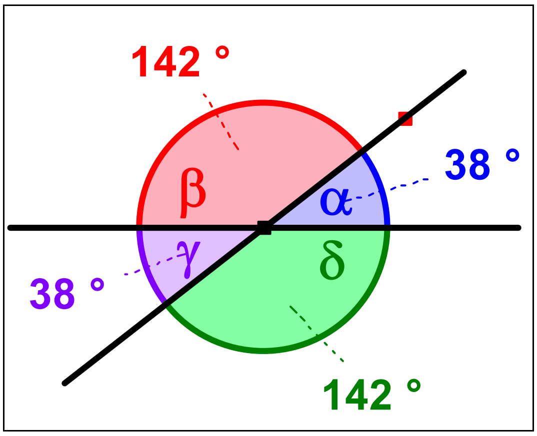


Abb. 47: Winkel an einer Geradenkreuzung

Zur Illustration sei auf das Beispiel aus **Abb. 47** verwiesen. Hier werden die Winkel an einer Geradenkreuzung betrachtet und es wird der Frage nachgegangen, wie sich die Winkel β, γ und δ verändern, wenn man den Winkel α (bei 0° beginnend) gleichmäßig vergrößert. Denkt man sich z. B. die Gerade, die den zweiten Schenkel[145] des Winkels α festlegt, als beweglich und hält die andere Gerade fest, so lassen sich je nach Fokussierung auf spezielle Winkelpaare („Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“) die Abhängigkeiten zwischen den Änderungen der einzelnen Winkelgrößen gut erarbeiten. Gerade zu Beginn der Auseinandersetzung mit dem Änderungsverhalten empfiehlt es sich, die Konfiguration mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware umzusetzen.[146] Diese ermöglicht eine dynamische Visualisierung der Bewegung (Veränderung), die von den Schülerinnen und Schülern selbst gesteuert werden kann. Durch bewusste langsame Veränderung der Lage des zweiten Schenkels von α kann Folgendes erkannt werden:

---

[145] bei mathematisch positivem Umlaufsinn
[146] Ein von mir erstelltes DynaGeoX-Applet zu dieser Fragestellung findet man im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → A → Änderungsverhalten → Beispiel 3 (Scheitel- und Nebenwinkel).

- Die Vergrößerung des Winkels α geht mit einer entsprechenden Verkleinerung des Winkels β einher.
- Weil der zweite Schenkel von α gleichzeitig der erste Schenkel von β ist und die jeweils anderen Schenkel (dieselbe Gerade!) dabei nicht bewegt werden, verändert sich die Größe des Winkels β genauso schnell wie die Winkelgröße von α.
- Wird α gleichmäßig vergrößert, so wird also gleichzeitig β gleichmäßig und genauso schnell kleiner.[147]
- Entsprechende Zusammenhänge ergeben sich durch analoge Betrachtungen für jede andere Winkelpaarung an der Geradenkreuzung.

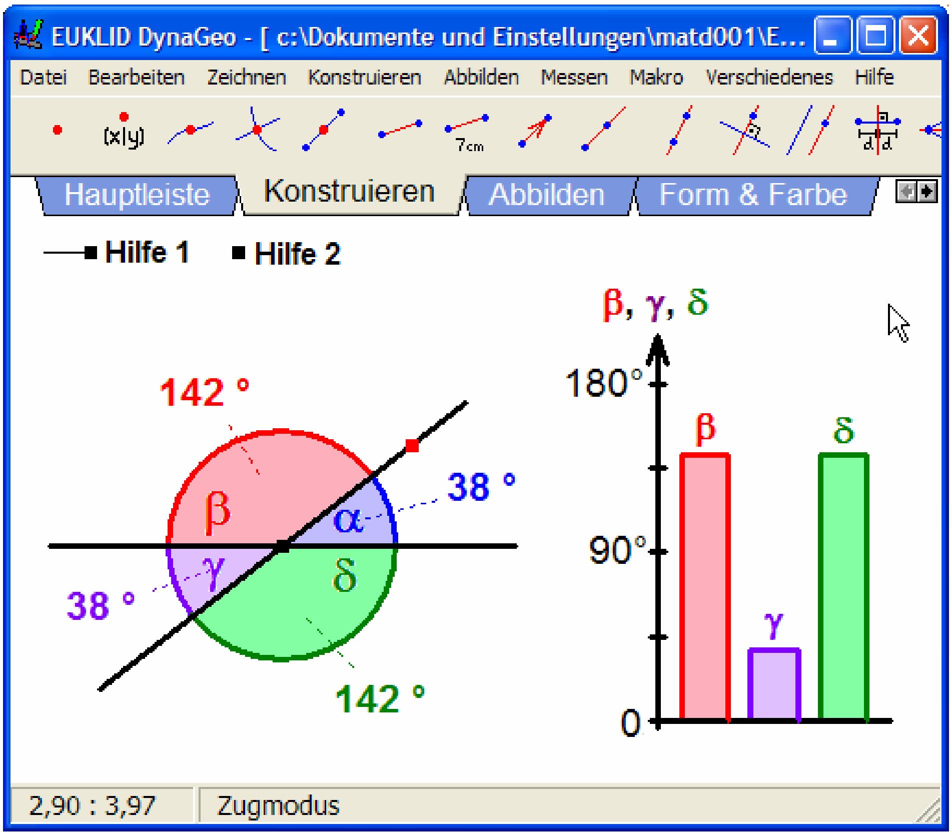


Abb. 48: Winkel an einer Geradenkreuzung mit dynamischem Balkendiagramm

[147] Wenn die Schülerinnen und Schüler noch den gestreckten Winkel in den Blick nehmen, den jede der beiden Geraden bzgl. des Drehpunktes als Scheitel bildet, so ist auch ein quantitativer Zusammenhang zwischen den beteiligten Winkelgrößen schnell hergestellt.

Zur Unterstützung derartiger Überlegungen kann es hilfreich sein, die wesentlichen Größen dadurch stärker in den Blick zu nehmen, dass ihre jeweils aktuellen Werte als Länge von Balken aufgetragen werden, die sich bei beim Verändern der Winkelgröße von α entsprechend mitbewegen (vgl. **Abb. 48**). Auf diese Weise lassen sich die einzelnen Größen besser zueinander in Beziehung setzen und es können erste Aussagen über mögliche Extremwerte (Für welche Größen von α nimmt β seinen größten bzw. kleinsten Wert an?) gemacht werden. Auch Vermutungen über die Änderungsgeschwindigkeit können mit Hilfe dieser Darstellung aufgestellt und anhand des Bildes der „realen" Bewegung diskutiert werden.

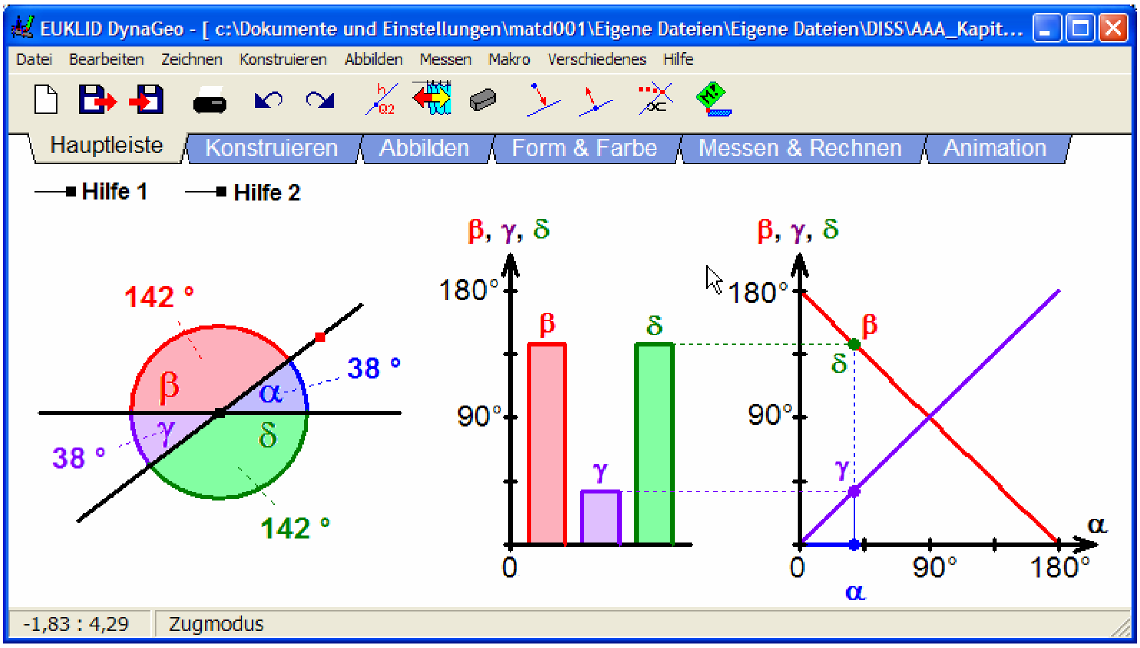


Abb. 49: Winkel an einer Geradenkreuzung mit dynamisch erzeugten Funktionsgraphen

Für das Erfassen der Änderung ist die Flüchtigkeit der Balkenbewegungen hinderlich. Was benötigt wird, ist eine Darstellung, die die Momentanwerte der abhängigen Größen (hier β, γ und δ) während der Veränderung der unabhängigen Größe (hier α) jeweils nicht nur momentan wiedergibt, sondern insgesamt aufzeichnet und damit für die Argumentation zur Verfügung stellt. Auf diese Weise lässt sich der Funktionsgraph als Ortslinie der Spitzen der bei der Veränderung von α mitgeführten Balken motivieren. Werden Funktionsgraphen auf die hier skizzierte Weise der „realen" Veränderung gegenübergestellt, so können die Form des Funktionsgraphen und die erzwungenen Änderungen (hier der Winkelgrößen) miteinander in Beziehung gesetzt, wechselseitig interpretiert, erfasst und somit verstanden werden. Im vorliegenden Fall lassen sich proportionale bzw. lineare Zusammenhänge auf eine sehr intuitive Weise erfassen und thematisieren, ohne algebraische Kalküle verwenden zu müssen. Hierauf aufbauend kann dieses Hilfsmittel[148] als Verständnisgrundlage für das Änderungsverhalten auf allen Anspruchsniveaus dienen. Ich möchte an dieser Stelle betonen, dass es wichtig ist auf diese Weise auch nichtlineare Zusammenhänge zu untersuchen![149]

Veränderungen in der Umwelt werden intuitiv als zeitabhängig erfasst und können in der Tat auch immer mit der Zeit parametrisiert werden. Für WEIGAND (1988a) ist die „Zeit" ein „Prototyp einer Veränderlichen"[150], und zwar insbesondere deshalb, weil sie „von Natur aus" kontinuierlich und gleichförmig voranschreitet. Die im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken benutzten Argumente gehen immer von einer induzierten gleichmäßigen und stetigen[151] Veränderung aus. Deshalb fallen bei dynamischen Argumenten auch immer Vokabeln, die WEIGAND (1988a) in einen Zusammenhang mit zeitabhängigen Vorgängen bringt:

---

[148] Gemeint ist das Zusammenspiel von dynamischer Zeichnung, dynamischem Balkendiagramm und dynamischem Funktionsgraphen. Bei der Entwicklung dieses Werkzeugs ging es mir darum, die verschiedenen Darstellungsweisen eines Phänomens zu kombinieren und organische Übergänge zu schaffen. Auf diese Weise ist es z. B. möglich die Entstehung eines Graphen schrittweise nachzuzeichnen und so besser zu verstehen. Darüber hinaus lassen sich alle Darstellungen, wie oben bereits ausgeführt durch die direkte Gegenüberstellung wechselseitig interpretieren. Im Zusammenhang mit Funktionen schreibt WEIGAND (1988b) dazu:

> „Jede Darstellungsform beleuchtet nur bestimmte Aspekte des dargestellten Begriffs. Da es aber für ein umfassendes Begriffsverständnis wichtig ist, daß alle Sichtweisen eines Begriffs berücksichtigt werden und diese unterschiedlichen Aspekte zu einem Gesamtbild zusammengefügt werden, muß der Schüler auch in der Lage sein, eine in einer bestimmten Darstellung gegebene Funktion in eine andere Darstellungsform überzuführen, d. h. einen *Transfer* zwischen verschiedenen Darstellungen durchzuführen. In welcher Art und Weise dabei die Sichtweisen der Eigenschaften des Begriffs verändert werden, muß eine mathematische Analyse klären. Methodisch-didaktische und entwicklungspsychologische Gesichtspunkte müssen berücksichtigt werden, wenn die Frage entschieden werden soll, wann dieses ‚Hin- und Herspringen' zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen notwendig bzw. sinnvoll ist." WEIGAND (1988b), S. 296

[149] Von mir erzeugte DynaGeoX-Applets mit dem genannten Hilfsmittel zum beschriebenen Beispiel und weiteren, deutlich komplexeren Beispielen findet man im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → A → Änderungsverhalten. Eine Auseinandersetzung mit ihnen verdeutlicht besser als jede Beschreibung die Vorteile dieses Zuganges.

[150] vgl. WEIGAND (1988a), S. 59

[151] Wenn ich im Folgenden von stetigen Veränderungen spreche, so meine ich, wenn ich nicht explizit etwas andere voraussetze, neben den im eigentlichen Sinn stetigen Veränderungen auch immer solche, die in diskreten, aber äquidistanten Sprüngen voranschreiten.

> „Bei zeitabhängigen Vorgängen treten etwa folgende Redewendungen auf: ‚Die Fiebertemperatur *fällt*‘, ‚der Luftdruck *steigt*‘, ‚der Flüssigkeitsspiegel *sinkt*‘, ‚die Zinsen bleiben *im Verlaufe* eines Jahres fest‘. Diese Ausdruckweisen finden sich nun auch bei graphischen Darstellungen von Funktionen wieder, bei denen die unabhängige Variable nicht die Zeit ist: ‚Die Funktion verläuft *zunächst* linear‘, ‚Die Funktion *steigt und fällt dann* wieder ab‘, ‚Die Funktion *nähert* sich asymptotisch einer Geraden‘. Diese Beschreibungen von Eigenschaften einer Funktion enthalten eine *zeitliche* Komponente und betonen dadurch die dynamische Sichtweise einer Funktion. Für die Zeitachse entspricht dabei das ‚Durchlaufen‘ der Abszissenachse von ‚links nach rechts‘ der natürlich ablaufenden Zeitfolge. Diese ausgezeichnete Richtung der x-Achse führt erst zu den Vorstellungen des Wachsens oder Fallens und der Rechts- oder Linkskrümmung des Graphen einer Funktion.“ WEIGAND (1988a), S. 72 [Hervorhebungen im Original]

Die konsequente Einbeziehung Beweglichen Denkens in den Mathematikunterricht ermöglicht den Schülerinnen und Schülern einen vertrauten Umgang mit Veränderungen und fördert die Verbalisierung dieser Phänomene. Insbesondere kann auf diese Weise ein nach dem Spiralprinzip aufgebauter Lehrgang bereits frühzeitig Grundlagen für den Analysisunterricht in der gymnasialen Oberstufe legen. Mir ist in diesem Zusammenhang wichtig festzuhalten, dass z. B. viele Extremwertprobleme[152] und Fragen zum Änderungsverhalten auch mit sehr viel elementareren und damit dem verstehenden Umgang der Schülerinnen und Schüler näher liegenden Methoden gelöst werden können als mit dem Ableitungskalkül.[153]

2.5 Bewegliches Denken und Computereinsatz

Ich habe in diesem Kapitel immer wieder auf Einsatzmöglichkeiten des Computers im Mathematikunterricht im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken verwiesen. In diesem Abschnitt stelle ich zusammen, welche Funktionen der Computer im Hinblick

---

[152] Gerade auch im Zusammenhang mit Extremwertproblemen kann das Bewegliche Denken und insbesondere die Fähigkeit zur Realisierung des Änderungsverhaltens eine zentrale Rolle spielen. Zum Thema „Extremwertprobleme“, auch ohne Analysis, findet sich eine Reihe von interessanten Artikeln in DANCKWERTS/VOGEL (2001). Neben anderen Argumenten werden dort auch wesentliche Argumente des Beweglichen Denkens benutzt. Um Extremwertprobleme ohne Mittel der Analysis zu lösen, können auch dynamische Visualisierungen sehr hilfreich sein. Entsprechende von mir erzeugte DynaGeoX-Applets findet man im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → E → Extremwertprobleme sowie unter http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → A → Änderungsverhalten.

[153] vgl. hierzu auch SCHUPP (1992)

auf das Bewegliche Denken übernehmen kann, welche Bedingungen eine Software dazu erfüllen muss und schließlich, wie ein geeigneter Computereinsatz in einem Unterricht aussehen kann, der auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens ausgerichtet ist.

Die alte Idee, sich Konfigurationen beweglich vorzustellen und dies als Argumentationsgrundlage zu nutzen, wird spätestens seit der Meraner Reform immer wieder in der didaktischen Diskussion aufgegriffen und für den Geometrieunterricht (GU) propagiert.[154] Auswirkungen auf den realen Mathematikunterricht sind bisher allerdings kaum festzustellen. KRÜGER (2000b) spricht diesbezüglich sogar vom „Scheitern der Meraner Reform“[155]. Als ein Grund dafür wird angeführt, dass es früher schwierig war, derartige Bewegungen zu visualisieren oder der Aufwand zur Herstellung von entsprechenden Medien, z. B. Mathematikfilme[156] oder gegenständliche Modelle[157], ganz erheblich ist bzw. war. Darüber hinaus haben Unterrichtsfilme den Nachteil, dass Eingriffe in den Ablauf eines einmal erstellten Films nur in geringem Umfang durchführbar sind.[158] Damit sind aber entdeckendes Lernen und das Beschreiten eigener Lernwege nur sehr eingeschränkt möglich. Diese Problematik hat sich durch die Verfügbarkeit von Computern und der Entwicklung von dynamischer Geometriesoftware (DGS), Tabellenkalkulationsprogrammen (TKP) und Computeralgebrasystemen (CAS) grundlegend geändert. Mit ihrer Hilfe können Visualisierungen mathematischer Konfigurationen[159] rela-

[154] Vgl. dazu die Zusammenstellung in den Kapiteln 7 und 9 von KRÜGER (2000b).

[155] vgl. KRÜGER (2000b), S. 301ff

[156] In den 1980er Jahren wurde viel Arbeit in die theoretische Konzeption und die praktische Umsetzung von Mathematikfilmen investiert. Vgl. dazu etwa KAUTSCHITSCH/METZLER (1982) und einzelne Beiträge in KAUTSCHITSCH/METZLER (1983), KAUTSCHITSCH/METZLER (1984) und KAUTSCHITSCH/METZLER (1989).

[157] Dies ist keine grundsätzliche Aussage gegen gegenständliche Modelle. Einfache Veränderungen, die leicht an realen Objekten durchgeführt werden können, dienen oft besser als Verständnisgrundlage, als eine Bewegung, die (nur) visuell auf dem Bildschirm nachvollzogen wird. Ich bin deshalb der Überzeugung, auch wenn es bisher dafür keine empirische Bestätigung gibt, dass, wo immer die Realisierung einer Bewegung/Veränderung mit einfachen Mitteln an einem physikalischen Modell (evtl. auch enaktiv für Schüler) möglich ist, diese Möglichkeit der rein visuellen Darstellung mit dem Computer vorgezogen werden sollte. Zur Illustration soll folgendes Problem dienen: Wie verändert eine Strecke, die an einem Ende fixiert ist und deren anderer Endpunkt P frei beweglich ist, ihre Länge in Abhängigkeit von der Bewegung von P? Für die Geschwindigkeit der Änderung der Streckenlänge ist es entscheidend, ob sich P in Richtung der durch P und den anderen Endpunkt der Strecke festgelegten Geraden bewegt oder senkrecht dazu. Im ersten Fall wird die Bewegung von P vollständig in eine Längenänderung der Strecke umgesetzt, im zweiten Fall ändert sich die Länge der Strecke gar nicht. Als Verständnisgrundlage kann hier wieder das „*Gummibandmodell*“ dienen (vgl. S. 82).

[158] Man kann sie nur vorwärts und rückwärts, schneller und langsamer laufen lassen und anhalten.

[159] Gemeint sind nicht nur geometrische Konfigurationen, sondern darüber hinaus alle Konfigurationen, die sich durch funktionale Zusammenhänge beschreiben lassen.

tiv einfach erzeugt und dynamisch variiert werden. Wichtig im Hinblick auf das Bewegliche Denken ist dabei die Möglichkeit, einzelne Variable der Konfiguration gezielt und stetig bzw. „quasistetig“[160] zu verändern. Oft wird diese Variation durch Schieberegler realisiert. Dies gilt insbesondere für Tabellenkalkulationsprogramme und Computeralgebrasysteme, in denen Schieberegler üblicherweise die einzige Möglichkeit zur Dynamisierung darstellen. **Abb. 50** und **Abb. 51** auf Seite 117 zeigen Schieberegler im CAS Derive und im TKP Excel[161]. Bei dynamischen Geometriesystemen sind Schieberegler eine Methode unter vielen zum Beweglichmachen von Konfigurationen. Diese Vorgehensweise ist dann das Mittel der Wahl, wenn viele verschiedene, vorab bereits feststehende Veränderungsmöglichkeiten nebeneinander zur Verfügung gestellt werden sollen. **Abb. 52** und **Abb. 53** auf Seite 118 zeigen verschiedene Möglichkeiten zur Realisierung von Schiebereglern in der DGS EUKLID DynaGeo[162]. Ich werde mich im Folgenden auf den Einsatz von dynamischer Geometriesoftware beschränken, weil sie im Vergleich zu Tabellenkalkulationsprogrammen bzw. Computeralgebrasystemen infolge des Zugmodus deutlich größere Freiheiten in den Variationsmöglichkeiten bietet, was im Hinblick auf das Bewegliche Denken der entscheidende Vorteil ist. Darüber hinaus sind diese Programme einfacher und intuitiver zu bedienen. Der letztgenannte Aspekt ist insbesondere im Hinblick darauf, dass ich die Entwicklung des Beweglichen Denkens als Prozessziel des Mathematikunterrichts sehe, das spätestens ab der 5. Jahrgangsstufe den Unterricht begleiten sollte, ein entscheidendes Kriterium für den Einsatz von Computern im Mathematikunterricht.

[160] Gemeint ist ein diskretes, aber gleichmäßiges Variieren, also eine Veränderung, die in „äquidistanten Schritten“ erfolgt.

[161] Die **Abb. 51** entstammt dem, von mir auf der Basis von Excel entwickelten Programmpaket „Terme *dynamisch*“, das im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → Publikationen → „Terme *dynamisch*“ heruntergeladen werden kann.

[162] Von mir erzeugte DynaGeoX-Applets zu **Abb. 52** und **Abb. 53** findet man im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → P → Pythagoras bzw. unter http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → E → Extremwertprobleme.

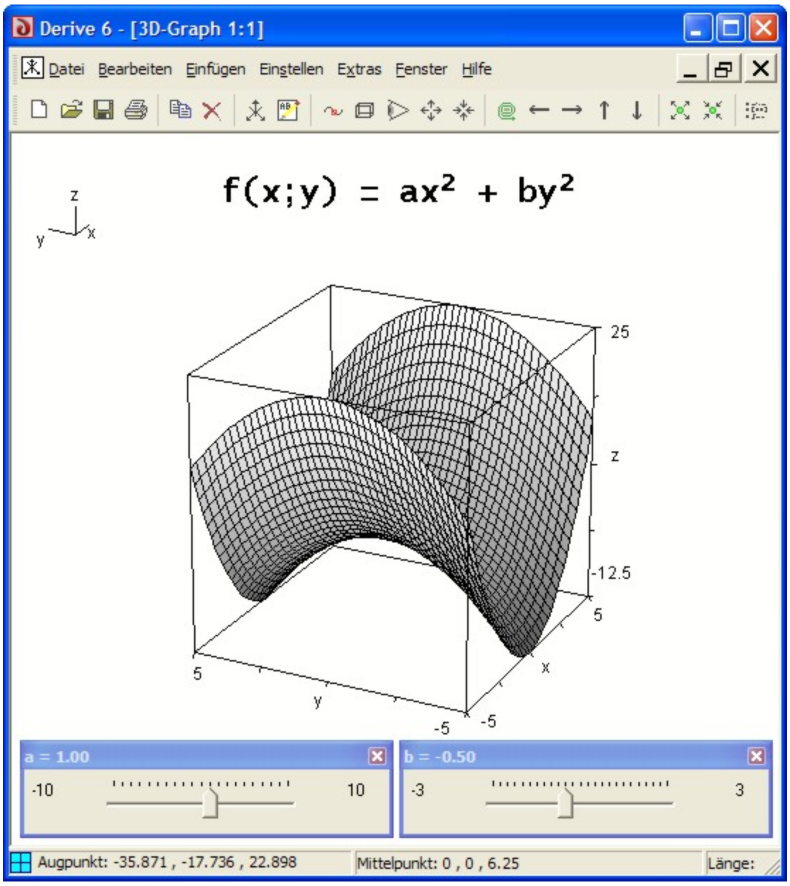


Abb. 50: Schieberegler im CAS Derive

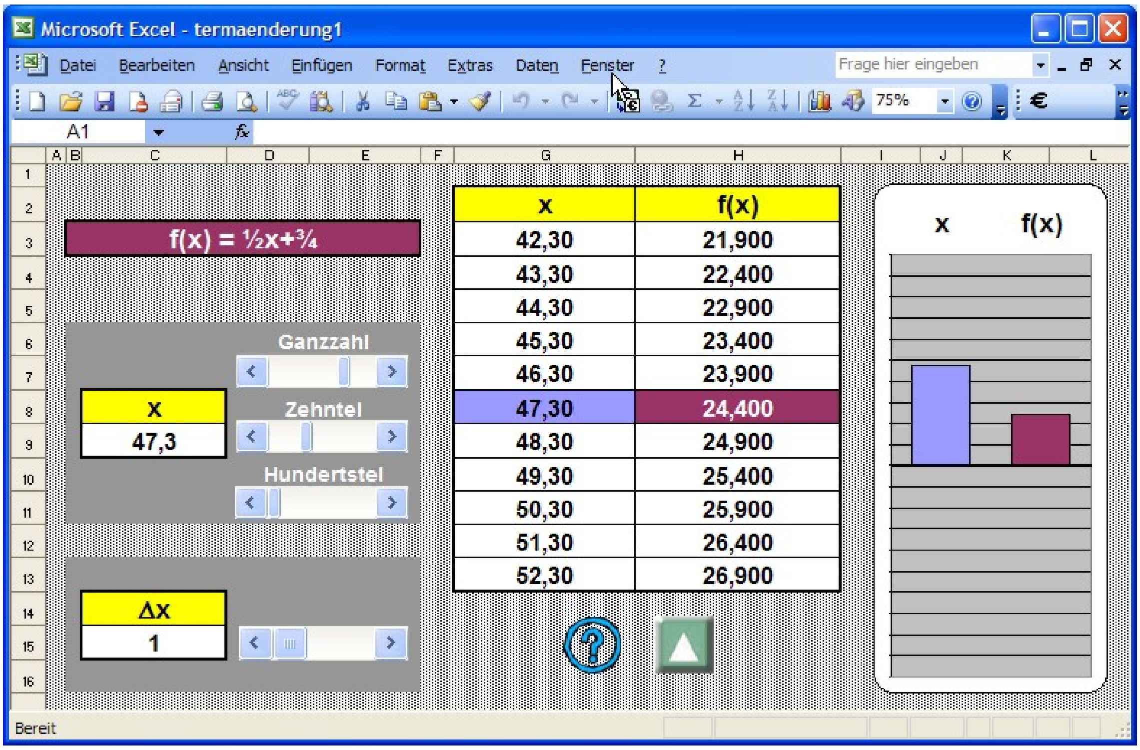


Abb. 51: Schieberegler im TKP Excel

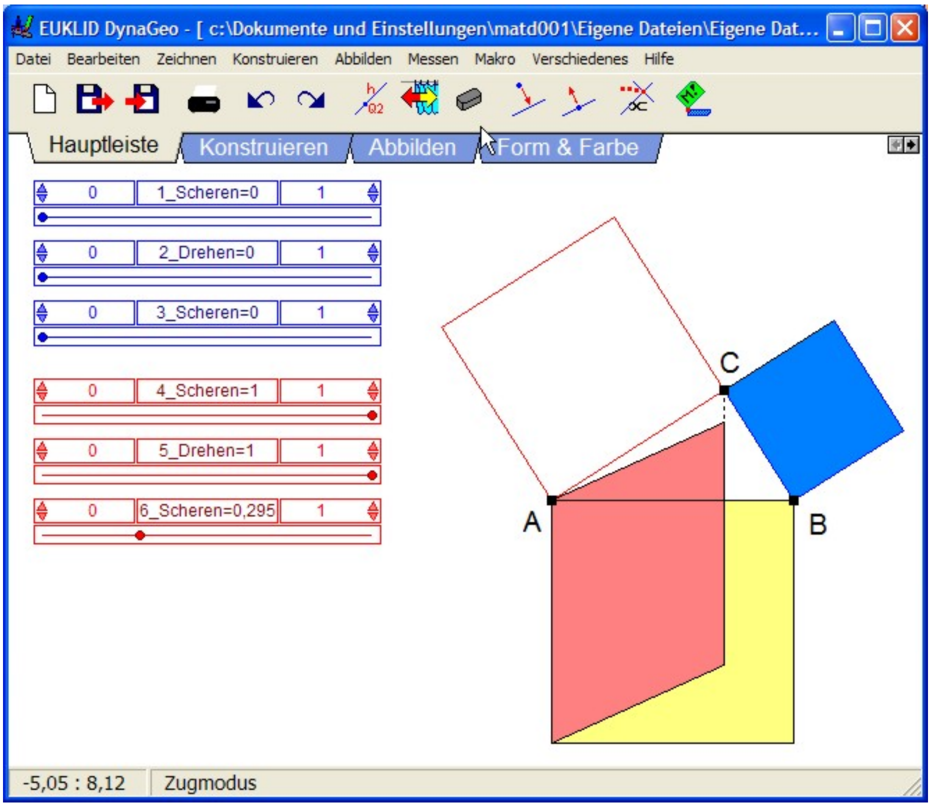


Abb. 52: Schieberegler in der DGS EUKLID DynaGeo (als Zahlobjekt realisiert)

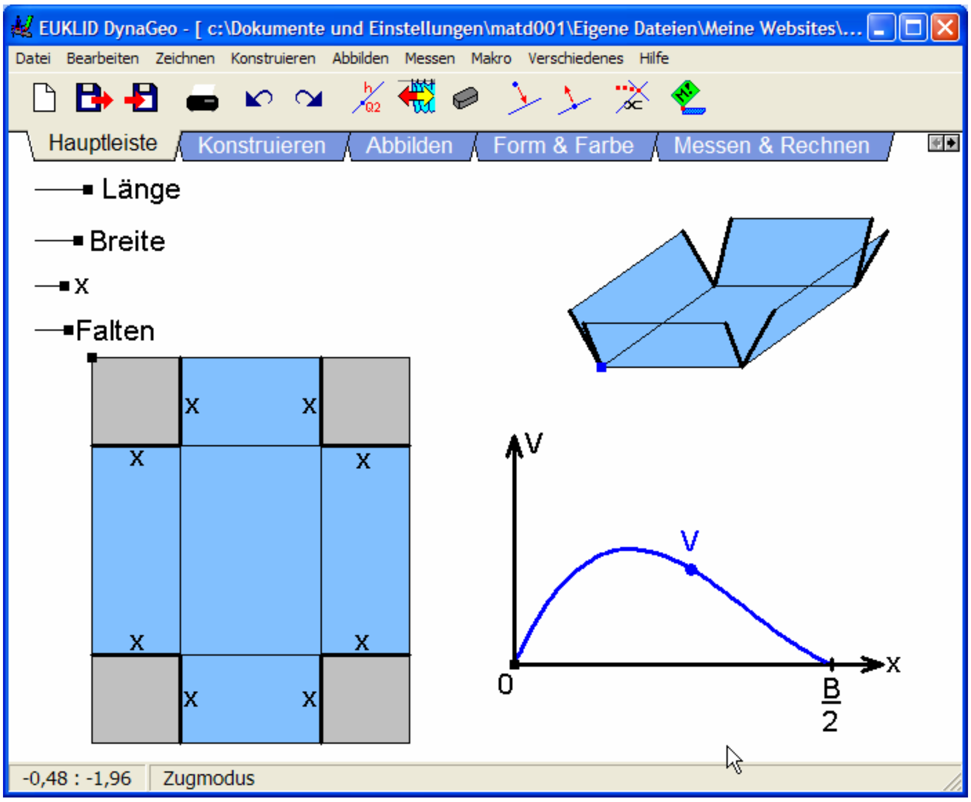


Abb. 53: Schieberegler in der DGS EUKLID DynaGeo (als Strecke variabler Länge realisiert)

Die Tatsache, dass Veränderungen mit Hilfe geeigneter Computerprogramme sehr einfach durchgeführt und von Schülerinnen und Schülern in gewissen Grenzen selbst gesteuert werden können, birgt alleine allerdings noch keinen didaktischen Vorteil. Zwar muss im Sinne des Beweglichen Denkens die Bewegung bzw. Veränderung nicht mehr hineingesehen werden, weil sie bereits bildhaft vor dem Auge der Schülerin bzw. des Schülers abläuft. Um aber aus dieser Bewegung Informationen oder Ideen für eine Argumentation zu erhalten, ist eine intensive Auseinandersetzung mit der Problematik notwendig, die nicht einfach durch oberflächliches Betrachten von Bewegungen erreicht wird. Genau genommen setzt ein Gewinn bringender Einsatz von Software, die „benutzergesteuerte" dynamische Veränderungen zulässt, bereits die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens voraus. Für einen Menschen, der versiert im Beweglichen Denken ist, kann der Computer mit entsprechender Software[163] drei wesentliche Funktionen erfüllen:

Kontrollinstanz:

Er ist eine externe Kontrollinstanz, mit der im Kopf abgelaufene bewegliche Denkvorgänge auf ihre Tragfähigkeit hin überprüft und kritisch hinterfragt werden können.

„Denkzeug"[164]:

Der Computer ist ein Werkzeug, das das Bewegliche Denken unterstützt, also ein „Denkzeug", weil er bei komplexen Problemstellungen, die nicht mehr im Kopf erfassbar sind, dazu dient, die Komplexität in den Griff zu bekommen. Dies ge-

---

[163] Wenn ich in Zukunft von dem Computer sprechen, dann meine ich jeweils die Hardware und die notwendige Software.

[164] Ich lehne mich hier an die Ausführungen von DÖRFLER (1991) an, der von „verteilter Kognition" spricht und schreibt:

> „Das Werkzeug (Schubraupe, Computer) unterstützt (…) die Tätigkeit auf (…) [der] Metaebene u. a. dadurch, daß (komplexe) Abläufe (Graben, Rechnen) gleichsam komprimiert werden, verkürzt werden zu mental manipulierbaren Einheiten. Die Bedienungshandgriffe (z. B. Hebel, Knopfdruck) stellen eine Art Reifizierung und Einkapselung früher nur entfaltet und prozessual verfügbarer Abläufe und Handlungssequenzen dar, wodurch eine gezielte und effektive Reflexion auf deren Organisation, Sequenzierung, Konsequenzen u. dgl. ermöglicht bzw. erleichtert wird. Dies erfordert einerseits den geplanten Einsatz der Werkzeuge und unterstützt andererseits diese Planung. Es sei hier betont, daß für diese Meta-Tätigkeit eine gründliche Kenntnis des jeweiligen Werkzeugs bzw. der Maschine erforderlich ist, dies vor allem hinsichtlich ihrer Wirkungen aber nicht ihrer Wirkungsweise. Es genügt weitestgehend eine funktionale Kenntnis des (maschinellen) Werkzeugs, durchaus als black- oder grey-box." DÖRFLER (1991), S. 52f

schieht dadurch, dass das Gedächtnis entlastet wird und einzelne Fähigkeitsaspekte des Beweglichen Denkens an den Rechner delegiert werden. Folgende Aspekte sind hier zu nennen:

- Am Computer arbeitende Menschen benötigen die Fähigkeit „Bewegung hineinsehen“ nicht mehr im gleichen Umfang wie jene ohne Werkzeug, da die Bewegung zwar noch geplant, aber nicht mehr mental realisiert werden muss.
- Das Gedächtnis wird nicht mehr so stark belastet, weil die Gesamtkonfiguration ständig zur Verfügung steht und nötige Fokussierungen auf jeweils relevante Details nur noch antizipiert werden müssen. Geeignete Hilfsmittel, die das Computerprogramm bietet, können zur Konzentration der Aufmerksamkeit auf diesen Aspekt genutzt werden.

Diese Entlastung in den genannten kognitiven Bereichen erlaubt beim Problemlösen mit Hilfe des Beweglichen Denkens die Konzentration auf Aspekte der Planung, Interpretation, Analyse und Argumentation. Voraussetzung dazu ist allerdings die Fähigkeit, mit der jeweiligen Software umgehen und ihren zielgerichteten Einsatz planen und im Laufe des verteilten Denkprozesses ggf. auch reorganisieren zu können.

Kommunikationsmittel:

Er ist ein Hilfsmittel um Ergebnisse beweglicher Denkvorgänge und ihr Zustandekommen gerade auch solchen Menschen zu vermitteln, deren Fähigkeit zum Beweglichen Denken weniger stark ausgeprägt ist. Dabei spielen die Möglichkeiten des dynamischen „Vorführens“ von Veränderungen und der Aufmerksamkeitsfokussierung eine wichtige Rolle.

Diese drei genannten Funktionen des Computers gelten für Personen, deren kognitives Standardrepertoire das Bewegliche Denken als selbstverständlichen Bestandteil umfasst. Sie eröffnen aber auch einen Zugang zu sinnvollen Einsatzmöglichkeiten des Computers im Mathematikunterricht, wenn es um die Entwicklung Beweglichen Denkens geht. Dabei sind zwei wesentliche Zielrichtungen, dass die Schülerinnen und Schüler auch mit Hilfe des Computereinsatzes dazu befähigt werden,

- *ohne Computer, also im Kopf*, Bewegungen hineinzusehen, zu analysieren und Änderungsverhalten zu erfassen, sowie

- bei komplexeren Gegebenheiten einen *geeigneten Computereinsatz* zu *planen*, vorzustrukturieren und während des Denkprozesses ggf. zu reorganisieren.

Auf dem Weg zu diesem Ziel ermöglicht der Einsatz des Computers der Lehrkraft die Komplexität des beweglichen Denkprozesses dadurch zu reduzieren, dass *Strukturierungs- bzw. Fokussierungshilfen* bereits in eine Lernumgebung eingebaut werden und den Schülerinnen und Schülern so eine Konzentration auf Analyse- und Argumentationsprozesse ermöglicht wird. Dabei wird man im Zuge der Entwicklung des Beweglichen Denkens die Strukturierungshilfen in den Lernumgebungen schrittweise verringern. In der Endform erzeugen die Schülerinnen und Schüler die zu untersuchenden Konfigurationen mit Hilfe von DGS komplett selbst, planen selbstständig Fokussierungshilfen und setzen sie um bzw. nutzen DGS zur Kontrolle der Ergebnisse des im Kopf abgelaufenen Beweglichen Denkens. Diese Endform kann aber nur das Ziel eines langfristigen, sich über mehrere Jahre erstreckenden Prozesses sein. Für diesen Zeitraum müssen von Lehrern und Didaktikern auf DGS basierende Lernumgebungen entwickelt werden, die jeweils angemessene Strukturierungs- bzw. Fokussierungshilfen enthalten. Die Gestaltung von Fokussierungshilfen erfordert dabei einen erheblichen und nicht zu unterschätzenden Aufwand im Hinblick auf die Konzeption, aber auch auf die Umsetzung der gewünschten Fokussierungshilfen. Oft sind dazu trickreiche und nicht nahe liegende Konstruktionen notwendig, die ein DGS alleine so nicht zur Verfügung stellt. Auch eine einzelne Lehrkraft ist nicht dazu in der Lage, zu allen Themen des Lehrplanes geeignete auf DGS basierende Lernumgebungen zu entwickeln. Hier ist eine Internet-Plattform notwendig, auf der bereits fertige Lernumgebungen zu verschiedenen Themen vorliegen. Dort findet man – im Idealfall – bereits eine Umsetzung zu einem gewünschten Thema, die man als Lehrkraft an die eigenen Bedürfnisse anpassen kann, oder man erhält zumindest Anregungen dazu, wie eigene Ideen mit Hilfe von DGS umgesetzt werden können. Einen Ansatz dazu stellt meine Homepage dar, die unter der Adresse http://www.juergen-roth.de erreichbar ist. Hier stelle ich unter der Rubrik „EUKLID DynaGeo“ eine ganze Reihe von Lernumgebungen zur Verfügung, die von mir konzipiert und umgesetzt wurden und die auf DynaGeoX-Applets basieren. Sie können online genutzt, aber auch heruntergeladen und gemäß den eigenen Vorstellungen und Bedürfnissen geändert werden.[165] Sie zeigen aber auch exemplarisch, welche Arten von Fokussierungshilfen möglich sind.

Grundsätzlich kann man drei Stufen der *Fokussierungshilfen* unterscheiden:

1. Eine Konfiguration ist vollständig vorgegeben.
    - Für die wesentlichen zu beobachtenden Aspekte sind bereits Fokussierungshilfen (z. B. durch Farbgebung, Linienstärken, die Mitführung von Messwerten u. ä.) enthalten.
    - Evtl. sind Variationsmöglichkeiten an der Konfiguration bewusst eingeschränkt.
    - Evtl. erlaubt sie es, einzelne Elemente ein- und auszublenden.
    - Beispiele hierfür sind in **Abb. 49** auf Seite 112 und **Abb. 52** sowie **Abb. 53** auf Seite 118 wiedergegeben.
2. Eine veränderbare (Teil-)Konfiguration ist vorgegeben.
    - Sie kann (bzw. muss) ergänzt oder verändert werden.
    - Es sind nur einzelne Fokussierungshilfen vorhanden.
    - Ein Beispiel hierfür ist in **Abb. 54** auf Seite 123 wiedergegeben.[166]
3. Es wird mit einer leeren, unstrukturierten DGS-Datei gearbeitet.
    - Eine dynamische Geometriesoftware wird völlig selbstständig und ohne Vorgaben als Werkzeug benutzt.

[165] Um den Lehrerinnen und Lehrern einen einfachen Zugriff zu gewünschten Themen zu ermöglichen, habe ich für alle Lernumgebungen und Applets zwei Zugangsmöglichkeiten vorgesehen. Sie können sowohl alphabetisch nach Themengebieten als auch nach interessierender Jahrgangsstufe aufgerufen werden. Wichtig ist darüber hinaus eine Vernetzung zu anderen Seiten, die Ähnliches anbieten. Auf meiner Seite werden deshalb einschlägige Links angeboten. Mittelfristig soll daraus ein Wiki-System auf der Basis von MediaWiki (vgl. http://wikipedia.sourceforge.net/) werden, in das alle an Mathematikunterricht Interessierten ihre Lernumgebungen direkt einstellen können …

[166] Ein von mir erzeugtes DynaGeoX-Applet zu **Abb. 54** findet man im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → D → Dreiecksgrundformen.

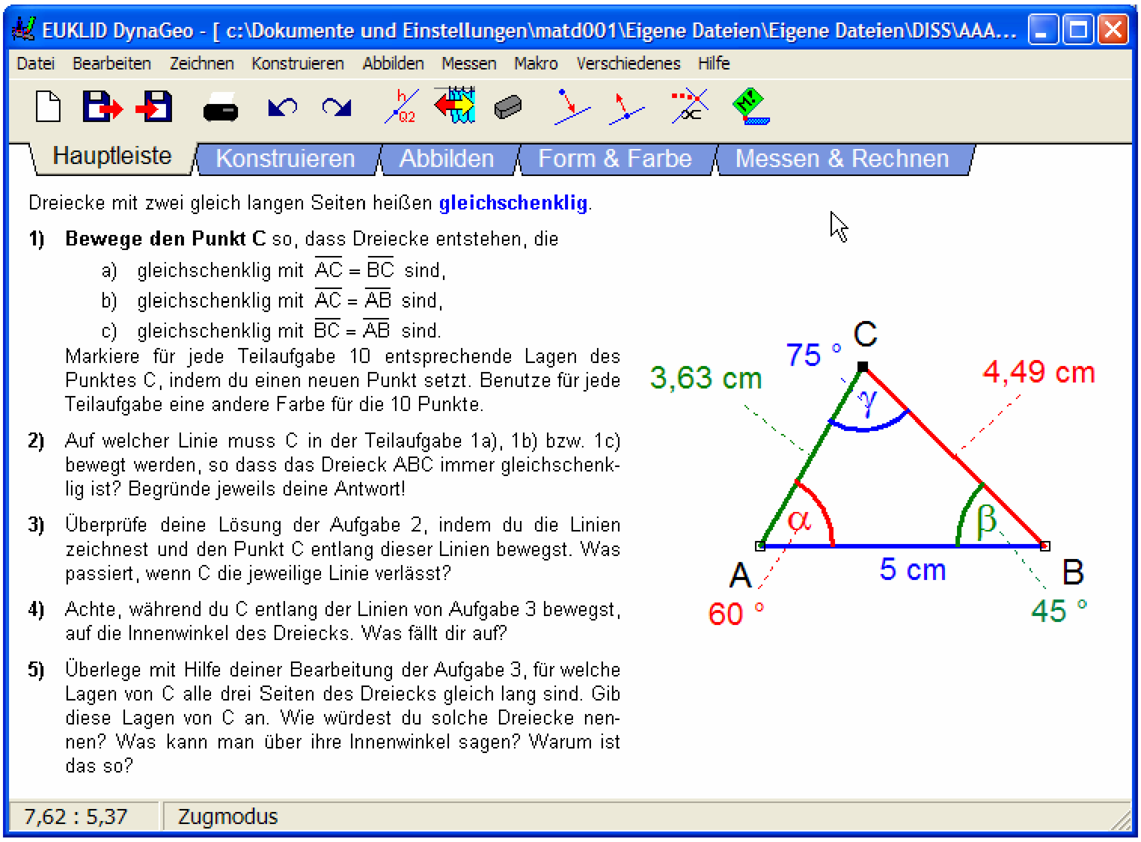


Abb. 54: Beispiel für eine veränderbare Teilkonfiguration.

Insgesamt muss darauf hingearbeitet werden, dass die Schülerinnen und Schüler sich beim Arbeiten mit dem Computer *intensiv mit* den beobachtbaren *Veränderungen und Invarianten auseinander setzen* und auch beginnen ihr *Vorgehen* (Welche Veränderungen sollten als nächstes mit welchem Ziel untersucht werden?) zu *planen*.[167] Neben den oben angesprochenen Hilfen zur *Aufmerksamkeitsfokussierung* wird versucht, die Auseinandersetzung mit den beobachteten Veränderungen dadurch zu intensivieren, dass Vorhersagen, Begründungen und Ergebnisfixierungen in Wort und Schrift eingefordert werden.[168] Darüber hinaus ist es notwendig, die Schülerinnen und Schüler durch regel-

[167] Geschieht dies nämlich nicht, besteht die Gefahr, dass der Computereinsatz die Entwicklung des Beweglichen Denkens nicht nur nicht unterstützt, sondern ggf. sogar kontraproduktiv wirkt, weil evtl. nur „wild mit der Maus gezogen wird", man nette Effekte auf dem Bildschirm betrachtet (Computerspiel!) und kein Denkvorgang einsetzt. Erleben die Schülerinnen und Schüler aber nicht, dass man mit Bewegungen argumentieren kann und sie das Verständnis unterstützen, so wird der Computereinsatz an dieser Stelle immer nur als „Spielerei" eingeordnet und der erwünschte Aufbau der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens findet nicht statt.

[168] Sprache spielt hier eine ambivalente Rolle. Einerseits kann das Verbalisieren von gedachten Bewegungen und deren Auswirkungen die Konzentration unterstützen und so eine intensivere Beschäftigung

mäßiges Aufgreifen und explizites Ansprechen *an heuristische Strategien bzw. Arbeitsstrategien* zu *gewöhnen*, die charakteristisch für das Arbeiten im Sinne des Beweglichen Denkens sind. Solche Strategien sind z. B.:

- in ein statisch formuliertes Phänomen eine Bewegung hineinsehen
- Bedingungen jeweils einzeln und kontrolliert variieren
- Veränderungen bewusst bis hin zu Extremlagen ausführen[169]

Im Folgenden werden verschiedene Einsatzweisen für eine DGS im Rahmen eines Unterrichts beschrieben, der das Bewegliche Denken der Schülerinnen und Schülern fördern will.

1) Eine DGS wird genutzt, um die *Idee einer Argumentation* zu *kommunizieren*, die Elemente des Beweglichen Denkens nutzt. Ich möchte dies anhand des Beweises zu folgendem Satz knapp erläutern:

Satz: Jeder Punkt *P*, der nicht auf der Achse *a* liegt, ist unterschiedlich weit von einem Punkt $A \notin a$ und dessen Bildpunkt *A'* bei Achsenspiegelung an der Achse *a* entfernt.[170]

Eine mit einer DGS[171] erzeugte Konfiguration[172] wird im Unterricht als dynamische Grundlage für ein Unterrichtsgespräch genutzt (vgl. **Abb. 55** bis **Abb. 57** auf Seite

---

mit dem betrachteten Phänomen zur Folge haben. Andererseits stellt es sich vielfach als schwierig heraus, wahrgenommene oder mental erzeugte Bewegungen bzw. Veränderungen in Worte zu fassen. Im Extremfall ist es denkbar, dass einzelne Schülerinnen und Schüler durchaus in der Lage sind, mental mit Bewegungen zu operieren, dies aber auf Grund mangelnder sprachlicher Fähigkeit nicht ausdrücken können. Eine Möglichkeit des Umgangs damit kann sein, sprachliche Fixierungen einzufordern, aber mit einer sich im Einzelfall evtl. nur sehr langsam entwickelnden Fähigkeit zur sprachlichen Umsetzung von beweglichen Argumenten zu rechnen.

[169] vgl. Abschnitt 2.2 Problemlösen und Bewegliches Denken ab Seite 94

[170] Ein formaler Beweis dieses Satzes könnte wie folgt lauten:
Liegt ein Punkt *P* nicht auf der Symmetrieachse, dann schneidet entweder [*AP*] oder [*A'P*] die Achse *a* im Punkt *S*. Ich betrachte o. B. d. A. den Fall $\{S\} = [PA'] \cap a$. Wegen $S \in a$ folgt $\overline{AS} = \overline{A'S}$. Also gilt:

$$\overline{PA'} = \overline{PS} + \overline{SA'} = \overline{PS} + \overline{SA} \underset{\text{im Dreieck } \Delta ASP}{\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{>}} \overline{PA}\,.\ \#$$

[171] Ich habe mich für die DGS EUKLID DynaGeo entschieden, weil es an bayerischen Gymnasien fast flächendeckend in einer Schulversion vorhanden und am weitesten verbreitet ist. Darüber hinaus ermöglicht EUKLID DynaGeo, im Gegensatz etwa zur DGS „Cinderella“, Punkte über ihre Koordinaten auch in Form von Termen einzugeben. Dies ermöglicht die Umsetzung mancher Visualisierungsideen, die sonst nicht möglich wären.

[172] Hier besteht die Konfiguration aus den Punkten *P*, *A*, *A'*, der Symmetrieachse *a* sowie den Strecken [*AP*] und [*A'P*], die die Abstände zwischen *P* und *A* bzw. zwischen *P* und *A'* markieren.

125). Dabei werden bewusst Fokussierungshilfen verwendet[173] und im Unterrichtsgespräch wird herausgearbeitet, welchen Vorteil die Vorstellung der Bewegung für die Argumentation bietet. Bereits die einfache Strategie, zunächst Grenzlagen zu erzeugen und wieder zu verlassen, führt auf die entscheidende Idee. Bewegt man nämlich *P* von *a* weg, so stellt man fest, dass abhängig von der Bewegungsrichtung eine der beiden Strecken [*AP*] oder [*A'P*] die Achse *a* im Punkt *S* schneidet. Als Achsenpunkt ist er von *A* und *A'* gleich weit entfernt. Die Strecke [*A'P*] in **Abb. 55** lässt sich also aus den Seiten [*AS*] und [*SP*] des Dreiecks *ΔASP* zusammensetzen. Die Summe dieser beiden Streckenlängen ist größer als [*AP*] (Dreiecksungleichung). Damit ist aber der Satz bereits bewiesen, weil das dynamische Argument sofort ergibt, dass *jede* Bewegung von *P* von der Achse *a* weg einen Schnittpunkt S erzeugt.

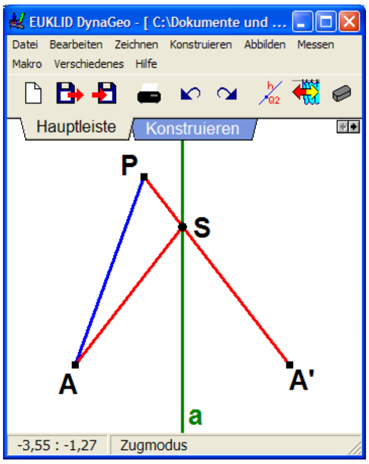


Abb. 55: Bewegliche Beweiskonfiguration (Situation 1)

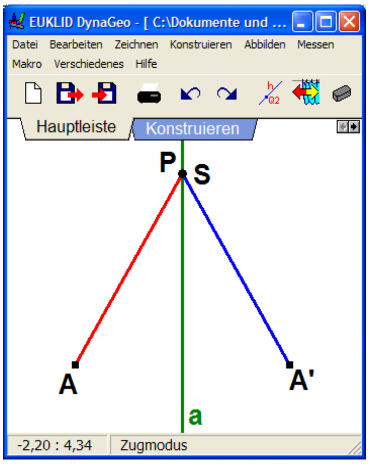


Abb. 56: Bewegliche Beweiskonfiguration (Situation 2)

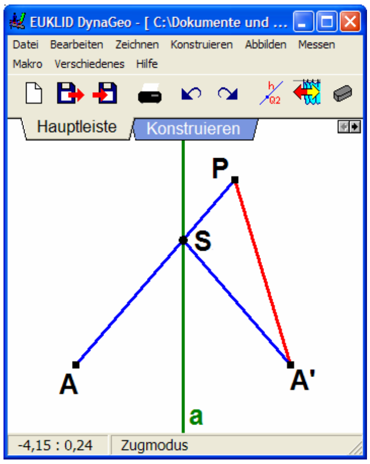


Abb. 57: Bewegliche Beweiskonfiguration (Situation 3)

2) **Abb. 55** bis **Abb. 57** auf Seite 125 können noch in einer anderen Weise als oben gedeutet werden: Mit einer DGS erzeugte dynamische Konfigurationen können bei Beweisen dazu eingesetzt werden, die gesamte *Beweisidee* zu *vermitteln*, sie also „auf einen Blick" erfass- und verstehbar zu machen. Wenn man sich vor Augen hält, wie schwierig es oft für Lernende (nicht nur in der Schule!) ist, eine Beweisidee (d. h. den „roten Faden" des Beweisganges) zu erfassen, wird deutlich, welches Potenzial das Bewegliche Denken und (mit einer DGS erzeugte) dynamische Konfigu-

[173] Im vorliegenden Fall dienen die unterschiedliche Färbung der Strecken [*AP*] und [*A'P*] sowie das

rationen hier eröffnen. Ein anderes Beispiel für eine über Bewegungen eingefangene und dem Verständnis zugänglich gemachte Beweisidee ist in **Abb. 52** auf Seite 118 für einen Beweis des Satzes des Pythagoras angedeutet.[174] Die Umsetzung solcher dynamischer Konfigurationen erfordert einigen konzeptionellen Aufwand, der sich auch nur bei hinreichender Erfahrung mit einer DGS umsetzen lässt.

3) Mit einer DGS konstruierte Konfigurationen können dynamische, weil variierbare und damit in ihrem Umfang und in ihren Grenzen besser erfassbare *Verständnisgrundlagen für Begriffe und ihre Eigenschaften* sein. **Abb. 58** zeigt dies exemplarisch für die Winkeltypen und die zugehörigen Winkelsätze an Parallelenkreuzungen.[175] Zu beachten ist dabei, dass diese dynamischen Verständnisgrundlagen den Schülerinnen und Schülern erst *nach* einer Erarbeitungsphase (im Sinne von Postorganizern nach AUSUBEL) zur Verfügung gestellt werden.[176]

Einzeichnen des Schnittpunktes S von $[AP]$ bzw. $[A'P]$ und a als Fokussierungshilfen.

[174] Von mir erzeugte DynaGeoX-Applets zu weiteren derartig dargestellten Beweisen für den Satz des Pythagoras finden sich im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → P → Pythagoras.

[175] Das zugehörige von mir erzeugte DynaGeoX-Applet findet man im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → W → Winkelverschiebung → Merkfiguren. Die einzelnen Konfigurationen können jeweils an den markierten Punkten frei variiert werden.

[176] Zur Erarbeitung der Eigenschaften vgl. Punkt 4)!

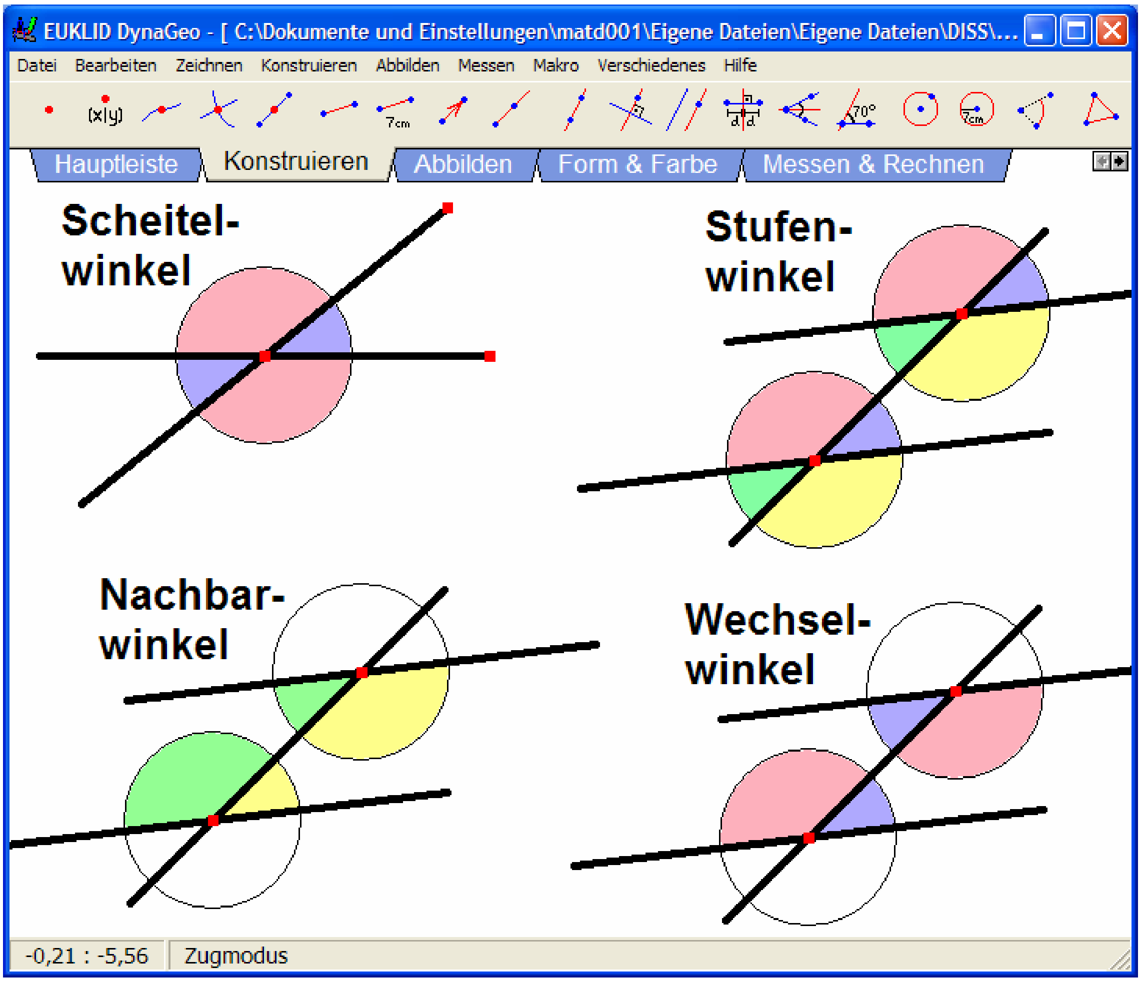


Abb. 58: Dynamische Verständnisgrundlagen für die Winkeltypen und die zugehörigen Winkelsätze an Parallelenkreuzungen

4) Mit DGS kann man im Hinblick auf Bewegliches Denken *experimentell arbeiten*.

- Auf diese Weise können *Zusammenhänge entdeckt* werden. Dies erfolgt mit Hilfe von DGS-Dateien, die die zu erarbeitenden Beziehungen **nicht** bereits durch die Farbgebung nahe legen (vgl. **Abb. 59**)! Wichtig ist dabei, von Anfang an sehr viel Wert auf Begründungen von entdeckten Zusammenhängen zu legen. Ein weiteres Beispiel zeigt **Abb. 60**. Mit der dort wiedergegebenen Datei kann eine dynamische Exploration der schiefen Achsenspiegelung erfolgen, die den Schülerinnen und Schülern die Entdeckung ermöglichen soll, dass der rechte Winkel zwischen der Verbindungsstrecke von Punkt und Bildpunkt und der Symmetrieachse bei der Achsenspiegelung für deren besondere Eigenschaften (z. B. Längen- und Winkeltreue) wesentlich ist.

- Auch das *Finden von Ideen im Problemlöseprozess* geschieht im Rahmen eines experimentellen Arbeitens. Zur Illustration sei auf das Beispiel in Abschnitt 2.2 verwiesen, das in **Abb. 37** bis **Abb. 41** auf den Seiten 96 bis 98 wiedergegeben ist.[177]

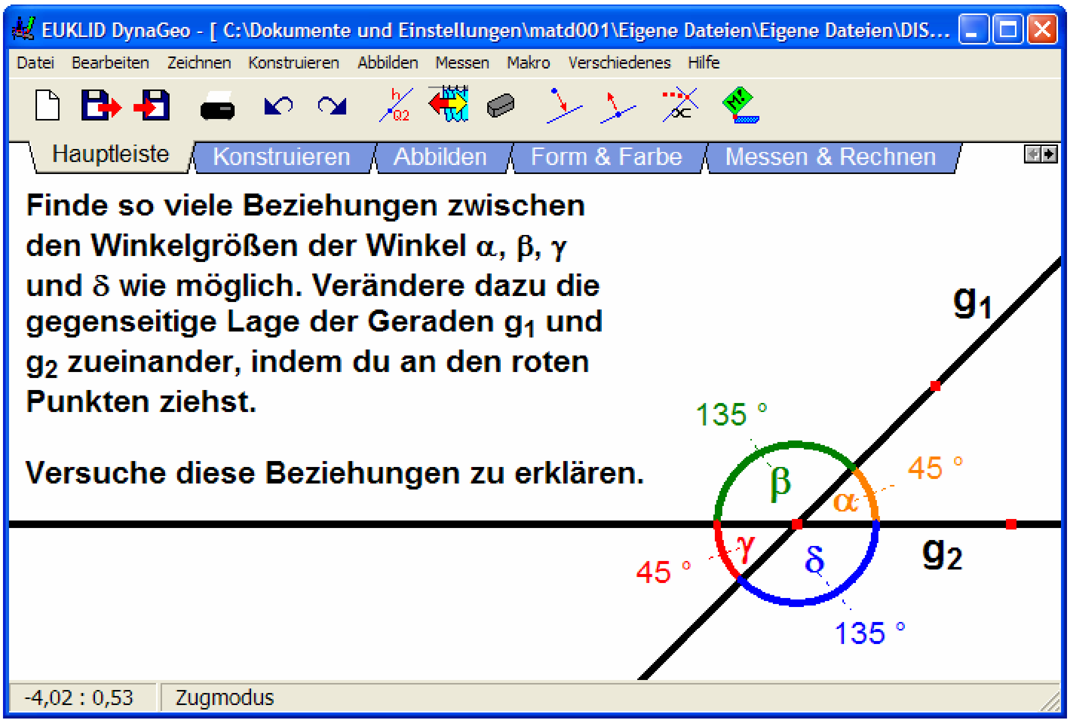


Abb. 59: Konfiguration zur Erarbeitung der Eigenschaften von Scheitel- und Nebenwinkeln.

[177] Ein von mir erzeugtes DynaGeoX-Applet zu diesem Problem findet man im Internet unter der Adresse: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → K → Knobelaufgabe.

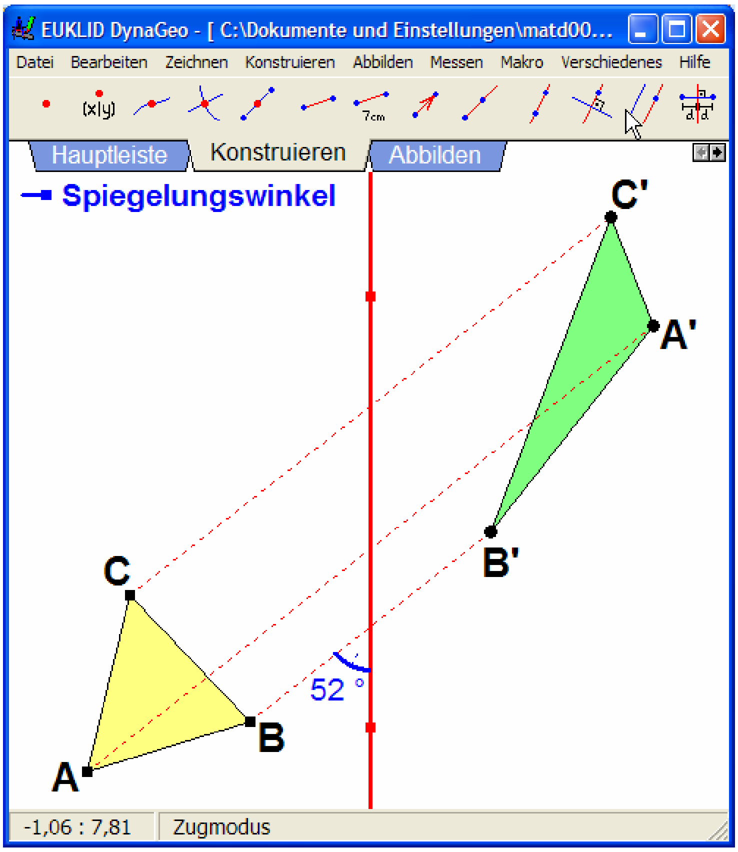


Abb. 60: Vorstrukturierte Konfiguration zur Auseinandersetzung mit der Besonderheit des rechten Winkels bei der Achsenspiegelung

5) Ein wesentlicher Aspekt des Einsatzes dynamischer Visualisierungen liegt in der *Reflexion von Problemlöseprozessen, in denen ohne (Computer-)Werkzeug gearbeitet wird* und bei denen Heuristiken und Fähigkeiten des Beweglichen Denkens eingesetzt werden.[178] Dabei werden die Schülerinnen und Schüler mit Problemen konfrontiert und erhalten als Werkzeuge nur Papier und Bleistift. Beim anschließenden Computereinsatz stehen drei Gesichtspunkte im Mittelpunkt, nämlich

- die Kontrolle der Richtigkeit der dynamischen Argumentation,
- die Kommunikation von Gedankengängen und Ergebnissen und
- die Reflexion über eingesetzte heuristische Strategien und deren Verallgemeinerbarkeit.

[178] Zum Einstieg eignen sich hier besonders solche Probleme, die Bewegliches Denken provozieren. Beispiele für derartige Aufgaben finden sich im Anhang ab Seite 233. Zwei dieser Aufgaben mit entsprechenden von mir erzeugten DynaGeoX-Applets für die Reflexionsphase findet man im Internet unter

Liest man die vorstehende Liste von Einsatzmöglichkeiten für eine DGS im Rahmen eines auf Bewegliches Denken ausgerichteten Mathematikunterrichts, so wird deutlich, dass (fast) bei jedem Punkt graduelle „Feineinstellungen“ insbesondere im Hinblick auf Fokussierungshilfen möglich und nötig sind. Dies liegt darin begründet, dass der Einsatz von DGS (nicht nur) im Zusammenhang mit Beweglichem Denken zwei unabhängige Dimensionen besitzt, nämlich die „Inhaltsdimension“, die das Ziel des DGS-Einsatzes betrifft und die „Unterstützungsdimension“, die den Grad der Fokussierungshilfen umfasst. In **Tabelle 6** auf Seite 131 wird für jeden Verwendungszweck durch einen „Haken“ ✓ gekennzeichnet, welcher Grad der Fokussierungshilfen jeweils angemessen sein kann.[179] Die in Klammern gesetzten „Haken“ (✓) in der Spalte „Leere, unstrukturierte DGS-Datei“ bedeuten, dass hier geeignete Dateien zwar von fortgeschrittenen Schülerinnen und Schülern selbst erstellt werden können, der Einsatz im Hinblick auf das Inhaltsziel aber einen anderen Grad der Fokussierungshilfe erforderlich macht.

http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → A → Änderungsverhalten → Beispiel 1 bzw. Beispiel 2.

[179] Welcher Grad der Fokussierungshilfe jeweils konkret gewählt wird, hängt insbesondere davon ab, wie stark die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens bei den Schülerinnen und Schülern bereits ausgeprägt sind.

▼ Ziel des DGS-Einsatzes	► Grad der Fokussierungshilfen		
	Fertig vorgegebene Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)	Veränderbare Konfiguration mit einzelnen Fokussierungshilfen	Leere, unstrukturierte DGS-Datei
Bewegliche Argumentation kommunizieren	✓		(✓)
Beweisideen vermitteln	✓		(✓)
Verständnisgrundlagen für Begriffe und ihre Eigenschaften	✓	✓	(✓)
Experimentelles Arbeiten • Entdecken von Zusammenhängen	✓	✓	✓
Experimentelles Arbeiten • Finden von Ideen im Problemlöseprozess		✓	✓
Reflexion von Problemlöseprozessen	✓		✓

Tabelle 6: Einsatzmöglichkeiten von DGS

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit habe ich auf der Grundlage der in **Tabelle 6** dargestellten Übersicht zu den Einsatzmöglichkeiten von DGS über hundert EUKLID DynaGeo-Dateien entwickelt, die den verschiedenen Anforderungen Rechnung tragen.[180]

2.6 Forschungsfragen

Im vorliegenden Kapitel wurde die Frage diskutiert, welche Rolle das Bewegliche Denken im Mathematikunterricht spielen kann. Daraus ergeben sich Forschungsfragen, die sich um die folgenden drei Themen gruppieren:

[180] Es handelt sich dabei ausnahmslos um Dateien, die den ersten beiden Spalten der Fokussierungshilfe zuzuordnen sind und entsprechenden konzeptionellen sowie umsetzungstechnischen Aufwand erforderten.

- Entwicklung des Beweglichen Denkens
- Transfer des Beweglichen Denkens auf andere Inhalte bzw. Kompetenzstufen
- Auswirkungen auf die Einstellung der Lehrerinnen und Lehrer

Das Unterrichtskonzept für den Geometrieunterricht der 7. Klasse, das im nächsten Kapitel vorgestellt wird, versucht die Entwicklung des Beweglichen Denkens und der damit verbundenen Kompetenzen durch das gezielte Eingehen auf diese Denkweise in allen aufgezeigten Kontexten zu fördern. Zentrale Forschungsfragen beziehen sich deshalb auf die

Entwicklung des Beweglichen Denkens

1. Wirkt sich das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Unterrichtskonzept positiv auf die Entwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens aus?

Diese Frage lässt sich noch präzisieren, wenn man sie unter dem Aspekt der bereits vor der Untersuchung vorhandenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler im Bereich des Beweglichen Denkens bzw. ihrer grundsätzlichen intellektuellen Fähigkeiten betrachtet.

2. Ist die Steigerung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens infolge des Unterrichts abhängig davon, wie stark die Kompetenzen des Beweglichen Denkens bereits vor dem Unterricht ausgeprägt waren?

3. Ist das Bewegliche Denken bei überdurchschnittlich intelligenten Kindern stärker ausgeprägt? Ist die Leistungssteigerung solcher Schülerinnen und Schüler beim Beweglichen Denken bei entsprechendem Unterricht größer als bei anderen Kindern?

Transfer des Beweglichen Denkens auf andere Inhalte bzw. Kompetenzstufen

Ein weiterer Gesichtspunkt ist die Frage nach der Fähigkeit, Bewegliches Denken auf neue Inhaltsbereiche anzuwenden.

4. Wirkt sich ein Unterricht, der nur in Geometrie stattfindet auch auf die Lösungswahrscheinlichkeit von Fragestellungen zum Beweglichen Denken aus, die der Algebra zuzuordnen sind?

Ein Unterricht, der einen klaren Schwerpunkt in einem bestimmten Bereich setzt und hier auch Zeit investiert, birgt prinzipiell die Gefahr, dass Inhaltsziele des Lehrplans die außerhalb des Forschungsinteresses liegen evtl. vernachlässigt werden.

5. Erbringen Schülerinnen und Schüler, die im Hinblick auf das Bewegliche Denken unterrichtet wurden, bei Aufgaben, die *nicht* mit Hilfe des Bewegli-

chen Denkens zu lösen sind, vergleichbare Leistungen wie Schülerinnen und Schüler, die nicht mit dieser Intention unterrichtet wurden?

Bereits weiter oben wurde deutlich, dass die Entwicklung einer Denkweise ein langwieriger, wohl lebenslanger Prozess ist. Der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Unterricht steht am Anfang dieses Prozesses und muss deshalb zunächst Grundlagen erarbeiten. Das Unterrichtskonzept zielt daher primär auf die Entwicklung der beiden ersten Kompetenzen des Beweglichen Denkens. Damit stellt sich folgende Frage:

6. Inwieweit sind die Schülerinnen und Schüler nach einem Unterricht, der primär die ersten beiden Kompetenzstufen des Bewegliches Denkens fordert und fördert, in der Lage auch das Änderungsverhalten zu erfassen und zu beschreiben?

Auswirkungen auf die Einstellung der Lehrerinnen und Lehrer

Lehrerinnen und Lehrer initiieren und bestimmen die Verankerung der Idee des Beweglichen Denkens im Unterricht. Damit rückt aber ihre Einstellung zum hier propagierten Unterrichtskonzept in den Fokus des Interesses.

7. Wie erleben die unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrer den Unterricht zur Entwicklung und Nutzung des Beweglichen Denkens? Halten sie ihn subjektiv für erfolgreich?

8. Nehmen die unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrer selbst die Idee des Beweglichen Denkens auf, werden sie zur Entwicklung eigener Unterrichtsideen angeregt und halten sie es für sinnvoll, auch in anderen Klassen nach diesem Konzept zu arbeiten?

3 Versuchsplanung

Im letzten Kapitel wurden die Chancen umrissen, die das Bewegliche Denken im Mathematikunterricht eröffnet. Im vorliegenden Kapitel wird die Planung der empirischen Untersuchung dieser Arbeit beschrieben, die auf einem einjährigen Unterrichtsversuch in fünf 7. Klassen bayerischer Gymnasien basiert. In diesen Klassen wurde der gesamte Geometrieunterricht unter dem Blickwinkel der Entwicklung und Nutzung des Beweglichen Denkens durchgeführt.

3.1 Unterrichtskonzept für den Geometrieunterricht in Klasse 7

Die Entwicklung des Unterrichtskonzepts wurde von Erfahrungen geleitet, die in mehreren Voruntersuchungen gesammelt wurden. Hierbei handelte es sich jeweils um einzelne Unterrichtssequenzen von bis zu sechs Stunden Dauer, die im Rahmen des üblichen Klassenunterrichts durchgeführt wurden. Im nächsten Abschnitt werden Resultate dieser Voruntersuchungen kurz zusammengefasst.

3.1.1 Zusammenfassung der Resultate der Voruntersuchungen

Das Ziel der Voruntersuchungen war es, einzelne Einflussfaktoren auf einen Unterricht am Übergang zwischen der gymnasialen Unter- und Mittelstufe zu untersuchen, der auf die *Entwicklung des Beweglichen Denkens* ausgerichtet ist. Im Fokus des Interesses standen dabei folgende Fragen:

- Sind *kurzfristig*, d. h. innerhalb weniger Unterrichtsstunden, Erfolge erzielbar?
- Eignen sich *Unterrichtsinhalte* aus der Algebra oder aus der Geometrie besser?
- Wie muss ein sinnvoller *Computereinsatz* aussehen?
- Welche *Unterrichtsformen* eignen sich besonders und wann sollte evtl. ein Wechsel der Unterrichtsform stattfinden?
- Reichen die *sprachlichen Fähigkeiten* der Schülerinnen und Schüler aus, über Bewegungen und Veränderungen geeignet kommunizieren zu können?

Um erste Antworten auf diese Fragen zu erhalten, wurden einzelne Bedingungen (z. B. die Gestaltung der computergestützten Lernumgebung, die Art und Dauer der Unterrichtsform, der Unterrichtsinhalt) variiert und die Auswirkungen untersucht. Dazu wurden Unterrichtsbeobachtungen (Teilweise mit Videoaufzeichnungen) durchgeführt und einzelne Schülerinnen und Schüler interviewt. Darüber hinaus haben alle an den Unterrichtsversuchen beteiligten Schülerinnen und Schüler vor und nach dem entsprechenden Unterricht denselben Fragebogen[181] bearbeitet. Einen Überblick über die Vorversuche gibt **Tabelle 7**.

Schul-jahr	Bayerisches Gymnasium	Lehrer	Klasse	Inhalte	Umfang (Stunden á 45 min)
2001/02	A	V	7d	Terme *dynamisch*[182]	5
2001/02	B	1	7e	Terme *dynamisch*[182]	6
2001/02	C	2/V	7a	Terme *dynamisch*[182]	6
2001/02	C	3	7b	Terme *dynamisch*[182]	4
2001/02	C	3	8c	Terme *dynamisch*[182]	7
2001/02	D	4/V	7c	Terme *dynamisch*[182] Winkel an Geradenkreuzungen Winkel an Dreiecken Figurensymmetrie Kongruenzsätze	4 3 7 7 3

Tabelle 7: Überblick über die an den *Voruntersuchungen* beteiligten Klassen: Aus der Kodierung ist ersichtlich, dass vier bayerische Gymnasien, fünf 7. sowie eine 8. Klasse beteiligt waren und vier Lehrerinnen und Lehrer sowie der Versuchsleiter (V), also der Autor, den Unterricht gehalten haben.

Eine ausführliche Darstellung dieser umfangreichen Voruntersuchungen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Hier werden deshalb nur einzelne Ergebnisse zusammengefasst, die bei der Entwicklung des dieser Arbeit zu Grunde liegenden Unterrichtskonzepts leitend waren. Dies sind im Einzelnen:

---

[181] Auf diesen Fragebogen gehe ich im Abschnitt 3.3 näher ein. Er besteht aus Items, zu deren Beantwortung Fähigkeiten des Beweglichen Denkens benötigt werden.

[182] Die hier eingesetzte Lernumgebung „Terme *dynamisch*“ kann im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → Veröffentlichungen → „Terme *dynamisch*“ heruntergeladen werden.

- Ein nur wenige Stunden umfassendes Konzept führt zu keiner – anhand der Bearbeitung des Fragebogens – erkennbaren Weiterentwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens.[183] Dies hat mich in meiner Annahme bestätigt, dass die Entwicklung des Beweglichen Denkens ein langwieriger Prozess ist. Auf Grund dieser Erfahrungen wurde das Unterrichtskonzept auf ein ganzes Schuljahr ausgeweitet.
- Unterrichtsinhalte der Geometrie eignen sich besser zur Anbahnung des Beweglichen Denkens, weil Veränderungen, die auf Bewegungen (in der Ebene) beruhen, für die Schülerinnen und Schüler leichter vorstellbar und auch visuell leichter zugänglich sind als etwa in der Algebra, z. B. beim Untersuchen des Änderungsverhaltens von Termen, da hier ein höherer Abstraktionsgrad notwendig ist.
- Den untersuchten Schülerinnen und Schülern fiel es schwer, sich auf Lernumgebungen einzulassen, in denen sie mehrere Unterrichtstunden hintereinander selbstständig arbeiten sollten.[184] Es hat sich als günstig erwiesen, in solche Arbeitsphasen regelmäßig Unterrichtsgespräche einzubauen, in denen Ergebnisse zusammengetragen, gemeinsam kritisch hinterfragt und schließlich festgehalten wurden.
- Schülerinnen und Schülern fällt es oft schwer, Veränderungen adäquat zu beschreiben. Falls ihnen Computerprogramme zur Verfügung stehen, die es auf einfache Weise erlauben die Veränderungen zu visualisieren, so nutzen sie diese, um durch Zeigen auf den Bildschirm ihre Aussagen zu unterstützen. Meine Folgerung daraus ist zweigeteilt. Beim Sprechen über eine

[183] Dieses Ergebnis deckt sich mit Erfahrungen aus anderen Untersuchungen. Im Zusammenhang mit gezieltem Training im Hinblick auf die Stärkung der schwächeren Dimension des Denkens (z. B. des funktionalen Denkens im Sinne SCHWANKS bei Personen, die eigentlich eher prädikativ denken) warnt SCHWANK (1996, S. 178) auf Grund eigener Erfahrungen vor allzu großen Erwartungen. Sie zitiert in diesem Zusammenhang STERNBERG, der im Hinblick auf gezielte Schulungen von Denkfähigkeiten (thinking skills) konstatiert, dass kurzfristige Fördermaßnamen überhaupt nicht greifen. „Erfolge“ solcher Maßnahmen fördern in seinen Augen in keiner Weise die Denkfähigkeit, sondern laufen auf ein Training im Hinblick auf spezifische Testformate hinaus. STERNBERG plädiert vehement für eine mindestens einjährige Schulung, wenn man überhaupt nennenswerte Verbesserungen von Denkfähigkeiten erzielen möchte.

[184] Dies dürfte im Wesentlichen darauf zurückzuführen sein, dass diese Arbeitsform für alle an der Voruntersuchung beteiligten Schülerinnen und Schüler eine völlig neue Erfahrung war.

> Problemstellung oder einen Lösungsansatz kann es sehr hilfreich sein, die notwendigen Bewegungen bzw. Veränderungen auch realisieren[185] zu können. Da meiner Überzeugung nach zur Entwicklung des Beweglichen Denkens auch die Fähigkeit gehört, sich Veränderungen nicht nur vorstellen, sondern sie auch beschreiben zu können, ist es zwingend notwendig, entsprechende Probleme auch ohne Werkzeug, also im Kopf bzw. mit Hilfe von Papier und Bleistift zu lösen.

Da mein Konzept an bayerischen Gymnasien erprobt werden sollte, musste eine inhaltliche Orientierung am bayerischen Gymnasiallehrplan erfolgen, der in der 7. Jahrgangsstufe folgende Inhalte für die Geometrie vorsieht:

> „1 Grundbegriffe der ebenen Geometrie; geometrisches Zeichnen (…)
> 2 Winkel an Geradenkreuzungen; Winkel bei Dreiecken und Vierecken (…)
> 3 Symmetrie und Kongruenz von Figuren (…)
> 4 Dreiecke: Transversalen, besondere Dreiecke, Konstruktionen“
> KULTUSMINISTERIUM BY (1991), S. 1200-1203

Im Rahmen dieses Kapitels kann nicht auf alle Einzelheiten des Unterrichtskonzepts eingegangen werden. Ich stelle deshalb im Folgenden zunächst die Grundideen vor und illustriere sie anschließend an einzelnen Beispielen.

3.1.2 Grundideen des Unterrichtskonzepts

Ausgangspunkt des Unterrichtskonzepts ist die Überzeugung, dass ein Individuum sich nur dann Wissen aneignet und Fähigkeiten erwirbt, wenn es sich intensiv und selbsttätig damit auseinander setzt. Darüber hinaus deuten die oben erwähnten Unterrichtsversuche aber auch darauf hin, dass die meisten Schülerinnen und Schüler sich zunächst mit einer Vorgehensweise vertraut machen müssen, bevor sie selbstständig damit (weiter-)arbeiten können. Infolgedessen setzt das Unterrichtskonzept dieser Arbeit auf einen gestuften Aufbau. Diese Stufung bezieht sich auf

- den Grad der Fokussierungshilfe und
- die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens.

---

[185] Die Realisierung kann an einem Modell oder durch dynamische Visualisierung erfolgen.

Grundlegend für das Bewegliche Denken ist die Fähigkeit, mit Bewegungen bzw. Veränderungen argumentieren zu können. Das Unterrichtskonzept trägt dem Rechnung, indem zunächst Probleme betrachtet werden, die im Wesentlichen ohne „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ und „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“ gelöst werden können. Erst nachdem im Inhaltsbereich „Winkel an Geradenkreuzungen; Winkel bei Dreiecken und Vierecken“[186] längere Zeit auf diesem Niveau des Beweglichen Denkens gearbeitet wurde, werden die Schülerinnen und Schüler gelegentlich und schließlich häufiger auch mit Fragestellungen konfrontiert, zu deren Bearbeitung zusätzlich die Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ benötigt wird. Erst ganz am Ende des Schuljahres, wenn die Schülerinnen und Schüler bereits mit Bewegungen vertraut sind, bearbeiten sie in Gruppenarbeit Probleme, die die dritte Fähigkeit des Beweglichen Denkens, nämlich „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“, erfordern.

Als Hilfsmittel werden hauptsächlich von mir auf der Basis der dynamischen Geometriesoftware EUKLID DynaGeo entwickelte Lernumgebungen benutzt. Die Entscheidung für diese Software wurde getroffen, weil

- damit Bewegungen sehr leicht realisiert werden können (Zugmodus und Animation),
- sie im Gegensatz zu anderen Medien (z. B. Filme, Modelle u. ä.) eine sehr flexible Gestaltung von Visualisierungshilfen ermöglicht,[187]
- sie für Schülerinnen und Schüler weitgehend intuitiv zu bedienen ist.

EUKLID DynaGeo-Dateien werden dabei im Wesentlichen auf zwei Weisen genutzt:

- Zum einen dienen sie als Experimentierumgebung mit unterschiedlich ausgeprägten Fokussierungshilfen, an denen die Schülerinnen und Schüler Entdeckungen machen, aufgestellte Vermutungen falsifizieren bzw. diese stützen und schließlich auf dieser Basis Begründungen erarbeiten.
- Zum anderen wird zunächst im Kopf bzw. mit Papier und Bleistift nach einer Lösung einer Problemstellung gesucht. Zur Kontrolle bzw. zur Kommunikation

[186] KULTUSMINISTERIUM BY (1991), S. 1201

der Argumentation oder als dynamische Verständnisgrundlagen werden anschließend von mir zu diesem Zweck eigens entwickelte EUKLID DynaGeo-Dateien verwendet.

3.1.3 Beispiel: Winkelverschiebung

Zu Beginn eines Unterrichts, der auf das Bewegliche Denken ausgerichtet ist, müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Erfahrung machen, dass man mit Bewegungen argumentieren kann und dass solche Argumente auch Gewinn bringend sein können. In der 7. Jahrgangsstufe ist die Argumentation mit der „Winkelverschiebung“ dazu gut geeignet, weil im ganzen Inhaltsbereich „Winkel an Geradenkreuzungen; Winkel bei Dreiecken und Vierecken“[188] mit der „Winkelverschiebung“ argumentiert werden kann. Diese Vorstellung einer Bewegung kann damit als Verständnisgrundlage für eine ganze Gruppe von Sätzen dienen. Die Argumentation stützt sich dabei auf folgende „Erfahrungstatsache“[189]:

> *Eigenschaft der Winkelverschiebung:*
> Wird ein Winkel entlang eines seiner Schenkel verschoben, so bleibt der andere Schenkel dabei parallel zum Schenkel in seiner Ausgangslage.

Die Winkelverschiebung in diesem Sinn findet sich bereits bei WAGENSCHEIN (1969), der (von einem anderen Zusammenhang ausgehend, letztlich aber) die Vorgehensweise beim „Beweis“ der Innenwinkelsumme im Dreieck kritisiert, bei dem zwei Ecken des (ausgeschnittenen) Dreiecks abgerissen und zur dritten Ecke dazugelegt werden.

> „Man kann dem Dreieck, aus Papier geschnitten, die zwei engeren Ecken abreißen und in die dritte Ecke hineinlegen: es stimmt immer. Aber (…) das gibt keine Einsicht. Man weiß nicht, warum. (…) Die Einsicht gelingt, wenn man nicht zerreißt, sondern das eine zum andern sich hinfinden läßt, indem man die Winkel verschiebt: Wenn man nämlich den einen Winkel, α, längs

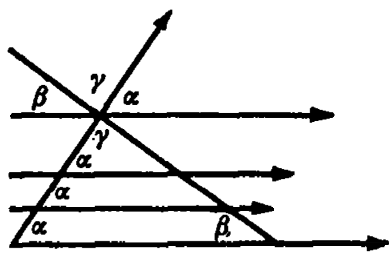


Fig. 4

[187] Trotz der vielfältigen Möglichkeiten, die die Software bietet, müssen zur Konzeption und Umsetzung von Visualisierungshilfen Erfahrung im Umgang mit der Software sowie eine ganze Reihe von (neuen) didaktischen Ideen eingebracht werden.
[188] KULTUSMINISTERIUM BY (1991), S. 1201
[189] Dies ist die ursprüngliche Bedeutung des Begriffs Axiom!

> der einen Seite bis zur nächsten Ecke fortgleiten läßt, und zwar so, daß der eine seiner Schenkel auf dieser Seite sich mit ihr deckend, gleitet. Der andere bleibt dann immer zu sich selbst parallel, er weist immer in dieselbe Richtung, die er auch anfangs hatte (Figur 4). Macht man das Entsprechende mit β und erkennt ferner γ in seinem Gegenüber wieder, so ist man schon fertig. (…) Man hat im Vorbeigehen den allgemeinen Satz von der Winkelsumme im Dreieck gefunden: immer geben die drei Winkel zusammen zwei rechte."[190] WAGENSCHEIN (1969), S. 27f

Die Begründung der Innenwinkelsumme im Unterrichtskonzept dieser Arbeit erfolgt im Wesentlichen wie bei WAGENSCHEIN. Die Argumentation wird allerdings dadurch unterstützt, dass die in einer gemeinsamen Erarbeitungsphase im Unterrichtsgespräch entwickelten Ideen anhand einer an die Wand projizierten EUKLID DynaGeo-Datei[191] dynamisch visualisiert werden. Diese Datei wurde so konzipiert, dass jede Winkelverschiebung eines der Innenwinkel des Dreiecks entlang eines beliebigen Schenkels über einen entsprechenden Schieberegler realisiert werden kann. Auch die für die Argumentation erforderlichen Scheitelwinkel lassen sich per Schieberegler bei Bedarf einblenden.[192] Nur so ist es möglich, flexibel auf die Ideen der Schülerinnen und Schüler einzugehen. In der Bildfolge in **Abb. 61** ist die Vorgehensweise für den Fall skizziert, dass die Schülerinnen und Schüler die Winkel beim Eckpunkt *C* zusammenbringen wollen.

---

[190] Sowohl WAGENSCHEIN als auch mir ist bewusst, dass man hier für einen (vollständigen) Beweis noch das Parallelenaxiom benötigt. Ich bin aber (mit WAGENSCHEIN) der Überzeugung, dass diese Jahrgangsstufe nicht der richtige Ort ist, um dieses Problem zu thematisieren. Die Aussage des Parallelenaxioms darf hier (vorerst) als „offensichtlich" stehen bleiben. Im Gegensatz zu WAGENSCHEIN haben meine Erfahrungen mit neun 7. Klassen aber gezeigt, dass es auch schon in dieser Jahrgangsstufe möglich ist, im Kontrast zu den Gegebenheiten auf der Kugel (großer Wasserball) aufzuzeigen, dass die oben genannte Eigenschaft der Winkelverschiebung eine Besonderheit der euklidischen Geometrie der Ebene ist. (Bei einem aus Papier geschnittenen Winkel, der auf dem Wasserball entlang eines seiner Schenkel verschoben wird, bleibt der zweite Schenkel erkennbar *nicht* parallel zu seiner Ausgangslage.) Die Konsequenz daraus, dass damit auf der Kugel der Satz von der Innenwinkelsumme im (ebenen) Dreieck nicht mehr gilt, ist für viele Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufe zumindest bemerkenswert.

[191] Die genannte Datei findet man als DynaGeoX-Applet des Autors im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → I → Innenwinkelsumme im Dreieck.

[192] Vor dem Unterricht wurde der Name „Scheitelwinkel" am entsprechenden Schieberegler versteckt.

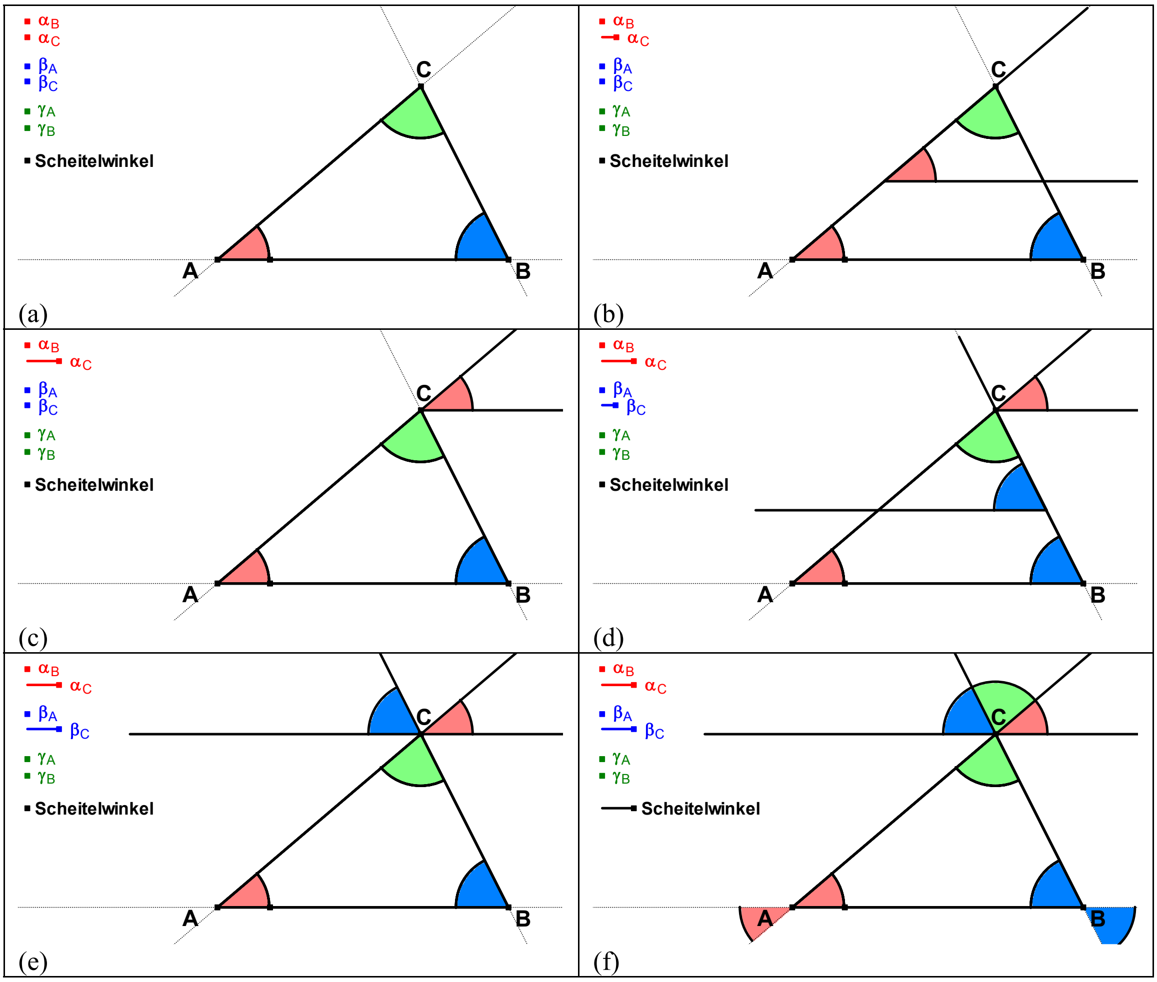


Abb. 61: Begründung für die Innenwinkelsumme im Dreieck mit Hilfe der Winkelverschiebung[193]

Das Sprechen über das Vorgehen und damit verbundene Ideen ist ein besonderes Anliegen des Unterrichtskonzepts. Jede Veränderung, die an der Konfiguration erfolgen soll, wird zunächst gemeinsam besprochen und erst danach mit Hilfe der Datei realisiert. Die Realisierung der Winkelverschiebungen wird sogar (mehrfach) unterbrochen, um der Frage nachzugehen, wie die Schenkel des verschobenen Winkels und des entsprechenden Winkels in seiner Ausgangslage zueinander liegen.

WAGENSCHEIN wäre damit am Ende angekommen. Im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken ist es aber wichtig, die Argumentation im Rückblick noch einmal auf

---

[193] Das zur Herstellung der Bildfolge benutzte DynaGeoX-Applet des Autors und weitere Applets, die die Winkelverschiebung als Argumentationsgrundlage nutzen, findet man im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → W → Winkelverschiebung.

ihre „Allgemeingültigkeit“ hin zu untersuchen. Im konkreten Fall bedeutet das, die Auswirkungen

- einer Variation der Form des Dreiecks und
- einer anderen Auswahl des Eckpunktes, an dem die Winkel zusammengebracht werden,

auf die Argumentation zu untersuchen. Die Bildfolge in **Abb. 62** deutet das Vorgehen an, das jeweils im Unterrichtsgespräch von den Schülerinnen und Schülern antizipiert wird.

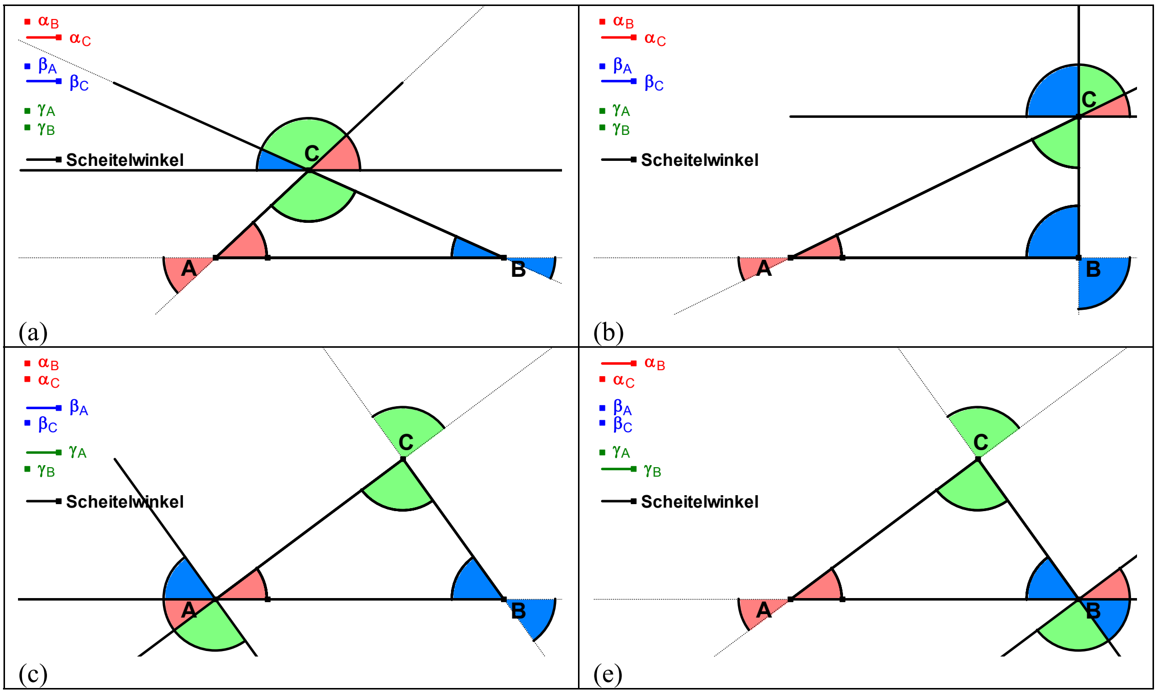


Abb. 62: „Untersuchung“ der Argumentation aus **Abb. 61** auf „Allgemeingültigkeit“

Die Winkelverschiebung ist ein einfaches Beispiel für die Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ des Beweglichen Denkens. Dabei wird in ein statisches Bild die Verschiebung eines Winkels (oder mehrerer Winkel) entlang eines Schenkels hineingesehen und damit im Hinblick auf die Größe von Winkeln bzw. die Parallelität von Geraden argumentiert. Diese Argumentation benutzen die Schülerinnen und Schüler in unserem Konzept im Anschluss an diese Stunde, um selbstständig und ohne die Hilfe des Computers die Aussage des Außenwinkelsatzes für Dreiecke zu entdecken und zu begründen. Die entsprechende Aufgabe lautet dabei:

Jeder Nebenwinkel eines Dreiecksinnenwinkels ist *Außenwinkel* des Dreiecks.

a) Wie viele Außenwinkel besitzt jedes Dreieck?
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem Außenwinkel (Nebenwinkel eines Innenwinkels) und den beiden nicht anliegenden Innenwinkeln? Stelle eine Vermutung auf und begründe sie! Schreibe auf, wie du dabei vorgehst.
c) Formuliere den in Teilaufgabe b) entdeckten Zusammenhang als Satz (Außenwinkelsatz)!

Die Aufgabe wird anschließend im Unterrichtsgespräch anhand eines DynaGeoX-Applets besprochen, das wieder ein flexibles Eingehen auf die Anregungen der Schülerinnen und Schüler gestattet.[194]

3.1.4 Beispiel: Dreiecksgrundformen

Im Folgenden wird schlaglichtartig eine Unterrichtssequenz vorgestellt, die Bewegliches Denken entwickeln und gleichzeitig die Begriffe „gleichschenkliges“, „gleichseitiges“, „rechtwinkliges“, „stumpfwinkliges“ und „spitzwinkliges Dreieck“ deutlich flexibler verfügbar machen soll, als dies mit Hilfe statischer Repräsentanten möglich ist. Das Ziel ist die Erarbeitung einer Verständnisgrundlage für „Dreiecksgrundformen“[195], wie er in **Abb. 44** auf Seite 106 wiedergegeben ist.

Die Schülerinnen und Schüler erforschen in dieser Sequenz verschiedene Dreieckstypen in Partnerarbeit am Computer. Dazu erhalten sie elektronische Arbeitsblätter in Form von EUKLID DynaGeo-Dateien. Um das oben angesprochene oberflächliche Betrachten von Bewegungen zu vermeiden, wird einerseits die Aufmerksamkeit der Schüler in den Arbeitsaufträgen klar fokussiert und andererseits von den Schülern verlangt, alle Ergebnisse und Begründungen schriftlich zu fixieren. In den Voruntersuchungen hat sich u. a. herausgestellt, dass eine deutliche Fokussierung zu einer intensiveren Auseinandersetzung führt und offene Aufgabenstellungen für fast alle beobachteten Schülerinnen und Schüler völlig ungewohnt waren. Dementsprechend fühlten sie sich überfordert, wenn sie damit konfrontiert wurden. Auch aus diesem Grund habe ich die Aufgaben nur sehr behutsam schrittweise offener gestaltet.

---

[194] Das genannte, von mir entwickelte DynaGeoX-Applet findet man im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → A → Außenwinkelsatz.
[195] Wenn ich im Folgenden von „Dreiecksgrundformen“ spreche, dann meine ich die Dreiecksformen gleichschenkliges, gleichseitiges, rechtwinkliges, stumpfwinkliges und spitzwinkliges Dreieck.

Des Weiteren hat sich in den Vorversuchen gezeigt, dass selbstständige Arbeitsphasen der Schülerinnen und Schüler an elektronischen Arbeitsblättern dann am effektivsten sind, wenn diese Arbeitsform regelmäßig durch lehrerzentrierte Unterrichtsgespräche unterbrochen wird, in denen die Ergebnisse der Partnerarbeitsphasen zusammengetragen, diskutiert, systematisiert, vertieft und im Schulheft fixiert werden. Aus diesem Grund fand in dieser Unterrichtssequenz nach jeder einstündigen Partnerarbeitsphase an elektronischen Arbeitsblättern[196] eine entsprechende Vertiefung im Unterrichtsgespräch statt. Hier wurden, neben den genannten Aktivitäten, auch gemeinsam wichtige Sätze begründet bzw. bewiesen, die in den Partnerarbeitsphasen entdeckt wurden bzw. zu denen dort Vermutungen aufgestellt wurden. Da derartige Beweise oft statischer Natur sind, werden wir hier im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken nicht näher darauf eingehen.[197]

Anhand der im Folgenden wiedergegebenen elektronischen Arbeitsblätter[198] sollen die Schülerinnen und Schüler den Begriffsinhalt und -umfang der zu den Dreiecksgrundformen gehörenden Begriffe erforschen. Sie werden dazu mit einem Dreieck ΔABC mit fester Seite $[AB]$ konfrontiert und aufgefordert, den Eckpunkt C so zu bewegen, dass das Dreieck ΔABC dabei seine, durch eine vorgegebene Definition festgelegte Dreiecksgrundform erhält, also z. B. immer gleichschenklig ist. Die Arbeitsblätter haben im Wesentlichen alle denselben Aufbau, der hier kurz vorgestellt wird:

- *Konfiguration*:

  Vorgegeben ist ein Dreieck ΔABC mit fester Seite c. An diesem Dreieck kann dementsprechend nur die Lage des Eckpunktes C variiert werden. Zusätzlich werden die

[196] Um in den Partnerarbeitsphasen ein individuelles Arbeitstempo zu ermöglichen, erhielten Schülerpaare, die ein Arbeitsblatt bereits abgeschlossen hatten und ihre Ergebnisse schlüssig verbalisieren und begründen konnten, ein weiteres elektronisches Arbeitsblatt.

[197] Bei der Erarbeitung dieser Beweise wurden EUKLID DynaGeo-Dateien als Visualisierungshilfe eingesetzt, um Unterrichtsgespräche zu unterstützen und den Schülerinnen und Schülern nach der Erarbeitung die Möglichkeit zu geben, sich jederzeit wieder den roten Faden des Beweises zu erarbeiten und so den Beweis zu verstehen. Exemplarisch sei hier auf ein von mir erstelltes DynaGeoX-Applet zum Beweis des Satzes von Thales verwiesen, das man im Internet unter folgender Adresse findet: http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → T → Thales (Beweis zum Satz des Thales).

[198] Die von mir erstellten elektronischen Arbeitsblätter der gesamten Unterrichtssequenz findet man als DynaGeoX-Applets im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de → EUKLID DynaGeo → D → Dreiecksgrundformen.

Winkelgrößen der drei Innenwinkel[199] von ΔABC gemessen und angezeigt.[200] Es handelt sich hierbei, nach unserer Klassifizierung in Abschnitt 2.5, um eine veränderbare Konfiguration mit einzelnen Fokussierungshilfen.

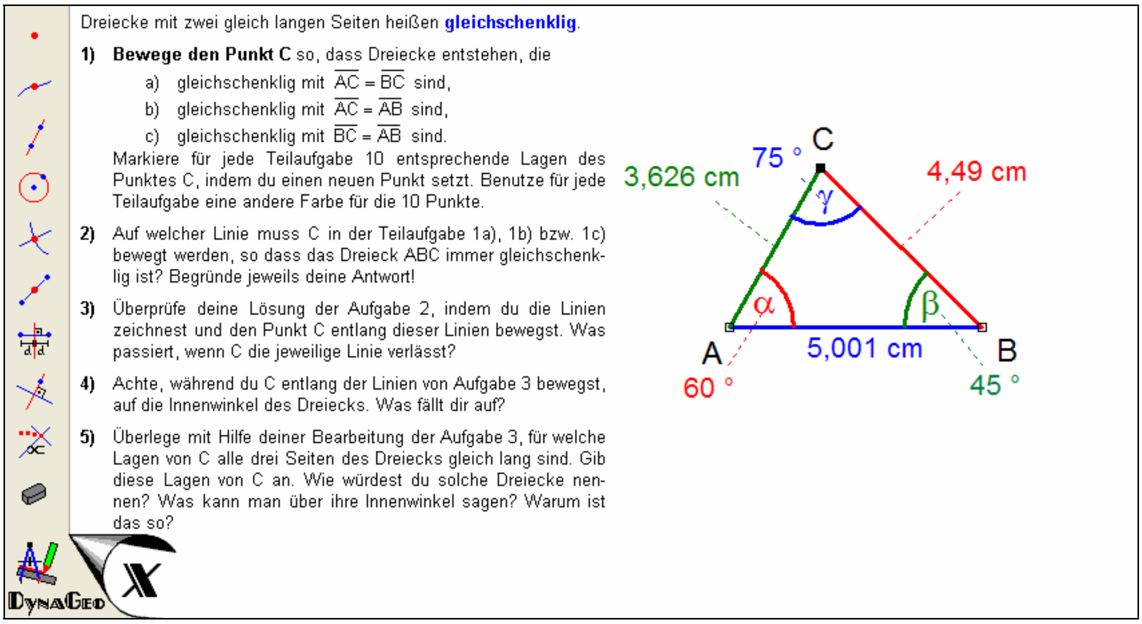


Abb. 63: Arbeitsblatt 1: „Gleichschenklige Dreiecke“

- *Aufgabentext – Darbietung*:

  Direkt im Applet befindet sich jeweils der Aufgabentext. Dies erleichtert das Arbeiten mit den Applets, weil der Blick der Schülerinnen und Schüler auf diese Weise nicht ständig zwischen dem Computerbildschirm und einem Arbeitsblatt in Papierform hin- und herwandern muss. Für die Lehrerinnen und Lehrer wird dadurch gleichzeitig der Organisationsaufwand verringert, weil nur noch eine Datei über den Server der Schule an alle Schülerinnen und Schüler verteilt werden muss. Bei einer derartigen Implementierung des Aufgabentextes hat es sich als günstig erwiesen, den Text nicht in eine Textbox von EUKLID DynaGeo zu schreiben, sondern ihn als

[199] Beim ersten Arbeitsblatt zu den gleichschenkligen Dreiecken werden zusätzlich die Längen der drei Dreiecksseiten ausgegeben.
[200] Um die Orientierung zu erleichtern, wurden die drei Seiten und die drei Winkel jeweils mit einer anderen Farbe gekennzeichnet und die zugehörigen Messwerte in denselben Farben ausgegeben.

Bitmap[201] in den Hintergrund der Zeichnung zu legen. Auf diese Weise ist er den Zugriffen der Schülerinnen und Schüler komplett entzogen und kann auch nicht versehentlich beim Arbeiten angeklickt und z. B. verschoben werden.

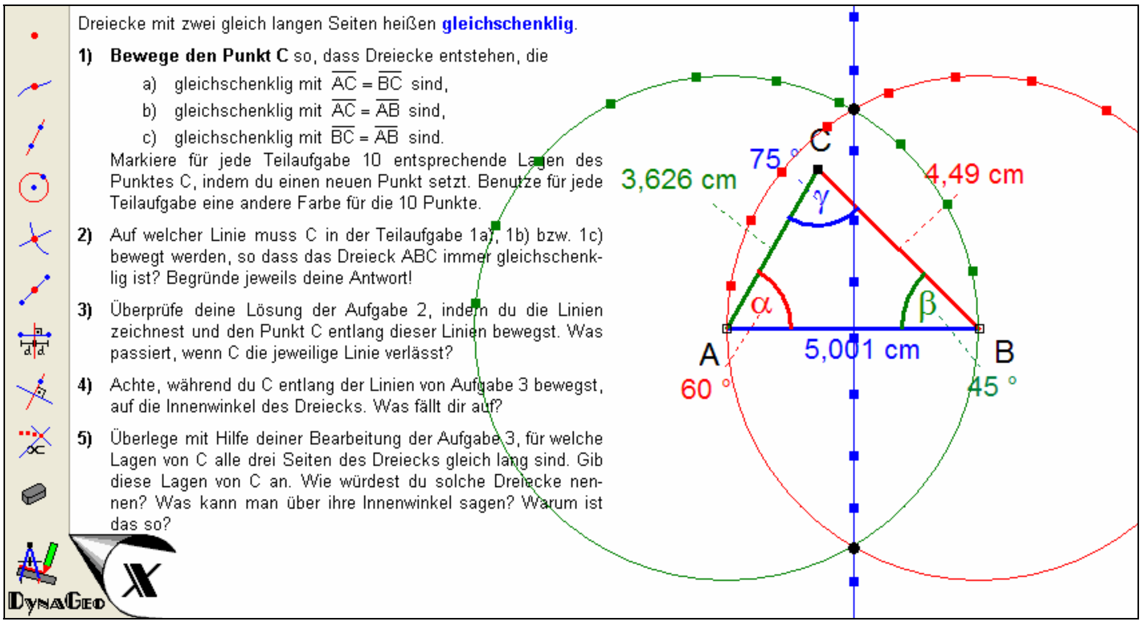


Abb. 64: Arbeitsblatt 1: „Gleichschenklige Dreiecke“ – Lösung

- *Aufgabentext – Inhalt*:
  - Jeder Text beginnt mit einer knappen Definition der Dreiecksform, die erforscht werden soll. Diese Vorgabe scheint auf den ersten Blick mehreren didaktischen Prinzipien (z. B. dem Prinzip des entdeckenden Lernens, dem Prinzip der Offenheit der Aufgabenstellung) zuwiderzulaufen, da hier scheinbar das Ziel, nämlich die Definition des Begriffs, bereits vorweggenommen wird. Zur Aufklärung dieses scheinbaren Widerspruchs müssen verschiedene Aspekte berücksichtigt werden. Der Schwerpunkt der hier intendierten Begriffsbildung ist nicht der Begriffsinhalt, sondern letztlich der Begriffsumfang. Das Anliegen ist also nicht, dass die Schülerinnen und Schüler möglichst viele verschiedene Dreieckstypen selbstständig entdecken, sondern dass sie für jeden Dreieckstyp den Begriffsumfang selbsttätig erforschen. Hierzu ist, dies zeigen auch von mir aufge-

[201] Der Text wird dazu mit Hilfe eines Textverarbeitungsprogramms geschrieben und gestaltet. Anschließend fertigt man eine Bildschirmkopie an und speichert diese mit einem beliebigen Bildbearbeitungspro-

zeichnete Videosequenzen von Partnerarbeitsphasen, in erheblichem Maße Eigentätigkeit und Kreativität gefragt. Es kann also keinesfalls von einer Engführung der Schülerinnen und Schüler die Rede sein. Ein weiterer Aspekt erscheint mir hier aber noch wichtiger. In der Literatur finden sich immer wieder Hinweise darauf, dass beim Arbeiten in computergestützten Lernumgebungen die Gefahr eines oberflächlichen Agierens besteht. So nennt HÖLZL (1994) u. a.

- das unreflektierte Benutzen von Werkzeugen,
- das Abweichen vom eigentlichen Ziel und
- das Vermeiden einer mathematischen Analyse.[202]

WEIGAND/WETH (2002) fassen das so zusammen:

> „Aufgrund der hohen Geschwindigkeit, mit der Computer Rückmeldungen auf Fragen geben können, ist die Gefahr eines bloßen ‚Versuch-und-Irrtum-Verfahrens' und eines blinden Aktionismus beim Arbeiten mit neuen Technologien sehr groß." WEIGAND/WETH (2002), S. 34

Um dieser Problematik im Zusammenhang mit der Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler zu begegnen, nennen sie folgende Maßnahmen:

> „Selbsttätigkeit erscheint nur sinnvoll in Wechselbeziehung zu einem geplant strukturierten Unterricht, wozu u. a. Vorstrukturierung der Inhalte, schülergemäße Sprache, Erarbeitung eines verankerten Vorverständnisses, Einplanung eines roten Fadens und prototypische Beispiele gehören." WEIGAND/WETH (2002), S. 34

Eine Möglichkeit den roten Faden bewusst aufzuzeigen, besteht im vorliegenden Zusammenhang darin, den Begriff, dessen Umfang untersucht werden soll, in Form seiner Definition zu Beginn der Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler in den Mittelpunkt zu stellen.

- Die erste Teilaufgabe dient dazu, die Gegebenheiten zu erforschen und Vermutungen über die Art der Bewegungen aufzustellen. Um die Entwicklung von Vermutungen über die Bahnen, auf denen *C* jeweils bewegt werden kann, zu erleichtern bzw. überhaupt zu ermöglichen, sollen die Schülerinnen und Schüler in den ersten Arbeitsblättern jeweils zunächst verschiedene Einzellagen für *C* mar-

---

gramm als Bitmap ab.

kieren[203], für die das Dreieck *ΔABC* die entsprechende Dreiecksgrundform annimmt (vgl. z. B. **Abb. 63** auf Seite 146 und **Abb. 64** auf Seite 147). In den ersten Teilaufgaben wird dabei die Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ des Beweglichen Denkens im Sinne eines gestuften Voranschreitens der Schwierigkeiten noch nicht gefordert. Hier wird die Analyse vielmehr durch die Aufspaltung in die Teilaufgaben a) bis c) bereits vorweggenommen.[204] In späteren Arbeitsblättern (vgl. etwa **Abb. 69** auf Seite 154) ist die entsprechende Aufgabe zum Teil deutlich offener formuliert.

- Die zweite Teilaufgabe stellt nun die Frage nach ganzen „Linien“, auf denen *C* bewegt werden kann bzw. muss, und fordert eine Begründung dafür ein. Während die Schülerinnen und Schüler diese Begründung mit Hilfe von Bewegungsargumenten beim Arbeitsblatt 1[205] durchaus erbringen können,[206] sind sie dazu bei der Frage zum Thaleskreis in Arbeitsblatt 2[207] bereits nicht mehr in der Lage. Dort dient diese Anfrage dazu, die Schülerinnen und Schüler zu einer Auseinandersetzung mit dem Problem anzuhalten und für die gemeinsame Erarbeitung des Beweises zu sensibilisieren.
- In der nächsten Teilaufgabe sollen in der Regel die Kurven konstruiert werden, auf denen *C* bewegt werden kann, so dass die entsprechende Dreiecksgrundform erhalten bleibt. Die Aufforderung an die Schüler, den Punkt *C* an die konstruierten Linien zu binden, ermöglicht es ihnen, evtl. falsche Vermutungen zu widerlegen und dient bei richtigen Vermutungen als „vertrauensbildende Maßnahme“. Diese visuelle Evidenz hat sich bei vielen Schülerinnen und Schülern als sehr

---

[202] vgl. HÖLZL (1994), S. 224

[203] Es ist nicht möglich, mit Hilfe der Ortslinienfunktion der DGS einfach den einen Weg für *C* zu „zeichnen“, der die Dreiecksgrundform erhält. Selbst wenn man den gewünschten Verlauf der Ortslinie bereits kennt, ist es so gut wie unmöglich eine Linie zu erzeugen, die einem unbeteiligten Beobachter eine Idee von der tatsächlichen Kurve vermittelt.

[204] vgl. die Texte der Arbeitsblätter in **Abb. 63**, **Abb. 65** und **Abb. 66** auf den Seiten 146 bis 151

[205] vgl. **Abb. 63** auf Seite 146 bzw. **Abb. 64** auf Seite 147, Aufgabe 2

[206] Die Argumentation entspricht der, die ich in Beispiel 1 auf den Seiten 76 bis 77 ausführlich erläutert habe.

[207] Vgl. **Abb. 65** auf Seite 150, Aufgabe 2. Zu beachten ist, dass in **Abb. 65** und einigen der nachfolgenden Abbildungen jeweils bereits die (konstruktive) Lösung der Aufgaben dargestellt wird!

wichtig erwiesen, auch wenn damit natürlich keinerlei mathematische Begründung bzw. Sicherung verbunden ist.

- Gegebenenfalls vorhandene zusätzliche Teilaufgaben dienen der Erkundung und Entdeckung von weiteren Zusammenhängen und sollen zum Weiterdenken anregen. Beim Arbeitsblatt 1 (vgl. **Abb. 64** auf Seite 147) soll in Teilaufgabe 4 z. B. der Basiswinkelsatz entdeckt und in Teilaufgabe 5 die Lage für C gefunden werden, für die das Dreieck ΔABC gleichseitig ist.[208]

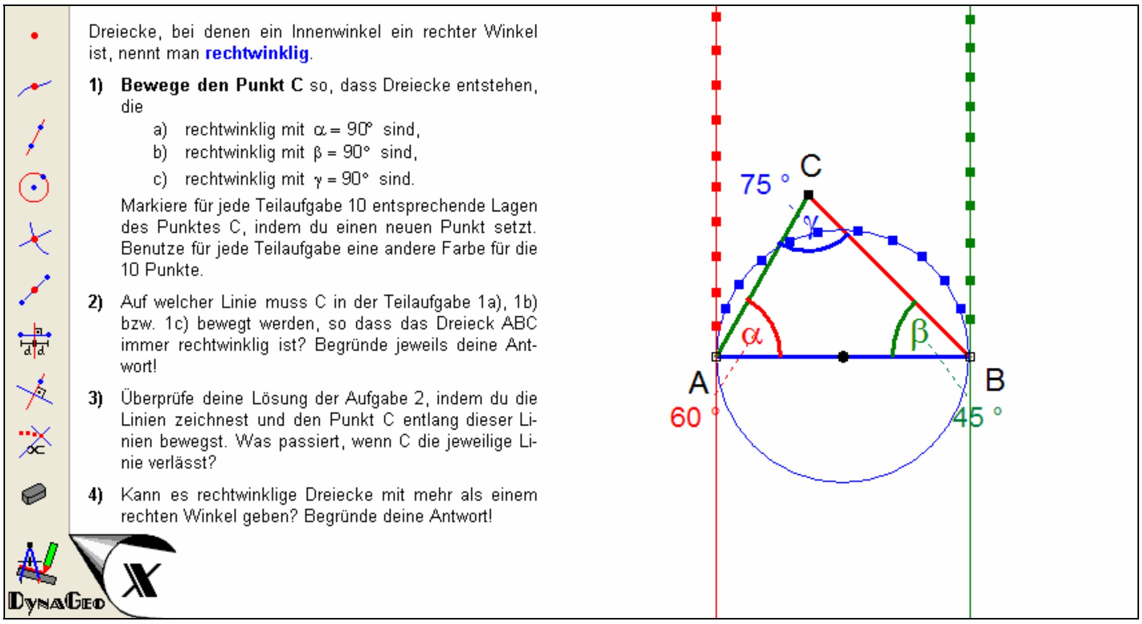


Abb. 65: Arbeitsblatt 2: „Rechtwinklige Dreiecke" – Lösung

Die Teilaufgabe 4 von Arbeitsblatt 2 (vgl. **Abb. 65**) lässt sich einerseits mit dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck lösen, aber andererseits auch durch einen Blick auf die drei Lösungskurven der zweiten bzw. dritten Teilaufgabe dieses Arbeitsblattes. Wenn mehr als ein Innenwinkel ein rechter sein soll, dann muss C gleichzeitig auf zwei der in **Abb. 65** dargestellten Lösungskurven liegen. Dies ist offensichtlich nur dann der Fall,

[208] Eine mögliche Lösung dieser Teilaufgabe ist: Die Strecke $[AC]$ muss so lang wie die Strecke $[AB]$ sein und gleichzeitig muss die Strecke $[BC]$ so lang wie die Strecke $[AB]$ sein. (Dies liegt daran, dass die Länge der Strecke $[AB]$ nicht verändert wird, wenn man den Punkt C bewegt.) C ist folglich (ein) Schnittpunkt der Kreise $k\left(A;\overline{AB}\right)$ und $k\left(B;\overline{AB}\right)$. Dreiecke, bei denen alle Seiten gleich lang sind, nennt man gleichseitig. Da man jedes Paar von Dreiecksseiten eines gleichseitigen Dreiecks als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks betrachten kann, sind alle benachbarten Innenwinkel gleich groß. Damit sind alle Innenwinkel sind gleich groß, d. h. $\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha=180°$ und $\alpha=60°$. Die Winkelgröße jedes Innenwinkels im gleichseitigen Dreieck beträgt also 60°.

wenn C mit A oder B zusammenfällt. In diesen Fällen liegt aber kein Dreieck mehr vor, weil dann A, B und C kollinear sind. Also kann es kein Dreieck geben, das mehr als einen rechten Winkel besitzt.

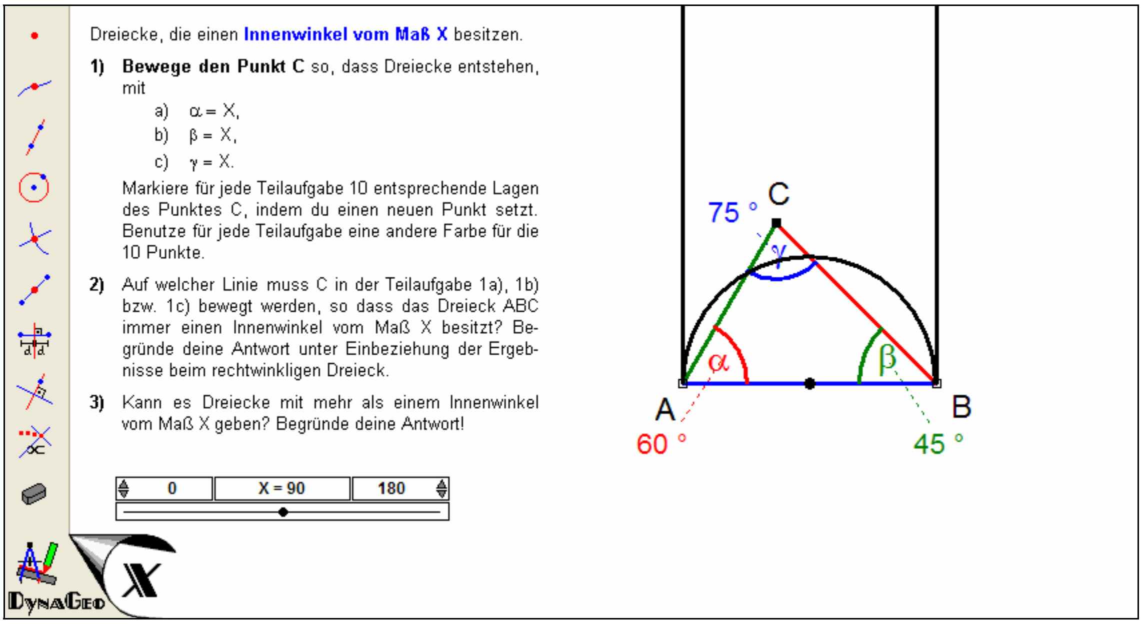


Abb. 66: Arbeitsblatt 3/4: „Dreiecke mit einem X°-Innenwinkel“ – Lösung

In **Abb. 66** ist das dynamische Lösungsblatt zu den Arbeitsblättern 3 und 4 zu sehen. In diesen beiden Arbeitsblättern geht es um Dreiecke mit einem 80°- bzw. einem 100°-Innenwinkel. Sie stellen den wichtigen Übergang zwischen dem Arbeitsblatt zum rechtwinkligen Dreieck und den Arbeitsblättern zu den spitzwinkligen und stumpfwinkligen Dreiecken dar.

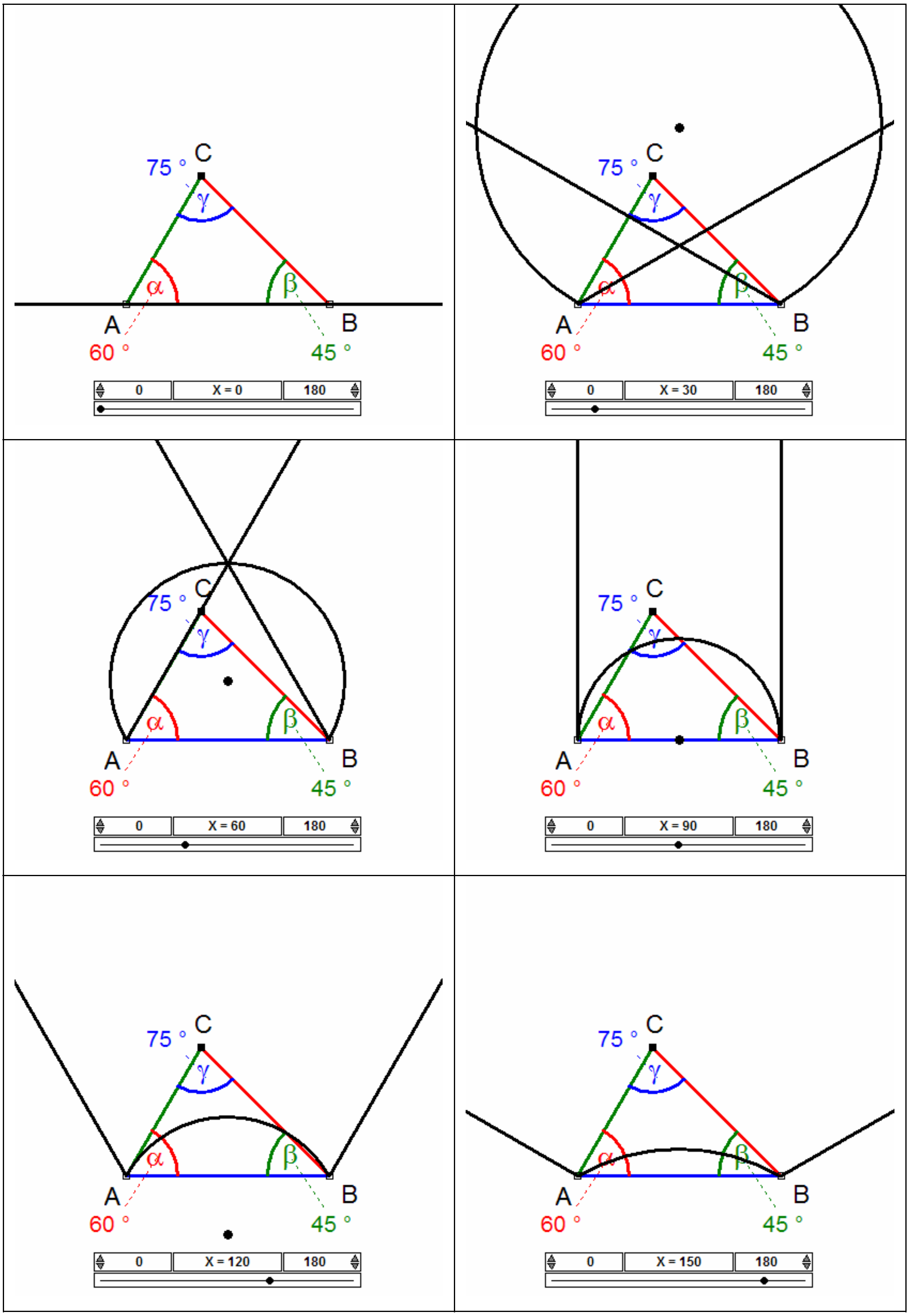


Abb. 67: Lösungskurven für verschiedene Einstellungen der Winkelgröße X (vgl. **Abb. 66**)

Diese Arbeitsblätter ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern eine Vorstellung davon zu entwickeln, dass die Ergebnisse für einen rechten Winkel sich prinzipiell auf andere Winkelgrößen übertragen lassen. Die größten Schwierigkeiten ergeben sich auch hier wieder bei den Kurven, auf denen sich C bewegen darf, sodass der Winkel γ ein 80°- oder ein 100°-Winkel ist. Hier können von den Schülerinnen und Schülern begründete Vermutungen aufgestellt werden, die die Erarbeitung im Unterrichtsgespräch anhand der Lösungsdatei (vgl. **Abb. 66** auf Seite 151 und **Abb. 67** auf Seite 152) vorbereiten und so fokussierend wirken. Wenn erarbeitet ist, wie sich die Ortslinien in **Abb. 67** auf Seite 152 bei Änderung der Winkelgröße verhalten, dann können die Schülerinnen und Schüler auch anhand der Arbeitsblätter 4 und 5[209] erarbeiten, wo man C bewegen kann so dass das Dreieck ΔABC immer spitzwinklig bzw. immer stumpfwinklig bleibt.

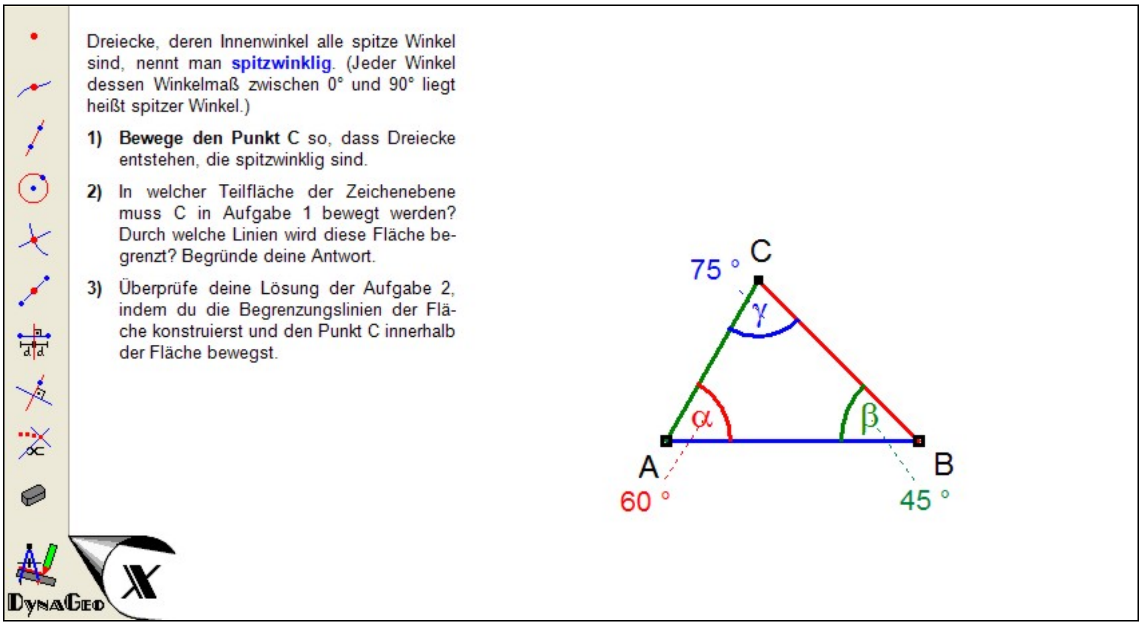


Abb. 68: Arbeitsblatt 4: „Spitzwinklige Dreiecke“

[209] vgl. **Abb. 68** auf Seite 153 und **Abb. 69** auf Seite 154

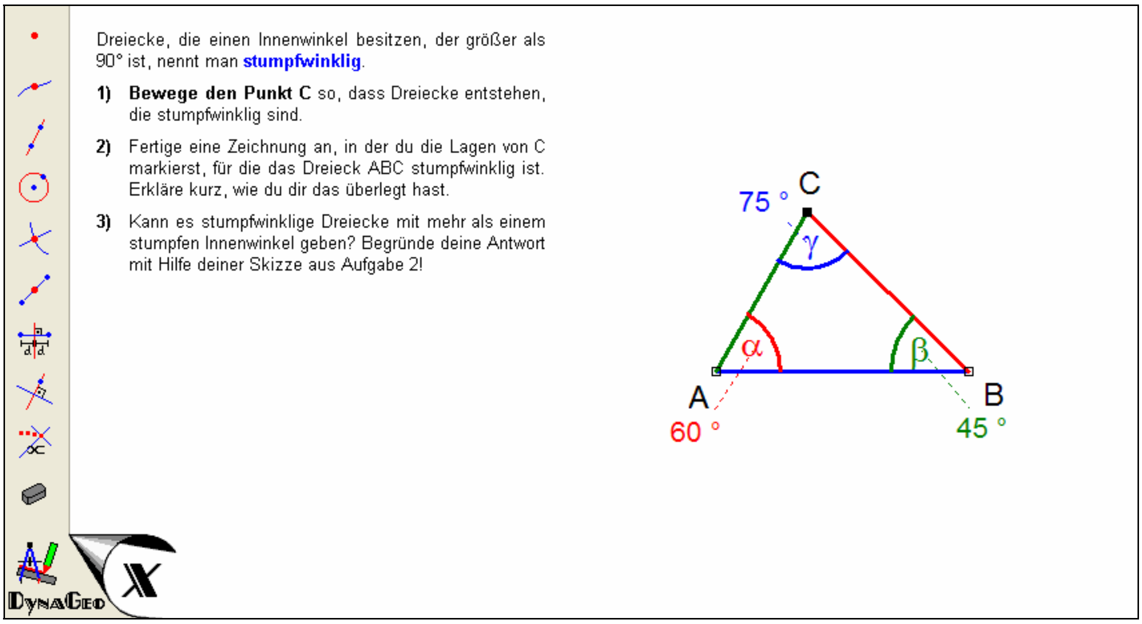


Abb. 69: Arbeitsblatt 5 „Stumpfwinklige Dreiecke“

Abb. 70 zeigt die Lösung für die Arbeitsblätter 4 und 5. Wird *C* in den dunkler hinterlegten Teilflächen bewegt, so ist das Dreieck *ΔABC* immer stumpfwinklig, wird *C* in der heller hinterlegten Teilfläche bewegt, so ist das Dreieck *ΔABC* immer spitzwinklig. Mit Hilfe des Schiebereglers kann, wie in **Abb. 67** auf Seite 152 dargestellt, die Größe des Winkels X und damit die Lage der schwarzen Kurven variiert und so der Zusammenhang zu den Arbeitsblättern 3 und 4 (vgl. **Abb. 66** auf Seite 151) diskutiert werden.

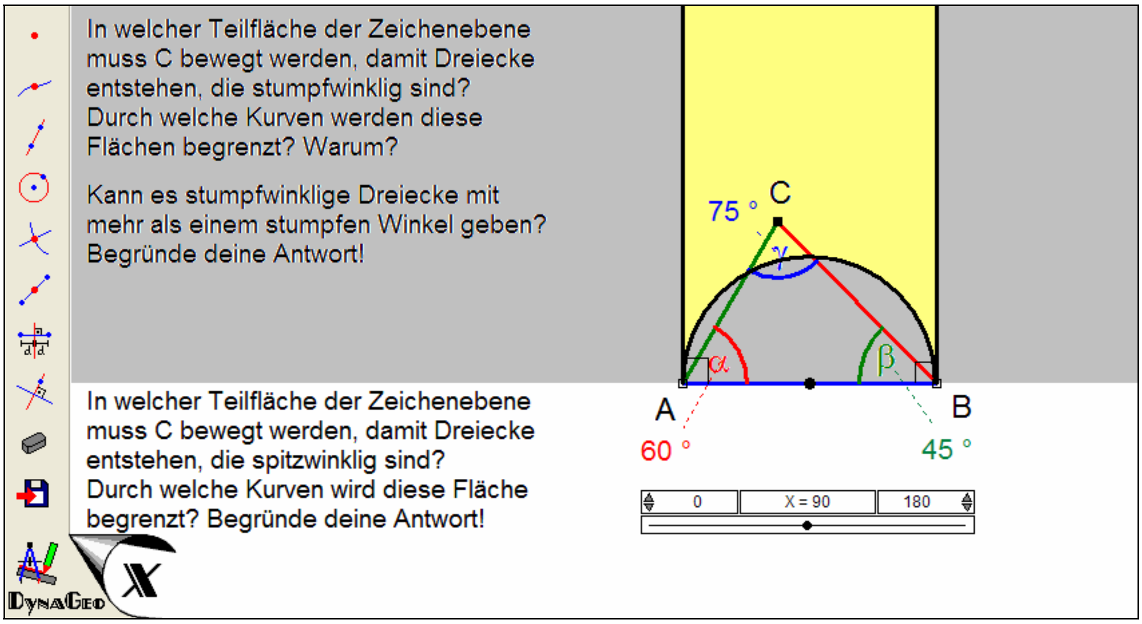


Abb. 70: Arbeitsblatt 4/5: „Stumpfwinklige/spitzwinklige Dreiecke“ – Lösung

Damit haben die Schülerinnen und Schüler sich nach und nach die Verständnisgrundlage zu den Dreiecksgrundformen erarbeitet, die in **Abb. 71** auf Seite 155 zu sehen ist. In diesem (scheinbar) statischen „Merkbild" sind die beweglichen Vorstellungen „eingefroren". Um hieraus das Wissen wieder verfügbar zu machen, ist Bewegliches Denken („Bewegung hineinsehen und damit argumentieren" sowie „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren") notwendig.

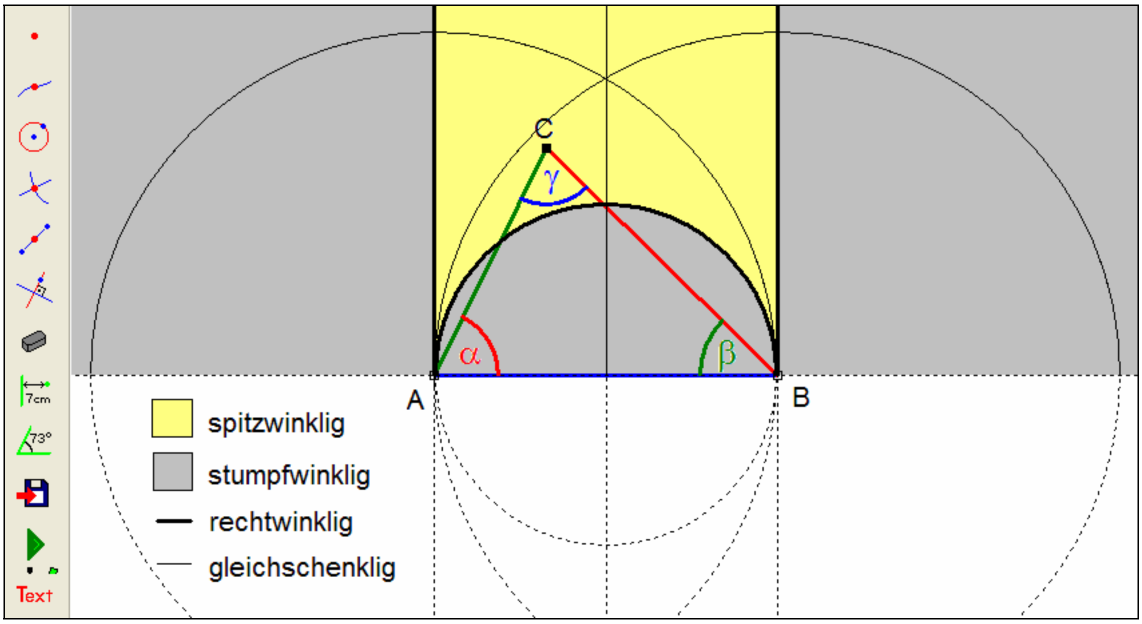


Abb. 71: Arbeitsblatt 6: Verständnisgrundlage zu den „Dreiecksgrundformen"

Der Legende zu **Abb. 71** ist zu entnehmen, welche Dreiecksgrundform für eine Bewegung von *C* in der entsprechenden Teilfläche bzw. auf den entsprechenden Kurven das Dreieck ΔABC jeweils annimmt. Daraus lässt sich z. B. ableiten, dass es

- kein rechtwinkliges Dreieck geben kann, dass gleichzeitig spitz- oder stumpfwinklig wäre,
- aber sehr wohl spitzwinklig-gleichschenklige sowie stumpfwinklig-gleichschenklige Dreiecke gibt,
- nur eine mögliche Lage für *C* gibt, sodass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist, nämlich den Schnittpunkt der drei Kurven für gleichschenklige Dreiecke. (Wir betrachten hier nur Dreiecke mit mathematisch positivem Umlaufsinn.)

Diese Verständnisgrundlage ermöglicht einen guten Überblick über die verschiedenen Dreiecksgrundformen, deren Begriffsinhalt und -umfang. Damit können z. B. auch

Probleme gelöst werden, wie die, die in den Arbeitsblättern 7 bis 9 (vgl. **Abb. 72** bis **Abb. 74** auf den Seiten 156 bis 157) der Unterrichtssequenz bearbeitet werden sollen. Dabei ist jeweils ein Dreieck mit einer festen Seite vorgegeben. Der „freie“ Eckpunkt kann auf einer Kurve bewegt werden. Die Aufgabe besteht darin, anzugeben, welche Dreiecksgrundformen das Dreieck dabei der Reihe nach annimmt? In **Abb. 75** auf Seite 157 ist exemplarisch die Verständnisgrundlage über der Problemkonfiguration eingeblendet.

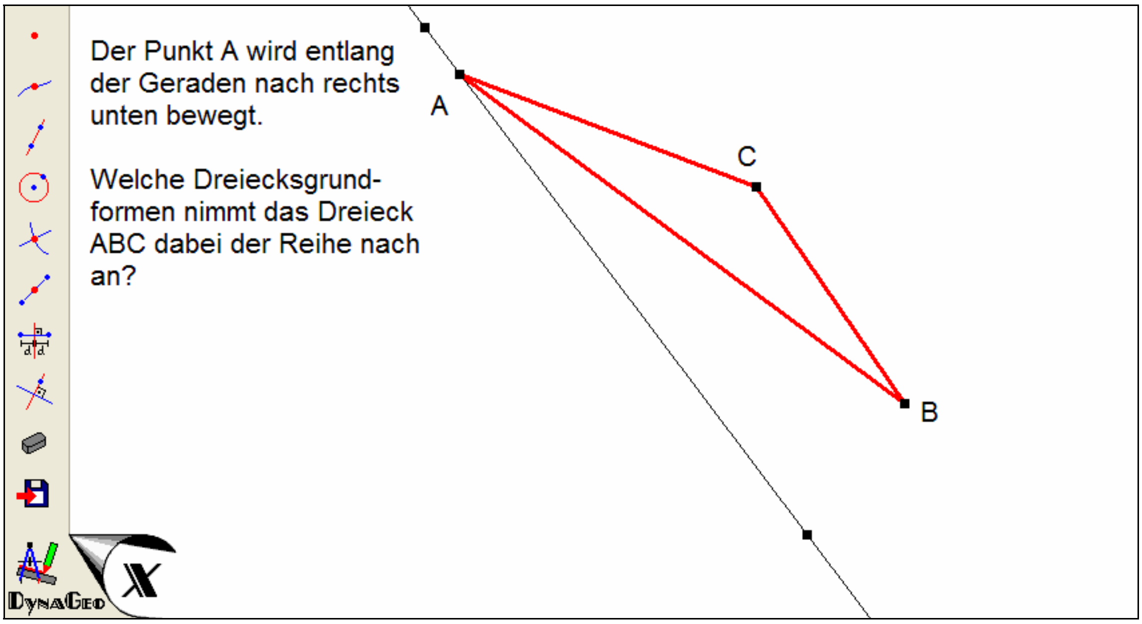


Abb. 72: Arbeitsblatt 7: „Ein Eckpunkt wird entlang einer Geraden bewegt.“

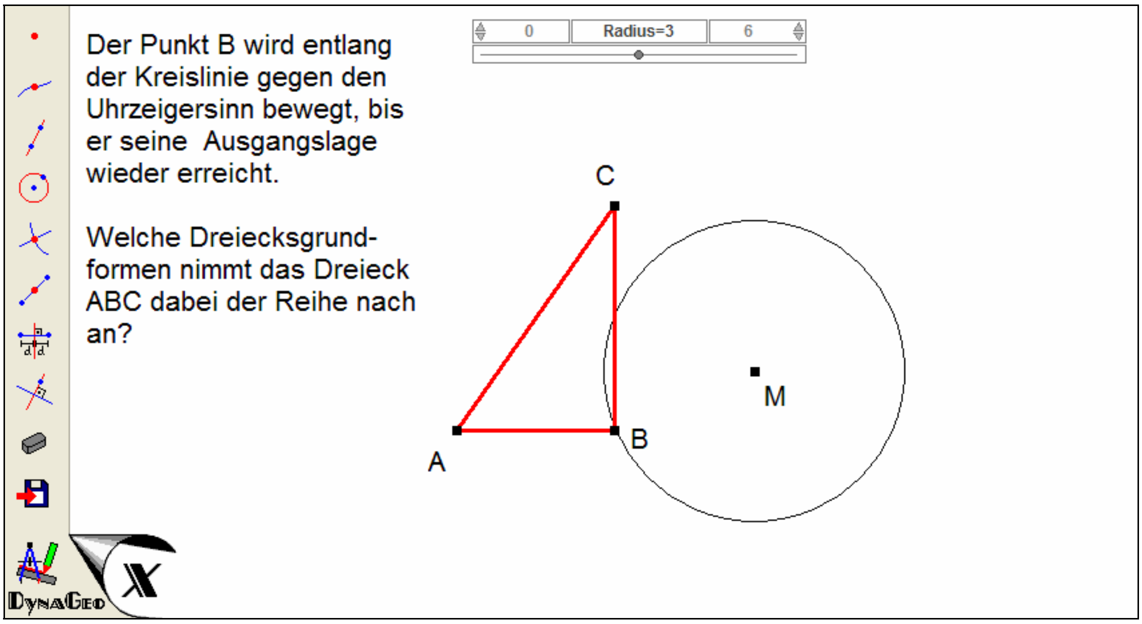


Abb. 73: Arbeitsblatt 8: „Ein Eckpunkt wird entlang eines Kreises bewegt.“

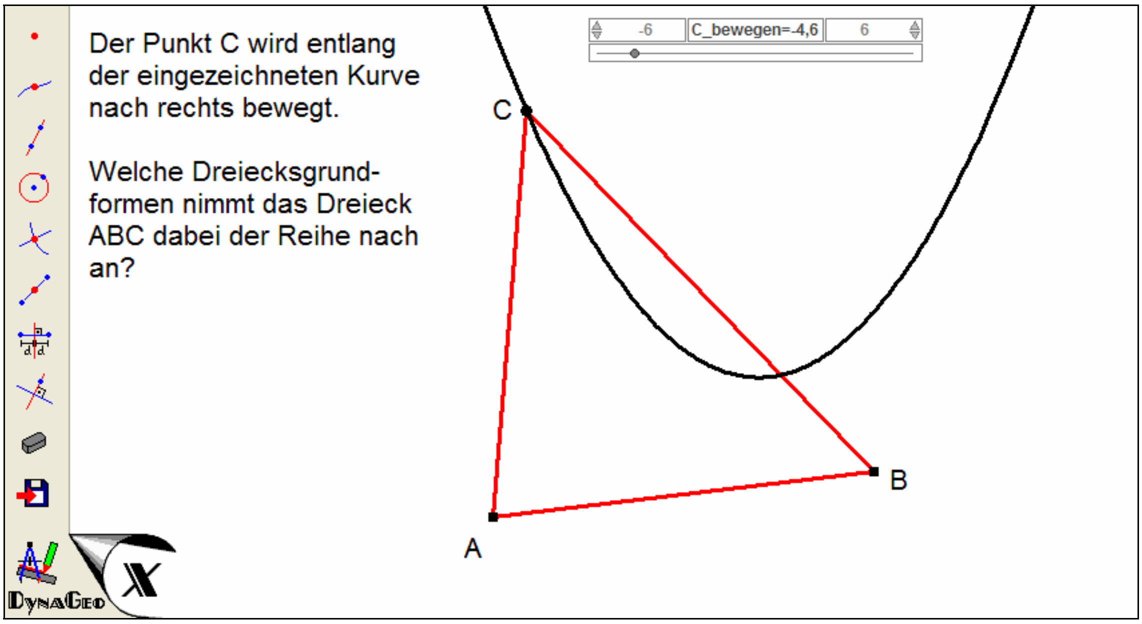


Abb. 74: Arbeitsblatt 9: „Ein Eckpunkt wird entlang einer Parabel bewegt.“

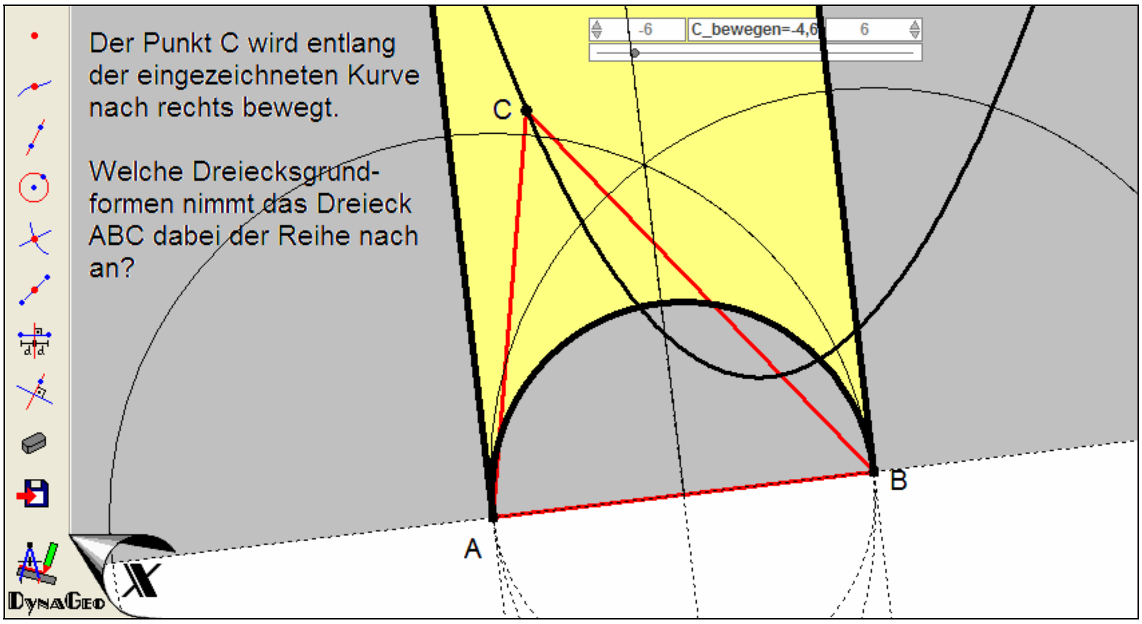


Abb. 75: Arbeitsblatt 9: „Ein Eckpunkt wird entlang einer Parabel bewegt.“ – Lösung

Beim vorliegenden Beispiel aus dem Unterrichtskonzept wurden die ersten beiden Fähigkeiten des Beweglichen Denkens, nämlich „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ und „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ schrittweise aufgebaut bzw. nach und nach benötigt. Die schwierigste Stufe des Beweglichen Denkens, nämlich „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“ wurde hier wie im gesamten Unterricht zunächst nicht gefordert, weil ich auf Grund der Erfahrungen aus den Vorversuchen zu der Einsicht gelangt bin, dass hierfür die ersten beiden Stufen des Beweglichen Denkens notwendige Voraussetzung sind. Dementsprechend bildet das folgende Beispiel auch den letzten Unterrichtsbaustein in unserem Unterrichtskonzept zum Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe und wurde in den Unterrichtsklassen am Ende des Schuljahres bearbeitet.

3.1.5 Beispiel: Änderungsverhalten

Aufbauend auf ein Jahr Geometrieunterricht, in dem mit Bewegungen bzw. Veränderungen argumentiert wurde, sollen die Schülerinnen und Schüler tiefer in das Problem der Veränderungen einsteigen und die Art und Weise der Änderung in den Blick nehmen. Hier sind neue Sichtweisen gefragt, es muss kreativ gearbeitet werden und auch die verbale Beschreibung des Änderungsverhaltens soll entwickelt werden. All dies kann gut in Kleingruppen aus ca. vier Schülerinnen und Schülern geschehen. Diese Gruppenarbeitsphase habe ich in eine vierphasige Unterrichtssequenz eingebettet:

1) Einführung in die Fragestellung und die Gruppenarbeit im Unterrichtsgespräch
2) Gruppenarbeitsphase
3) Präsentation der Gruppenergebnisse im Plenum
4) Kontrolle der Ergebnisse und Vertiefung des Verständnisses anhand von EUKLID DynaGeoX-Applets

1) Einführung in die Fragestellung und die Gruppenarbeit

Die Einführung in die Gruppenarbeitsphase erfolgte in Form eines Unterrichtsgespräches. Dabei wurde ein Aufgabenblatt gemeinsam bearbeitet, das den gleichen Aufbau wie die Aufgabenblätter hatte, die die Schülergruppen anschließend bearbeiten sollten.[210] Auf diese Weise konnten evtl. auftretende organisatorische Anlaufschwierigkeiten beim Eintritt in die Gruppenarbeitsphase und inhaltliche Fragen zu dieser Art der Problemstellung bereits im Vorfeld minimiert werden. Allerdings hatte dieses Vorgehen, wie die Auswertung der Videoaufzeichnung gezeigt hat, auch einen gravierenden Nachteil: Einige Schülerinnen und Schüler haben die für diesen speziellen Fall gemeinsam erarbeiteten Erklärungsmuster übergeneralisiert und versucht, sie eins zu eins auf die neuen Probleme zu übertragen. Das Eingangsbeispiel „Kolbenmotor" (vgl. Aufgabenblatt Gruppe 1 auf Seite 234) habe ich einerseits gewählt, um erste Erfahrungen mit dem Änderungsverhalten an ein anschauliches und leicht vorstellbares Phänomen anzubinden. Andererseits war mein Anliegen aber auch, gemeinsam ein Phänomen zu erschließen, das eine andere Struktur hat als die Probleme, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler anschließend in der Gruppenarbeitsphase auseinander zu setzen haben. Dadurch wollte ich darauf hinwirken, dass die Gruppen selbstständig eine kreative Lösung mit Begründung erarbeiten.

Das Aufgabenblatt zur Einführungsaufgabe wurde bewusst genauso gestaltet wie die Arbeitsblätter für die Gruppenarbeitsphase. Dadurch sollten die Schülerinnen und Schüler mit der Aufgabenstellung vertraut gemacht, etwaige Verständnisprobleme bereits vorab geklärt und so die Anlaufphase in der eigentlichen Gruppenarbeit verkürzt werden. Im Folgenden werden die Aufgaben dieses Arbeitsblattes vorgestellt:

[210] Die Aufgabenblätter für die Gruppenarbeit sind in Anhang A ab Seite 233 abgedruckt.

Aufgaben:

Bei einem Kolbenmotor bewegt sich das „Schwungrad“ immer gleichmäßig[211] in dieselbe Richtung.

a) Beschreibt, wie sich dabei der Kolbenkopf (dunkle Fläche in **Abb. 76**) bewegt.

b) Wie groß ist der Kolbenhub[212]? (Gebt ein Vergleichsmaß aus der Zeichnung an!)

c) Bewegt sich der Kolbenkopf immer gleichmäßig oder ist er manchmal schneller und manchmal langsamer? Gebt gegebenenfalls an, in welchen Bewegungssituationen er sich schneller und in welchen er sich langsamer bewegt. Begründet eure Antwort.

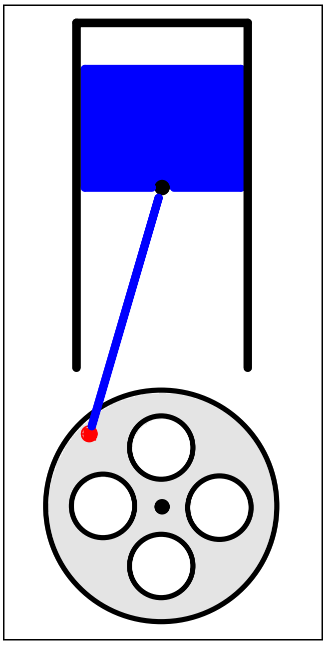


Abb. 76: Kolbenmotor

Die beiden ersten Teilaufgaben zielen noch einmal auf die beiden ersten Komponenten des Beweglichen Denkens ab. Zur Beantwortung der Aufgabe a) muss in das statische Bild aus **Abb. 76** die Bewegung des „Schwungrades“ hineingesehen und argumentiert werden, dass dabei die Pleuelstange und damit der Kolbenkopf mitbewegt werden. Da der Kolbenkopf sich nur in einer Führung bewegen kann, bewegt er sich geradlinig auf und ab. Die Frage b) zielt darauf ab, die Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren. Es ist nämlich notwendig, die zentrale Bedeutung der Pleuelstange für die Kolbenkopfbewegung zu realisieren und zu erkennen, dass der Kolbenhub durch die höchste und die niedrigste Lage der Pleuelstange festgelegt wird. Diese Extremlagen sind (wegen der Geradführung des Kolbenkopfs) ihrerseits durch die höchste bzw. tiefste Lage des roten Ansatzpunktes der Stange bestimmt. Dementsprechend ist der Kolbenhub doppelt so groß wie der Abstand vom Ansatzpunkt der Kolbenstange am Schwungrad zum Schwungradmittelpunkt.

[211] Der Begriff „gleichmäßig“ wurde hier vereinfachend als „immer gleich schnell“ erläutert. Gemeint ist natürlich „mit konstanter Winkelgeschwindigkeit“.

[212] Der Kolbenhub ist der Abstand zwischen der höchsten und der tiefsten Lage des Kolbenkopfes.

Mit der dritten Teilaufgabe wird zum ersten Mal explizit die Art und Weise der Änderung, also das Änderungsverhalten, in den Blick genommen. Konkret soll hier aus der Rotation des Schwungrades mit konstanter Winkelgeschwindigkeit („gleichmäßig“) qualitativ auf die Änderungsgeschwindigkeit der Bewegung des Kolbenkopfes geschlossen werden. Hierzu ist eine Reihe von Überlegungen notwendig, die nun kurz vorgestellt werden sollen. Entscheidend ist zunächst die Erkenntnis, dass die Auf- bzw. Abwärtsbewegung des Kolbenkopfes dann am schnellsten erfolgt, wenn die Pleuelstange nach oben geschoben bzw. nach unten gezogen wird. Die Bewegung der Pleuelstange wird aber entscheidend durch die Bewegung des Ansatzpunktes A der Pleuelstange am Schwungrad bestimmt. Die Bewegungsrichtung von A lässt sich wiederum in einen Anteil in Kolbenrichtung und einen Anteil senkrecht dazu zerlegen. Bei der gleichmäßigen Kreisbewegung des Punktes A mit dem Schwungrad entgegen dem Uhrzeigersinn ändern sich die Aufteilung der Bewegungsanteile von A in Kolbenrichtung und senkrecht dazu ständig (vgl. **Abb. 77**).[213] Der Punkt A bewegt sich in der Nähe seiner höchsten bzw. tiefsten Lage fast senkrecht zur Kolbenrichtung. In diesen Bewegungssituationen wird der Kolben folglich nur sehr wenig nach oben bzw. unten bewegt. Bei der Bewegung von A nach unten (auf der linken Seite des Schwungrades) bzw. nach oben (auf der rechten Seite des Schwungrades) ist der Bewegungsanteil von A in Kolbenrichtung am größten. Damit wird der Kolben in diesen Bewegungssituationen am deutlichsten nach oben bzw. unten bewegt. Folglich ist die Kolbenbewegung bei der Aufwärts- und Abwärtsbewegung am schnellsten und um die höchste bzw. tiefste Lage herum am langsamsten. Der Kolbenkopf bewegt sich somit nicht gleichmäßig, sondern wird schneller und langsamer. In diesem Beispiel werden die Bewegungsrichtungen, die zu

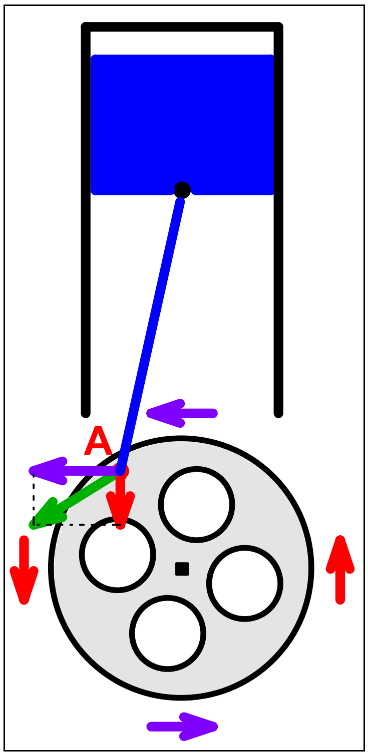


Abb. 77: Kolbenmotor mit Lösungshinweisen

[213] Im von mir entwickelten DynaGeoX-Applet, das in **Abb. 78** auf Seite 163 dargestellt ist, kann diese Aufteilung der Bewegungsanteile durch Ziehen am Punkt „Hilfe 1“ dynamisch visualisiert werden.

maximaler bzw. minimaler Veränderung führen, also von außen (Geradführung durch den Kolben) vorgegeben. Im Gegensatz dazu mussten sich die Schülerinnen und Schüler entsprechende Richtungen in den Aufgaben der Gruppenarbeitsphase erst erarbeiten.

2) Gruppenarbeitsphase

In Kleingruppen aus je vier Personen haben die Schülerinnen und Schüler jeweils ein Aufgabenblatt bearbeitet.[214] Als Hilfsmittel standen ihnen nur das Bild auf dem Arbeitsblatt sowie Papier und Bleistift zur Verfügung. Es ging hier also darum, alle drei Komponenten des Beweglichen Denkens zu aktivieren und sich über die im Kopf ablaufenden beweglichen Vorstellungen auszutauschen. Die Arbeitsanweisungen sollten diesen Prozess unterstützen. Es wurde deshalb explizit verlangt, die Aufgaben in der Gruppe zu diskutieren und *gemeinsam* eine Lösung zu erarbeitet. Die Zielvorgabe war, dass jede und jeder in der Gruppe die Lösung verstanden hat. Die Schülerinnen und Schüler mussten sich also ihre Lösungsansätze gegenseitig erklären. Auch die Vorgabe, sich während der Diskussion Notizen zu machen und anhand dieser Notizen zum Schluss gemeinsam ein Plakat bzw. eine Folie zu gestalten, womit die Gruppenlösung präsentiert werden sollte, zielte darauf ab, die Auseinandersetzung aller mit der Problemlösung zu intensivieren.

3) Präsentation der Gruppenergebnisse im Plenum

In jeder Gruppe wurde ein Gruppensprecher oder eine Gruppensprecherin gewählt, die bzw. der nach der Gruppenarbeitsphase im Plenum den anderen Gruppen das jeweilige Problem und den Lösungsansatz der Gruppe vorgestellt hat. Anschließend sollte ggf. die gesamte Gruppe der Klasse in einer Diskussion Rede und Antwort stehen.

4) Kontrolle der Ergebnisse und Vertiefung des Verständnisses anhand von DynaGeoX-Applets

Nachdem alle Gruppen ihre Ergebnisse präsentiert hatten, wurden im Plenum noch einmal alle Fragen aufgegriffen und die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler anhand von DynaGeoX-Applets überprüft und diskutiert. Die eingesetzten DynaGeoX-Applets sind durchgängig nach der in Abschnitt 2.4 am Beispiel der Winkel an Geradenkreuzungen[215] erläuterten Dreiteilung aufgebaut, wobei die 2. und 3. Stufe jeweils mit Hilfe eines Schiebereglers aufgerufen werden kann.

1. Stufe: An der Darstellung des geometrischen Objektes lassen sich die gewünschten Bewegungen bzw. Veränderungen real durchführen.
2. Stufe: Konsequenzen dieser Veränderungen für relevante Größen werden stärker in den Blick genommen, indem diese Größen als Balken aufgetragen sind, die dynamisch den aktuellen Wert der Größe darstellen (z. B. eine Streckenlänge oder eine Winkelgröße).
3. Stufe: Die abhängigen Größen werden über der unabhängigen Größe in einem Diagramm aufgetragen.

Auf diese Weise sind gestufte Fokussierungshilfen möglich. Dies erleichtert es den Schülerinnen und Schülern, selbst Stellung zu den Ergebnissen und Vorhersagen der anderen Gruppen zu nehmen und, wo das noch nicht in ausreichender Weise in den Gruppen geschehen ist, Begründungen für die Vorhersagen zu entwickeln. In **Abb. 78** ist exemplarisch das DynaGeoX-Applet zum Problem des Kolbenmotors wiedergegeben. Im Bild sind bereits alle drei Stufen eingeblendet.

[214] Die Arbeitsblätter findet man im Anhang auf den Seiten 235 bis 241.
[215] vgl. S. 110ff

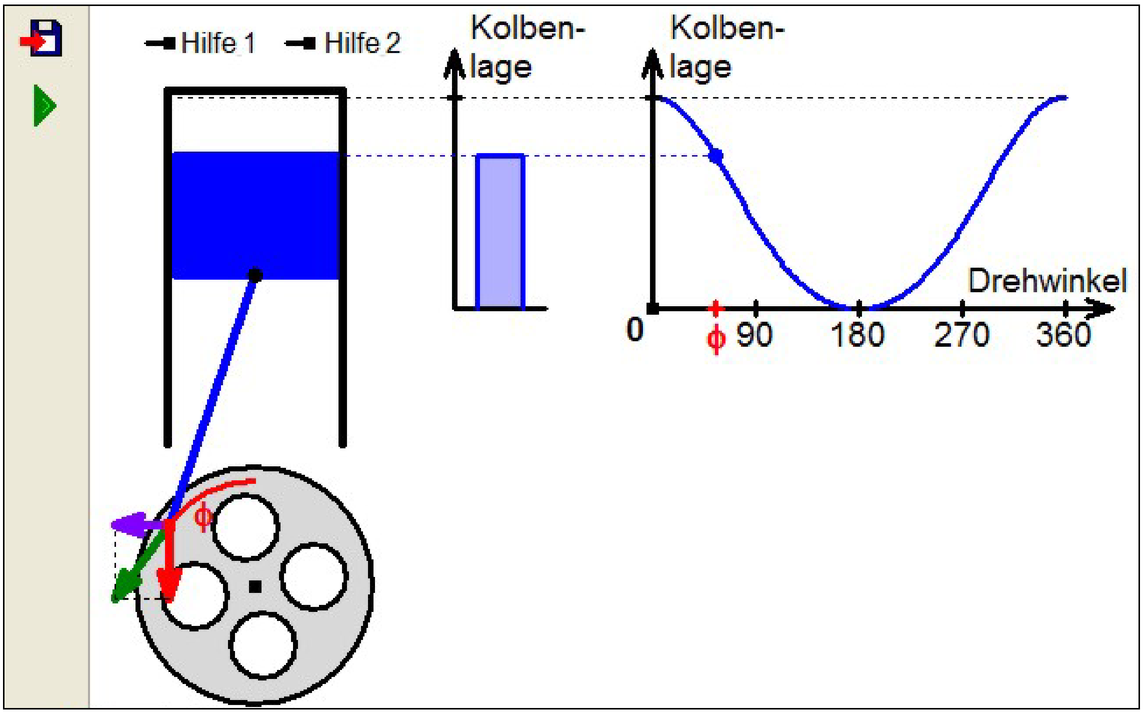


Abb. 78: DynaGeoX-Applet zum Kolbenmotor

Neben den genannten DynaGeoX-Applets haben sich für die Vertiefung des Verständnisses in dieser vierten Phase der Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten vereinfachende Anschauungsmodelle bewährt. Sie helfen den Schülerinnen und Schülern, das Wesentliche der geometrischen Situation in den Blick zu nehmen und dienen als Verständnisgrundlage. Es sei hier z. B. auf das „*Gummibandmodell*" auf Seite 82 verwiesen, das das Änderungsverhalten einer Streckenlänge verdeutlicht. Entsprechend bietet sich für das Verständnis des Änderungsverhaltens einer Winkelgröße[216] u. a. folgendes Modell an:

> „*Zirkelmodell*":
> Man stelle sich den Winkel als Winkel zwischen den Schenkeln eines Zirkels vor. Der Zirkel soll nun geöffnet werden, indem man einen Schenkel festhält und an einer Stelle des anderen Schenkels zieht. Wie muss man ziehen, dass der Zirkel sich am stärksten bzw. gar nicht öffnet? Der Zirkel wird sich gar nicht öffnen, wenn man in die aktuelle Schenkelrichtung zieht und am stärksten/schnellsten öffnen, wenn man senkrecht zur aktuellen Schenkelrichtung zieht (vgl. **Abb. 79**).

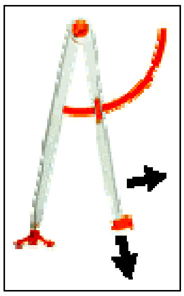


Abb. 79: Zirkelmodell

[216] Vgl. hierzu etwa die Arbeitsblätter für die Gruppen 5 und 6 auf den Seiten 238f.

3.2 Konzept zur Vermittlung einer didaktischen Idee

Ich habe im letzten Abschnitt versucht anhand dreier Beispiele das Unterrichtskonzept zu veranschaulichen. Um die Idee des Beweglichen Denkens in die Schulwirklichkeit zu bringen, ist aber wesentlich mehr nötig als die Entwicklung eines Unterrichtskonzepts für den Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe. Einerseits muss das Konzept im Schulalltag getestet und evaluiert werden. Dazu braucht man Lehrerinnen und Lehrer, die sich bereit erklären, sich mit ihren Klassen an einem Forschungsprojekt zu beteiligen. Andererseits ist es für eine Breitenwirkung der Idee in den Schulalltag hinein entscheidend, möglichst viele Lehrerinnen und Lehrer für das Konzept zu erwärmen und im Idealfall zu begeistern. Eine praxisrelevante Weiterentwicklung von Lehren und Lernen im Mathematikunterricht[217] findet nämlich de facto nur dann statt, wenn (neue) Ideen nicht nur in Didaktikerkreisen diskutiert werden, sondern auch in der Unterrichtswirklichkeit ankommen. Da dies erfahrungsgemäß oft nicht im gewünschten Ausmaß der Fall ist, stellt sich die Frage, wie ein gangbarer Weg zur Auflösung oder Minderung dieser Problematik aussehen könnte. Jede praktikable Antwort auf diese Frage muss, wie oben bereits angedeutet, insbesondere die Lehrerinnen und Lehrer in den Blick nehmen, die den „real existierenden“ Mathematikunterricht konzipieren, organisieren und folglich maßgeblich prägen.

Will man Lehrerinnen und Lehrern eine didaktische Idee vermitteln, so muss man erst einmal mit ihnen in Kontakt treten. Dies ist zunächst im Rahmen der Ausbildung (Studium, Referendariat) und anschließend in der Weiterbildung möglich. Da die angehenden Lehrer in der Ausbildungsphase zu sehr mit anderen Problemen beschäftigt sind und ihnen (zumindest während des Studiums) oft noch ein realistischer Blick auf den Unterricht fehlt, können hier bestenfalls Grundlagen für ein späteres Interesse an didaktischen Konzepten gelegt werden. Eine Auseinandersetzung damit im Rahmen eigener Unterrichtsversuche ist in der Regel schon aus organisatorischen Gründen nur in begrenztem Umfang möglich. Die Lehrerfortbildung ist dann der geeignete Ort hierfür, wenn die sich bietenden Gelegenheiten konsequent genutzt werden. Erwähnt seien hier

[217] Die praxisrelevante Weiterentwicklung von Lehren und Lernen im Mathematikunterricht ist eine wichtige Aufgabe der Mathematikdidaktik. Für WITTMANN (1992) ist die Konstruktion von Unterrichtseinheiten, Unterrichtskonzepten und Curricula sogar der Kernbereich der Mathematikdidaktik.

nur RLFB (regionale Lehrerfortbildung), SchiLF (schulinterne Lehrerfortbildung), SINUS-Transfer[218] und die Tatsache, dass die Kultusministerien immer stärker auf eine Dezentralisierung der Lehrerfortbildung sowie eine Weiterbildungsverpflichtung mit vorgeschriebenem Mindestumfang an Fortbildungstagen pro Lehrkraft setzen. Dies eröffnet insbesondere auch die Möglichkeit, über einen längeren Zeitraum mit kleinen Lehrerteams zu arbeiten, die die vorgeschriebene Fortbildungszeit für eine von ihnen als sinnvoll empfundene Weiterentwicklung ihres Unterrichts verwenden wollen. Solche kleinen Teams erhöhen die Chance, dass (neue) didaktische Ideen wirklich im Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer umgesetzt werden. Damit die beteiligten Lehrkräfte die didaktische Grundidee erfassen, müssen ihnen die zentralen Punkte beispielorientiert dargestellt und Unterrichtsmaterialien für einen konkreten, lehrplanbezogenen Unterricht an die Hand gegeben werden.[219]

Ansatzpunkte zur Steigerung der Akzeptanz

Die Chance, dass Lehrerinnen und Lehrer ein Unterrichtskonzept auch annehmen, ist dann größer, wenn im Rahmen von Lehrerfortbildungsveranstaltungen und bei der Entwicklung und Gestaltung von Unterrichtsmaterialien verschiedene Punkte beachtet werden:

- *Alle Beteiligten da abholen, wo sie stehen.*

  Wichtig ist, die Lehrerinnen und Lehrer sowie die Schülerinnen und Schüler nicht zu überfordern. Unterrichtsvorschläge sollten an den bisherigen Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer anknüpfen. Dies gilt für alle Bereiche des Unterrichtsgeschehens, wie z. B. die Sozialform, den Medieneinsatz, den Grad der Selbsttätigkeit u. s. w.

---

[218] Am Modellversuchsprogramm „Sinus“ haben in Deutschland 180 Schulen in den letzten fünf Jahren an der Weiterentwicklung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts gearbeitet. Im Rahmen des Programms SINUS-Transfer sollen nun die Ergebnisse anderen Schulen vorgestellt, hilfreiche Anregungen weitergegeben und weitere Lehrkräfte in die Arbeit mit einbezogen werden. Dazu wurden und werden an einzelnen Schulen, aber auch schulübergreifend, kleine Teams (Sets) gebildet.

[219] Beispielhaft ausgearbeitetes Unterrichtsmaterial kann als Anregung bzw. Grundlage für eigene Unterrichtsausarbeitungen nach der zu Grunde liegenden Idee dienen und helfen, die Kolleginnen und Kollegen zur Umsetzung im eigenen Unterricht zu motivieren. Letzteres ist dann Erfolg versprechender, wenn neben einem mindestens gleich guten Unterrichtserfolg auch eine Arbeitserleichterung erwartet werden kann, z. B. durch die Übernahme geeigneter, bereits fertig ausgearbeiteter Unterrichtsmaterialien, die ggf. an die eigenen Bedürfnisse angepasst werden können.

- *Neues dosiert einbringen.*

  Von dem Gewohnten ausgehend, werden die Veränderungen sukzessive intensiviert und das Anforderungsniveau nach und nach gesteigert. Nur wenn man nicht „an zu vielen Schrauben gleichzeitig dreht“, ist ein nachhaltiger Erfolg erreichbar. [220]

- *Auf ein klares und realistisches Zeitmanagement achten.*

  Ein Planungskriterium muss die Frage sein, was sich innerhalb der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit und bei Einhaltung der Lehrplanvorgaben realisieren lässt. Es müssen also Schwerpunkte gesetzt werden.

Insbesondere müssen die Bedürfnisse der beteiligten Lehrerinnen und Lehrer einbezogen und berücksichtigt werden. Diese Bedürfnisse manifestieren sich erfahrungsgemäß in folgenden Fragen:[221]

- Was „bringt“ diese didaktische Idee für meinen Unterricht?
  Neben einem mindestens gleich guten Unterrichtserfolg (der z. B. mit Hilfe eines Leistungstests überprüft werden kann) sollten noch weitere positive Aspekte, wie z. B. leichterer Zugang, Anschaulichkeit, Entwicklung der Argumentationsfähigkeit, Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen, Motivationssteigerung u. v. m. genannt und ggf. mit Beobachtungen aus der Erprobungsphase illustriert werden.

- Geht das auch in/mit einer „normalen“ Klasse?
  Bereits in der Erprobungsphase des Unterrichtskonzepts sollte mit „durchschnittlichen“ Klassen im Hinblick auf Schülerzahl, Begabungsprofil, organisatorischen Rahmen u. a. gearbeitet werden. Nur so lässt sich die Praxistauglichkeit einer didaktischen Idee realistisch einschätzen.[222]

- Gibt es geeignete Prüfungsaufgaben?

[220] Auf diesen und den vorhergehenden Punkt habe ich oben bei der Vorstellung des Unterrichtskonzepts bereits mehrfach hingewiesen.
[221] Diese Fragen habe ich selbst immer wieder auf von mir (mit-)organisierten Lehrerfortbildungen gehört. Darüber hinaus wurden diese Bedürfnisse aber auch von den Lehrerinnen und Lehrern artikuliert, die am Unterrichtsversuch im Rahmen dieser Arbeit teilgenommen haben.

Es müssen Prüfungsaufgaben konzipiert und in der Erprobungsphase in Prüfungen eingesetzt werden. Es geht hier um die Frage bzw. den Nachweis, ob bzw. dass es möglich und praktikabel ist, den gewählten Unterrichtsschwerpunkt auch in Klassenarbeiten abzuprüfen.[223]

- Wie arbeitet man konkret mit (neuen) Medien?

  Es ist notwendig, neben Tipps und Hinweisen zum grundlegenden Umgang mit bestimmten Programmen (hier z. B. die DGS EUKLID DynaGeo) auch Vorschläge zum Unterrichtseinsatz einschließlich fertig ausgearbeiteter Dateien zur Verfügung zu stellen.[224]

- Gibt es dazu Unterrichtsmaterialien?

  Es wurde bereits angemerkt, wie wesentlich ausgearbeitete und erprobte Unterrichtsmaterialien für die Vermittlung und Verbreitung didaktischer Ideen in die Schulwirklichkeit sind.[225] Dazu ist aber auch die Bereitschaft erforderlich, solche Materialien im Rahmen von Fortbildungen zur Verfügung zu stellen und das Anpassen an eigene Bedürfnisse sowie die Weiterentwicklung explizit zu erlauben.

- Kann man das auch in anderen Schulstufen umsetzen?

  Wenn geeignete Anregungen und Ausblicke geboten werden, kann eine Umsetzung der Idee für weitere Inhalte und Jahrgangsstufen in kleinen Lehrerteams, in denen sich die Kolleginnen und Kollegen gegenseitig inspirieren und weiterbringen, sehr effizient sein. So schließt sich der Kreis und es werden aus der Unterrichtswirklichkeit heraus weitere Beispiele und Unterrichtsmaterialien zur Vermittlung der didaktischen Idee an andere Lehrkräfte und zur Umsetzung im Unterricht entwickelt.

---

[222] Ich habe versucht diesen Aspekt so gut wie möglich im Unterrichtsversuch zu realisieren.

[223] Mir ist die Problematik der potenziell normierenden Wirkung von Beispielaufgaben bewusst. Aus diesem Grund müssen Lehrerinnen und Lehrer explizit dazu angeregt werden, selbst eigene Aufgabenformate zu entwickeln.

[224] Dies dient als Anregung zur eigenen (Weiter-)Entwicklung von Unterrichtsmaterialien und mindert evtl. Startschwierigkeiten.

[225] Die Materialien müssen u. a. Hinweise auf geeignete Methoden enthalten, die das Erreichen des Konzeptziels bzw. der -ziele erleichtern.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurde das oben genannte Konzept nur teilweise realisiert. Insbesondere der letztgenannte Aspekt, die Umsetzung der Grundidee in eigene Unterrichtskonzepte und deren Evaluation in kleinen Teams, konnte hier noch nicht verwirklicht werden[226], da es sich um eine Erprobungsphase handelte, die, wie oben dargestellt, die Grundlage für die Weiterentwicklung und Ausdehnung des Konzepts legen sollte. Allerdings wurde auch hier schon auf einige grundlegende Dinge geachtet, die sich auch international im Rahmen von „inservice teacher education", also im Rahmen von Fortbildungsprogrammen für im Schuldienst stehende Lehrerinnen und Lehrer, als zentral für das Gelingen herausgestellt haben.[227]

> „In the practices described (…), the fundamental nature of the success of teacher and teaching development seemed to lie in teachers taking responsibility to explore practices and theories, raise questions, expose problems, use communication and negotiation to confirm or challenge practices, and to open up new ways of seeing and understanding. The collaborative nature of developmental processes were significant to effective outcomes. (…) The teachers in the studies quoted were small in number (…) and in close communication with educators with strong views and incentives to promote practices deemed to be emancipatory for teachers and thus advantageous to children's mathematical development." JAWORSKI ET AL. (1999), p. 205

Auch ich habe mit einer kleinen Gruppe bestehend aus fünf Lehrkräften (drei Lehrerinnen und zwei Lehrer) zusammengearbeitet. Die Kolleginnen und Kollegen haben sich auf Anfrage freiwillig bereit erklärt am Projekt mitzuarbeiten. Dies ist ein wesentliches Kriterium! Nur auf freiwilliger Basis kann in einer Lehrergruppe der jeweils eigene Unterricht sinnvoll weiterentwickelt werden. Basis des Unterrichtsversuches im Geometrieunterricht der 7. Klasse war ein siebzig Seiten umfassendes Lehrerskript mit Hintergrundinformationen, methodischen Anregungen und über hundert EUKLID DynaGeo-Dateien für den Einsatz im Unterricht. Dieses Skript diente als Grundlage für die monatlichen Treffen der beteiligten Lehrerinnen und Lehrer mit mir als dem Projektleiter. Mit diesen Treffen wurden mehrere Ziele verfolgt:

---

[226] Am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg läuft allerdings gerade ein Projekt an (Pentagramm-Projekt), das genau dieses Ziel verfolgt.

[227] Ich beziehe mich hier auf JAWORSKI ET AL. (1999), die entsprechende Projekte zusammenfassend darstellen, die in Großbritannien, Israel, Neuseeland, Österreich, Portugal, Südafrika und den USA stattgefunden haben.

- *Einführung in die grundlegenden Ideen des Beweglichen Denkens* an Beispielen des Geometrieunterrichts der 7. Klasse durch den Projektleiter[228]. Dabei diskutieren alle anwesenden Kolleginnen und Kollegen das Potenzial für ihre Klassen, formulieren etwaige Bedenken, bringen Anregungen und Wünsche an das Material ein.[229]
- Die Lehrerinnen und Lehrer schreiten in ihrem Unterricht unterschiedlich schnell voran und teilen auch die Algebra und Geometrieanteile in ihren Klassen individuell auf. *Einzelne Kolleginnen und Kollegen können den anderen bereits von ihren Erfahrungen in einem bestimmten Unterrichtsabschnitt berichten.* Auf diese Weise werden Anregungen aus der Praxis weitergegeben und so der Unterricht bereits während dieses Versuchsjahres weiterentwickelt.
- Das Konzept war von Anfang an daraufhin ausgelegt, die *Kolleginnen und Kollegen zum kreativen Umgang mit dem Material anzuregen*. Alle haben mehr oder weniger deutliche Anpassungen an ihren eigenen Unterrichtsstil sowie an ihre Lerngruppe vorgenommen. Auf diese Weise hat der Unterricht in jeder der fünf beteiligten Klassen etwas anders ausgesehen. So haben die Kolleginnen und Kollegen je nach den persönlichen Vorlieben, den Voraussetzungen in der Klasse und den schulischen Rahmenbedingungen u. a.
    - eher lehrerzentriert oder eher schülerzentriert gearbeitet,
    - bei einzelnen Themen individuelle Schwerpunkte gesetzt,
    - den Computer nur punktuell oder sehr regelmäßig eingesetzt.

  Über diese Fragen haben sich die beteiligten Lehrerinnen und Lehrer bei den monatlichen Treffen sehr intensiv ausgetauscht. Für fast alle der Kolleginnen und Kollegen von drei verschiedenen Schulen war es einen neue und nach eigener Aussage wichtige und bereichernde Erfahrung, *den eigenen Unterricht mit anderen Kolleginnen und Kollegen zu diskutieren und verschiedene Ansätze auszutauschen*.

[228] Wenn im Folgenden vom Projektleiter gesprochen wird, ist immer der Autor gemeint.
[229] Im Laufe des Projektjahres wurde z. B. das Lehrerskript den Bedürfnissen der Kolleginnen und Kollegen angepasst.

3.3 Leistungstest

Der Erfolg des oben exemplarisch skizzierten Unterrichtskonzepts sollte im Hinblick auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens mit Hilfe eines Leistungstests überprüft werden. Da ein Test mit dieser Intention bisher nicht vorlag, musste er im Rahmen dieser Arbeit entwickelt werden.

Die Unterrichtsklassen und die Kontrollklassen der Hauptuntersuchung haben jeweils einen Fragebogen zu Beginn und am Ende des Untersuchungszeitraumes, also des Schuljahres 2002/03, bearbeitet. Der Fragebogen des Vortests besteht nur aus Items zum Beweglichen Denken. Im Nachtestfragebogen sind auch Items enthalten, die nicht unbedingt mit Hilfe des Beweglichen Denkens zu lösen sind, zu deren Beantwortung aber Wissen und Kenntnisse aus dem Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe notwendig ist. Die Beantwortung dieser Items soll einen Hinweis darauf geben, ob durch die intensive Beschäftigung mit dem Beweglichen Denken evtl. andere (Inhalts-)Ziele des Unterrichts vernachlässigt werden. Diese Items[230] wurden dem Itempool der TIMS-Studie entnommen. Außerdem beinhaltet der Nachtest auch zwei zusätzliche Items zur Kompetenzstufe „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“ des Beweglichen Denkens für den Bereich Geometrie.[231] Sie dienen zur Klärung der Frage, inwieweit ein Unterricht, der im Themenbereich Geometrie im Wesentlichen auf die beiden ersten Kompetenzstufen des Beweglichen Denkens abhebt, auch positive Auswirkungen auf die Ausbildung der Fähigkeit der dritten Kompetenzstufe in diesem Inhaltsbereich hat.

Im Folgenden werden aus Gründen der einfacheren Zuordnung die Items *beider* Tests mit den Itemnummern des (umfangreicheren) Nachtests bezeichnet, der in Anhang B auf den Seiten 242ff abgedruckt ist. Die vier Items, die nur im Vortest, nicht aber im Nachtest vorkommen, werden in der Itemnummer durch ein „X“ (z. B. 9X bzw. XA) kenntlich gemacht.[232] Nach diesen für das Verständnis notwendigen Vorbemerkungen wird nun die Entwicklung der Leistungstests in chronologischer Reihenfolge beschrieben.

[230] Es handelt sich um die Items 1 bis 4 des im Anhang B auf den Seiten 242ff abgedruckten Fragebogens.
[231] Es handelt sich um die Items 5 und 6 des auf den Seiten 242ff abgedruckten Fragebogens.
[232] vgl. die Itemnummern in **Tabelle 9** auf Seite 174 und in **Tabelle 11** auf Seite 177

3.3.1 Entwicklung des Leistungstests

Die Schwierigkeit bei der Entwicklung von Items, die Fähigkeiten im Rahmen einer bestimmten Denkweise testen sollen, besteht darin, Probleme zu identifizieren, die (möglichst) ausschließlich mit Hilfe dieser Denkweise gelöst werden können. Dies ist im Hinblick auf das Bewegliche Denken insbesondere deshalb schwierig, weil es in der Regel auch statische Herangehensweisen an Problemstellungen gibt, die zur Lösung führen. Ich habe versucht diese Problematik dadurch zu verringern, dass die Items bereits durch die Art der Aufgabenstellung eine Herangehensweise über vorgestellte Veränderungen bzw. Bewegungen nahe legen. Bei der Itemkonstruktion bin ich von den drei Kompetenzen des Beweglichen Denkens ausgegangen, die in **Tabelle 8** noch einmal zusammengestellt sind. Die Kompetenzstufen werden mit den Ziffern 1 bis 3 aufsteigend kodiert, wobei der größere Zahlenwert mit einer höheren intellektuellen Anforderung korrespondiert.

Kompetenz des Beweglichen Denkens	Kodierung
Bewegung hineinsehen und damit argumentieren	1
Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren	2
Änderungsverhalten erfassen und beschreiben	3

Tabelle 8: Kompetenzen des Beweglichen Denkens und ihre Kodierung

Ich gehe davon aus, dass ein Proband, der bei einer Problemstellung eine Kompetenz mit einer hohen Kodierungszahl nachweist, auch über die Kompetenz(en) der niedrigeren Kompetenzstufe(n) verfügt. Nach dieser Prämisse ist eine Versuchsperson, die das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben kann, auch in der Lage, die zugehörige Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren und natürlich auch in eine Konfiguration eine Bewegung hineinzusehen und damit zu argumentieren. Umgekehrt muss ein Proband bereits über die niedrigere(n) Kompetenzstufe(n) verfügen, wenn er eine höhere erreichen will. Entsprechend ging ich von der theoriegeleiteten Erwartung aus, dass Items, die auf die Kompetenzstufe 3 abzielten, schwieriger sind, also von weniger Probanden richtig gelöst werden, als solche, die die Kompetenzstufe 2 abprüfen und diese wiederum komplizierter als Items, die primär die Kompetenzstufe 1 im Auge haben.

Die Items 5 bis 11 des Fragebogens, der im Anhang B ab Seite 242 abgedruckt ist, sind Items, die aus einem von mir konstruierten Itempool stammen, der auf das Bewegliche Denken abzielt. Es handelt sich um Items mit Antwortvorgaben in Form von Auswahlantworten. Ein erster Test von Itementwürfen mit einer 7. Klasse eines bayerischen Gymnasiums hat nämlich gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler (in deren Unterricht kein Augenmerk auf das Bewegliche Denken gelegt wurde) teilweise erhebliche Schwierigkeiten mit Items hatten, in denen eine (halb-)offene Beantwortung gefordert war.

Zur Konstruktion geeigneter Distraktoren (falscher Antwortalternativen) wurde einer 7. Klasse eines bayerischen Gymnasiums und einer Gruppe von 38 Lehramtsstudierenden[233] ein Fragebogen mit den Inhalten der intendierten Items vorgelegt, die halboffen zu beantworten waren. Die Antworten mussten also frei formuliert werden. Auf der Grundlage der zahlreichen falschen Antworten aus dieser Voruntersuchung wurden die Distraktoren formuliert. Auf diese Weise wurde versucht, die Wahrscheinlichkeit zu verringern, die korrekte Auswahlantwort im „Ausschlussverfahren“ auf Grund von unrealistischen Antwortalternativen zu finden. Weitere Maßnahmen zur Verringerung der Ratewahrscheinlichkeit waren die Vorgabe, dass jeweils mehrere Auswahlantworten richtig sein können, sowie die Angabe von möglichst vielen sinnvollen Distraktoren bei jedem Item (vgl. **Tabelle 9** auf Seite 174).

Die auf diese Weise konstruierten Items wurden einer 7. Klasse eines bayerischen Gymnasiums und der oben bereits erwähnten Gruppe von 38 Lehramtsstudierenden vorgelegt. Ihr Auftrag war es, die Items zu beantworten und Verständnisschwierigkeiten sowie sprachliche Unklarheiten im Itemtext festzuhalten. Auf Grund dieser Rückmeldungen wurde an manchen Stellen die Sprache der Itemtexte vereinfacht, an anderen Stellen die Aufgabenstellung präzisiert. Des Weiteren wurde dabei deutlich, dass der in den Items zum Änderungsverhalten verwendete Begriff „gleichmäßig“ zunächst nicht intuitiv klar war. Daraufhin wurde die im Anhang B auf Seite 252 abgedruckte Folie

---

[233] Es handelte sich um eine Gruppe von Lehramtsstudierenden des 2. Semesters mit Unterrichtsfach Mathematik. Die Mehrheit strebte das Lehramt an Realschulen an, einzelne Studierende aber auch das Lehramt für Haupt- bzw. Grundschulen.

zum Fragebogen erstellt, die anhand zweier Beispiele die Verwendung dieses Begriffs im Fragebogen erläutert.

Zur Herstellung der *Durchführungsobjektivität* des Tests erhielten alle Testleiter[234] folgende Anweisung:

1. Vor Beginn des Tests die „Hinweise zur Bearbeitung des Fragebogens“ (vgl. Seite 243 im Anhang B) vorzulesen.
2. Mit dem Hinweis, dass hier der Begriff „gleichmäßig“ erklärt wird, die Folie zum Fragebogen mit Hilfe eines Tageslichtprojektors zu projizieren.
3. Nach ca. zwei Minuten den Beginn der Bearbeitungszeit zu verkünden und anschließend keine Erklärungen mehr abzugeben.

[234] Die Testleiter waren in der Regel die in der jeweiligen Klasse unterrichtenden Mathematiklehrerinnen bzw. -lehrer.

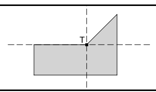
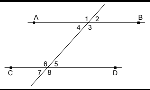
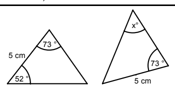
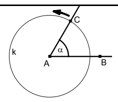
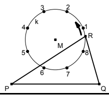
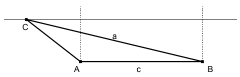
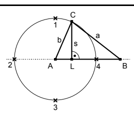
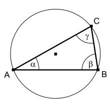
Itemthema	Itemnummer	Richtige Auswahlantwort(en)	Anzahl der Auswahlantworten
	1	d)	5
	2	b)	5
	3	b)	5
rechtwinklig-gleichschenklig	4	d)	4
	5	b)	5
	6	a) und e)	8
$\boldsymbol{x + 3}$	7A	b)	3
	7B	c) und d)	5
$\boldsymbol{3 - x}$	8A	a)	3
	8B	c) und d)	5
	**9X**	**c)**	**4**
	9A	a), b) und c)	4
	9B	b)	4
$\boldsymbol{3x}$	**XA**	**b)**	**3**
	XB	**b) und d)**	**5**
	10A	d) und e)	7
	10B	c)	7
	10C	d), f) und g)	7
	11A	a)	6
	11B	b)	6
	11X	**c) und/oder d)**	**6**

Tabelle 9: Zusammenstellung der richtigen Auswahlantworten für die Testitems[235]

Die *Auswertungsobjektivität* ist dadurch gewährleistet, dass hier Auswahlantworten einzukreisen sind und für die Auswertung nur überprüft werden muss, ob *alle* richtigen Antwortalternativen markiert sind. Ist dies der Fall, so wird die Antwort mit „1“ als richtig kodiert, andernfalls mit „0“ als falsch.

[235] Die fett gedruckten Items mit einem X in der Itemnummer kommen nur im Vortest vor. Die Items 7A, 8A und XA sowie 7B, 8B und XB sind jeweils identisch formuliert, beziehen sich aber jeweils auf einen anderen Term, nämlich $x + 3$, $3 - x$ bzw. $3x$. Auch die Items 9X, 9A und 9B sind identisch formuliert, beziehen sich allerdings auf andere Geradenabschnitte, nämlich die Bereiche (1), (2) bzw. (3). Gleiches gilt für die Items 11A, 11B und 11X, die identisch formuliert sind, sich aber auf die Winkel α, β bzw. γ beziehen. Die Items 1 bis 6 finden sich nur im Nachtest, nicht aber im Vortest.

Im Rahmen der in Abschnitt 3.1.1 auf den Seiten 135ff bereits knapp umrissenen Voruntersuchungen wurde der aus dem oben beschriebenen Prozess resultierende Fragebogen 244 Schülerinnen und Schülern aus zehn 7. Klassen und 139 Schülerinnen und Schülern aus sechs 8. Klassen bayerischer Gymnasien vorgelegt.[236] Dabei handelte es sich um Klassen, die nicht an den Unterrichtsversuchen zum Beweglichen Denken teilgenommen hatten. Der Fragebogen wurde jeweils in einer Unterrichtsstunde in den letzten Wochen des Schuljahres 2001/2002 bearbeitet.

Die Daten der 8. Klassen wurden genutzt um zu schwierige Items auszusortieren. Die verbleibenden Items wurden mit Hilfe der Daten der 7. Klassen einer Itemanalyse unterzogen. Dabei ging es zunächst um die Frage, ob die auf theoretischen Überlegungen bzgl. der Kompetenzstufen des Beweglichen Denkens basierende Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Items sich auch in den Rangplätzen der Items widerspiegelt. Zur Bestimmung der Rangplätze werden zunächst die Itemschwierigkeiten p als relative Anteile der Probanden bestimmt, die das jeweilige Item richtig gelöst haben.[237] Dem leichtesten Item, das also von den meisten Probanden richtig gelöst wurde, wird dann der Rangplatz 1 zugeordnet, dem Item mit dem zweitgrößten Anteil richtiger Lösungen der Rangplatz 2 u. s. w. Eine Gegenüberstellung der Rangplätze und der vorab auf Grund theoretischer Überlegungen zu Stande gekommenen Einschätzung der zur Beantwortung des jeweiligen Items notwendigen Kompetenzstufe des beweglichen Denkens liefert **Tabelle 11** auf Seite 177.

Der Korrelationskoeffizient r der Produkt-Moment-Korrelation zwischen den Merkmalen „Rangplatz“ und „Kompetenzstufe des Beweglichen Denkens“ der Testitems hat den Wert $r = 0{,}71$. Dieser deutlich positive Zusammenhang ist ein Indiz für die *interne Validität* des Tests. Auf Grund der Beantwortung des Fragebogens lassen sich also Rückschlüsse auf den Entwicklungsstand des Beweglichen Denkens eines Probanden anstellen.

[236] Eine Zusammenstellung der beteiligten Klassen findet sich in **Tabelle 10** auf Seite 176.
[237] Dies gilt für dichotome Items, die nur als richtig oder falsch kodiert werden, wie es bei unseren Items der Fall ist.

Schul-jahr	Bayerisches Gymnasium	Klasse	Bearbeitungs-datum	Anzahl *N* der Schüler
2001/02	A	7a	17.07.2002	
2001/02	B	7c	10.07.2002	
2001/02	B	7a	11.07.2002	
2001/02	E	7a	04.07.2002	
2001/02	F	7a	04.07.2002	
2001/02	G	7a	01.07.2002	
2001/02	H	7c	18.07.2002	
2001/02	J	7b	11.07.2002	
2001/02	J	7d	11.07.2002	
2001/02	K	7d	12.07.2002	$N = 244$
2001/02	A	8b	25.07.2002	
2001/02	A	8c	04.07.2002	
2001/02	A	8e	04.07.2002	
2001/02	A	8g	01.07.2002	
2001/02	C	8a	11.07.2002	
2001/02	C	8c	10.07.2002	$N = 139$

Tabelle 10: Überblick über die Klassen, die den Fragebogen ausgefüllt aber nicht an den Unterrichtsversuchen der Voruntersuchungen teilgenommen haben. Der Kodierung ist zu entnehmen, dass zehn 7. und sechs 8. Klassen aus neun bayerischen Gymnasien beteiligt waren.[238]

[238] Die Kodierung der Gymnasien entspricht der Kodierung in **Tabelle 7** auf Seite 136. Gleiche Buchstaben bezeichnen dabei dasselbe Gymnasium.

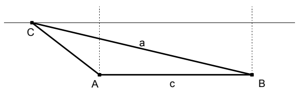
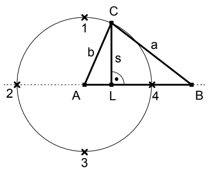
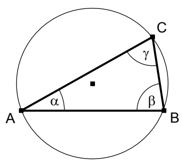
Itemthema	Item-nummer	Rangplatz (Itemschwierigkeit)	Kompetenzstufe des Beweglichen Denkens
$\boldsymbol{x+3}$	7A	1 (p = 0,88)	1
	7B	10 (p = 0,45)	3
$\boldsymbol{3-x}$	8A	8 (p = 0,54)	1
	8B	12 (p = 0,41)	3
	**9X**	**7 (*p* = 0,66)**	**2**
	9A	13 (p = 0,31)	2
	9B	9 (p = 0,52)	2
$\boldsymbol{3x}$	**XA**	**6 (*p* = 0,70)**	**1**
	XB	**14 (*p* = 0,17)**	**3**
	10A	11 (p = 0,42)	1
	10B	2 (p = 0,84)	1
	10C	15 (p = 0,04)	2
	11A	4 (p = 0,73)	1
	11B	3 (p = 0,77)	1
	11X	**4 (*p* = 0,73)**	**1**

Tabelle 11: Zur Beantwortung der Testitems jeweils notwendige Kompetenzstufen des Beweglichen Denkens und Rangplätze der Testitems[239]

Dem Histogramm in **Abb. 80** auf Seite 178 ist zu entnehmen, dass die Testrohwerte, also die prozentualen Anteile richtiger Testantworten über alle in Vor- und Nachtest identischen Items (also die *nicht* fett gesetzten Items in **Tabelle 11**) über den gesamten Wertebereich streuen. Die Nullhypothese, dass die Testrohwerte nach einer Normalverteilung verteilt sind, kann auf Grund eines χ^2-Tests[240] *nicht* verworfen werden. Man macht also keinen allzu großen Fehler, wenn man davon ausgeht, dass die Verteilungsfunktion der durch den Test gemessenen Leistungsfähigkeit im Hinblick auf das Beweg-

[239] vgl. Fußnote 235 auf Seite 174

[240] $V = 20,68 < 24,32 = \chi^2_{99,9\%}(7)$

liche Denken eine Normalverteilung ist.[241] Dies ist gerade auch im Hinblick auf die Anwendung des t-Tests als Signifikanztest von Bedeutung.

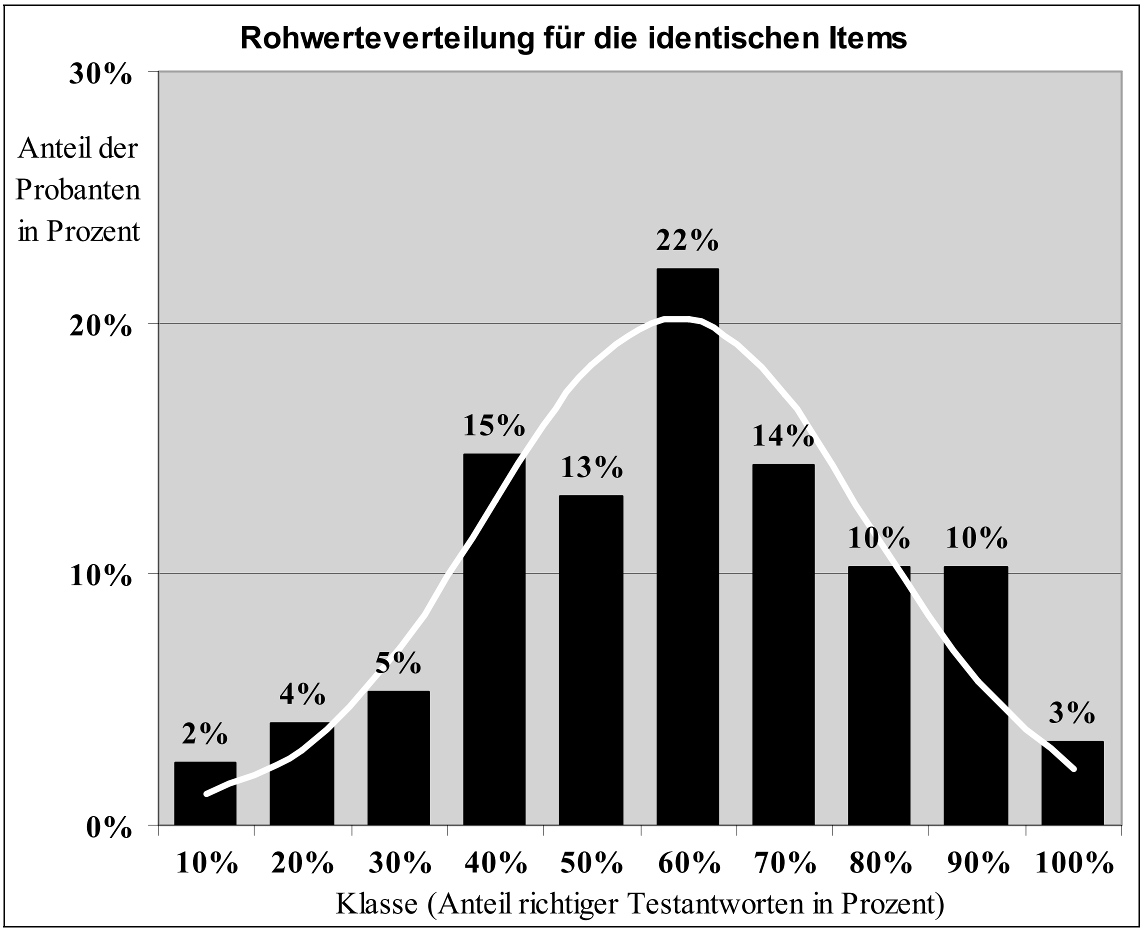


Abb. 80: Histogramm der Rohwerteverteilung für den Vortest mit 244 Schülerinnen und Schülern aus zehn 7. Klassen bayerischer Gymnasien (über alle in Vor- und Nachtest identischen Items)

3.3.2 Methoden zur Auswertung des Leistungstests

Die Auswertung des Leistungstests erfolgt primär mit Hilfe quantitativer Methoden. Um aber ggf. zusätzliche qualitative Auswertungen einzelner Testergebnisse zu ermöglichen, ist bei jedem Item zum Beweglichen Denken zusätzlich zu den Auswahlantworten eine freie Fläche (Kasten) vorgesehen, in der die Probanden ihre Lösungen der Items

[241] Um auch einen visuellen Eindruck vom Zusammenhang zwischen der Rohwerteverteilung und einer Normalverteilung zu vermitteln, wurde in das Histogramm in **Abb. 80** eine Gaußsche Glockenkurve zum empirischen Mittelwert und der empirischen Standardabweichung der Rohwerteverteilung skizziert.

erläutern sollten. Die Inhalte dieser Kästen gehen *nicht* in die quantitative Auswertung der Tests ein.

Die Items werden dichotom ausgewertet, d. h. es wird jeweils nur festgestellt ob die Beantwortung eines Items richtig oder falsch ist. Dies bedeutet z. B., dass bei Items mit mehr als einer richtigen Auswahlantwort *alle* korrekten Auswahlantworten (und nur diese) markiert sein müssen, damit das Item als richtig beantwortet gewertet wird. In diesem Sinn richtige Antworten werden mit „1“ kodiert, falsche Antworten mit „0“.

3.3.2.1 Parallelisierung durch Bildung von „Matched Samples“

Mit Hilfe des Leistungstests soll insbesondere die Wirksamkeit des in dieser Arbeit vorgestellten Unterrichtskonzepts untersucht, d. h. verschiedene Unterschiedshypothesen überprüft werden.[242] Eine erhebliche Störvariable ist dabei die Ungewissheit, in welcher Weise sich die bereits vorhandenen Fähigkeiten des Beweglichen Denkens auf die Weiterentwicklung durch einen entsprechenden Unterricht auswirken. Um diese Störvariable zu kontrollieren werden die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen und der Kontrollklassen auf Grund ihrer Leistung[243] im Vortest paarweise einander zugeordnet. Konkret wird also eine Schülerin bzw. ein Schüler aus der Kontrollgruppe nur dann in die Untersuchungspopulation aufgenommen, wenn sich eine Schülerin oder ein Schüler der Unterrichtsgruppe findet, der gleich viele Items des Vortests richtig gelöst hat und umgekehrt. Dieses Vorgehen nennt man Parallelisierung durch Bildung von „Matched Samples“.[244]

3.3.2.2 Bildung von Untergruppen nach Leistung im Vortest

Um der Frage nachgehen zu können, wie sich die Ausprägung der Kompetenzen des Beweglichen Denkens zu Beginn des Untersuchungszeitraumes auf die mögliche Leistungssteigerung in diesem Bereich innerhalb des Untersuchungszeitraums auswirkt, werden nach der Parallelisierung Untergruppen gebildet. Dazu werden die Probanden auf Grund ihrer Leistung im Vortest einer der drei Gruppen „+: bessere Leistung“, „0: mittlere Leistung“ und „–: schlechtere Leistung“ zugeteilt. Diese Zuteilung erfolgt so, dass zahlenmäßig etwa gleich starke Gruppen entstehen.

---

[242] vgl. den Abschnitt 2.6 Forschungsfragen ab Seite 131
[243] Die Leistung wird hier durch die Anzahl der richtig gelösten Items des Vortests gemessen.

3.3.2.3 Überprüfung der Unterschiedshypothese (t-Test)

Das Unterrichtskonzept dieser Arbeit wurde mit dem Ziel entwickelt, damit die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens zu fördern. Es interessiert also die Frage, ob die Leistungssteigerung[245] λ zwischen Vor- und Nachtest für die Unterrichtsklassen (UK) größer ist als für die Kontrollklassen (KK). Dazu wird für jedes Messwertpaar v die Differenz $d_v = \lambda_{vUK} - \lambda_{vKK}$ und daraus das arithmetisches Mittel $\overline{x_d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{v=1}^{n} d_v$ dieser Größe über alle n parallelisierten Schülerpaare der Stichprobe untersucht. Obige Forschungsfrage lässt sich durch die Nullhypothese $H_0 : \mu_d \leq 0$ über den wahren Mittelwert μ_d der Differenzen der Leistungssteigerungen präzisieren und mit Hilfe des t-Tests für abhängige Stichproben[246] gegen die Alternative $H_1 : \mu_d > 0$ als einseitige Fragestellung[247] testen. Als einseitige Testschranke wird jeweils $t^*_{99\%}$ gewählt. Sie wird im Falle der Richtigkeit von H_0 nur mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}01$ überschritten. Ist die Testgröße t des t-Tests größer als $t^*_{99\%}$, so kann die Nullhypothese $H_0 : \mu_d \leq 0$ bei Zugrundelegung einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}01$ zu Gunsten der Alternative $H_1 : \mu_d > 0$ abgelehnt werden. Man spricht in diesem Fall auch davon, dass die Leistungssteigerung der Unterrichtsklassen signifikant größer ist als die der Kontrollklassen.

3.3.2.4 Darstellung der Leistungssteigerung in Einheiten der Standardabweichung des Vortestergebnisses

Um einen leichteren Vergleich der Leistungssteigerungen innerhalb des Untersuchungszeitraums in den verschiedenen betrachteten Gruppen (Gesamtgruppe, +, 0, –) und mit

[244] vgl. etwa BORTZ/DÖRING (2002), S. 527

[245] Die Leistungssteigerung bezieht sich auf die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens, die durch die in Vor- und Nachtest identischen Items des Fragebogens gemessenen werden.

[246] Es handelt sich um abhängige Stichproben, weil die Unterrichtsklassen und die Kontrollklassen, wie oben ausgeführt, parallelisiert wurden. Das Testverfahren „t-Tests für abhängige Stichproben" wird z. B. in BORTZ (2004) auf den Seiten 143ff erläutert. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass beim t-Test für abhängige Stichproben (gerade bei kleinen Stichprobenumfängen $n < 30$) die betrachteten Differenzen λ_{vUK} und λ_{vKK} nach einer Normalverteilung verteilt sein müssen. Da der t-Test aber relativ robust gegenüber Verletzungen dieser Voraussetzung ist, genügt es die Messwertreihen auf positive Korrelation zu untersuchen. Letzteres wird im Rahmen der Testauswertung dieser Arbeit jeweils durchgeführt.

[247] Da auf Grund der Anlage der Untersuchung zu erwarten ist, dass die Unterrichtsklassen eine größere Leistungssteigerung im Hinblick auf das Bewegliche Denken aufweisen als die Kontrollklassen, kann hier H_1 gerichtet formuliert werden.

der Leistungssteigerung in anderen längsschnittlichen Untersuchungen innerhalb eines Schuljahres zu ermöglichen, wird eine einheitliche Darstellung der Leistungssteigerung gewählt. Dazu wird die Leistungssteigerung, d. h. die Zunahme der mittleren Fähigkeit einer Gruppe in Einheiten der Standardabweichung der Leistung dieser Gruppe im Vortest angegeben. Für Tests, deren Testziel die „Mathematikleistung" ist, liegen Erfahrungswerte für in dieser Einheit angegebene Leistungssteigerungen vor, die innerhalb eines Schuljahres erreichbar sind. So geben etwa VOM HOFE ET AL. (2002) Leistungssteigerungen von 0,56 bis 0,63 in Einheiten der Standardabweichung des Vorjahrestestergebnisses an.[248] An dieser Größenordnung des Zuwachses werden sich die Ergebnisse der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen messen lassen müssen, auch wenn hier nicht die Entwicklung der „Mathematikleistung", sondern die Entwicklung der Fähigkeit des Beweglichen Denkens untersucht wird.

3.4 Lehrerinterviews

In Abschnitt 3.2 wurde die Frage diskutiert, wie eine didaktische Idee an Lehrerinnen und Lehrer vermittelt werden kann. Ob die Idee des Beweglichen Denkens allerdings über das Projekt hinaus Auswirkungen auf die Unterrichtsgestaltung der Kolleginnen und Kollegen hat, hängt stark davon ab, wie sie subjektiv den Projektunterricht erlebt haben und den Unterrichtserfolg einschätzen. Entscheidend ist auch, ob die Kolleginnen und Kollegen die Idee soweit verinnerlicht haben, dass sie eigene darauf basierende Unterrichtsausarbeitungen erstellen können. Um diesen Fragen nachzugehen, werden mit allen Lehrerinnen und Lehrern der Unterrichtsklassen des Projektes nach Abschluss der Hauptuntersuchung (Schuljahr 2002/03) *offene Einzelinterviews* durchgeführt. Diese sind als *Leitfadeninterviews*[249] konzipiert: Die Themen, die im Interview angesprochen werden, sind durch den Leitfaden vorgegeben. Der Interviewer entscheidet aber über die Reihenfolge und die konkrete Formulierung der Fragen. Durch die offene Form der Befragung können auch Aspekte von den Lehrerinnen und Lehrern angesprochen werden, die der Interviewer nicht antizipiert hat. Bei Bedarf kann der Interviewer gezielt nach-

---

[248] vgl. VOM HOFE ET AL. (2002), S. 92f
[249] vgl. BORTZ/DÖRING (2002), S. 315ff, FLICK (2002), S. 117ff

fragen, um einzelne Aspekte zu vertiefen oder um mehrdeutige Äußerungen im Dialog zu klären. Die Interviews werden per Video aufgezeichnet. Der Interviewer und der Interviewte werden dabei von einer statischen Kamera gefilmt, die ca. sechs Meter von den Interviewpartnern entfernt aufgestellt wird und sich nicht im direkten Blickfeld des Interviewten befindet. Dies soll dazu beitragen, dass sich der Interviewte möglichst wenig durch die Kamera gestört fühlt. Um trotzdem eine optimale Tonaufzeichnung zu gewährleisten, wird mit einem Tischmikrofon gearbeitet.

Die Interviews werden alle von mir selbst geführt, weil sich im Laufe des gemeinsam gestalteten Schuljahres eine tragfähige Arbeitsbeziehung zu allen beteiligten Kolleginnen und Kollegen entwickelt hat, die offene Rückmeldungen in beide Richtungen ermöglicht. Auf dieser Grundlage ist zu erwarten, dass die Interviews intensiver und tiefer gehend werden, als dies mit fremden Interviewern möglich wäre.

Die Videos werden digitalisiert und in dieser Form zunächst von einer studentischen Hilfskraft transkribiert und in Minutenabständen mit Zeitmarken versehen. Diese Zeitmarken erleichtern die folgenden Bearbeitungsschritte erheblich. Nach einigen Wochen wird das Transkript noch einmal von der Hilfskraft anhand des Videos verbessert. Anschließend wird das Transkript in zwei weiteren Durchgängen von mir anhand des Videos verbessert. Die studentische Hilfskraft hat bereits im Rahmen der Voruntersuchung Transkripte für mich erstellt. Dies hat positive Auswirkungen auf die Qualität der Transkripte der Hauptuntersuchung.

Die Auswertung der Transkripte geschieht in Form einer qualitativen Inhaltsanalyse[250]. Dabei werden die Äußerungen der Lehrerinnen und Lehrer strukturiert, d. h. nach Kategorien sortiert und paraphrasiert, also verkürzt und verdichtet. Zitate bleiben dabei nur dann erhalten, wenn sie prägnanter sind als mögliche Paraphrasen. In diesem Arbeitsgang werden zur zusätzlichen Validierung neben den Transkripten auch immer

---

[250] vgl. BORTZ/DÖRING (2002), S. 329ff; FLICK (2002), S. 279ff; MAYRING (2000), S. 82ff; MAYRING in FLICK ET AL. (2003), S. 468ff

wieder die Videos herangezogen. Die daraus entstehenden „Basistexte“ für jede Lehrkraft werden anschließend einer vergleichenden Analyse unterzogen.

4 Versuchsdurchführung und Auswertung

Die Unterrichtsversuche im Rahmen des empirischen Teils dieser Arbeit fanden in drei aufeinander folgenden Schuljahren statt.

- *Voruntersuchung:*
  Im Schuljahr 2001/02 wurden zahlreiche kleinere Unterrichtsversuche durchgeführt. Dabei ging es hauptsächlich darum, ein Unterrichtskonzept und Erhebungsinstrumente (insbesondere den Leistungstest) zu entwickeln und methodische Erfahrungen im Zusammenhang mit Videoaufzeichnungen sowie der Technik der Transkription zu sammeln. Einen Überblick über die im Laufe der Voruntersuchung durchgeführten Unterrichtsversuche gibt **Tabelle 7** auf Seite 136.
- *Hauptuntersuchung:*
  Die Hauptuntersuchung zum Beweglichen Denken im Geometrieunterricht der 7. Klasse wurde im Schuljahr 2002/03 durchgeführt. Die Ausführungen in diesem Kapitel beziehen sich hauptsächlich auf dieses Schuljahr.
- *Nachuntersuchung:*
  Im Schuljahr 2003/04 wurden noch einmal zwei 7. Klassen im Inhaltsbereich Geometrie nach demselben Konzept unterrichtet. Die beiden Lehrkräfte der Klassen haben schon an den Unterrichtsversuchen in der Hauptuntersuchung teilgenommen und somit bereits Erfahrung mit dem Konzept gesammelt. Eine der beiden Klassen war eine „Hochbegabtenklasse“[251]. Bei dieser Untersuchung ging es primär um die Frage, inwiefern eine diagnostizierte Hochbegabung Einfluss auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens hat.

[251] Eine Klasse aus dem bayerischen „Modellprojekt für besonders begabte Schülerinnen und Schüler“. Das Modellprojekt richtet sich an Schülerinnen und Schüler, denen durch eine schulpsychologische Diagnostik und durch das Urteil der bisherigen Lehrkräfte eine besondere Begabung, besondere Interessen und Fähigkeiten, eine erkennbare Lernbereitschaft und Kreativität beim Lösen von Aufgaben bestätigt wurden.

4.1 Beschreibung der Versuchspopulation

4.1.1 Hauptuntersuchung

An der Hauptuntersuchung im Schuljahr 2002/03 haben fünf 7. Klassen aus drei bayerischen Gymnasien als Versuchsklassen und drei 7. Klassen eines bayerischen Gymnasiums als Kontrollklassen teilgenommen. Die Klassen wurden nach pragmatischen Gesichtspunkten ausgewählt. Dabei mussten folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Die Schulen sollten geographisch so liegen, dass es mir möglich war, sie jederzeit zu besuchen und den Unterricht zu beobachten.
- Es mussten Schulleiter gefunden werden, die das Projekt mittrugen und die damit verbundene Evaluation (u. a. Leistungstests, Videoaufzeichnungen in den Klassen) einerseits genehmigten und andererseits sowohl dem bayerischen Kultusministerium als auch den Eltern gegenüber positiv vertraten.
- Schließlich mussten für die Unterrichtsklassen Lehrerinnen und Lehrer gewonnen werden, die sich auf ein neues Unterrichtskonzept einließen, ein ganzes Schuljahr am Projekt mitarbeiteten, an den regelmäßigen Treffen teilnahmen und eine Beobachtung des eigenen Unterrichts, teilweise mit Videoaufzeichnungen, zuließen.
- Die Kontrollklassen sollten örtlich so weit von den Unterrichtsklassen entfernt liegen, dass ein zufälliger Austausch zwischen den Lehrerinnen und Lehrern der Unterrichts- und der Kontrollklassen sehr unwahrscheinlich war. Die Lehrerinnen und Lehrer der Kontrollklassen sollten ihren Unterricht nämlich völlig unbeeinflusst von den Ideen des Beweglichen Denkens gestalten. Aus diesem Grund wurden die in den Kontrollklassen unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen auch nicht über den Inhalt und die genauen Ziele der Untersuchung aufgeklärt. In den Kontrollklassen wurde der Mathematikunterricht im Untersuchungszeitraum ohne Computereinsatz und damit ohne dynamische Visualisierungen durchgeführt.

Einen Überblick über die an der Hauptuntersuchung beteiligten Unterrichts- und Kontrollklassen gibt **Tabelle 12** auf Seite 185. Um die Anonymität der an der Untersuchung beteiligten Personen zu gewährleisten, werden die Schulen mit Großbuchstaben und die Lehrerinnen und Lehrer mit natürlichen Zahlen kodiert. Drei Gymnasien haben Unterrichtsklassen gestellt, die Kontrollklassen stammen aus einem Gymnasium. Eine der Unterrichtsklassen, nämlich die in der ersten Zeile der **Tabelle 12** aufgeführte Klasse C_5/6_7a[252] wurde im Untersuchungszeitraum zum Halbjahr von einer Referendarin im dritten Ausbildungsabschnitt (6) übernommen und in enger Zusammenarbeit mit dem in der Klasse eingesetzten Lehrer (5) als Betreuungslehrer weitergeführt.

Unterrichtsklassen Hauptuntersuchung					
Schuljahr	Bayerisches Gymnasium	Lehrkraft	Klasse	Anzahl der Schüler	Gesamtzahl Schüler
2002/03	C	5/6	7a	29	
2002/03	D	4	7b	26	
2002/03	D	4	7c	22	
2002/03	D	7	7e	22	
2002/03	L	8	7a	28	N = 127
Kontrollklassen Hauptuntersuchung					
Schuljahr	Bayerisches Gymnasium	Lehrkraft	Klasse	Anzahl der Schüler	Gesamtzahl Schüler
2002/03	M	9	7a	29	
2002/03	M	10	7b	27	
2002/03	M	11	7c	23	N = 79

Tabelle 12: An der Hauptuntersuchung beteiligte Unterrichts- und Kontrollklassen

Die **Hardwareausstattung der Schulen** war *kein* Kriterium bei der Auswahl der Unterrichtsklassen, da sich das Unterrichtskonzept im normalen Unterrichtsalltag bewähren sollte und ohnehin jedes Gymnasium über (mindestens) einen Computerraum verfügt.

Eine diesbezügliche Besonderheit stellt das Gymnasium D dar, das drei Unterrichtsklassen gestellt hat. An dieser Schule können die Eltern am Ende der sechsten Jahrgangsstufe Grundsatzentscheidungen bzgl. des Computereinsatzes im Unterricht der

[252] Hier und im Folgenden wird auf die beteiligten Klassen durch eine Abkürzung Bezug genommen, die sich aus dem Buchstabenkode für die Schule (hier C), dem Zahlenkode für die unterrichtende Lehrkraft (hier 5/6) und der realen Bezeichnung der Klasse innerhalb der Schule (hier 7a) zusammensetzt.

siebten Jahrgangsstufe treffen. Sie können entscheiden, ob ihr Kind im Folgejahr eine „Laptop-Klasse", eine „Internet-Klasse" oder eine „normale" Klasse besucht. In der „Laptop-Klasse" besitzen jede Schülerin und jeder Schüler den gleichen, von der Schule beschafften privaten Laptop, der über WLAN in das Schulnetz eingebunden ist und jederzeit, auch spontan, verwendet werden kann. Die „Internet-Klasse" wird von den Schülerinnen und Schülern besucht, deren Eltern zwar keinen Laptop kaufen wollen, aber trotzdem einen verstärkten Einsatz des Computers und des Internets im Unterricht wünschen. Alle anderen Schülerinnen und Schüler verteilen sich auf die „normalen" Klassen. Von den drei an der Hauptuntersuchung beteiligten Unterrichtsklassen dieser Schule ist D_7_7e eine „normale" Klasse, D_4_7b eine „Internet-Klasse" und D_4_7c eine „Laptop-Klasse"[253]. Im Untersuchungszeitraum verfügte die Schule über einen Computerraum mit fest installierter elektronischer Tafel (Intelliboard) und sechzehn Schülercomputerarbeitsplätze sowie zwei tragbare Beamer mit zugehörigem Laptop für den Einsatz in Klassenzimmern.

Die Gymnasien C und L verfügten im Untersuchungszeitraum jeweils über einen Computerraum mit fest installiertem Beamer und sechzehn Computerarbeitsplätzen für Schülerinnen und Schüler sowie über je zwei tragbare Beamer mit zugehörigem Laptop für den Einsatz in Klassenzimmern. Im Gymnasium C stand darüber hinaus noch in jedem Stockwerk ein fahrbarer Medienschrank bereit, der fest mit Beamer, PC und Videorekorder ausgestattet war und in die einzelnen Klassenzimmer geschoben werden konnte. Das Klassenzimmer der Unterrichtsklasse C_5/6_7a war Standort eines dieser Medienschränke, wodurch auch hier der Computer jederzeit, auch spontan, zu Demonstrationszwecken eingesetzt werden konnte. In allen anderen Klassen war es, wie an den meisten Schulen, notwendig, den Computereinsatz sowohl für Demonstrationszwecke als auch für Schülerarbeitsphasen langfristig zu planen, weil der Computerraum belegt oder die „Laptop-Beamer-Einheit" gebucht werden musste.

[253] Das Klassenzimmer dieser Klasse verfügte außerdem über eine elektronische Tafel (ein so genanntes „Intelliboard"), sodass der Rechner auch zu Präsentationszwecken für die Lehrkraft jederzeit zur Verfügung stand.

4.1.2 Nachuntersuchung: „Hochbegabtenklasse“[254]

An der Nachuntersuchung im Schuljahr 2003/04 haben zwei Klassen teilgenommen. Hier ging es um die Frage, ob das Bewegliche Denken bei überdurchschnittlich intelligenten Kindern stärker ausgeprägt ist und ob die Leistungssteigerung in diesem Bereich bei entsprechendem Unterricht größer ist als bei anderen Kindern. Diese Forschungsfrage ergab sich aus diversen Diskussionsbeiträgen nach Vorträgen zum Beweglichen Denken und dem Unterrichtskonzept dieser Arbeit. Immer wieder wurde dabei von Diskussionsteilnehmern postuliert, dass diese Art des Arbeitens wohl eher für besonders begabte Schülerinnen und Schüler geeignet sei. Der Frage konnte nachgegangen werden, weil einer der Lehrer[255], der eine Unterrichtsklasse der Hauptuntersuchung geleitet hatte, in den Sommerferien 2003 die Schule wechselte und in der neuen Schule eine Hochbegabtenklasse[256] der Jahrgangsstufe 7 in Mathematik übernahm. Bei dieser Klasse handelt es sich um eine speziell eingerichtete Klasse zur Förderung besonders begabter Schülerinnen und Schüler. Die Eltern mussten zur Anmeldung für diese Klasse ein Gutachten vorweisen, in dem ihrem Kind ein, mit Hilfe eines standardisierten Intelligenztests festgestellter, weit überdurchschnittlicher Intelligenzquotient bescheinigt wurde. Am Ende des Schuljahres wurden die Schülerinnen und Schüler noch einmal vom staatlichen Schulpsychologen getestet. Dabei wurde der kognitive Fähigkeitstest **KFT 4-12+ R**[257] verwendet. Hierbei ergaben sich im Vergleich zu den externen Testungen teilweise deutlich schlechtere Testergebnisse, sodass bei vielen Schülerinnen und Schülern nicht von einer überdurchschnittlichen Begabung gesprochen werden kann. In die Evaluation dieser Arbeit wurden daraufhin nur die Schülerinnen und Schüler aufgenommen, für die sich auf Grundlage des „KFT 4-12+ R“ ein, auf die Jahrgangsnorm für die 7. Klasse bezogener Intelligenzquotient ergab, der größer als 120 war. Von den 23 Schülerinnen und Schülern der Klasse F_5_7m erfüllen nur zwölf dieses Kriterium.

---

[254] Die problematische Bezeichnung „Hochbegabtenklasse“ wird in diesem Abschnitt über die Eingangsvoraussetzungen zur Aufnahme in diese Klasse erklärt und im Folgenden aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit beibehalten.

[255] Es handelt sich um den Kollegen, der mit der Zahl 5 kodiert wurde.

[256] Die Hochbegabtenklasse ist die Klasse F_5_7m in **Tabelle 13** auf Seite 188.

[257] HELLER, PERLETH: Kognitiver Fähigkeitstest für 4. bis 12. Klassen, Revision. Beltz-Test, Göttingen, 2000

Die Resultate der Hochbegabtenklasse können nicht mit den Ergebnissen der Unterrichtsklassen der Hauptuntersuchung verglichen werden, weil der Lehrer „5“ der Hochbegabtenklasse bereits ein Schuljahr nach dem Unterrichtskonzept dieser Arbeit unterrichtet hat. Bei der Hauptuntersuchung haben die beteiligten Lehrkräfte dagegen zum ersten Mal nach dem Konzept unterrichtet. Da die Vertrautheit der Lehrkraft mit dem Unterrichtskonzept ein entscheidender Einflussfaktor sein kann, wurde als Vergleichsgruppe die Klasse L_8_7a (vgl. **Tabelle 13**, zweite Zeile) herangezogen. Der Mathematiklehrer „8“ dieser Klasse hat in der Hauptuntersuchung ebenfalls bereits nach dem Unterrichtskonzept unterrichtet, wodurch die genannte Einflussvariable kontrolliert wurde.

Unterrichtsklassen Nachuntersuchung				
Schuljahr	Bayerisches Gymnasium	Lehrkraft	Klasse	Anzahl der Schüler
2003/04	F	5	7m	23
2003/04	L	8	7a	29

Tabelle 13: An der Nachuntersuchung beteiligte Unterrichtsklassen. Die Daten der „Hochbegabtenklasse“ sind der ersten Zeile zu entnehmen.

4.2 Auswertung des Leistungstests der Hauptuntersuchung[258]

Die fünf Unterrichts- (Anzahl der Schülerinnen und Schüler: $N_{\text{UK}} = 127$) und drei Kontrollklassen ($N_{\text{KK}} = 79$) wurden nach dem Prozentsatz k der richtig beantworteten Items im Vortest parallelisiert.[259] Dabei konnte zu 78 der 79 Schülerinnen und Schüler der Kontrollklassen jeweils ein Kind aus den Unterrichtsklassen zugeordnet werden, das denselben Prozentsatz richtig beantworteter Items im Vortest erreicht hat. Damit lagen $N = N_{\text{pUK}} = N_{\text{pKK}} = 78$ so genannte „Matched Samples“ vor, die der Auswertung zu Grunde gelegt wurden. Diese „Matched Samples“ wurden auf Grund ihrer Leistung in

[258] Die Auswertung des Leistungstests erfolgt in Aufgabengruppen. Im Anhang C ab Seite 253 findet man bei Interesse die Lösungshäufigkeiten und die richtigen Lösungen für jedes Item des Fragebogens.

drei Kategorien eingeteilt, die so gewählt wurden, dass in etwa gleich starke Teilgruppen entstanden. In **Tabelle 14** sind die Einteilungskriterien und die Gruppengrößen zusammengestellt. Auf der Basis dieser „Matched Samples“ wurden die folgenden quantitativen Auswertungen vorgenommen.

Charakterisierung der Leistung (L.)	Kodierung	Prozentsatz k richtig gelöster Items im Vortest	Anzahl der „Matched Samples“	Gesamtzahl der „Matched Samples“
bessere L.	+	$k > 50\ \%$	$N_+ = 28$	
mittlere L.	0	$50\ \% \geq k \geq 35\ \%$	$N_0 = 27$	
schlechtere L.	–	$k < 35\ \%$	$N_- = 23$	$N = 78$

Tabelle 14: Einteilung der „Matched Samples“ auf Grund der Vortestergebnisse in drei Leistungsgruppen

4.2.1 Auswertung der in Vor- und Nachtest identischen Items

Wirkt sich ein Unterricht, der auf dem Unterrichtskonzept dieser Arbeit basiert, positiv auf die Entwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens aus? Zur Klärung dieser Forschungsfrage werden die in Vor- und Nachtest identischen Items betrachtet. Nur für sie ist es möglich die Leistungssteigerung im Laufe des betrachteten Schuljahres 2002/03 direkt zu messen, da hier keine Verfälschung der Ergebnisse durch (evtl. auch nur leicht) veränderte Aufgabenstellungen eintritt.

In **Abb. 81** ist der Mittelwert des Anteils richtig gelöster Items der jeweiligen Gruppe in Prozent angegeben. Ihr ist zu entnehmen, dass die Testleistung der Kontrollklassen (KK) insgesamt innerhalb des Untersuchungszeitraums (Schuljahr 2002/03) gleich geblieben ist, während die Unterrichtsklassen (UK) einen deutlich erkennbaren Leistungszuwachs zu verzeichnen haben. Im Vortest lösen die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen im Durchschnitt 47 % der identischen Items richtig, während sie im Nachtest durchschnittlich 58 % der Items richtig lösen. Die Mittelwertsdifferenz zwischen Vortest und Nachtest ist bei der Unterrichtsgruppe signifikant größer als bei der Kontrollgruppe ($t_{\text{ges}} = 3{,}54 > 2{,}38$; $df_{\text{ges}} = 77$; $p = 0{,}01$)[260].

[259] vgl. Abschnitt 3.3.2.1 auf Seite 179
[260] vgl. zum durchgeführten t-Test den Abschnitt 3.3.2.3 auf Seite 180

Betrachtet man die Ergebnisse genauer, so stellt man fest, dass dieses deutlich bessere Ergebnis auf die im Vergleich zur Kontrollgruppe signifikant höhere Leistungssteigerung der mittleren Leistungsgruppe innerhalb der Unterrichtsklassen zurückzuführen ist ($t_0 = 4{,}18 > 2{,}48$; $df_0 = 26$; $p = 0{,}01$). Die Leistungssteigerung der unteren Leistungsgruppe der Unterrichtsklassen fällt ebenfalls deutlich aus, weicht aber nicht signifikant von der ebenfalls beachtlichen Leistungssteigerung der unteren Leistungsgruppe der Kontrollklassen ab. Dagegen hat sich die Leistung der oberen Leistungsgruppe der Unterrichtsklassen nicht verändert und die Leistung der entsprechenden Gruppe der Kontrollklassen nimmt sogar merklich ab.

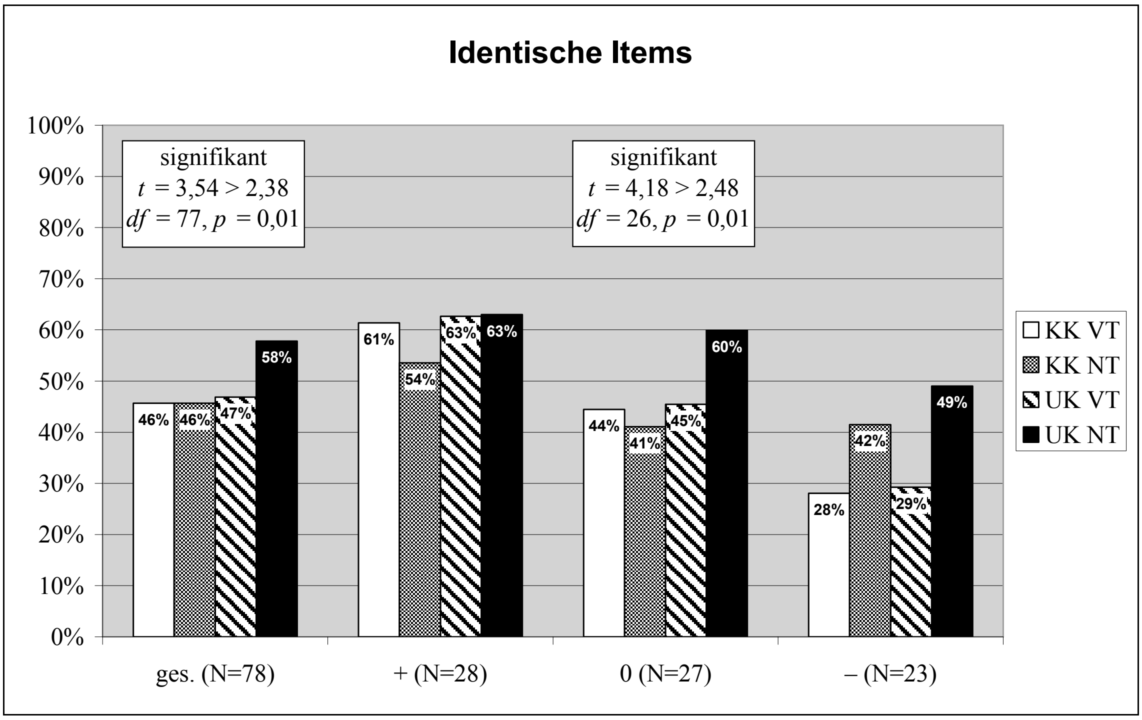


Abb. 81: Prozentsatz der richtig gelösten Items der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) unter den in Vor- und Nachtest identischen Items

Die Unterschiede zwischen den Leistungssteigerungen der einzelnen Gruppen werden noch deutlicher, wenn man die Leistungssteigerung in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses angibt. Wie **Abb. 82** zu entnehmen ist, beträgt die Leistungssteigerung in den Unterrichtsklassen 0,67 in Einheiten der Standardabweichung des Vortestergebnisses. Ein Vergleich mit den Ergebnissen von VOM HOFE ET AL. (2002), die Leistungssteigerungen von Schülergesamtgruppen in dieser Einheit von 0,56 bis 0,63 innerhalb eines Schuljahres angeben, zeigt, dass hier eine Leistungssteigerung erreicht wurde, die offensichtlich am oberen Rand dessen liegt, was auf Grund von Unterrichtsmaßnahmen innerhalb eines Schuljahres realistischerweise möglich ist.

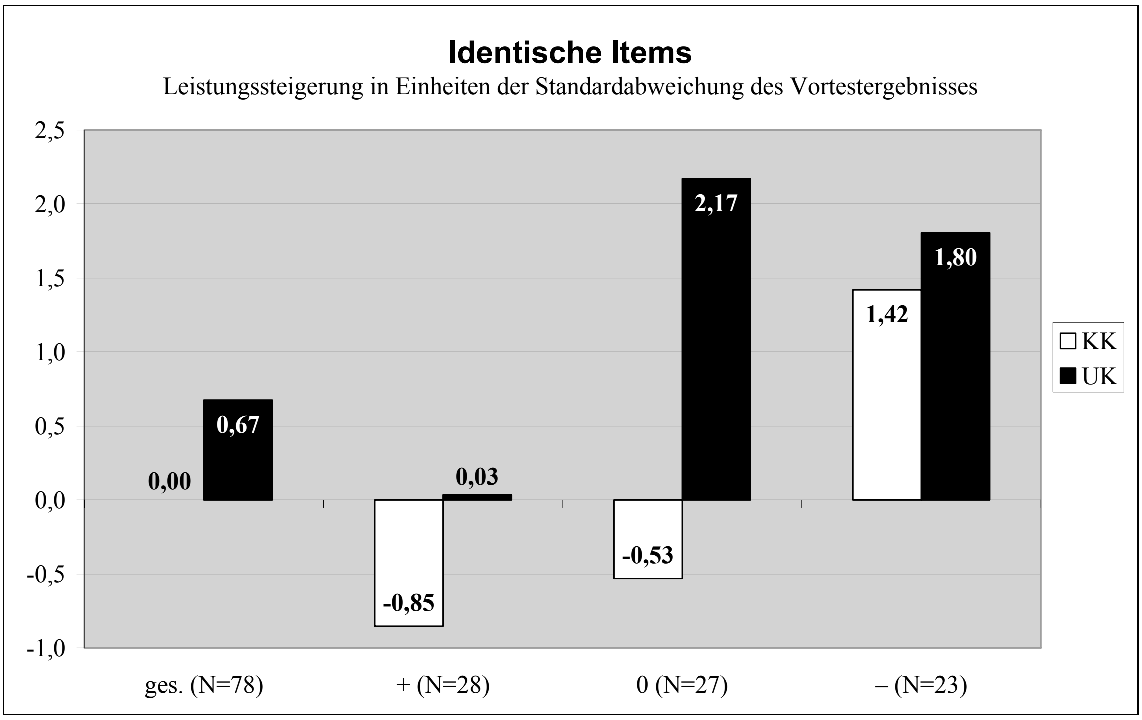


Abb. 82: Leistungssteigerung der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Items, dargestellt in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses

Bemerkenswert sind aber auch die anderen in **Abb. 82** wiedergegeben Resultate. Zunächst lässt sich die sehr deutliche Verbesserung der schlechteren Gruppe (–) sowohl bei den Unterrichts- wie auch bei den Kontrollklassen wohl nur so deuten, dass diese Schülerinnen und Schüler im Vortest, aus welchen Gründen auch immer, erheblich unter ihren Möglichkeiten geblieben sind. Vergleicht man dies nämlich mit den beiden anderen Leistungsgruppen (+, 0), so fällt auf, dass dort bei den Kontrollklassen eine nicht unerhebliche Verschlechterung der Leistung innerhalb des Untersuchungszeitraumes eingetreten ist. Auf Grund dieser Tatsache könnte man vermuten, dass ein Unterricht, der eher auf statische Argumentationen setzt, die latent vorhanden Fähigkeiten im Bereich des Beweglichen Denkens nicht nur nicht fördert, sondern evtl. sogar verschüttet. Festzuhalten ist aber auch, dass das Unterrichtskonzept dieser Arbeit ganz offensichtlich nicht dazu führt, dass Schülerinnen und Schüler mit guten Eingangsvoraussetzungen im Beweglichen Denken sich noch weiter verbessern. Die bessere Leistungsgruppe (+) stagniert vielmehr auf relativ hohem Niveau. Die schlechtere Leistungsgruppe (–) der Unterrichtsklassen verbessert sich tendenziell (wenn auch nicht signifikant) stärker als die entsprechende Teilgruppe der Kontrollklassen. Ganz offensichtlich am stärksten profitieren die Schülerinnen und Schüler der mittleren Leistungsgruppe (0) vom hier vorgeschlagenen Unterrichtskonzept. Mit einer Leistungssteigerung von 2,18 in Einheiten der Standardabweichung des Vortestergebnisses gelang hier eine erhebliche Verbesserung. Im Ergebnis wurde die mittlere Gruppe (0) in den Unterrichtsklassen praktisch auf dasselbe Leistungsniveau gebracht wie die bessere Gruppe (+). Insgesamt darf ein Unterricht, der dieses leistet, wohl als erfolgreich betrachtet werden.

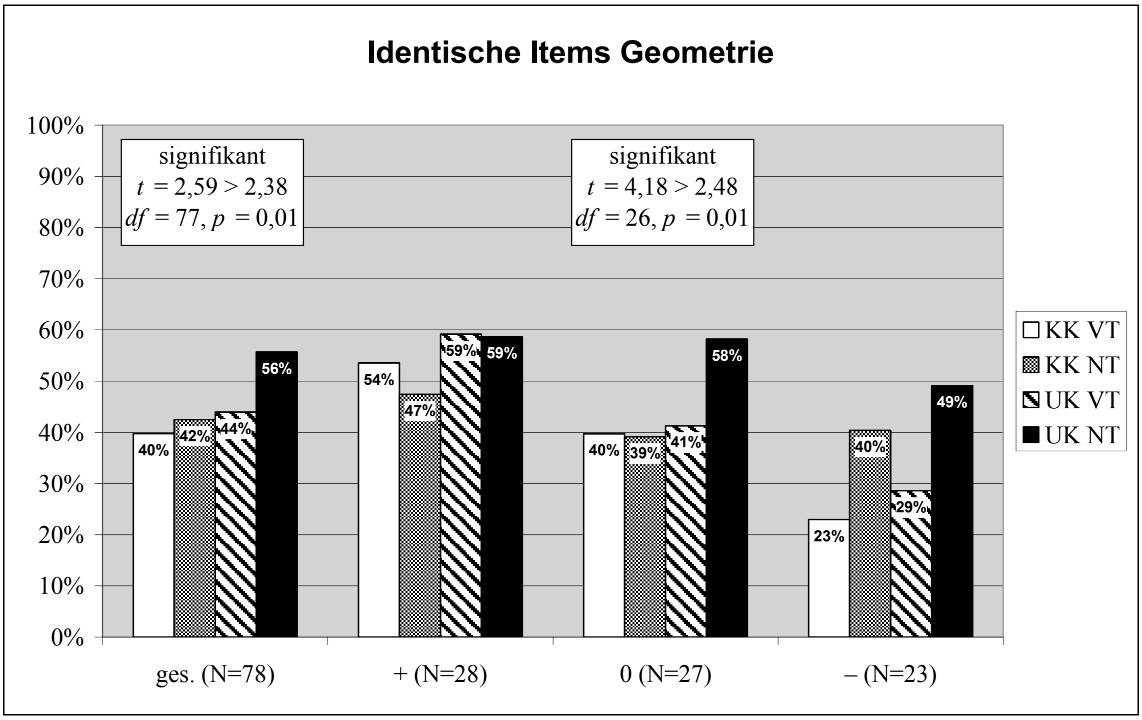


Abb. 83: Prozentsatz der richtig gelösten Items der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) unter den in Vor- und Nachtest identischen Geometrie-Items

Das Unterrichtskonzept im Rahmen dieser Arbeit war nur im Inhaltsbereich Geometrie auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens ausgerichtet. Um der Frage nachzugehen, ob und ggf. wie er sich auch auf die Lösungswahrscheinlichkeit von Aufgaben im Inhaltsbereich Algebra auswirkt, werden die Items im Folgenden noch einmal getrennt nach Inhaltsbereichen ausgewertet. Wie **Abb. 83** und **Abb. 84** zu entnehmen ist, ergeben sich für die Items aus dem Inhaltsbereich Geometrie[261] im Wesentlichen die gleichen Ergebnisse wie für alle in Vor- und Nachtest identischen Items gemeinsam. Die beiden Abbildungen werden deshalb hier nicht noch einmal eigens diskutiert.

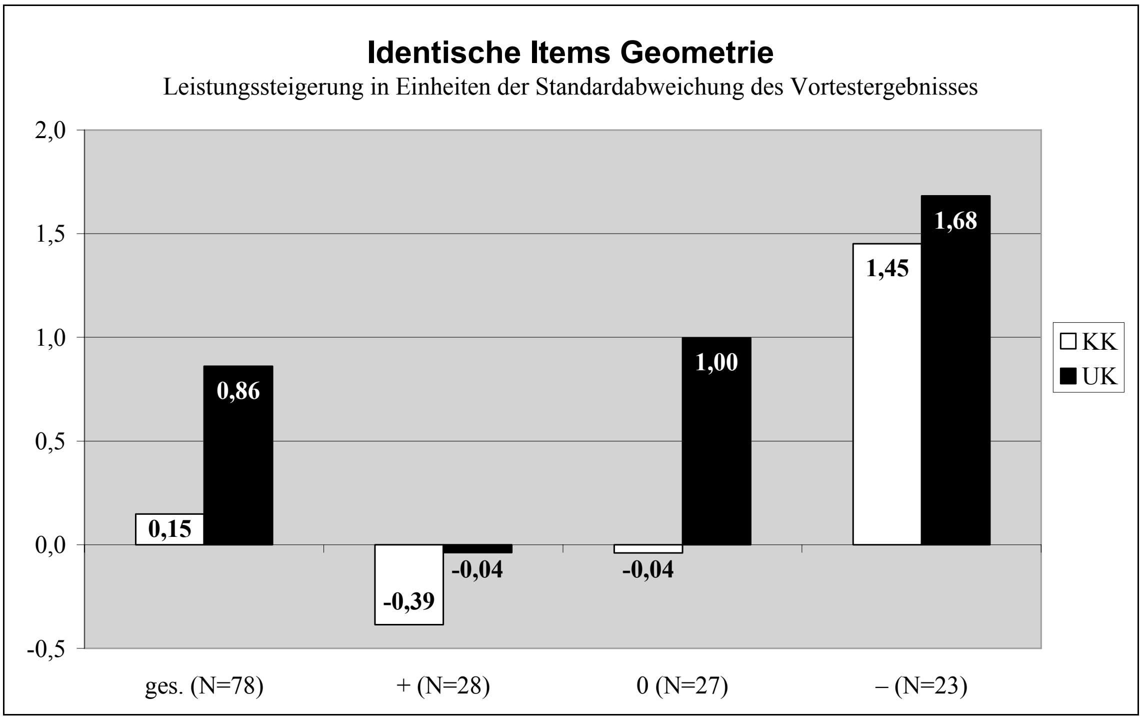


Abb. 84: Leistungssteigerung der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Geometrie-Items, dargestellt in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses

Betrachtet man **Abb. 85** und **Abb. 86** auf Seite 194, so ergibt sich für die Items zu algebraischen Inhalten[262] tendenziell wieder dasselbe Bild wie bereits bei den Items zur Geometrie. Auch hier ist insgesamt im Unterrichtszeitraum eine signifikant größere Leistungssteigerung der Unterrichtsklassen gegenüber den Kontrollklassen zu verzeichnen ($t_{ges} = 2{,}75 > 2{,}38$; $df_{ges} = 77$; $p = 0{,}01$). Auch in den Teilgruppen geht die Leistungsentwicklung in dieselbe Richtung wie für die Items zur Geometrie. Allerdings ist die größere Leistungssteigerung der mittleren Leistungsgruppe (0) nicht mehr signifikant.

[261] Es handelt sich um die Items 9A bis 11B des in Anhang B ab Seite 242 abgedruckten Fragebogens.
[262] Dies sind die Items 7A bis 8B des in Anhang B ab Seite 242 abgedruckten Fragebogens.

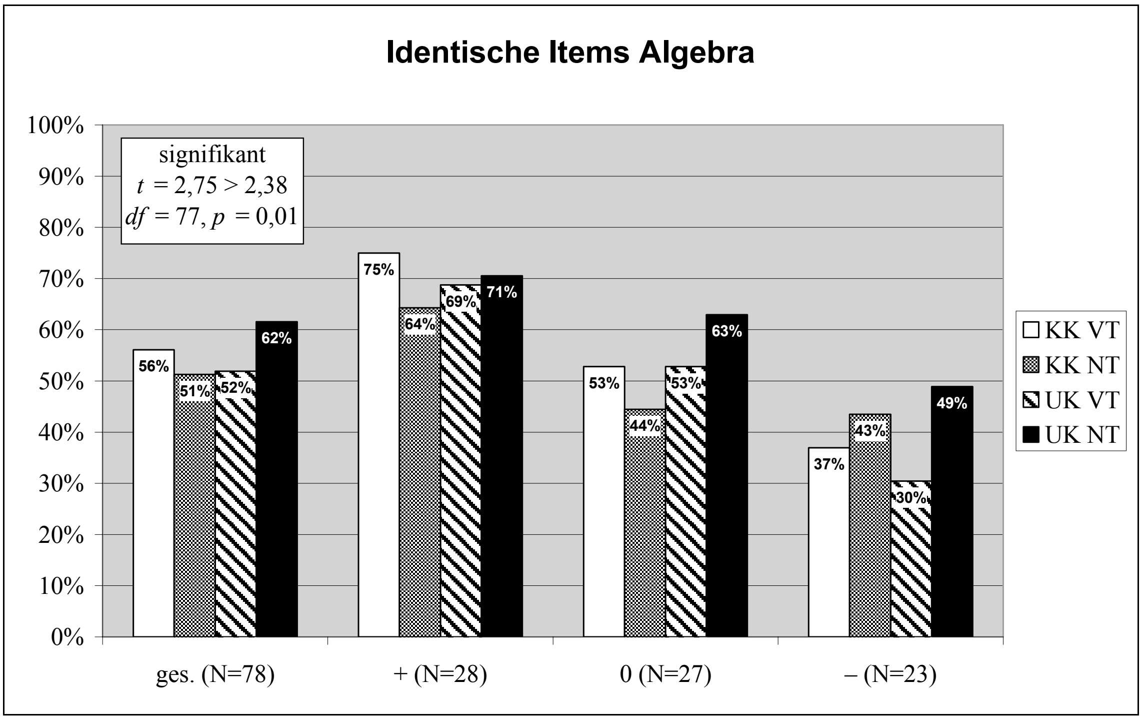


Abb. 85: Prozentsatz der richtig gelösten Items der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) unter den in Vor- und Nachtest identischen Algebra-Items

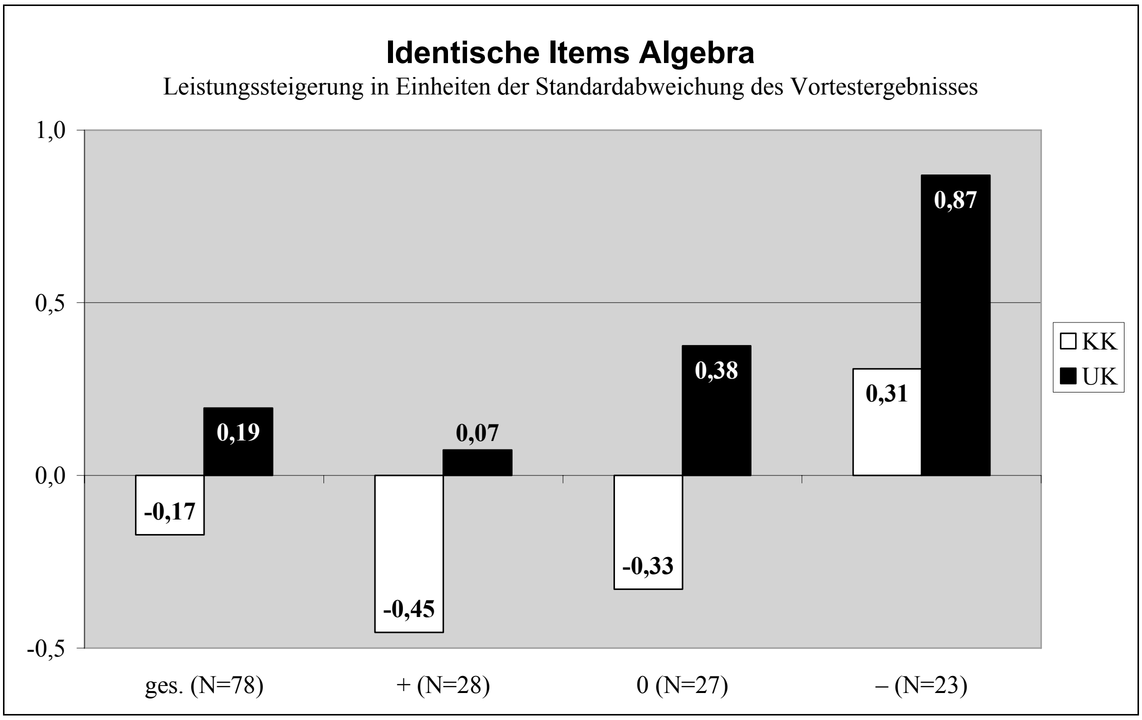


Abb. 86: Leistungssteigerung der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Algebra-Items, dargestellt in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses

Der Grund dafür lässt sich an **Tabelle 15** ablesen. Dort sind neben den empirischen Mittelwerten auch die empirischen Standardabweichungen der relativen Lösungshäufigkeiten notiert. Es fällt auf, dass die Standardabweichungen bzgl. der Items zur Algebra durchweg und teilweise deutlich größer ausfallen als die bei den Items zur Geometrie. Im Bereich Algebra streuen die Leistungen also auch innerhalb einzelner Leistungsgruppen deutlich. Trotzdem lässt sich festhalten, dass eine Schulung des Beweglichen Denkens im Bereich Geometrie auch positive Auswirkungen auf das Bewegliche Denken im Inhaltsbereich Algebra hat, diese Auswirkungen aber auf Grund des notwendigen stärkeren Transfers individuell sehr unterschiedlich stark ausfallen.

Identische Items	Teilgruppe		Vortest empirischer Mittelwert	Vortest empirische Standardabw.	Nachtest empirischer Mittelwert	Nachtest empirische Standardabw.
Alle	KK	**ges**	**0,46**	**0,16**	**0,46**	**0,23**
		+	0,61	0,09	0,54	0,28
		0	**0,44**	**0,06**	**0,41**	**0,21**
		–	0,29	0,09	0,42	0,16
	UK	**ges**	**0,47**	**0,16**	**0,58**	**0,16**
		+	0,63	0,09	0,63	0,16
		0	**0,45**	**0,07**	**0,60**	**0,13**
		–	0,29	0,11	0,49	0,17
Geometrie-items	KK	**ges**	**0,40**	**0,19**	**0,42**	**0,27**
		+	0,54	0,16	0,47	0,33
		0	**0,40**	**0,13**	**0,39**	**0,23**
		–	0,23	0,12	0,40	0,21
	UK	**ges**	**0,44**	**0,19**	**0,56**	**0,17**
		+	0,59	0,13	0,59	0,17
		0	**0,41**	**0,17**	**0,58**	**0,16**
		–	0,29	0,12	0,49	0,18
Algebra-items	KK	**ges**	**0,56**	**0,28**	**0,51**	**0,29**
		+	0,75	0,24	0,64	0,31
		0	**0,53**	**0,25**	**0,44**	**0,29**
		–	0,37	0,21	0,43	0,22
	UK	**ges**	**0,52**	**0,29**	**0,62**	**0,29**
		+	0,69	0,24	0,71	0,28
		0	**0,53**	**0,27**	**0,63**	**0,27**
		–	0,30	0,21	0,49	0,28

Tabelle 15: Empirische Mittelwerte und empirische Standardabweichungen der relativen Lösungshäufigkeiten bzgl. bestimmter Itemgruppen des Fragebogens

4.2.2 Auswertung der Items zum Änderungsverhalten

Der intellektuell anspruchsvollste Aspekt des Beweglichen Denkens ist die Fähigkeit, die Art und Weise einer Veränderung, also das Änderungsverhalten, qualitativ erfassen und beschreiben zu können. Dieser Aspekt wurde im Unterrichtskonzept dieser Arbeit erst am Ende des Schuljahres in einer dreistündigen Unterrichtssequenz[263] explizit thematisiert. Diese Unterrichtssequenz hat aber nur in zwei der fünf Unterrichtsklassen wirklich stattgefunden.[264] In den drei anderen Klassen fiel sie, wie dies gegen Ende des Schuljahres häufig geschieht, außerunterrichtlichen Aktivitäten zum Opfer.

Mit Hilfe der vier Items zum Änderungsverhalten[265] im Fragebogen des Nachtests soll untersucht werden, ob und ggf. wie sich ein Unterricht, der den Schwerpunkt darauf setzt, mit Bewegungen bzw. Veränderungen zu argumentieren, auf die Fähigkeit auswirkt, das Änderungsverhalten erfassen und qualitativ beschreiben zu können. Die Auswertung weist im Vergleich zu den Auswertungen des letzten Abschnittes zwei Besonderheiten auf:

- Zwei der vier Items zum Änderungsverhalten sind nur im Nachtest aber nicht im Vortest enthalten. Deshalb werden die durch Parallelisierung auf Grund der Vortestergebnisse gebildeten „Matched Samples“ jeweils nur bzgl. des Nachtests miteinander verglichen.
- Da in nur zwei der fünf Klassen die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten durchgeführt wurde, erfolgte die Auswertung der „Matched Samples“ entsprechend in zwei Untergruppen. Das waren einerseits die „Matched Samples“, bei denen in den Unterrichtsklassen die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten durchgeführt worden war und andererseits jene, bei denen die entsprechende Sequenz in den Unterrichtsklassen nicht stattgefunden hatte.

Die Ergebnisse für die beiden Untergruppen sind in **Abb. 87** bzw. in **Abb. 88** auf Seite 197 zusammengestellt.

---

[263] Die Unterrichtssequenz wurde in Abschnitt 3.1.5 ab Seite 158 beschrieben.
[264] Es handelt sich um die Klassen C_5/6_7a und L_8_7a (vgl. **Tabelle 12** auf Seite 185).
[265] Die vier Items zum Änderungsverhalten sind die Items 5, 6, 7B und 8B des Nachtests. Die Items, ihre richtigen Auswahlantworten und ihre relativen Lösungshäufigkeiten für die einzelnen Gruppen finden sich im Anhang C ab Seite 253.

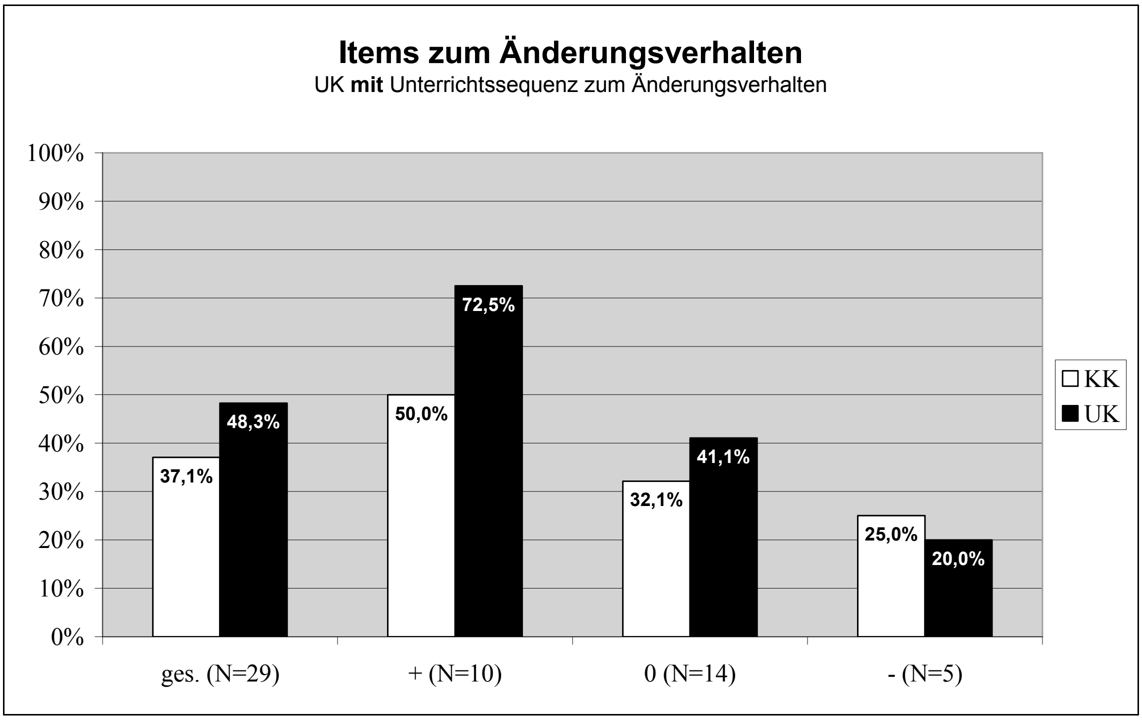


Abb. 87: Prozentsatz der richtig gelösten Items zum Änderungsverhalten in den „Matched Samples“ aus Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK), bei denen in den UK die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten stattgefunden hat

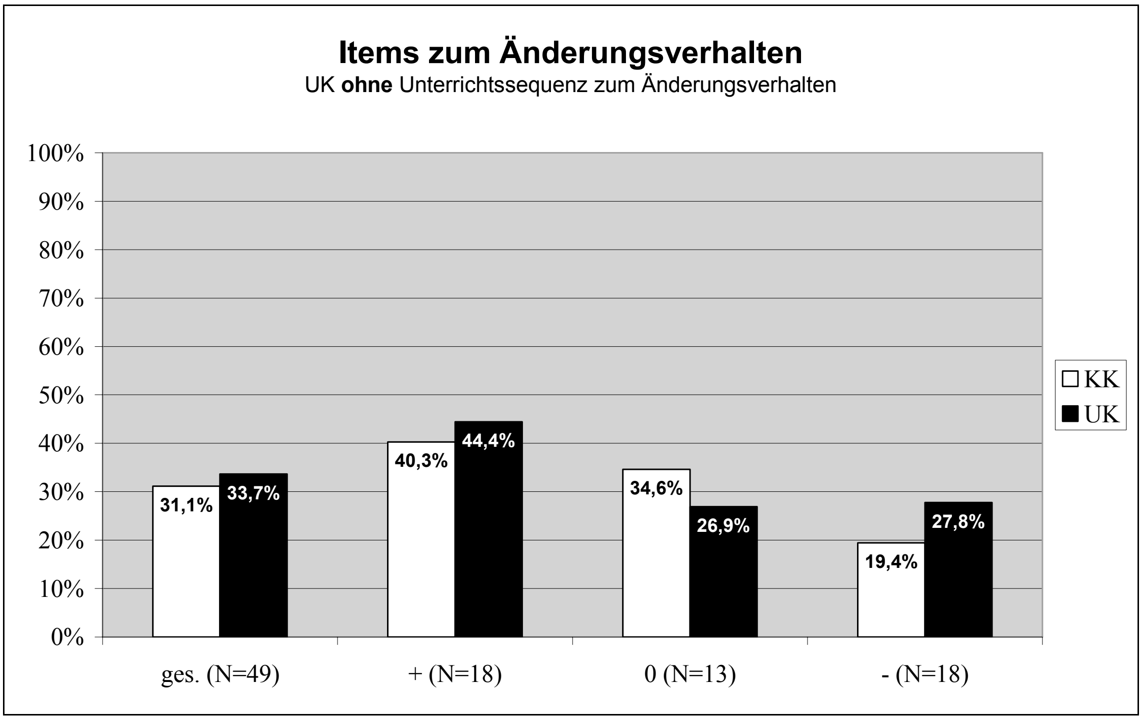


Abb. 88: Prozentsatz der richtig gelösten Items zum Änderungsverhalten in den „Matched Samples“ aus Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK), bei denen in den UK die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten **nicht** stattgefunden hat

Aus **Abb. 88** ist ersichtlich, dass die Schülerinnen und Schüler aus den Unterrichtsklassen ohne Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten bei den Items zum Änderungsverhalten etwa dieselbe Lösungshäufigkeit erreichten wie ihre „Partner“ aus den Kontrollklassen. Dagegen schnitten die Kinder aus den Klassen mit Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten bei den entsprechenden Items etwas, aber nicht signifikant, besser ab als ihre „Partner“ in den Kontrollklassen. Einen wesentlichen Anteil an diesem Effekt scheint die Gruppe der im Vortest besseren Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklasse zu haben. Diese schneiden scheinbar aber nur dann besser als ihre „Partner“ in den Kontrollklassen ab, wenn sie sich vorher im Unterricht, wenn auch nur kurz, explizit mit Fragen des Änderungsverhaltens auseinander gesetzt haben.

Betrachtet man die Ergebnisse der vier Items zum Änderungsverhalten jeweils einzeln, so fällt auf, dass die Unterrichtsklassen im Nachtest durchgängig besser abschneiden als ihre „Partner“ in den Kontrollklassen und dass die relative Lösungshäufigkeit der Gesamtgruppe bei jeder Aufgabe, teilweise sogar deutlich, unter 50 % bleibt. Eine absolute und auf den ersten Blick völlig unverständliche Ausnahme bildet das in **Abb. 89** wiedergegebene Item 5. Hier schneiden die Kontrollklassen nicht nur erheblich besser ab als die Unterrichtsklassen, sie erreichen sogar insgesamt eine relative Lösungshäufigkeit von deutlich über 66 % (vgl. **Abb. 90** auf Seite 199).

Item 5

Der Punkt C des zweiten Schenkels des Winkels α bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf dem Kreisbogen b bzw. der Geraden g.
Bei welcher Bewegung von C wird der **Winkel α gleichmäßig größer**?

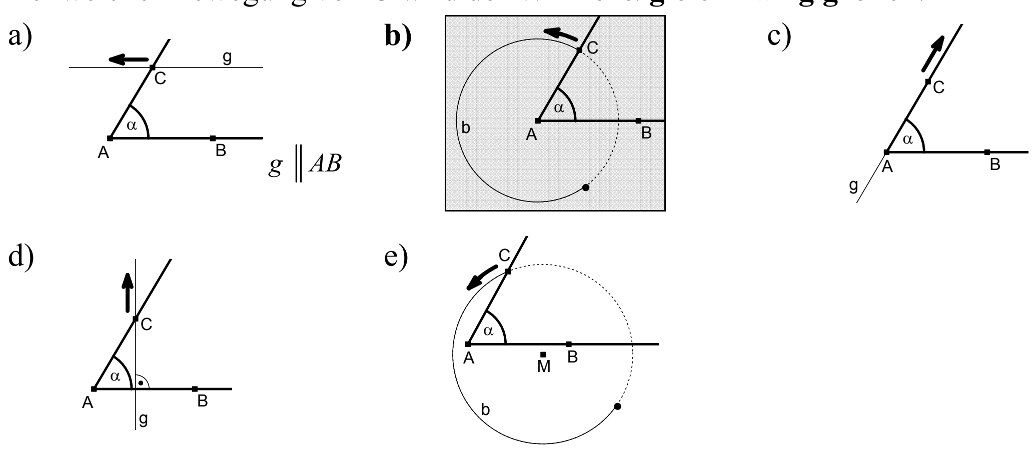


Abb. 89: Formulierung des Items 5. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

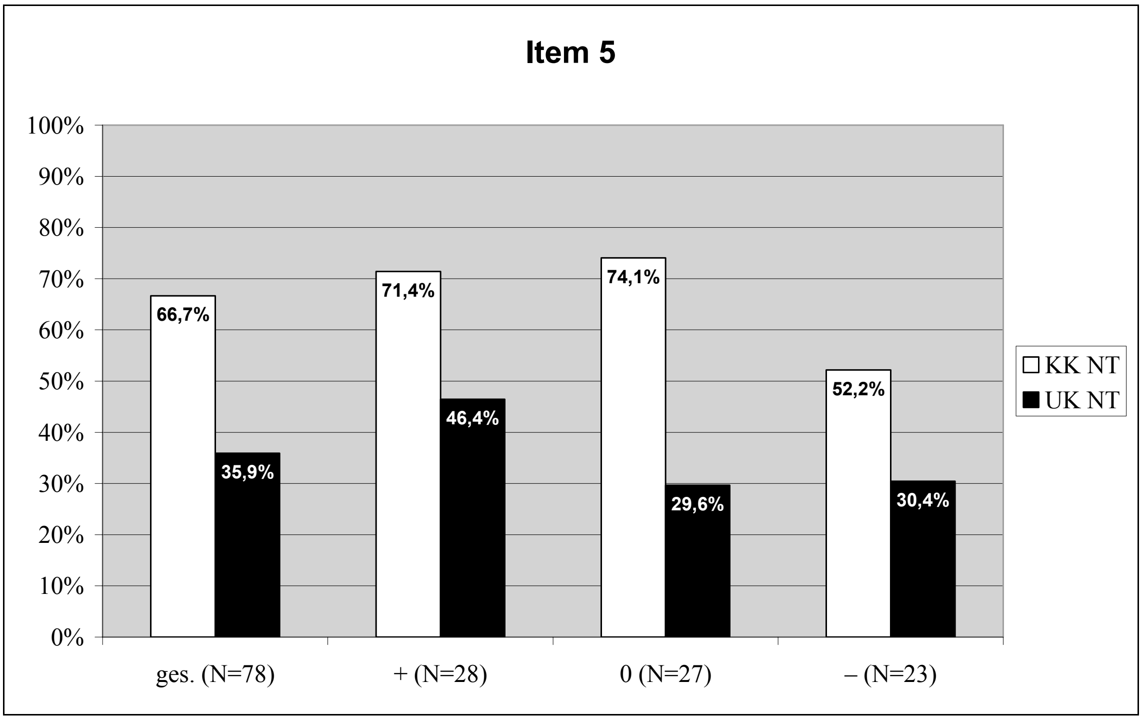


Abb. 90: Anteil der richtigen Lösungen von Item 5 in Prozent

Als Interpretationshilfe für solche, so nicht erwartete Ergebnisse wurden bei jedem Item des Fragebogens Kästen vorgesehen. Die Schülerinnen und Schüler hatten die Anweisung, in diesen Kästen ihren Lösungsweg so darzustellen, dass ein unbeteiligter Beobachter ihn nachvollziehen kann. Leider sind nur sehr wenige Schülerinnen und Schüler der entsprechenden Aufforderung nachgekommen. Dies kann mehrere Gründe haben. Einer davon könnte sein, dass einige Schülerinnen und Schüler intuitiv antworten und keine Begründung für ihr Antwortverhalten geben können. Diese These stützen folgende „Begründungen" von Schülerinnen und Schülern aus den Kontrollklassen, die jeweils ohne weitere Zusätze als Erklärungen notiert wurden:

- „Weil das für mich am logischsten aussieht."
- „Da C immer weiter gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird, wird auch der Schenkel gedreht und dadurch wird α größer."
- „b) weil wenn man in Uhrzeiger dreht werden die Schenkel und somit auch α größer."

Ein möglicher Grund für das gute Abschneiden der Kontrollklassen bei diesem Item könnte sein, dass die Schülerinnen und Schüler keine einschlägigen Erfahrungen mit entsprechenden Bewegungen sammeln konnten. Evtl. können sie sich deshalb gar nicht vorstellen, dass etwas anderes als eine Kreisbewegung um den Scheitel eine entsprechende Winkelveränderung bewirkt. Indizien für diese Möglichkeit sind folgende „Erklärungen“ der Schülerinnen und Schüler:

- „Nur bei dieser Aufgabe liegt A im Mittelpunkt des Radius und kann sich regelmäßig um den gleichen Winkel bewegen.“
- „Antwort b, da der Scheitel auch Mittelpunkt des Kreises ist.“
- „b ist es weil sich C eben auf den Kreisbogen bewegt und damit α gleichmäßig größer wird! Logo!“
- „b bewegt sich im Kreis“
- „Nur bei b! Weil C auf dem Kreis um A mit dem gleichen Abstand liegt.“
- „b) bewegt sich im Kreis $\Rightarrow$ gleichmäßig“
- „A=Mittelpunkt also bewegt sich α gleichmäßig.“
- „b) weil der Radius des Kreises immer gleich bleibt.“
- „Der Winkel α wird gleichmäßig größer, weil sich C auch gleichmäßig auf dem Kreis um A bewegt. Aber wenn C auf dem Schlusspunkt angelangt ist, dann ist α wieder genauso groß wie in der Ausgangsposition.“

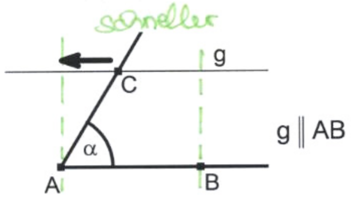
Im Gegensatz dazu sind die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen für verschiedene Auswirkungen von Bewegungen sensibilisiert und können sich prinzipiell vieles vorstellen. Andererseits sind sie auch bereit, vertraute Bewegungen, wie z. B. die Kreisbewegung zu hinterfragen. Dies kann dazu führen, dass sie nicht mehr spontan die Kreisbewegung ankreuzen, aber auch noch nicht so weit sind, ihre logischen Schlüsse bis zum Ende konsequent fortzusetzen. Es kommt dann u. U. zu Fehlern wie den Folgenden:

5) Der Punkt C des zweiten Schenkels des Winkels α bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf dem Kreisbogen b bzw. der Gerade g.

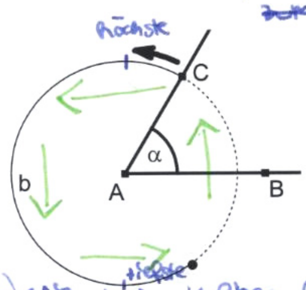
Bei welcher Bewegung von C wird der **Winkel α gleichmäßig größer**?

a) Wenn C senkrecht ~~zu~~ zu g steht.

a)

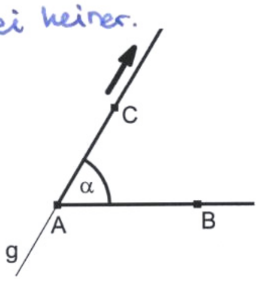


b)

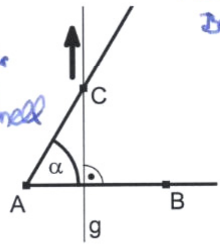


b) wie beim Kolben, an der höchsten Stellen, den Bereich langsamer, im Bereich des tiefsten Punktes langsamer

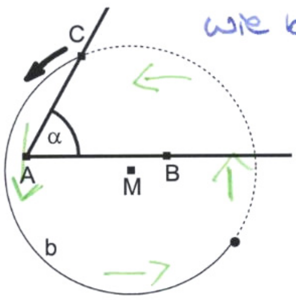
c) bei keiner.



d) immer gleich schnell



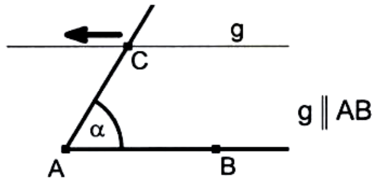
e) wie bei a)



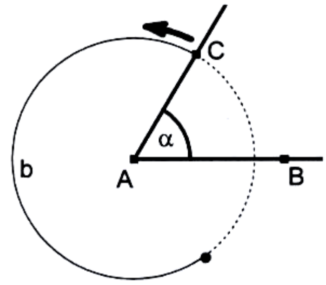
5) Der Punkt C des zweiten Schenkels des Winkels α bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf dem Kreisbogen b bzw. der Gerade g.

Bei welcher Bewegung von C wird der **Winkel α gleichmäßig größer**?

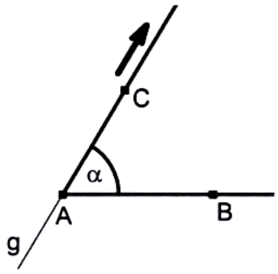
a)



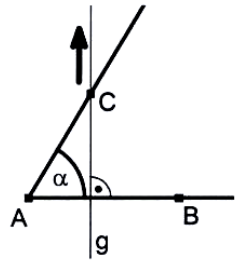
b)



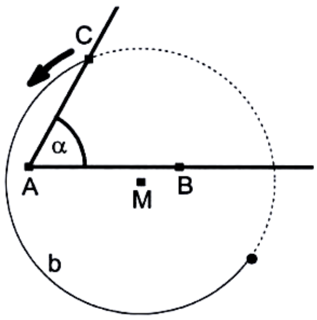
c)



d)



e)



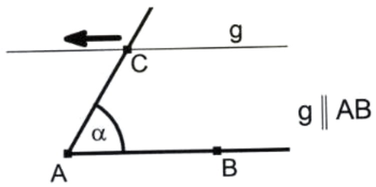
Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

Der Punkt C wird immer in die Richtung nach links oder nach oben verschoben und so wird α größer

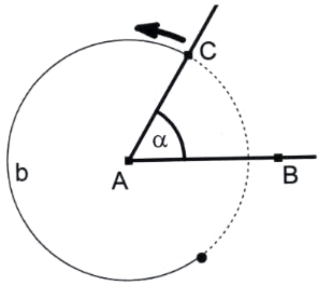
5) Der Punkt C des zweiten Schenkels des Winkels α bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf dem Kreisbogen b bzw. der Gerade g.

Bei welcher Bewegung von C wird der **Winkel α gleichmäßig größer**?

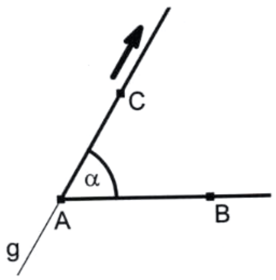
a)



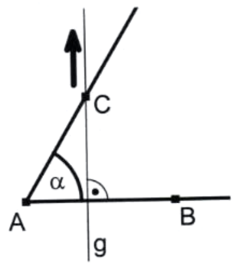
b)



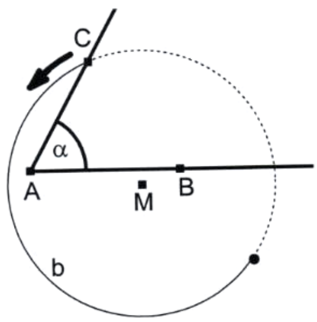
c)



d)

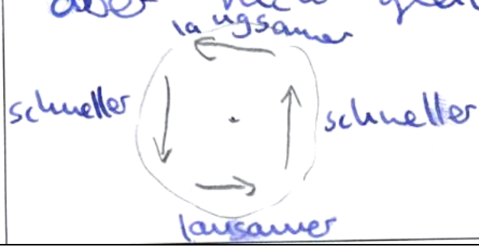


e)



Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

Das ist so ähnlich wie bei dem Kolben bei einem Kreis ist zwar gleichmäßig aber nicht gleichschnell:



Ist man geneigt, die genannten Argumente zu akzeptieren und wertet man ohne das Item 5 aus, so bleibt es bei den bereits *mit* Item 5 gewonnen Aussagen. Sie treten nur sehr viel deutlicher hervor. Aus **Abb. 91** auf Seite 204 ist ersichtlich, dass unter diesen Vorzeichen die Unterrichtsklassen, die sich drei Unterrichtsstunden lang mit Änderungsverhalten auseinander gesetzt haben, sogar signifikant besser abschneiden als ihre „Partner“ in den Kontrollklassen und dass dieses bessere Abschneiden insbesondere auch auf die signifikant bessere Leistung der besseren Gruppe (+) zurückzuführen ist. Die Unterrichtsklassen ohne Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten schneiden tendenziell, aber nicht signifikant, auch besser ab als ihre „Partner“ in den Kontrollklassen.

Insgesamt darf man wohl auf Grund der hier dargestellten Ergebnisse vorsichtig optimistisch sein und kann erwarten, dass ein auf dieses Schuljahr aufbauendes Jahr mit weiteren Unterrichtseinheiten zum Änderungsverhalten eine Steigerung der entsprechenden Leistung bringen dürfte. Die Frage, ob ein Unterricht, in dem „nur“ mit Bewegungen argumentiert, aber das Änderungsverhalten nicht explizit thematisiert wird, dazu führt, dass auch das Änderungsverhalten erfasst und beschrieben werden kann, ist nach den hier vorliegenden Ergebnissen eher skeptisch zu beurteilen.

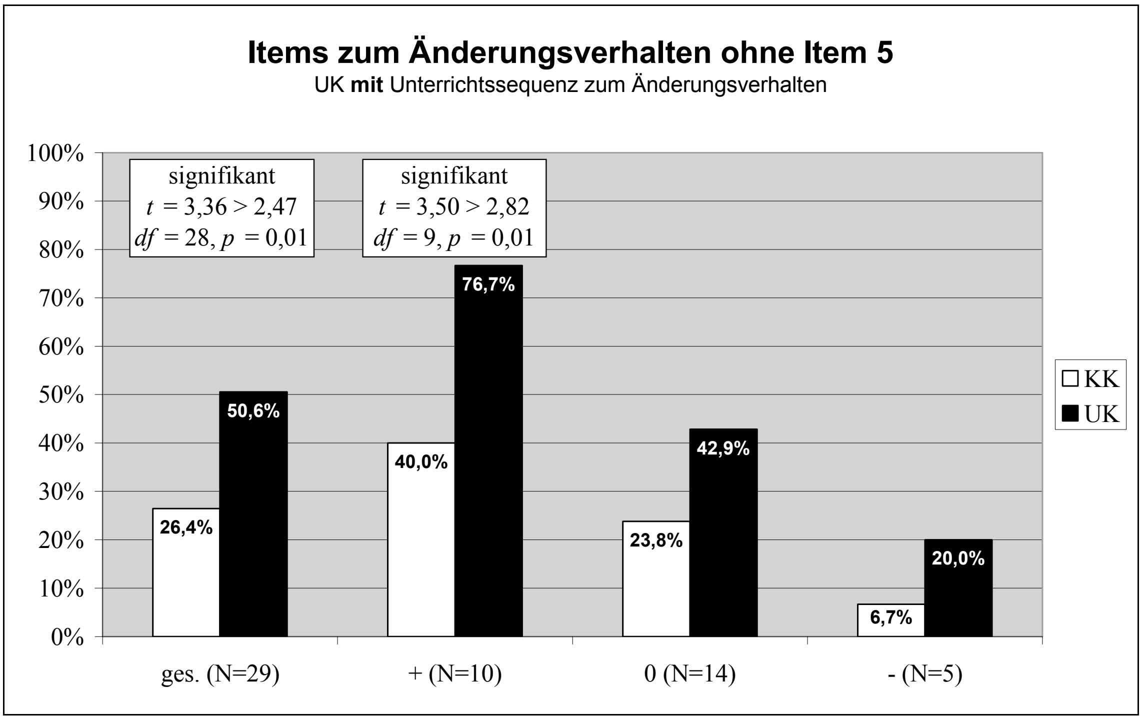


Abb. 91: Prozentsatz der richtig gelösten Items zum Änderungsverhalten **ohne Item 5** in den „Matched Samples“ aus Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK), bei denen in den UK die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten stattgefunden hat

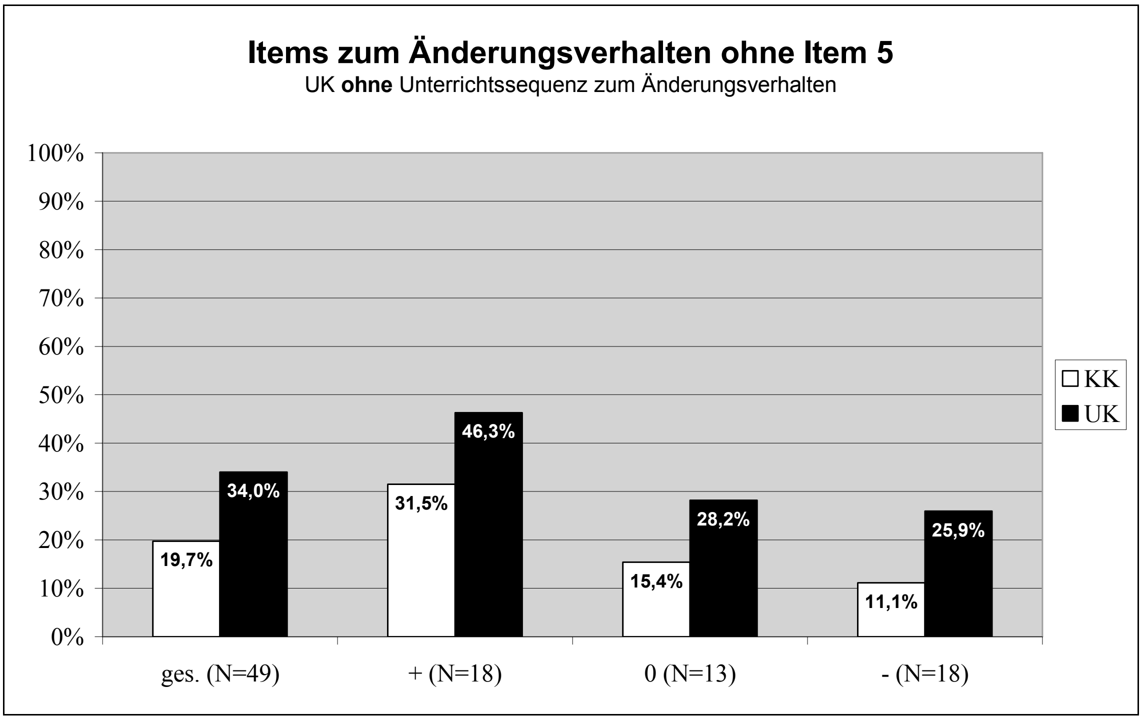


Abb. 92: Prozentsatz der richtig gelösten Items zum Änderungsverhalten **ohne Item 5** in den „Matched Samples“ aus Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK), bei denen in den UK die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten **nicht** stattgefunden hat

4.2.3 Auswertung der TIMSS-Items

Führt ein Unterricht, der einen Schwerpunkt auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens legt, evtl. in Bereichen, die eher nicht mit Hilfe des Beweglichen Denkens zu lösen sind, zu Defiziten? Zur Untersuchung der Frage wurden vier Items[266] in den Nachtest aufgenommen, die aus dem Itempool der TIMS-Studie stammen. Sie wurden ausgewählt, weil sie von ihrer Anlage her gerade nicht darauf ausgerichtet sind, sie mit Hilfe des Beweglichen Denkens zu lösen, aber zentrale Inhalte des bayerischen Geometrielehrplans der 7. Jahrgangsstufe abdecken. Die in **Abb. 93** zusammengestellten relativen Lösungshäufigkeiten für die einzelnen Gruppen machen deutlich, dass in der Beantwortung der TIMSS-Items kein wesentlicher Unterschied zwischen den Unterrichts- und den Kontrollklassen besteht. Ein auf Bewegliches Denken ausgerichteter Unterricht

[266] Es handelt sich um die Items 1 bis 4 des Fragebogens. Die Items, ihre richtigen Auswahlantworten und ihre relativen Lösungshäufigkeiten für die einzelnen Gruppen finden sich im Anhang C ab Seite 253.

wirkt sich also, zumindest im Hinblick auf die durch die vier Items abgedeckten Inhaltsbereiche, *nicht* negativ auf andere Unterrichtsinhalte aus.

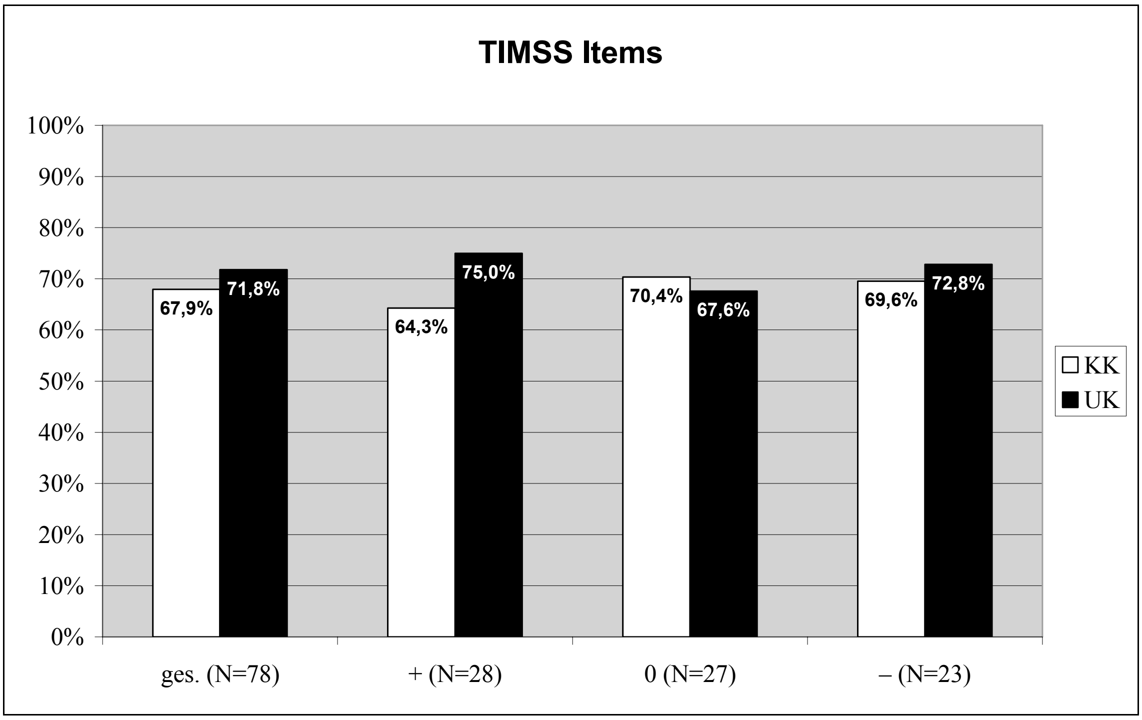


Abb. 93: Prozentsatz richtig gelöster TIMSS-Items in den Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK)

4.3 Auswertung des Leistungstests der Nachuntersuchung

Die Nachuntersuchung beschäftigt sich mit der Frage, ob besonders begabte[267] Schülerinnen und Schüler, die nach dem Unterrichtskonzept dieser Arbeit unterrichtet werden, eine größere Leistungssteigerung bei Fragen zum Beweglichen Denken erreichen als Kinder aus Regelklassen. Wie bereits in Abschnitt 4.1.2 auf den Seiten 187ff dargestellt wurde, waren von den 23 Schülerinnen und Schülern der „Hochbegabtenklasse“ nur zwölf im Sinne der hier zu Grunde gelegten Definition besonders begabt. Bei der Parallelisierung durch Bildung von „Matched Samples“ bzgl. des Vortestergebnisses konnten

[267] Von besonderer Begabung wird in diesem Abschnitt dann ausgegangen, wenn einer Schülerin oder einem Schüler auf Grund des kognitiven Fähigkeitstests „KFT 4-12+ R“ ein, auf die Jahrgangsnorm für die 7. Klasse bezogener Intelligenzquotient bescheinigt wurde, der größer als 120 ist.

aber nur für zehn Schülerinnen und Schüler Partner in der Kontrollklasse mit demselben Vortestergebnis gefunden werden. Grundlage für alles Weitere ist also eine Stichprobe aus zehn „Matched Samples“.

Bereits ein erster Blick auf die in **Abb. 94** auf Seite 208 zusammengestellten Ergebnisse bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Items genügt, um zu sehen, dass die Schülerinnen und Schüler der Kontrollklasse erheblich besser abschneiden als die Kinder der „Hochbegabtenklasse“. Ein Signifikanztest erübrigt sich also, da vor dem Versuch von der Hypothese ausgegangen wurde, dass die besonders begabten Schülerinnen und Schüler eine größere Leistungssteigerung erzielen. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall. Vielmehr scheint dieses Ergebnis das Resultat der Hauptuntersuchung dieser Arbeit zu bestätigen, dass nämlich Schülerinnen und Schüler aus der mittleren Leistungsgruppe am meisten von einem Unterricht profitieren, der auf Bewegliches Denken setzt.[268]

Noch interessanter ist ein anderes Ergebnis der Nachuntersuchung, das aus **Abb. 95** auf Seite 209 abzulesen ist. Dort sind die Leistungssteigerungen in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses aufgetragen.[269] Diese Darstellungsweise ermöglicht es, von den unterschiedlichen Verteilungen der Ausgangsstichproben zu abstrahieren und so die Leistungssteigerungen auch von nicht parallelisierten Gruppen sinnvoll zu vergleichen. Hier ist zunächst noch einmal sehr deutlich zu erkennen, dass die Kontrollklasse in allen Inhaltsbereichen erheblich besser abschneidet als die Hochbegabtenklasse. Etwas anderes ist aber noch entscheidender. Beide Klassen (KK und HK) der Nachuntersuchung weisen eine deutlich größere Leistungssteigerung auf als die Unterrichtsklassen der Hauptuntersuchung dieser Arbeit, obwohl sie nach demselben Unterrichtskonzept unterrichtet wurden. Der gemeinsame Unterschied besteht darin, dass beide Klassen der Nachuntersuchung von Lehrern unterrichtet wurden, die schon ein Jahr nach diesem Konzept unterrichtet hatten, bevor sie die Klassen übernahmen. Dies stützt die Vermutung, dass Lehrerinnen und Lehrer, die mit dem Konzept des Beweglichen Denkens vertraut sind, einen Unterricht auf der Grundlage desselben Unterrichtskonzepts effektiver gestalten können.

---

[268] Hier wird davon ausgegangen, dass die Kontrollklasse eine „durchschnittliche“ Klasse ist.
[269] Die zugehörigen Daten sind der **Tabelle 16** auf Seite 209 zu entnehmen.

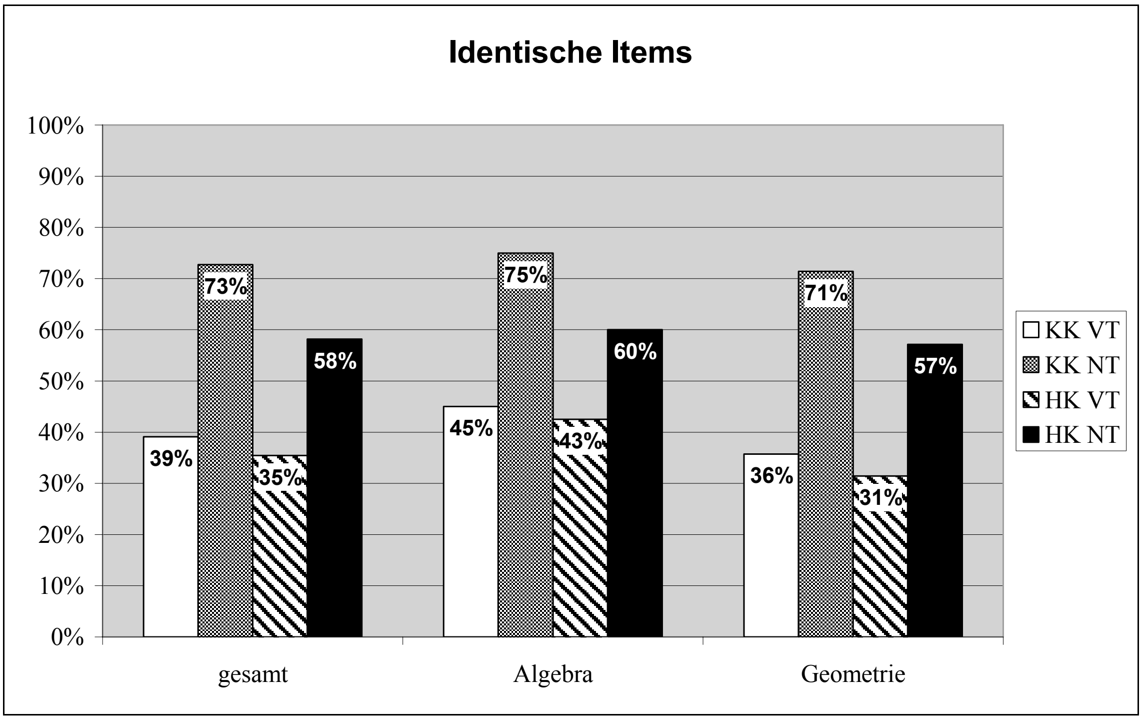


Abb. 94: Prozentsatz der richtig gelösten Items der parallelisierten Hochbegabten- (HK) und Kontrollklasse (KK) unter den in Vor- (VT) und Nachtest (NT) identischen Items

Das in **Abb. 96** auf Seite 210 dargestellte Balkendiagramm rundet das oben skizzierte Bild noch ab. Die Ergebnisse der TIMSS-Items im Nachtest zeigen, dass die besonders begabten Schülerinnen und Schüler bei Fragen, die ohne Bewegliches Denken zu beantworten sind, genauso gut abschneiden wie die Kinder aus „normalen“ Klassen, während sie auch bei Fragen zum Änderungsverhalten wieder deutlich schlechter sind.[270]

[270] In beiden Klassen der Nachuntersuchung wurde die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten durchgeführt.

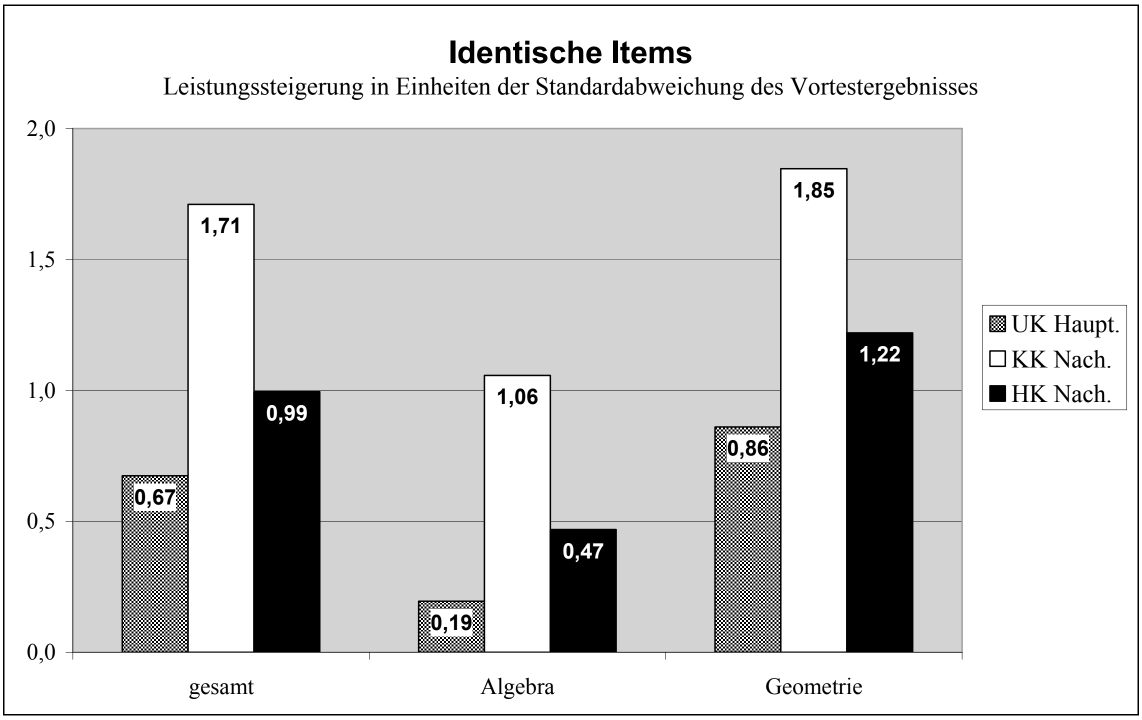


Abb. 95: Leistungssteigerung der Unterrichtsklassen der Hauptuntersuchung (UK Haupt.) und der parallelisierten Hochbegabten- (HK Nach.) und Kontrollklassen (KK Nach.) der Nachuntersuchung bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Items, dargestellt in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses

Identische Items	Klassen	Vortest		Nachtest	
		empirischer Mittelwert	empirische Standardabw.	empirischer Mittelwert	empirische Standardabw.
Alle	UK Haupt.	0,47	0,16	0,58	0,16
	KK Nach.	0,39	0,20	0,73	0,22
	HK Nach.	0,35	0,23	0,58	0,17
Geometrie-items	UK Haupt.	0,44	0,19	0,56	0,17
	KK Nach.	0,45	0,28	0,71	0,18
	HK Nach.	0,31	0,21	0,57	0,18
Algebra-items	UK Haupt.	0,52	0,29	0,62	0,29
	KK Nach.	0,36	0,19	0,75	0,33
	HK Nach.	0,43	0,37	0,60	0,27

Tabelle 16: Empirische Mittelwerte und empirische Standardabweichungen der relativen Lösungshäufigkeiten bzgl. bestimmter Itemgruppen des Fragebogens

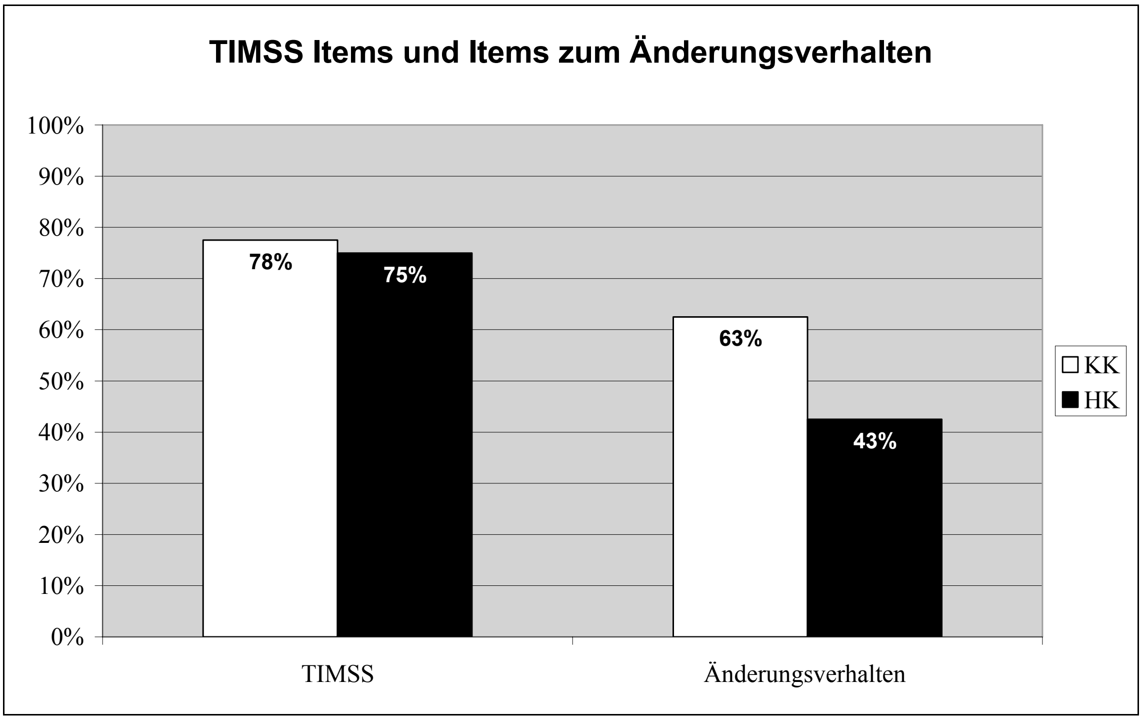


Abb. 96: Prozentsatz der richtig gelösten TIMSS-Items bzw. der richtig gelösten Items zum Änderungsverhalten in der Hochbegabten- (HK) und der Kontrollklasse (KK)

4.4 Lehrerinterviews

Die Frage, ob eine von außen an die Schule herangetragene Unterrichtsidee erfolgreich ist, d. h. in den alltäglichen Unterricht hineinwirkt, hängt entscheidend von der Einstellung von Lehrerinnen und Lehrern zu dieser Idee ab. Die im Rahmen dieser Arbeit mit den Lehrerinnen und Lehrern der Unterrichtsklassen der Hauptuntersuchung am Ende des Schuljahres 2003/04 durchgeführten Leitfadeninterviews gehen deshalb folgenden Fragen nach:

- Wie erleben die Lehrerinnen und Lehrer den Unterricht mit Fokus auf das Bewegliche Denken? Halten sie ihn subjektiv für erfolgreich?
- Nehmen die Lehrerinnen und Lehrer selbst die Idee des Beweglichen Denkens auf, werden sie zur Entwicklung eigener Unterrichtsideen angeregt und halten sie es für sinnvoll, auch in anderen Klassen nach diesem Konzept zu arbeiten?

Die Kolleginnen und Kollegen haben sich freiwillig bereit erklärt am Forschungsprojekt und auch am abschließenden Interview teilzunehmen. Sie haben sich auf das Interview vorbereitet und teilweise Zettel mit Notizen bzw. Unterlagen zur Illustration ihrer Aussagen mitgebracht. Auf Grund der über ein ganzes Jahr entwickelten guten Arbeitsbeziehung zwischen dem Autor, der auch als Interviewer fungierte, und den beteiligten Lehrerinnen und Lehrern[271], war es möglich, eine sehr entspannte Interviewatmosphäre herzustellen. Die Kolleginnen und Kollegen beschreiben ihre Erfahrungen, die sie im Laufe des Schuljahres 2003/04 mit dem Unterrichtskonzept gesammelt haben, und reflektieren ihre Eindrücke rückblickend. Diese persönlichen Einschätzungen werden im Folgenden nach den Kategorien der qualitativen Inhaltsanalyse gegliedert vorgestellt und im Abschnitt 4.5 ab Seite 226 zusammenfassend diskutiert.

4.4.1 Die Unterrichtsform – Selbstständig entdeckend lernen?!

Die fünf Lehrerinnen und Lehrer sind einhellig der Ansicht, dass das Bewegliche Denken und das Argumentieren mit Bewegungen bzw. Veränderungen keiner speziellen Unterrichtsform bedarf. Ein Unterricht mit diesem Schwerpunkt kann nach ihrer Einschätzung vielmehr vom lehrerzentrierten Frontalunterricht bis hin zur schülerzentrierten selbstständig entdeckenden Gruppen-, Partner- oder Einzelarbeit Gewinn bringend sein. Alle gaben allerdings auch zu Protokoll, dass gerade das selbstständige Arbeiten, das entdeckende Lernen und Erarbeiten von Inhalten sowie grundsätzlich Partner- und Gruppenarbeit für alle Schülerinnen und Schüler äußerst ungewohnt war. Viele haben schon bei den kleinsten Schwierigkeiten aufgegeben und gewartet, bis eine Mitschülerin oder ein Mitschüler ein Ergebnis hatte, um dies dann unreflektiert zu übernehmen. Eine Kollegin empfand die Partnerarbeitsphasen am Computer aus diesem Grund als nicht besonders effektiv. In ihrer Wahrnehmung ist erst dann etwas „hängen geblieben“, als alles noch einmal *unter Anleitung* im Schulheft zusammengefasst wurde.

Die einhellige Meinung aller Kolleginnen und Kollegen ist, dass es vielen Schülerinnen und Schülern an Selbstständigkeit und eigenverantwortlicher Arbeitshaltung mangelt. Für eine Kollegin hat sich der Eindruck verfestigt, dass bei vielen Schülerinnen und Schülern der Drang gefehlt hat, etwas selbst auszuprobieren und dadurch evtl. zu verstehen. Diese Grundhaltung vieler Schülerinnen und Schüler hat sich in der Einschätzung von vier der fünf Kolleginnen und Kollegen im Verlauf des Schuljahres nur sehr langsam in eine erwünschte Richtung verändert.

[271] Mit drei der fünf Lehrkräfte habe ich sogar bereits über mehrere Jahre zusammengearbeitet.

Im Kontrast dazu berichtet ein Kollege, dass er gerade die Phasen der selbstständigen Arbeit mit dynamischen Arbeitsblättern am Computer als besonders effektiv erlebt hat. Er führt dies auf folgende Punkte zurück:

- Die Schülerinnen und Schüler mussten ihre Ergebnisse in das Schulheft notieren. Dies wurde stichprobenartig kontrolliert.
- Die Schülerinnen und Schüler mussten jederzeit damit rechnen, dazu aufgefordert zu werden, ihre Überlegungen und Ergebnisse aus der Partnerarbeitsphase vor der ganzen Klasse vorzustellen.
- Die Zusammenfassung erfolgte nicht durch den Lehrer an der Tafel. Die vorgestellten Ergebnisse wurden vielmehr gemeinsam diskutiert und es war Aufgabe jedes einzelnen Schülers, seine Hefteinträge entsprechend der Diskussion zu ergänzen bzw. zu verbessern.
- Eine frühzeitig abgehaltene Stegreifaufgabe ist sehr schlecht ausgefallen. Dies hat scheinbar dazu geführt, dass die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit der intensiven Auseinandersetzung mit den zur Verfügung gestellten Materialien erkannt haben. In der Folge haben die Schülerinnen und Schüler sich im Hinblick auf die Klassenarbeit offensichtlich auch zu Hause intensiv mit den DynaGeoX-Applets auseinander gesetzt.

Betrachtet man die Äußerungen der Lehrerinnen und Lehrer, so ist offensichtlich, dass die Schülerinnen und Schüler aller Klassen vor Durchführung des Unterrichtskonzepts dieser Arbeit keine nennenswerten Erfahrungen mit Partner- oder Gruppenarbeit gesammelt und auch nicht gelernt haben selbstständig zu arbeiten. Wenn sie dann doch beginnen selbstständig zu arbeiten, dann auf Grund von extrinsischer Motivation im Hinblick auf „Prüfungssituationen“. Sie sind offensichtlich einen stark lehrerzentrierten und eher entwickelnden als erarbeitenden Unterricht gewohnt. Die Kolleginnen und Kollegen bestätigen das indirekt durch ihre Antworten auf die Frage, wie sich ihre Art zu unterrichten durch die Arbeit nach dem Konzept verändert hat. So kam nun der Computer deutlich häufiger zum Einsatz und Partner- oder Gruppenarbeitsphasen wurden als Unterrichtsform erheblich stärker genutzt als sonst bei ihnen üblich. Dies lag nach ihrer einhelligen Aussage ausschließlich daran, dass das im Unterrichtskonzept des Autors so vorgegeben war. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, wie die Kolleginnen und Kollegen reagieren, wenn sie den Eindruck haben, in Zeitverzug zu sein:

Alle berichten, dass sie in einem solchen Fall die im Konzept eingeplanten Unterrichtsphasen, in denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig entdeckend arbeiten sollten, durch lehrerzentrierte Unterrichtsgespräche oder sogar softwareunterstützte Lehrervorträge ersetzt haben.

Die mangelnde Vertrautheit mit Arbeitsphasen, in denen Schülerinnen und Schüler selbstständig entdeckend lernen, lässt sich auch an folgender Aussage einer Kollegin ablesen:

> „Das ist aber vielleicht allgemein bei dieser Unterrichtsform der Fall, dass sie erst mal nicht so genau wissen, was ist das überhaupt und dann ist es halt schade, wenn man dann als Lehrer am Schluss doch wieder das Konkrete selber macht. Dass man sagt, ok, das ist jetzt das und das muss man so und so konstruieren. Es ist halt dann immer ein bisschen schade, weil das kommt dann doch so aufgesetzt und vielleicht war es am Anfang besser und vielleicht ist das dann auch das Problem gewesen, dass sie das nicht mehr mit so dem Einsatz gemacht haben oder mit dem nötigen Ernst oder wie auch immer. Dass sie wussten, es kommt ja dann eh irgendwann die Lösung."

Dieselbe Kollegin gibt aber auch zu bedenken, dass es vielleicht gar nicht schlecht war, auf Grund des Konzepts einmal gezwungen gewesen zu sein, auch bei auftretenden Schwierigkeiten weiterhin schülerzentriert zu arbeiten. Sie erwartet, dass sie sich auf Grund dieser Erfahrung in Zukunft vielleicht öfter „trauen" werde, „die selbstständig arbeiten zu lassen, was herausfinden zu lassen."

4.4.2 Arbeiten mit dem Computer

Alle Lehrerinnen und Lehrer berichten davon, dass die Schülerinnen und Schüler es absolut nicht gewohnt waren im Computerraum zu arbeiten. Auf Grund ihrer bisherigen Erfahrungen assoziieren sie den Computerraum mit Freistunden, dem Surfen im Internet, Computerspiele machen u. ä. Für die Schülerinnen und Schüler war es offensichtlich eine völlig neue Erfahrung, dass man im Computerraum Inhalte erarbeiten soll und über diese Inhalte auch noch in den Folgestunden und sogar in Klassenarbeiten Rechenschaft ablegen muss. Demzufolge berichten die Kolleginnen und Kollegen, dass es je nach Klasse zwei oder sogar deutlich mehr Unterrichtsstunden gedauert hat, bis sich eine sinnvolle Arbeitsatmosphäre im Computerraum entwickelte.

Die Kolleginnen und Kollegen mussten große Anstrengungen unternehmen, um die Arbeitshaltung der Schülerinnen und Schüler nachhaltig zu ändern. Dies reichte bis hin zur Drohung, unter diesen Umständen nicht mehr in den Computerraum zu gehen. Dies hat offensichtlich gerade deshalb gefruchtet, weil die Schülerinnen und Schüler sonst im Unterricht fast gar nicht mit dem Computer arbeiten und der Computereinsatz deshalb immer noch per se eine Motivation für sehr viele darstellt. In vier der fünf Klassen wurde die zunächst euphorische Grundhaltung der Schülerinnen und Schüler dem Computer gegenüber zwar etwas durch die Erkenntnis gedämpft, dass man mit ihm genauso arbeiten muss wie im „normalen“ Unterricht, die positive Grundeinstellung blieb aber das ganze Jahr hindurch bestehen. Bei einer Klasse hat sich eine zunächst abwehrende Haltung der Mehrheit der Klasse nach einer gut ausgefallenen Klassenarbeit, in deren Umfeld die Schülerinnen und Schüler den Wert der Arbeit am und mit dem Computer schätzen gelernt haben, in das Gegenteil verkehrt. Ab diesem (leider sehr späten) Zeitpunkt im Schuljahr wollten sie so oft wie möglich im Computerraum arbeiten.

Die Notwendigkeit, den Computerraum als Arbeitsumfeld anzunehmen, paart sich bei einer ganzen Reihe von Schülerinnen und Schülern mit dem Problem, selbst einfachste Arbeitsweisen im Umgang mit dem Rechner erst mühsam erlernen zu müssen. In diesem Zusammenhang berichten die Kolleginnen und Kollegen davon, dass es bei einer Reihe von Kindern Schwierigkeiten mit dem Setzen von Punkten in EUKLID DynaGeo gab.

Nach übereinstimmender Aussage aller Kolleginnen und Kollegen hat es eine ganze Weile gedauert, bis die Schülerinnen und Schüler erkannt haben, welche Vorteile der Computer ihnen bringt und wie man sinnvoll mit ihm arbeitet. Gerade deshalb halten alle Lehrerinnen und Lehrer vor dem ersten inhaltlichen Einsatz des Programms EUKLID DynaGeo zunächst eine kurze Einführung in das Programm für angebracht. Ein Lehrer schlägt sogar vor, bereits in der 5. und 6. Klasse jeweils ca. eine Woche mit dem Programm zu arbeiten, sodass es in der 7. Klasse bereits von Beginn an sinnvoll genutzt werden kann. Die Kollegin, die in der Laptop-Klasse unterrichtet hat, berichtet davon, dass sie ein zusätzliches Computerpraktikum von zwei Wochenstunden als sehr positiv erlebt hat. Dort wurde der Computereinsatz auch für den jeweiligen Fachunterricht eingeübt. Im Rahmen dieses Praktikums wurde u. a. mit EUKLID DynaGeo konstruiert. Auf diese Weise fand die Einführung in Konstruktionstechniken zweigleisig statt. Im Unterricht mit Zirkel und Lineal, im Praktikum mit EUKLID DynaGeo.

Insgesamt hatten ca. 90 % der Schülerinnen und Schüler zu Hause einen Computer mit Internetanschluss zur Verfügung. Die Mehrheit der Kolleginnen und Kollegen hat deshalb den Schülerinnen und Schülern per E-Mail (und teilweise auf Diskette) die im Unterricht benutzten EUKLID DynaGeo-Dateien auch für die häusliche Nacharbeit bzw. Vorbereitung zur Verfügung gestellt. Dies wurde aber in allen Klassen (außer der Laptop-Klasse) immer als fakultativ deklariert, um etwaigen Problemen mit Eltern auszuweichen. Die Lehrerinnen und Lehrer berichten, dass die Schülerinnen und Schüler, die diese Möglichkeit wahrgenommen haben, bereits von Anfang an keine Probleme mit der Handhabung des Programms hatten. Für sie waren die Partnerarbeitsphasen im Computerraum von Anfang an sehr effektiv.[272]

Das Arbeiten mit dem Computer im Mathematikunterricht stellte auch für drei der fünf Lehrerinnen und Lehrer eine neue Erfahrung dar. Sie berichten, dass sie zunächst Schwierigkeiten damit hatten, die Schülerinnen und Schüler im Computerraum dazu zu bringen, sich auf eine Erklärung oder Zusammenfassung des Lehrers einzulassen.[273] Vieles wurde im Computerraum vor und nach den Partnerarbeitsphasen auch gemeinsam erarbeitet. Dabei mussten die Schülerinnen und Schüler natürlich aufpassen, sich beteiligen und den Inhalt verstehen. In solchen Phasen hat aber ein Großteil der Schüler „abgeschaltet" oder wurde durch den eingeschalteten Computer abgelenkt. Da Derartiges nur von Kolleginnen und Kollegen berichtet wird, die noch keine Erfahrung mit dem Unterricht im Computerraum gesammelt haben, muss wohl konstatiert werden, dass es eine ganze Weile dauert, bis Lehrkräfte sich eine geeignete Vorgehensweise für den Unterricht im Computerraum erarbeiten.

Gerade auch die Kolleginnen und Kollegen, für die der Computereinsatz im Unterricht eine weitgehend neue Erfahrung war, haben erkannt, dass der Einsatz von Computer und Beamer effektiv ist und Zeit sparen kann, weil dynamische Veranschaulichungen im Unterricht viel schneller zur Verfügung stehen, die sonst (evtl. sogar in mehre-

---

[272] Die Laptop-Klasse bildet im Zusammenhang mit dem Arbeiten am Computer insofern eine Ausnahme, als die Schülerinnen und Schüler alle Interesse am Arbeiten mit dem Computer haben, dies auch in allen Fächern gewohnt sind und natürlich auch Hausaufgaben und in Mathematik sogar Klassenarbeiten teilweise am und mit dem Laptop schreiben. Hierfür liegt eine Sondergenehmigung des bayerischen Kultusministeriums vor. Die Schülerinnen und Schüler der Laptop-Klasse sind sehr motiviert, wenn es darum geht Neues auszuprobieren. Sie haben insbesondere bewegliche Argumentationen sehr intensiv aufgenommen und neue Ideen mit dem Programm EUKLID DynaGeo umgesetzt und erforscht. Dies ging so weit, dass die Schülerinnen und Schüler über sich in Abgrenzung zu anderen Klassen sagten: „Wir sind dynamisch!"

[273] Ein Kollege meint: „Das ist einfach schwer zu unterrichten."

ren Einzelbildern) an die Tafel gezeichnet werden müssten.[274] Diese Lehrkräfte berichten auch, dass es für sie selbst einen Mehraufwand in der Unterrichtsvorbereitung bedeutet hat, sich in das Programm EUKLID DynaGeo einzuarbeiten sowie die zur Verfügung gestellten Dateien durchzusehen und sich mit ihnen vertraut zu machen.

4.4.3 Bewegliches Denken und Sprache

Alle Lehrerinnen und Lehrer berichten, dass die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten beim Verbalisieren von Bewegungs- bzw. Veränderungsvorgängen hatten. Dies gilt nach ihrer Aussage sowohl für den mündlichen als auch für den schriftlichen Bereich. Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, dass man sich zunächst in diese Art zu denken einfinden muss. Eine Kollegin und ein Kollege berichten unabhängig voneinander, dass es für sie selbst am Anfang schwierig war in Bewegungen zu denken. Für die Kollegin hat das nach ihren Worten dazu geführt, dass sie beim Unterrichten häufiger als sonst überlegt hat, wie sie etwas ausdrücken soll. Sie hat dann im Verlauf des Schuljahres an sich selbst eine Gewöhnung an diese Art des Denkens festgestellt. Dadurch fiel es ihr, wie sie berichtet, zunehmend leichter, Veränderungsvorgänge zu verbalisieren. Ganz ähnliche Beobachtungen hat eine andere Kollegin an ihren Schülerinnen und Schülern gemacht. Zu Beginn des Schuljahres konnten sie bewegliche Denkvorgänge praktisch überhaupt nicht selbstständig verbalisieren. Sie glaubt jedoch, eine sehr langsame, aber stetige Entwicklung im Verlauf des Schuljahres erkannt zu haben und geht davon aus, dass die meisten Schülerinnen und Schüler nach einem weiteren Jahr Schulung im Beweglichen Denken in der Lage wären, dieses auch völlig selbstständig und verständlich in Worte zu fassen. Die dritte Lehrerin ist da etwas zurückhaltender und meint mit Blick auf ihren Unterricht, dass man wohl noch mehr Zeit dafür investieren müsste, die Schülerinnen und Schüler selbstständig formulieren und Begründungen im Sinne des Beweglichen Denkens entwickeln zu lassen. Sie berichtet, dass im Unterricht einige Schülerinnen und Schüler sehr interessiert und motiviert „dynamisch“ bei der Sache waren, Gedanken dabei oft sowohl von ihnen als auch von ihr

[274] Allerdings wünschen sich manche im Klassenzimmer einen fest an der Decke montierten Beamer, damit die Organisation und das aufwändige Auf- und Abbauen entfällt und der Computer noch spontaner im Unterricht eingesetzt werden kann.

selbst „ins Unreine“ formuliert und erst nach und nach präzisiert wurden. Dabei, so ihr Eindruck, wurde eine ganze Reihe von Schülerinnen und Schülern früher oder später „abgehängt“. Diese Schülerinnen und Schüler haben ihrer Erfahrung nach noch eine weitere Unterrichtseinheit benötigt, in der die Arbeitsergebnisse noch einmal besprochen und evtl. gemeinsam präzisiert bzw. verbessert wurden. Die Kollegin berichtet davon, dass sie aus Zeitgründen am Ende solcher Diskussions- und Arbeitsphasen oft selbst die Ergebnisse zusammengefasst oder einen guten Schüler bzw. eine gute Schülerin zu einer Zusammenfassung aufgefordert hat.

Ein weiterer Lehrer nennt einen ganz anderen möglichen Grund für die Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern, ihre Überlegungen zu verbalisieren. Er berichtet, dass zu Hausaufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Bewegung begründen sollten, oft Formulierungen in den Heften standen wie „das ist logisch“ oder „das ist klar“. Viele Begründungen dieser Art erschienen, wie er vermutet, manchen Schülerinnen und Schülern als sehr einfach und sie konnten sich deshalb evtl. gar nicht vorstellen, dass das als Begründung schon ausreicht. Seine Darstellung illustriert der Kollege mit folgendem Beispiel: Die Tatsache, dass eine Strecke [AB] ihre Länge nicht ändert, wird damit begründet, dass A der Mittelpunkt eines Kreises ist und B entlang der Kreislinie dieses Kreises bewegt wird. Vielen Schülerinnen und Schülern erschien, wie er berichtet, eine derartige Begründung nicht gewichtig oder nicht „mathematisch“ genug.

Die Lehrerinnen und Lehrer erklären übereinstimmend, dass weder sie selbst noch die Schülerinnen und Schüler besondere Begriffe oder Ausdrücke zur Beschreibung von Bewegungen bzw. Veränderungen geprägt hätten.[275] Es wurde sehr viel umgangssprachlich formuliert, aber letztlich haben die Schülerinnen und Schüler nach übereinstimmender Aussage aller Kolleginnen und Kollegen die Begriffe und Formulierungen ihrer Lehrerinnen und Lehrer übernommen. Diese geben ihrerseits an, sich an die Formulierungen des Unterrichtskonzepts gehalten zu haben. Die fehlende Kreativität bei der Verbalisierung von „beweglichen Denkvorgängen“ könnte darauf hindeuten, dass

[275] Nur eine einzige Kollegin kann sich an einen Fall erinnern, in dem eine Schülerin nach der dynamischen Einführung des Winkelbegriffs für Winkel größer als 360° die Bezeichnung „überdrehter Winkel“ kreiert hat.

im Alltag selten mit Bewegungen argumentiert wird und deshalb die sprachlichen Fähigkeiten in diesem Bereich unterentwickelt sind. Dies würde auch erklären, warum vorgegebene Formulierungen zum Beweglichen Denken bereitwillig aufgegriffen werden. Wenn man sich eine Veränderung vorstellen kann, einem aber zunächst die Worte fehlen, um diese Vorstellung auch auszudrücken, dann greift man jede Formulierung, die man hört oder liest, dankbar auf, wenn sie den eigenen Vorstellungen einigermaßen nahe kommt.[276]

Probleme mit Formulierungen ergaben sich auch bei den Hefteinträgen. Eine Kollegin konstatiert rückblickend, dass man wohl mehr von dem, was im Unterricht im Wesentlichen mündlich diskutiert wurde, auch im Schulheft festhalten müsste, weil viele Schülerinnen und Schüler nach ihrer Erfahrung die Inhalte nochmals zu Hause nacharbeiten bzw. nachlesen wollen. Sie sieht hier aber für sich selbst folgendes Problem:

> „(…) wenn ich es formuliere, dann müsste ich es ja so formulieren, dass es wirklich verbindlich zum Lernen da steht und viele Formulierungen ergaben sich ja erst im Unterricht. Und da war einiges wo man gedacht hat, da muss man noch mal drüber gehen, vielleicht finden wir noch eine bessere Formulierung."

Einen möglichen Ausweg aus diesem Dilemma könnte ihrer Ansicht nach sein, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Überlegungen und Ergebnisse selbst in ihren Worten aufschreiben. Allerdings gibt sie zu bedenken, dass dies nur dann effektiv wäre, wenn alles entweder von der Lehrerin[277] oder von den Schülerinnen und Schülern untereinander korrigiert würde.

Ein Kollege[278] hat gute Erfahrungen damit gemacht, dass die Schülerinnen und Schüler während der Partnerarbeitsphasen ihre Ergebnisse und Überlegungen in ihre Schulhefte notiert haben. Dies wurde, nach seiner Aussage, von ihm auch stichprobenartig kontrolliert. Darüber hinaus mussten die Schülerinnen und Schüler jederzeit damit

---

[276] Dieses Verhalten findet sich auch auf den Videos, die im Projektjahr in einzelnen Unterrichtsstunden aufgezeichnet wurden. So wurden nach der Gruppenarbeitsphase zum Änderungsverhalten bei der Präsentation der Gruppenergebnisse vor der Klasse von den Gruppensprechern oft Formulierungen aus den Präsentationen anderer Gruppen übernommen, die in ihrer eigenen Gruppe vorher nie verwendet worden waren.

[277] Dies hält sie auf Grund der Arbeitsbelastung nicht für realistisch.

[278] Es handelt sich um den Lehrer, der die Partnerarbeitsphasen als sehr fruchtbar für die Schülerinnen und Schüler erlebt hat.

rechnen, ihre Ergebnisse vor der Klasse vorstellen zu müssen. Seine Anweisungen an die Klasse für diese Plenumsarbeit beschreibt er wie folgt:

> „Das war eine Sache, wo ich einfach gesagt habe, Leute, ich notiere das nicht einfach vorne, ich rufe euch auf, ihr sagt mir etwas und dann diskutieren wir darüber, über das Ergebnis. Und das war ein Punkt, wo ich gesagt habe, das braucht ihr auch im Heft. Verbessert es, wenn es falsch ist, was ihr euch gedacht habt. Denn das ist Stoff, den ihr braucht."

Im Gegensatz dazu ist eine Lehrerin nach negativen Rückmeldungen von Eltern dazu übergegangen, eigene Formulierungen der Schülerinnen und Schüler nur noch auf einem „Schmierblatt" notieren zu lassen. Erst nach dem abschließenden Unterrichtsgespräch wurde dann eine gemeinsame Formulierung in das Schulheft übernommen, „dass jeder das Gleiche im Heft stehen hat." Genau dieses Vorgehen kritisiert ein anderer Kollege rückblickend an seinem eigenen Unterricht. Er sagt, dass er in Zukunft Folgendes versuchen möchte:

> „Ich würde das, was die Schüler sagen, versuchen aufzuschreiben mit möglichst dem ähnlichen Wortlaut, auch auf die Gefahr hin, dass es eben nicht hundertprozent mathematisch korrekt ist. Um dann eventuell, wenn etwas auffällt oder zu schlimm ist, dass man dann eben sagt, da müssen wir noch etwas ändern, etwas umformulieren, weil das nicht ganz so stimmt. Das würde dann eventuell sonst zu Verständnisschwierigkeiten führen bei anderen. Aber einfach mehr so dieses Umgangssprachliche aufschreiben. Die Worte, die sie benutzen, auch so praktisch einfach nur festhalten. Und der eigentliche Satz, ob man den wirklich so hinschreibt, Satz, Doppelpunkt, das und das und das, ob das jetzt so wichtig ist?"

Folgende Erfahrung hat bei ihm dieses Umdenken ausgelöst:

> „(…) erst haben sie es verstanden, die Schüler, worum es geht, wir haben es locker formuliert und dann schreiben wir es formal richtig auf, mathematisch korrekt. Und dann kann keiner mehr etwas mit dem Satz anfangen."

Er setzt seine Analyse mit folgenden Worten fort:

> „Das sind Sachen, die man auch als Lehrer erst lernen muss. (…) Also ich mache es eigentlich auch oft sogar in den anderen Klassen so, dass ich das, was wir erarbeiten, so aufschreibe. Das habe ich in der Elften gemacht, das hat eigentlich ganz gut geklappt. Dass man so den ganzen Weg aufschreibt. (…) Halt locker formuliert und dann am Schluss noch mal korrekt, mathematisch korrekt. So dass die [Schülerinnen und Schüler] immer beides hatten."

4.4.4 Rückmeldungen von Eltern, Schülern und Kollegen

Die Rückmeldungen und Reaktionen der Eltern auf das Unterrichtskonzept werden von den Kolleginnen und Kollegen sehr unterschiedlich beschrieben.

- Ein Kollege berichtet davon, dass er das Projekt den Eltern persönlich im Rahmen eines Klassenelternabends zu Beginn des Schuljahres vorgestellt hat. Dabei haben die anwesenden Eltern dieses Vorhaben sehr positiv aufgenommen und die „neue“ Herangehensweise einhellig begrüßt. Nach diesem Elternabend haben die Schülerinnen und Schüler geradezu ungeduldig nachgefragt, wann dieser besondere Unterricht endlich beginnt. Auch im Verlauf des Schuljahres gab es in der Klasse dieses Kollegen keinerlei negative Rückmeldung oder Anfragen zu den Klassenarbeiten, sondern ausschließlich positive Reaktionen seitens der Schülerinnen und Schüler und von der Klassenelternsprecherin.

Eine Kollegin, die zwei Klassen unterrichtet hat, berichtet von Gesprächen mit Klassenelternsprechern.

- Die Eltern der Laptop-Klasse haben das Konzept „akzeptiert“, weil ihnen von Anfang an bekannt war, dass in dieser Klasse neue Konzepte erprobt werden.
- Bei der anderen Klasse war ein langes Gespräch mit den Klassenelternsprechern notwendig, um sie davon zu überzeugen, dass es gerade auch im Hinblick auf einen neue Unterrichtskultur sinnvoll ist, so zu unterrichten.

Die anderen Rückmeldungen stammen aus Einzelgesprächen mit Eltern leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler, deren Kinder in Klassenarbeiten schlecht abgeschnitten haben, und gehen alle in eine ähnliche Richtung. Es geht dabei nämlich um die Frage, wie Unterrichtsergebnisse im Heft festgehalten werden (oder auch nicht) und wie bzw. auf welcher Grundlage die Schülerinnen und Schüler zu Hause „lernen“ bzw. üben können. Solche Aussagen werden im Folgenden zusammengestellt:

- Es wird Erstaunen darüber geäußert, dass nicht alles, was im Computerraum besprochen wird, auch im Heft steht, sondern dass die Schülerinnen und Schüler wirklich „präsent“ sein müssen, weil ihnen sonst die Grundlage für weitere Aufgaben fehlt.
- Schlechte Noten werden darauf zurückgeführt, dass im Unterrichtskonzept dieser Arbeit viel mehr Wert auf Verständnis als auf Kalküle gelegt wird. Im Zuge dessen werde im Unterricht viel mehr „geredet und diskutiert“ und weniger in

das Heft geschrieben, was „auswendig gelernt“ bzw. im Sinne eines Kalküls abgearbeitet werden könne. Dies führe dazu, dass Noten nicht durch „viel üben“ verbessert werden können.

- Für dieses Konzept existiert kein Übungsmaterial für zusätzliche häusliche Übungen und auch die Schulbücher bieten dafür keine Grundlage. Dies führe dazu, dass Eltern und Nachhilfelehrer den Kindern nicht richtig helfen könnten.
- Die Möglichkeit des Nachvollzugs des Unterrichtsgeschehens seitens der Eltern sei dadurch stark eingeschränkt, dass vieles im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken im Unterricht mündlich geschieht und nicht im Sinne von Lehrsätzen, die man „lernen“ kann, in das Heft notiert wird.
- Die Befürchtung wird geäußert, dass durch diese Art des Unterrichts „die guten Schüler“ besser und „die schlechteren Schüler“ noch schlechter würden, weil ihnen das für das Verständnis notwendige „mathematische Vorstellungsvermögen“ fehle.
- Derartige Rückmeldungen wurden im Verlauf des Schuljahres allerdings immer geringer und hörten schließlich ganz auf. Die Lehrkräfte führen dies auf eine Gewöhnung an die neue Art des Unterrichts zurück.

Es gab offensichtlich kaum explizite Rückmeldungen von den Schülerinnen und Schülern. Im Folgenden werden die wenigen Aussagen zusammengestellt:

- In zwei Klassen gab es durchweg sehr positive Rückmeldungen auf diese Art des Unterrichts.
- In einer Klasse, die dem Konzept gegenüber zu Beginn des Schuljahres sehr negativ eingestellt war, hat sich diese Haltung am Ende des Schuljahres bei allen (bis auf einen Schüler) vollständig in das Gegenteil gewandelt. Sie wollten im nächsten Schuljahr unbedingt so weiterarbeiten.
- In den beiden anderen Klassen haben die Schülerinnen und Schüler selten von sich aus konkrete Rückmeldungen gegeben. Insgesamt ist aber bei den Lehrkräf-

ten der Eindruck entstanden, dass die Schülerinnen und Schüler mehrheitlich motivierter waren und es interessant fanden „mit Bewegungen zu arbeiten“.[279]

Das Interesse der Fachkollegen an den jeweiligen Schulen hielt sich nach einhelliger Aussage aller beteiligter Lehrerinnen und Lehrer in engen Grenzen.

- Vereinzelt zeigten Kolleginnen oder Kollegen Interesse daran, das Unterrichtsmaterial zu erhalten. Allerdings gab es anschließend keine Rückmeldungen dieser Lehrerinnen und Lehrer zu dem Material. Es ist also wahrscheinlich davon auszugehen, dass eine ernsthafte Auseinandersetzung damit (noch) nicht stattgefunden hat.
- Ein Fachbetreuer[280] war bei jeder Klassenarbeit mit (Teil-)Aufgaben zum Beweglichen Denken der Meinung, die Arbeit sei sehr schwer und auf jeden Fall anspruchsvoller als die Klassenarbeiten der Parallelklassen. Alle anderen Kolleginnen und Kollegen berichten, dass es keine Rückmeldungen seitens der Fachbetreuer gab.

4.4.5 Was haben die Schülerinnen und Schüler verstanden?

Alle Lehrerinnen und Lehrer sind sich einig, dass die Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf den ersten Aspekt des Beweglichen Denkens, dem *„Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“*, im Laufe des Schuljahres dazugelernt und den Sinn dieses Zugangs zu Fragestellungen verstanden haben.

- Die Schülerinnen und Schüler haben ein Bewusstsein dafür entwickelt, Bewegungen bzw. Veränderungen bei Überlegungen mit zu berücksichtigen.
- Ca. drei Viertel der Schülerinnen und Schüler können Bewegungen in statische Konfigurationen hineinsehen und damit auch argumentieren.
- Alle Schülerinnen und Schüler können sich Bewegungen vorstellen und die daraus resultierenden Veränderungen abhängiger Größen antizipieren. Das Argumentieren mit diesen Bewegungen fällt aber einigen noch schwer.

---

[279] Eine Lehrerin belegt diesen Eindruck damit, dass sie während des gesamten Schuljahres nicht einmal die sonst häufig zu hörende Schülerfrage „Warum machen wir das eigentlich?“ gehört hat. Die Schülerinnen und Schüler waren, nach ihrer Einschätzung, punktuell sogar „begeistert“.

[280] An bayerischen Gymnasien gibt es für jedes Fach einen Fachbetreuer, der u. a. sämtliche Klassenarbeiten der Kolleginnen und Kollegen respiziert.

Im Hinblick auf den zweiten Aspekt des Beweglichen Denkens, nämlich *„Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren"*, sind die Kolleginnen und Kollegen eher skeptisch.

- Zum Erfassen und Analysieren von Gesamtkonfigurationen waren die Schülerinnen und Schüler mehrheitlich nicht selbstständig in der Lage. Hier waren in der Regel Anstöße zum Umfokussieren notwendig, die dann aber meist gut aufgenommen und umgesetzt werden konnten.
- Nach Einschätzung der Lehrkräfte ist es im Wesentlichen nur den guten Schülerinnen und Schülern gelungen, Gesamtkonfigurationen zu erfassen und zu analysieren. Ein Lehrer vermutet deshalb sogar, dass von dieser Art des Unterrichts insbesondere die guten Schülerinnen und Schüler profitieren.

Den dritten Aspekt, also *„Änderungsverhalten erfassen und beschreiben"*, erwähnen die Lehrerinnen und Lehrer gar nicht. Letzteres ist dadurch leicht zu erklären, dass dieser Aspekt in drei Klassen überhaupt nicht explizit und in den beiden anderen Klassen nur kurz thematisiert wurde. Ein Kollege berichtet allerdings, dass er während der Gruppenarbeitsphase zum Änderungsverhalten sehr positiv davon überrascht war, wie die Schülerinnen und Schüler das im Laufe des Schuljahres entwickelte Bewegliche Denken eingesetzt und mit Bewegungen argumentiert haben.

Die Aussagen der Kolleginnen und Kollegen stützen die Hypothese, dass die Entwicklung des Beweglichen Denkens ein langwieriger Prozess ist, der nicht innerhalb eines Jahres abgeschlossen ist. Die Wahrnehmung, dass es im Wesentlichen nur den guten Schülerinnen und Schülern gelungen ist, Gesamtkonfigurationen zu erfassen und zu analysieren, stehen allerdings im Widerspruch zu den empirischen Ergebnissen aus den Leistungstests. Denn hier weist die mittlere Leistungsgruppe im Nachtest die größte Leistungssteigerung im Vergleich zum Vortest bei Items zum Beweglichen Denken auf und erreicht im Nachtest sogar das Leistungsniveau der im Vortest besseren Gruppe. Ein Versuch diese Diskrepanz zu erklären könnte sein, dass leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sich in der Regel intensiver am Unterrichtsgespräch beteiligen und sich Einschätzungen bzgl. der mentalen Fähigkeiten häufig zunächst an mündlichen Beiträgen entwickeln. Diese Vermutung wird durch die Aussagen zweier Lehrkräfte gestützt, die berichten, dass ihrer Einschätzung nach die schriftlichen Leistungen in Klassenarbeiten nicht das Niveau der mündlichen Unterrichtsbeiträge erreicht haben.[281]

Neben der Entwicklung des Beweglichen Denkens ist es für Lehrerinnen und Lehrer vor allem wichtig, ob die Inhaltsziele des Mathematikunterrichts dieser Jahrgangsstufe erreicht werden. Hier sind alle Kolleginnen und Kollegen übereinstimmend der Ansicht, dass die Inhaltsziele mindestens genauso gut erreicht wurden wie nach einer herkömmlichen Herangehensweise.

- Ein Kollege ist überzeugt davon, dass der Unterricht nach dem Konzept dieser Arbeit zu einem guten Verständnis und einer besseren Fundierung von mathematischen Grundbegriffen dieser Jahrgangsstufe wie „Mittelsenkrechte“, „gleichschenkliges Dreieck“ u. ä. bei *allen* Schülerinnen und Schülern geführt hat. Diese größere Nachhaltigkeit beim Begriffslernen erklärt er sich damit, dass hier, im Gegensatz zu anderen Unterrichtskonzepten, ständig mit den Begriffen und ihrer Bedeutung argumentiert wird.
- Eine Kollegin hat den Eindruck, dass die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge besser erkannt und auf diese Weise mehr verstanden haben als in der ihnen bisher vertrauten Herangehensweise.

Anhand der Bearbeitung der Aufgaben zum Beweglichen Denken in den *Klassenarbeiten* war nach der Aussage aller Lehrerinnen und Lehrer eine positive Entwicklung der Schülerinnen und Schüler zu erkennen. Die Aufgaben zum Beweglichen Denken wurden von den Schülerinnen und Schülern häufig als anspruchsvoller als andere Aufgaben wahrgenommen,[282] aber auch diese Aufgaben wurden im Laufe des Schuljahres immer besser gelöst.

---

[281] Einer der beiden Lehrkräfte gibt in diesem Zusammenhang allerdings zu bedenken, dass es seiner Meinung nach im mündlichen Bereich leichter ist, das Verständnis zu überprüfen, als in schriftlichen Leistungserhebungen, weil man im Gespräch jederzeit die Möglichkeit hat, Rückfragen zu stellen.

[282] Dies führt eine Kollegin u. a. darauf zurück, dass hier zunächst einmal Texte gelesen und verstanden werden mussten.

4.4.6 In Zukunft im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichten?!

Alle Lehrerinnen und Lehrer geben an, dass sie auf jeden Fall wieder in 7. Klassen nach dem Konzept dieser Arbeit unterrichten, da sie es als effektiv[283] und motivierend erlebt haben. Dies wird u. a. durch folgende Aussagen gestützt:

- Es wird keine Notwendigkeit gesehen Umstellungen im Ablauf oder deutliche Änderungen am Konzept vorzunehmen.
- Das Potenzial des Beweglichen Denkens hat sich erst im Laufe des Projektjahres vollständig erschlossen. Auf dieser Grundlage wird es in weiteren Schuljahren noch leichter fallen nach diesem Konzept zu unterrichten.
- Die Kolleginnen und Kollegen haben im Laufe des Projektjahres im Hinblick auf das Bewegliche Denken selbst viel dazugelernt.[284]

Die Zufriedenheit mit dem Konzept macht sich auch darin bemerkbar, dass die Kolleginnen und Kollegen kaum Änderungsvorschläge für das Konzept haben. Auf die Frage, was sie ändern werden, wenn sie noch einmal nach dem Konzept dieser Arbeit unterrichten, nennen sie fast ausschließlich methodische oder organisatorische Veränderungen. Im Folgenden werden genannte Änderungsvorhaben zusammengestellt:

- Unterricht eher blockweise organisieren
- die Unterrichtsorganisation im Computerraum modifizieren
- weniger mit dem Computer arbeiten und mehr Wert auf enaktive Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler legen
- mehr Alltagsbezüge herstellen
- eine zwei- bis dreistündige Einführung in EUKLID DynaGeo voranstellen
- Partnerarbeitsphasen im Computerraum kürzen um Zeit für mehr Diskussionen und die Beschäftigung mit Kongruenzabbildungen und Kongruenzsätzen zu gewinnen
- den Themenbereich „Kongruenzsätze“ nicht mehr nach dem Konzept unterrichten, weil hier der statische Vergleich zweier Dreiecke im Mittelpunkt stehe

[283] vgl. 4.4.5 Was haben die Schülerinnen und Schüler verstanden?
[284] Eine Kollegin erklärt sogar, dass das Konzept ihre Herangehensweise an die gesamte Mathematik „dynamisiert“ hat.

Alle Kolleginnen und Kollegen erklären unabhängig voneinander, dass sie auch in anderen Jahrgangsstufen und anderen Inhaltsbereichen als der Geometrie im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichten werden. Eine Lehrerin und ein Lehrer haben dies ihrer Aussage nach sogar schon im Projektjahr in ihren anderen Mathematikklassen phasenweise getan. Eine Kollegin erklärt, dass sie noch viel häufiger im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichten würde, wenn weitere Unterrichtsmaterialien und insbesondere fertige EUKLID DynaGeo-Dateien vorlägen.

Die Lehrerinnen und Lehrer nennen (teilweise mehrfach) folgende Inhaltsbereiche, in denen sie spontan eine Herangehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens für sinnvoll erachten:

Geometrie:

- Vierecksgrundformen
- Beweisen
- Zentrische Streckung, Strahlensatz, Ähnlichkeitsabbildungen

Algebra:

- Einführung von Variablen
- Verständnis von „Formeln“
- Entstehung von Funktionsgraphen
- Änderungsverhalten von Funktionen
- Parametervariation bei linearen Gleichungssystemen
- Auswirkung von Parametervariationen auf Funktionen und ihre Graphen
- Erarbeitung von Funktionseigenschaften (z. B. Monotonieverhalten, Steigung, Extremwerte …)
- Grenzwertbegriff

4.5 Diskussion und Ausblick

In der Einleitung dieser Arbeit habe ich mein Anliegen zum Ausdruck gebracht, die Unterrichtswirklichkeit beeinflussen und (mit-)gestalten zu wollen, und zwar in einer Weise, die dazu führt, dass Mathematikunterricht auf das Verstehen der Schülerinnen und Schüler ausgerichtet ist. Für mich birgt ein Unterricht, der im Sinne des Beweglichen Denkens angelegt ist, die Möglichkeit, eine Balance zwischen Anschauung und

Entwicklung eines tieferen Verständnisses zu erreichen. Inwieweit bestätigen die Ergebnisse dieser Arbeit diese Ansicht? Es stellt sich die Frage, welchen Beitrag diese Arbeit zur mathematikdidaktischen Forschung und zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts leistet und wo Ansatzpunkte für weitere Forschungsarbeiten bestehen. Mögliche Antworten darauf sind vielschichtig und sollen im Folgenden zusammengestellt werden.

Betrachtet man die Ergebnisse der Lehrerinterviews, so lässt sich zunächst festhalten, dass die beteiligten Kolleginnen und Kollegen das Arbeiten im Hinblick auf das Bewegliche Denken als sehr positiv erlebt haben. Dies wird insbesondere daran deutlich, dass alle wieder nach dem Unterrichtskonzept unterrichten werden. Allerdings fällt auf, dass kaum inhaltliche Kritik an dem Konzept geäußert wird, was zu der Frage Anlass gibt, ob die Lehrerinnen und Lehrer evtl. nicht gewohnt sind, sich mit dem didaktischen Gehalt eines vorgegebenen Konzepts inhaltlich auseinander zu setzen. Hier besteht u. U. Bedarf für entsprechende Fortbildungen und die Entwicklung zugehöriger Fortbildungskonzepte. Gleiches gilt für Fortbildungen zu von der Mathematikdidaktik zur Verfügung gestellten Unterrichtsmaterialien. Im Rahmen dieser Arbeit hat es sich als sehr notwendig erwiesen, gemeinsame Treffen (Lehrerfortbildungen) mit den beteiligten Kolleginnen und Kollegen durchzuführen, in denen der Umgang mit den Materialien diskutiert wurde. Die Lehrerinnen und Lehrer sehen zwar das Potenzial des Beweglichen Denkens für den Mathematikunterricht und können spontan auch Inhaltsbereiche angeben, in denen sich eine Herangehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens anbieten würde, für eine häufigere Umsetzung im eigenen Unterricht wünschen sie aber weitere vorgegebene Unterrichtsmaterialien. Auch hier besteht ein Ansatzpunkt für ein weites Feld mathematikdidaktischer (Forschungs-)Arbeit: Es müssen Fortbildungskonzepte entwickelt und evaluiert werden, die darauf ausgelegt sind, in kleinen Gruppen mit Lehrerinnen und Lehrern zu arbeiten und sie dazu zu befähigen, selbstständig Unterrichtskonzepte und Unterrichtsmaterialien zu entwickeln und zu evaluieren.

Noch ein anderer Aspekt aus den Lehrerinterviews ist meiner Ansicht nach bemerkenswert. In der didaktischen Literatur ist es seit sehr vielen Jahren Standard, von schülerzentriertem Arbeiten, auch in Partner- oder Gruppenarbeit, entdeckendem Lernen und dem selbstverständlichen Computereinsatz auszugehen oder dies wenigstens zu propagieren. Zumindest für die hier untersuchten Klassen und deren Lehrerinnen und Lehrer scheint praktisch nichts davon selbstverständlich gewesen zu sein, ganz im Gegenteil. Insofern hat der Unterricht im Rahmen dieser Arbeit auch dazu beigetragen, die beteiligten Lehrerinnen und Lehrer für diese Aspekte des Unterrichts zu sensibilisieren.

Die Rückmeldungen von Eltern schwächerer Schülerinnen und Schüler können trotz ihrer geringen Zahl Anlass dazu geben, den Blickwinkel mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit auszuweiten und den „Nachmittagsmarkt“ stärker zu beachten. Es scheint mir jedenfalls kritisch zu sein, diesen Bereich des Lernens im schulischen Umfeld im Wesentlichen kommerziellen und zumindest gelegentlich fragwürdigen Anbietern zu überlassen.

Auch die Lehrerantworten im Umfeld der Frage, was die Schülerinnen und Schüler ihrer Ansicht nach im Projektjahr im Hinblick auf das Bewegliche Denken gelernt haben, geben eine Reihe von Denkanstößen. Wie oben dargestellt äußern die Lehrerinnen und Lehrer einerseits, dass alle Schülerinnen und Schüler Bewegungen in ein statisches Phänomen hineinsehen und die meisten auch damit argumentieren können, andererseits erklären sie auch einheitlich, dass nur „die guten“ Schülerinnen und Schüler in der Lage waren, Gesamtkonfigurationen zu erfassen und zu analysieren. Diese Erfahrung aus Unterrichtsgesprächen veranlasst einen Kollegen sogar dazu, zu vermuten, dass von dieser Form des Unterrichts insbesondere „die guten“ Schülerinnen und Schüler profitieren. Diese Aussage steht klar im Widerspruch zu den Ergebnissen der Leistungstests. Eine noch offene Frage ist, wie solche auf Erfahrungen gestützte offensichtlich nicht zutreffende Vermutungen von Lehrerinnen und Lehrern entstehen. Meine Hypothese ist, dass solche Einschätzungen von Kolleginnen und Kollegen daher rühren, dass im Unterrichtsgespräch hauptsächlich die Extreme auffallen und dadurch graduelle Veränderungen zum Besseren eher nicht wahrgenommen werden.

Alle Kolleginnen und Kollegen geben an, dass die Schülerinnen und Schüler die Inhaltsziele des Geometrieunterrichts genauso gut erreicht haben wie vergleichbare Klassen. Diese Einschätzung deckt sich mit den Ergebnissen der entsprechenden Items des Leistungstests. Eine Lehrerin und ein Lehrer gehen sogar davon aus, dass teilweise eine bessere Fundierung der Inhalte erreicht wurde. Diese letzte Aussage lässt sich allerdings nicht direkt in Bezug zur Ausrichtung des Unterrichts auf das Bewegliche Denken setzen. Dies liegt daran, dass das Unterrichtskonzept dieser Arbeit, zumindest für die beteiligten Kolleginnen und Kollegen sowie Schülerinnen und Schüler, neben einer Heran-

gehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens noch eine Reihe von anderen neuen Aspekten gebracht hat,[285] die ebenfalls zu einer Verbesserung des allgemeinen Unterrichtserfolges beigetragen haben könnten.
Neben den hier diskutierten Ergebnissen des qualitativen Teils der empirischen Untersuchungen tragen insbesondere die quantitativen Ergebnisse, die auf den von mir entwickelten Leistungstests basieren, zur Beantwortung der in Abschnitt 2.6 zusammengestellten Forschungsfragen bei. Es hat sich gezeigt, dass es mit Hilfe meines Unterrichtskonzepts möglich ist, Bewegliches Denken zu fördern und zu entwickeln, denn die Unterrichtsklassen schneiden bzgl. der Items zum Beweglichen Denken im Nachtest signifikant besser ab als die Kontrollklassen. Es hat sich herausgestellt, dass dieses Ergebnis abhängig von den bereits im Vortest nachgewiesenen Fähigkeiten des Beweglichen Denkens ist. Die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen, die auf Grund der Vortestergebnisse in die mittlere Leistungsgruppe eingeordnet wurden, haben im Nachtest signifikant bessere Ergebnisse als die entsprechende Gruppe der Kontrollklassen und erreichen sogar das Leistungsniveau der leistungsstärksten Gruppe. Die im Vortest leistungsstärkste Teilgruppe der Unterrichtsklassen stagniert dagegen auf hohem Niveau während die entsprechende Teilgruppe der Kontrollklassen in ihren Leistungen sogar abfällt.

Eine weitere Forschungsfrage dieser Arbeit bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen überdurchschnittlicher Intelligenz und den Fähigkeiten des Beweglichen Denkens. Die Ergebnisse dieser Arbeit machen deutlich, dass die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens bei Schülerinnen und Schülern einer Hochbegabtenklasse[286] mit überdurchschnittlichem Intelligenzquotienten nicht stärker ausgeprägt ist als bei anderen Gymnasiastinnen und Gymnasiasten gleichen Alters. Die Leistungssteigerung im Hinblick auf das Bewegliche Denken fiel bei den besonders begabten Schülerinnen und Schülern im Untersuchungszeitraum, bei gleichartigem Unterricht, sogar deutlich geringer aus als bei einer „normalen" Klasse. Dies kann möglicherweise mit Hilfe von neueren psychophysiologischen Ergebnissen erklärt werden. Die Psychologen

[285] Genannt seien hier schülerzentriertes Arbeiten, etwa in Partner- oder Gruppenarbeit, entdeckendes Lernen und selbstverständlicher Computereinsatz.
[286] Dieser problematische Begriff wird in Abschnitt 4.1.2 erläutert.

GRABNER ET AL. (2003) stellen in ihrem Artikel „When intelligence loses its impact: neural efficiency during reasoning in a familiar area“ fest, dass bereits Kinder im Grundschulalter bei mathematischen Inhalten mangelnde Intelligenz durch entsprechendes Vorwissen kompensieren können, dass es ihnen aber nicht möglich ist, mangelndes Vorwissen durch Intelligenz zu kompensieren. Sie schreiben weiter:

> “Once an elaborate knowledge base has been developed in a particular area, intelligence no longer seems to affect the performance that can be achieved in this area. However, it is thoroughly plausible that intelligence affects cognitive activities beyond the performance level – the lower a person's IQ, the higher the cortical activation that may be necessary for this person to cope with the respective demand. Online registration of cortical activation during reasoning in an area of expertise assumed to be chosen by people of various levels of intelligence allows us to test this hypothesis. We studied the neural efficiency of experienced taxi drivers of varying IQs by presenting them with an expertise task based on familiar taxi routes (…). (…) our results suggest that no (…) neural efficiency patterns emerge when prior knowledge or expertise comes into play.” GRABNER ET AL. (2003), p. 90 and 95

Im Hinblick auf die Ergebnisse der Nachuntersuchung dieser Arbeit könnte das bedeuten, dass im Untersuchungsjahr bei den Schülerinnen und Schülern eine Gewöhnung an das Denken in Bewegungen und Veränderungen eingetreten ist. Das macht sie zwar sicher nicht zu Experten auf diesem Gebiet, aber erzeugt doch eine Vertrautheit mit entsprechenden Fragestellungen, die für eine Kompensation der evtl. geringeren Intelligenz ausreicht. Dies wäre eine Begründung dafür, dass die Schülerinnen und Schüler aus der „normalen“ Klasse nicht schlechter abschneiden als die Schülerinnen und Schüler der „Hochbegabtenklasse“. Eine bisher offene Frage ist, warum die Schülerinnen und Schüler der „normalen“ Klasse sogar deutlich besser abschneiden als Schülerinnen und Schüler der Hochbegabtenklasse. Hier müssen ggf. weitere Untersuchungen Aufschluss geben.

Für die Weiterentwicklung des Beweglichen Denkens ist das Ergebnis viel versprechend, dass die Schülerinnen und Schüler der Klassen, die von Lehrkräften unterrichtet wurden, die vorher bereits ein Schuljahr ihren Unterricht nach dem Konzept dieser Arbeit gestaltet hatten, eine deutlich größere Leistungssteigerung im Hinblick auf das Bewegliche Denken erreichen als Klassen, deren Lehrerinnen und Lehrer zum ersten Mal nach diesem Konzept unterrichten. Auch hier scheint sich eine auf Erfahrung basierende Kompetenz bei den Lehrerinnen und Lehrern einzustellen. Auf dieser Basis könnte der zweite Teil der in dieser Arbeit konzipierten Lehrerfortbildung zum Thema „Bewegliches Denken“ Erfolg versprechend sein. Dabei geht es darum, dass kleine Lehrerteams in Zusammenarbeit mit einem Didaktiker die Grundidee des hier erarbeiteten Unterrichtskonzepts in eigene Unterrichtsausarbeitungen für andere Inhalte und Jahrgangsstufen umsetzen, evaluieren und weiterentwickeln. Dies wäre ein lohnender Ansatz für ein weites Feld praxisrelevanter didaktischer Forschungsarbeit.

In diesem Zusammenhang ist auch das Ergebnis dieser Arbeit interessant, dass Bewegliches Denken sich in den Unterrichtsklassen nicht nur im Bereich der Geometrie verbessert hat, in dem im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichtet wurde, sondern auch im Bereich der Algebra. Offensichtlich schaffen Schülerinnen und Schüler in gewissen Grenzen auch einen Transfer dieser neuen Denkweisen in andere Inhalte. Diese Fähigkeit zum Transfer erstreckt sich tendenziell auch auf Fähigkeiten des Beweglichen Denkens, die gar nicht oder nur vernachlässigbar geschult wurden. Items, die die dritte und höchste Kompetenz im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken, nämlich die Fähigkeit „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“, erfordern, wurden von den Schülerinnen und Schülern der Unterrichtsklassen in dieser Untersuchung tendenziell besser bearbeitet als von Schülerinnen und Schülern der Kontrollklassen, obwohl bei drei Unterrichtsklassen das Änderungsverhalten überhaupt nicht thematisiert wurde und in den beiden anderen Klassen nur drei Unterrichtsstunden dafür verwendet wurden.

Die Ergebnisse der TIMSS-Items des Leistungstests belegen, dass das auf das Bewegliche Denken ausgerichtete Unterrichtskonzept zu gleichen Leistungen bei Aufgaben zu Inhalten des Mathematikunterrichts der 7. Jahrgangsstufe führt, die nicht mit Hilfe beweglicher Argumentationen zu lösen sind. Durch die Fokussierung auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens werden also keine Inhaltsziele der entsprechenden Jahrgangsstufe vernachlässigt.

Die vorliegende Arbeit hat aufgezeigt, dass es möglich ist, das Bewegliche Denken bei Schülerinnen und Schülern langfristig zu fördern und weiterzuentwickeln. Es bleibt zukünftigen Forschungsarbeiten überlassen empirisch zu untersuchen, in welchen Bereichen der Mathematik eine Herangehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens besonders Gewinn bringend ist und ob es Gebiete gibt, in denen Bewegliches Denken eher nicht hilfreich ist.

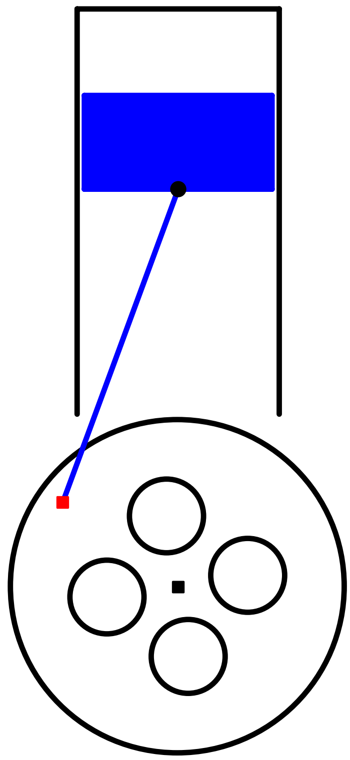
Anhang

Anhang A: Aufgabenblätter für die Gruppenarbeit

Gruppe 1
Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:



Bei einem Kolbenmotor bewegt sich das „Schwungrad“ immer gleichmäßig in dieselbe Richtung.

a) Beschreibt, wie sich dabei der Kolbenkopf (blaue Fläche in der Abbildung) bewegt.

b) Wie groß ist der Kolbenhub[287]? (Gebt ein Vergleichsmaß aus der Zeichnung an!)

c) Bewegt sich der Kolbenkopf immer gleichmäßig oder ist er manchmal schneller und manchmal langsamer? Gebt gegebenenfalls an, in welchen Bewegungssituationen er sich schneller und in welchen er sich langsamer bewegt. Begründet eure Antwort.

[287] Der Kolbenhub ist der Abstand zwischen der höchsten und der tiefsten Lage des Kolbenkopfes.

Gruppe 2

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

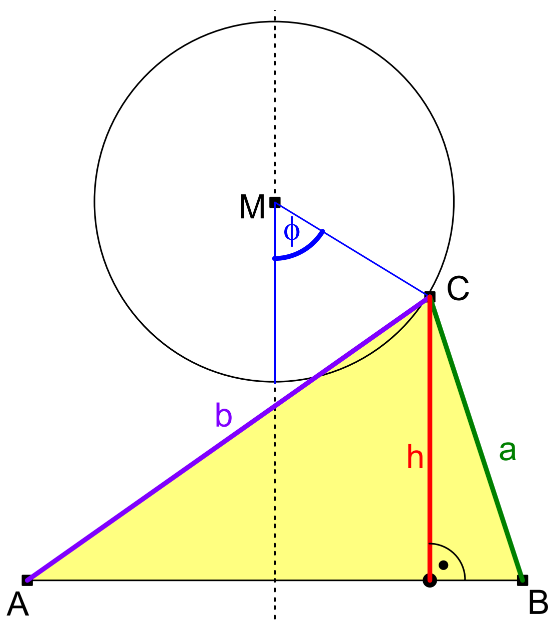
1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt C wird gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises bewegt.

a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **a**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die die Länge von **a** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von C ist die Strecke **a** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.



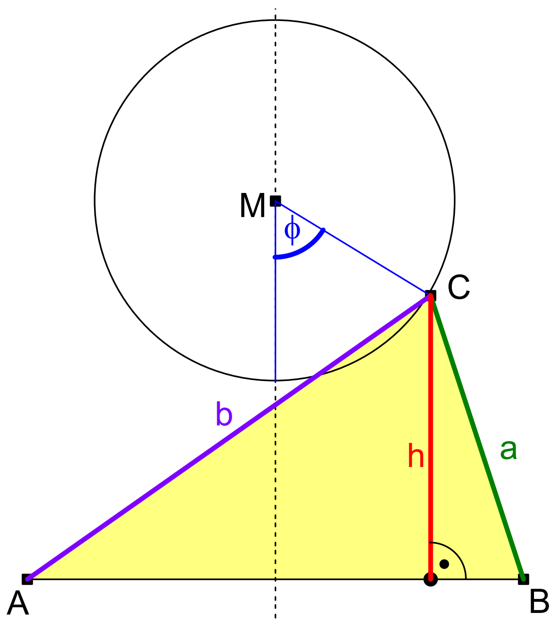
c) Ändert sich die Länge der Strecke **a** überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen sie sich schneller und andere, in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Gruppe 3
Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt C wird gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **b**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die die Länge von **b** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von C ist die Strecke **b** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich die Länge der Strecke **b** überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen sie sich schneller und andere, in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

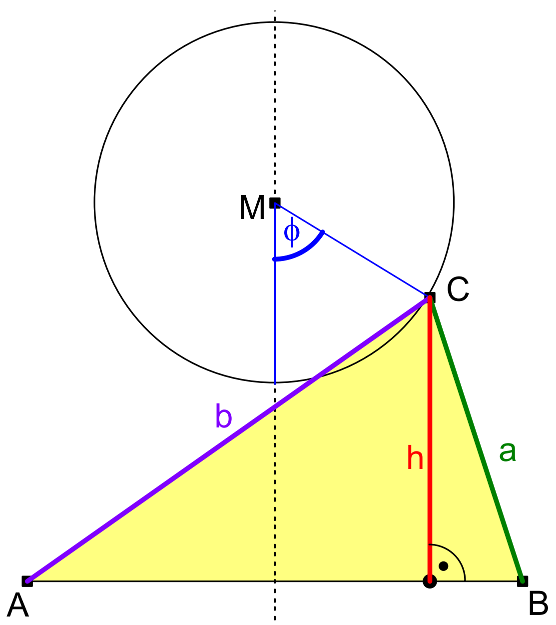
Gruppe 4

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt C wird gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **h**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die die Länge von **h** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

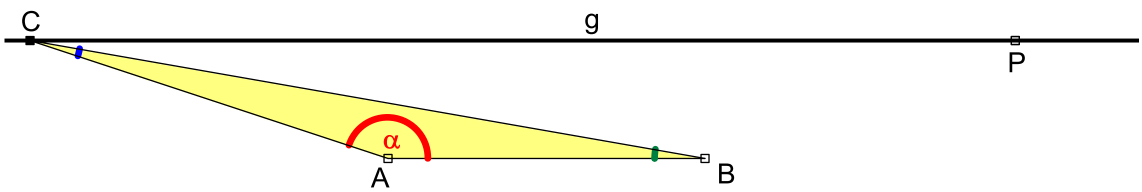
b) Für welche Lage von C ist die Strecke **h** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich die Länge der Strecke **h** überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen sie sich schneller und andere, in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Gruppe 5
Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:



Der Punkt C wird gleichmäßig nach rechts entlang der Geraden g bis zum Punkt P bewegt.

a) Wie ändert sich dabei der Winkel α? Wird er größer oder kleiner? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die der Winkel größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Gibt es maximale und minimale Winkelgrößen von α und für welche Lage(n) von C treten sie gegebenenfalls auf? Begründet eure Antwort.

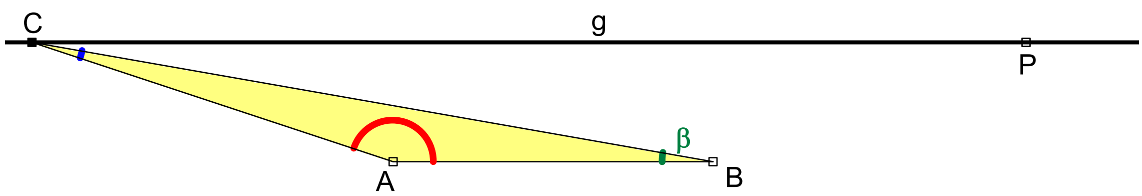
c) Ändert sich der Winkel α überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen er sich schneller und andere, in denen er sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Gruppe 6

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:



Der Punkt C wird gleichmäßig nach rechts entlang der Geraden g bis zum Punkt P bewegt.

a) Wie ändert sich dabei der Winkel β? Wird er größer oder kleiner? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die der Winkel größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Gibt es maximale und minimale Winkelgrößen von β und für welche Lage(n) von C treten sie gegebenenfalls auf? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich der Winkel β überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen er sich schneller und andere, in denen er sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Gruppe 7
Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

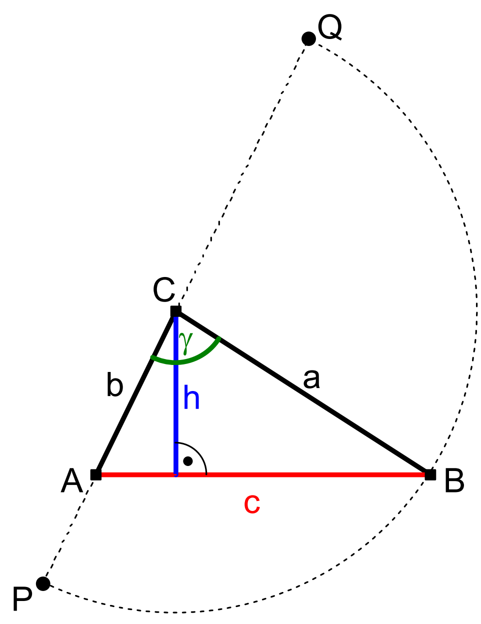
1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt B wird gleichmäßig auf dem Kreisbogen von P nach Q bewegt.

a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **c**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von B an, für die die Länge von **c** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von B ist die Strecke **c** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.



c) Ändert sich die Länge der Strecke **c** überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von B, in denen sie sich schneller und andere, in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

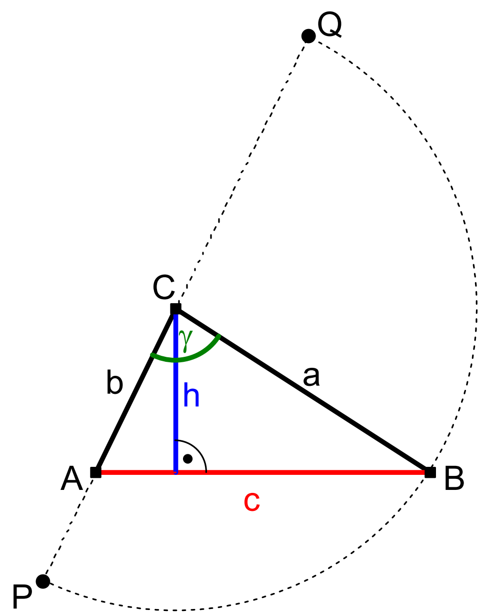
Gruppe 8

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die/der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. Anhand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat oder eine Folie für den Tageslichtprojektor, auf dem/der ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt B wird gleichmäßig auf dem Kreisbogen von P nach Q bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **h**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von B an, für die die Länge von **h** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von B ist die Strecke **h** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich die Länge der Strecke **h** überall gleich schnell oder gibt es Bereiche für die Lage von B, in denen sie sich schneller und andere, in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Anhang B: Fragebogen

Fragebogen

Bearbeitet von: ____________________

Datum: ____________________

Klasse: ____________________

Schule: ____________________

Schulort: ____________________

Hinweise zur Bearbeitung des Fragebogens

Bearbeitungszeit:

- Zur Bearbeitung dieses Fragebogens stehen 40 Minuten zur Verfügung.

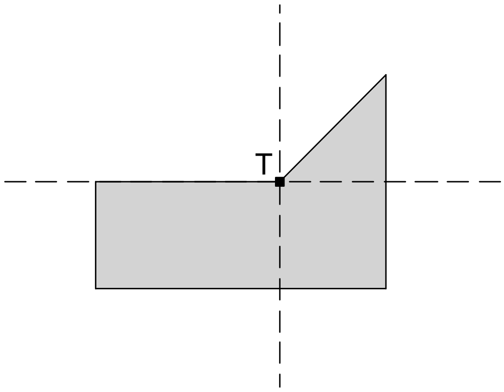
Wichtig!

- Alle Antwortvorschläge durchlesen!
- Jeweils **die richtigen** Antwortvorschläge **einkreisen**!
- **Es können jeweils mehrere Antworten richtig sein!**

Freie Flächen nach den Aufgaben:

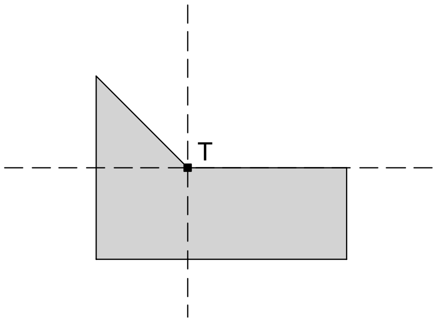
- Die freien Flächen sollst du benutzen um zur jeweiligen Aufgabe Überlegungen festzuhalten, Skizzen anzufertigen oder Erläuterungen zu geben.
- **Aus deinen Darstellungen auf der freien Fläche sollte ein unbeteiligter Beobachter erschließen können, wie du zu deinen Lösungen gekommen bist!**
- Falls der Platz nicht ausreicht, kannst du die Rückseite des vorhergehenden Blattes benutzen.

1) Es wird eine Halbdrehung (Punktspiegelung) der schattierten Figur um den Punkt *T* vorgenommen.

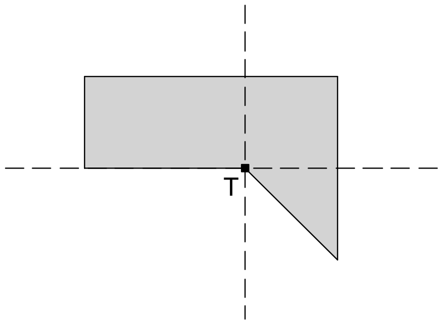


Welche der Figuren stellt das Ergebnis der Punktspiegelung dar?

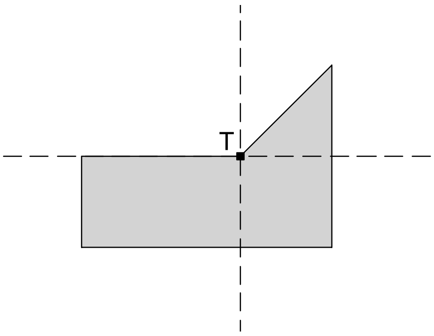
a)



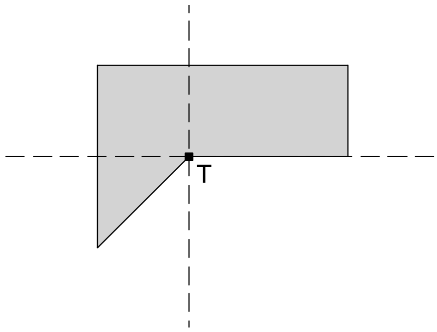
b)



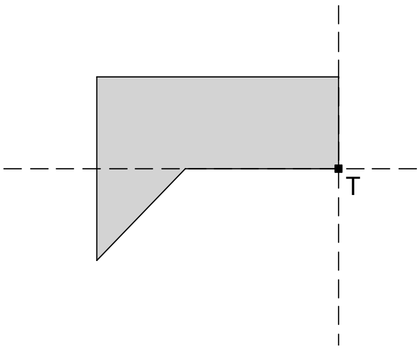
c)



d)



e)



2) In dieser Zeichnung sind die Geraden *AB* und *CD* parallel.

Welche zwei Winkel ergeben zusammen 180°?

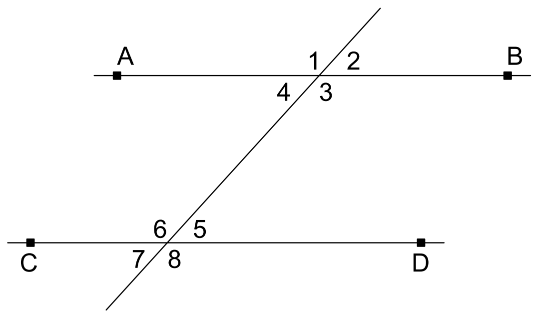
a) Winkel 1 und Winkel 3

b) Winkel 4 und Winkel 6

c) Winkel 2 und Winkel 5

d) Winkel 2 und Winkel 7

e) Winkel 1 und Winkel 8



3) Die abgebildeten Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich). Die Maße einiger Seiten und Winkel sind angegeben.

Wie groß ist *x*?

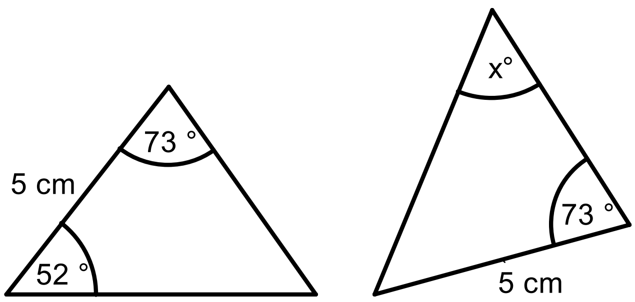
a) 52

b) 55

c) 65

d) 73

e) 75



4) Dreieck *ABC* ist rechtwinklig-gleichschenklig mit dem rechten Winkel bei *C*. Falls $\overline{CE}$ eine Seitenhalbierende des Dreiecks ist, dann hat $\overline{CE}$ die gleiche Länge wie

a) $\overline{CA}$

b) $\overline{CB}$

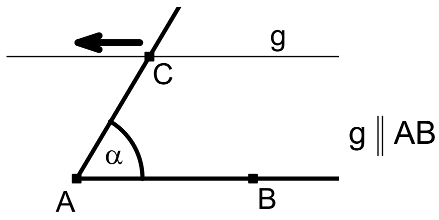
c) $\overline{AB}$

d) $\overline{AE}$

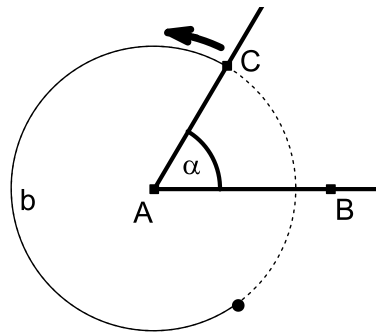
5) Der Punkt *C* des zweiten Schenkels des Winkels α bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf dem Kreisbogen *b* bzw. der Geraden *g*.

Bei welcher Bewegung von *C* wird der **Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ gleichmäßig größer**?

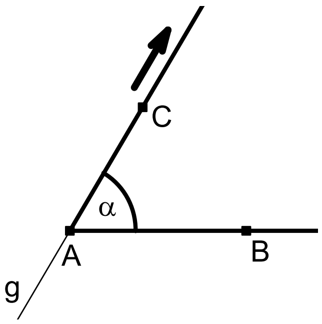
a)



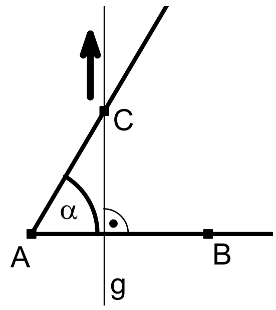
b)



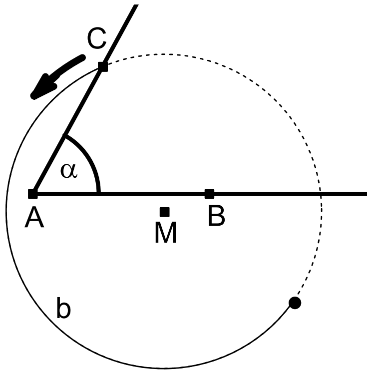
c)



d)



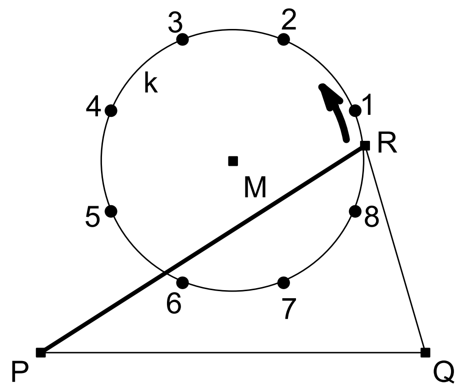
e)



Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

6) Der Punkt *R* des Dreiecks *PQR* bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf der Kreislinie *k*. Dabei ändert sich die Länge der Strecke [*PR*].

Zwischen welchen Punkten bewegt sich *R*, wenn sich die Länge der Strecke [*PR*] am wenigsten ändert?



a) Zwischen 1 und 2

b) Zwischen 2 und 3

c) Zwischen 3 und 4

d) Zwischen 4 und 5

e) Zwischen 5 und 6

f) Zwischen 6 und 7

g) Zwischen 7 und 8

h) Zwischen 8 und 1

Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

7) Wir betrachten den Term $\boldsymbol{x} + \mathbf{3}$.

Stelle dir vor, dass du den **x-Wert, bei – 4 beginnend, gleichmäßig immer größer werden lässt, bis er + 4 erreicht.**

Wie verhält sich dabei der Termwert?

Der **Termwert wird**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert,

a) immer kleiner.

b) immer größer.

c) manchmal kleiner und manchmal größer.

Der **Termwert ändert sich**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert,

a) langsamer als der x-Wert.

b) schneller als der x-Wert.

c) genau so schnell wie der x-Wert.

d) gleichmäßig.

e) manchmal schneller und manchmal langsamer.

8) Wir betrachten den Term $\mathbf{3} - \boldsymbol{x}$.

Stelle dir vor, dass du den **x-Wert, bei – 4 beginnend, gleichmäßig immer größer werden lässt, bis er + 4 erreicht.**

Wie verhält sich dabei der Termwert?

Der **Termwert wird**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert,

a) immer kleiner.

b) immer größer.

c) manchmal kleiner und manchmal größer.

Der **Termwert ändert sich**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert,

a) langsamer als der x-Wert.

b) schneller als der x-Wert.

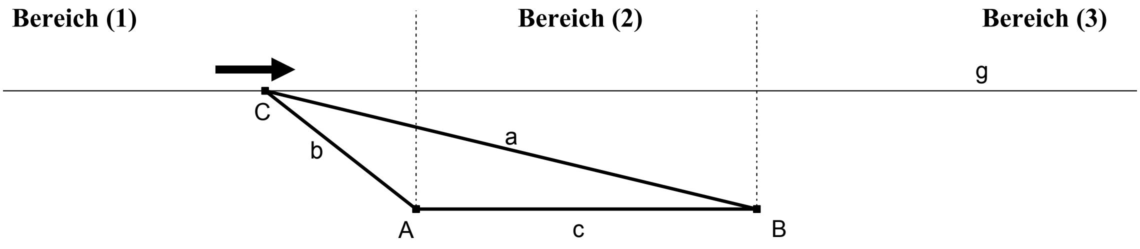
c) genau so schnell wie der x-Wert.

d) gleichmäßig.

e) manchmal schneller und manchmal langsamer.

Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

9) Es ist ein Dreieck *ABC* gegeben. Der Eckpunkt *C* wird auf der Geraden *g* in Pfeilrichtung bewegt. Wir unterscheiden je nach Lage von *C* drei Bereiche.



Es gibt im **Bereich (2)** eine Lage von *C*, so dass zwei Seiten des Dreiecks, nämlich

a) *a* und *b*, gleich lang sind, **c)** *b* und *c*, gleich lang sind.

b) *a* und *c*, gleich lang sind, **d)** Es gibt keine solche Lage für *C*.

Es gibt im **Bereich (3)** eine Lage von C, so dass zwei Seiten des Dreiecks, nämlich

a) *a* und *b*, gleich lang sind, **c)** *b* und *c*, gleich lang sind.

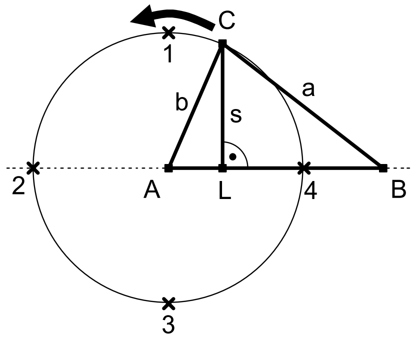
b) *a* und *c*, gleich lang sind, **d)** Es gibt keine solche Lage für *C*.

Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

10) Der Punkt C bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis mit Mittelpunkt A bis zur Stelle 4.

L ist der Schnittpunkt der Geraden AB mit dem von C auf die Gerade AB gefällten Lot.

Wie verändern sich dabei die Längen der Strecken a, b und s?



Für die Länge der **Strecke *a*** gilt:

a) Sie wird immer länger.

b) Sie wird immer kürzer.

c) Sie bleibt immer gleich.

d) Sie wird manchmal länger und manchmal kürzer.

e) Sie wird bis zur Stelle 2 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

f) Sie wird bis zur Stelle 1 länger und dann bis zur Stelle 2 wieder kürzer.

g) Sie wird von Stelle 2 bis zur Stelle 3 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

Für die Länge der **Strecke *b*** gilt:

a) Sie wird immer länger.

b) Sie wird immer kürzer.

c) Sie bleibt immer gleich.

d) Sie wird manchmal länger und manchmal kürzer.

e) Sie wird bis zur Stelle 2 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

f) Sie wird bis zur Stelle 1 länger und dann bis zur Stelle 2 wieder kürzer.

g) Sie wird von Stelle 2 bis zur Stelle 3 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

Für die Länge der **Strecke *s*** gilt:

a) Sie wird immer länger.

b) Sie wird immer kürzer.

c) Sie bleibt immer gleich.

d) Sie wird manchmal länger und manchmal kürzer.

e) Sie wird bis zur Stelle 2 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

f) Sie wird bis zur Stelle 1 länger und dann bis zur Stelle 2 wieder kürzer.

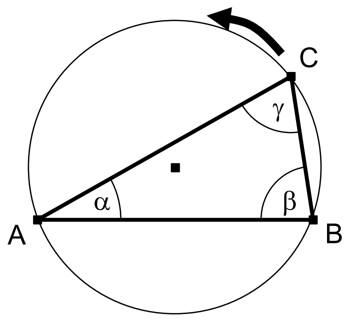
g) Sie wird von Stelle 2 bis zur Stelle 3 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

11) Die Eckpunkte des Dreiecks *ABC* liegen auf dem Kreis.

Der Punkt *C* bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis bis kurz vor den Punkt *A*.

Wie verhalten sich dabei die Winkel α und β?



Für den **Winkel α** gilt:

a) Er wird immer größer.
b) Er wird immer kleiner.
c) Er bleibt immer gleich.
d) Lässt sich so nicht sagen.
e) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer größer und dann wieder kleiner.
f) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer kleiner und dann wieder größer.

Für den **Winkel β** gilt:

a) Er wird immer größer.
b) Er wird immer kleiner.
c) Er bleibt immer gleich.
d) Lässt sich so nicht sagen.
e) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer größer und dann wieder kleiner.
f) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer kleiner und dann wieder größer.

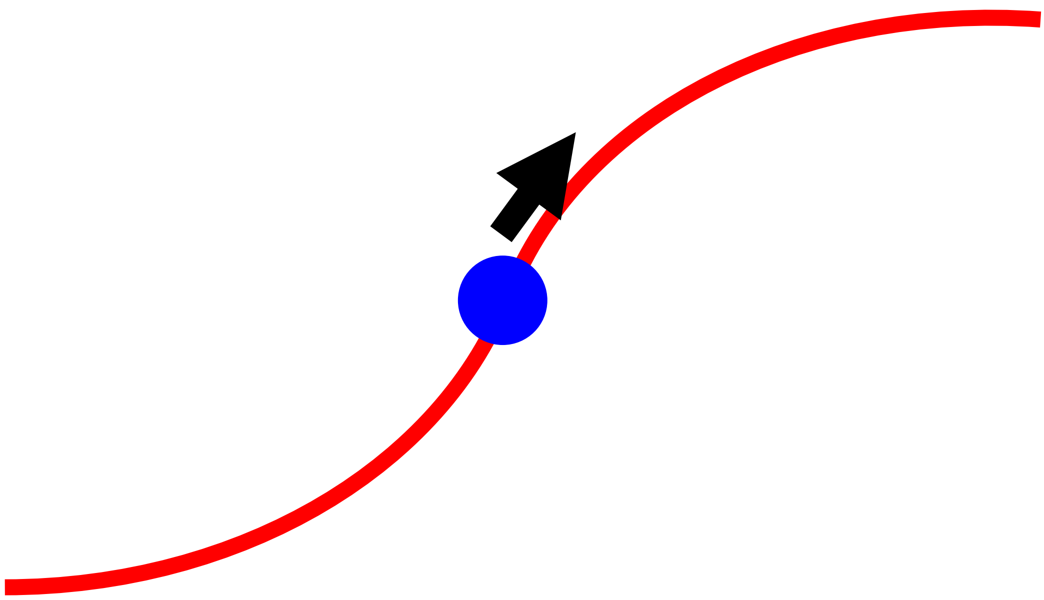
Überlegungen, Skizzen, Erläuterungen:

Folie zum Fragebogen

Der x-Wert wird **gleichmäßig** immer größer!

+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
x + 10	6	7	8	9	10	11	12	13	14

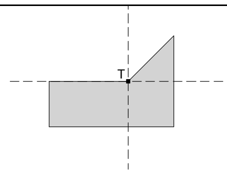


Ein Punkt bewegt sich **gleichmäßig**, wenn er auf seiner Bahn **immer gleich schnell** ist.

Anhang C: Lösungshäufigkeiten für die einzelnen Items

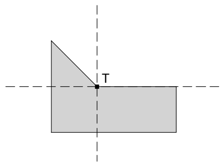
Item 1

Es wird eine Halbdrehung (Punktspiegelung) der schattierten Figur um den Punkt *T* vorgenommen.

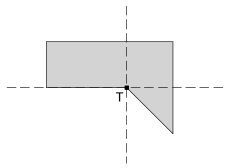


Welche der Figuren stellt das Ergebnis der Punktspiegelung dar?

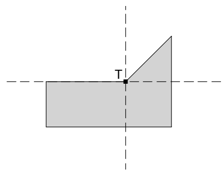
a)



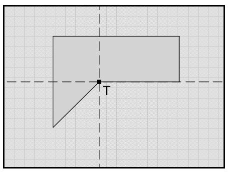
b)



c)



d)



e)

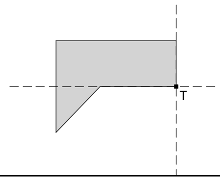


Abb. 97: Formulierung des Items 1. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

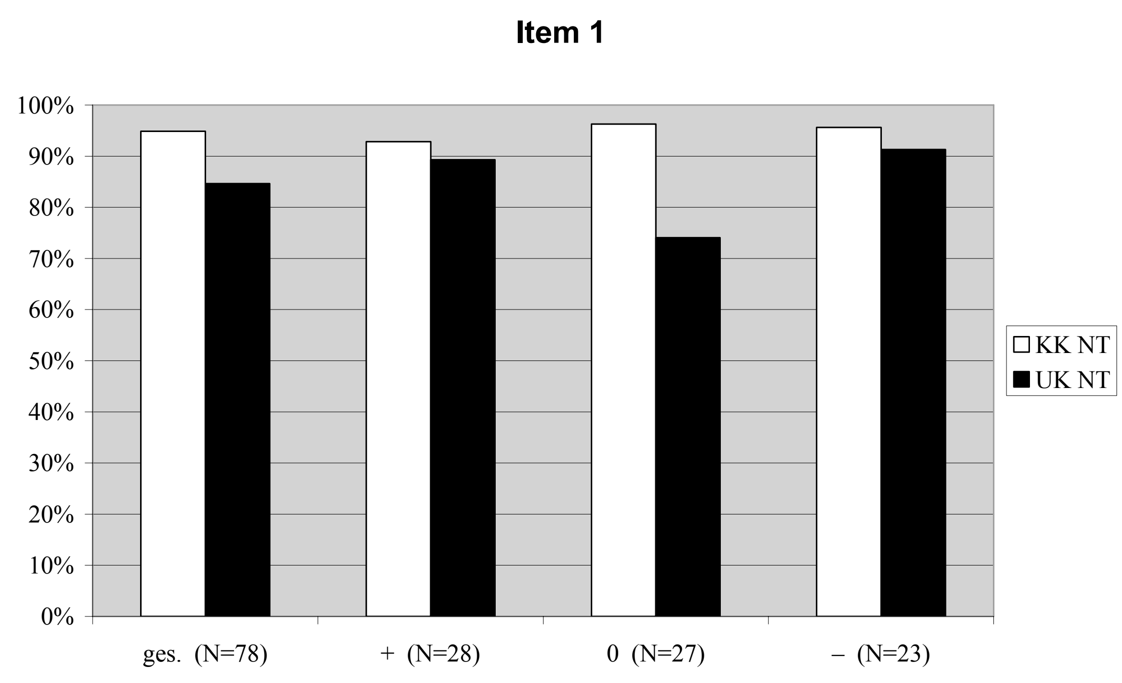


Abb. 98: Anteil der richtigen Lösungen von Item 1 in Prozent

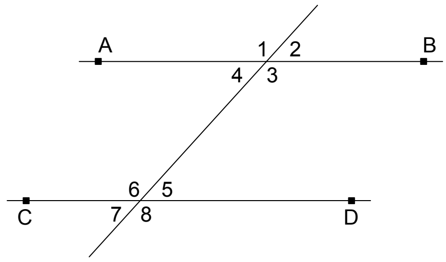
Item 2
In dieser Zeichnung sind die Geraden *AB* und *CD* parallel. Welche zwei Winkel ergeben zusammen 180°? a) Winkel 1 und Winkel 3 **b) Winkel 4 und Winkel 6** c) Winkel 2 und Winkel 5 d) Winkel 2 und Winkel 7 e) Winkel 1 und Winkel 8 

Abb. 99: Formulierung des Items 2. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

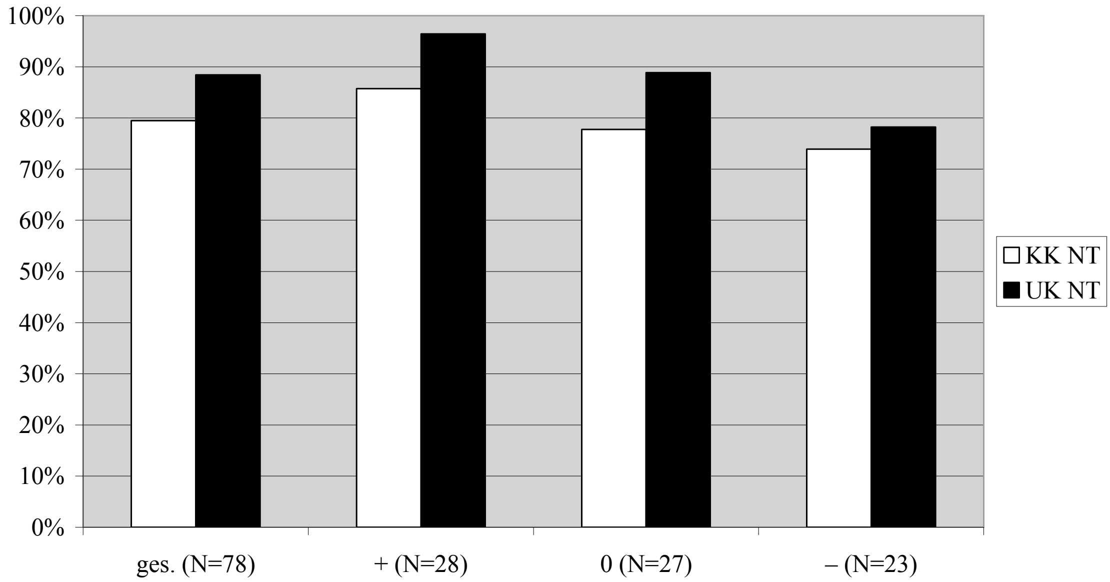


Abb. 100: Anteil der richtigen Lösungen von Item 2 in Prozent

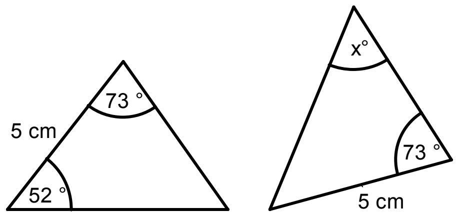
Item 3
Die abgebildeten Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich). Die Maße einiger Seiten und Winkel sind angegeben. Wie groß ist *x*? a) 52 **b) 55** c) 65 d) 73 e) 75 

Abb. 101: Formulierung des Items 3. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

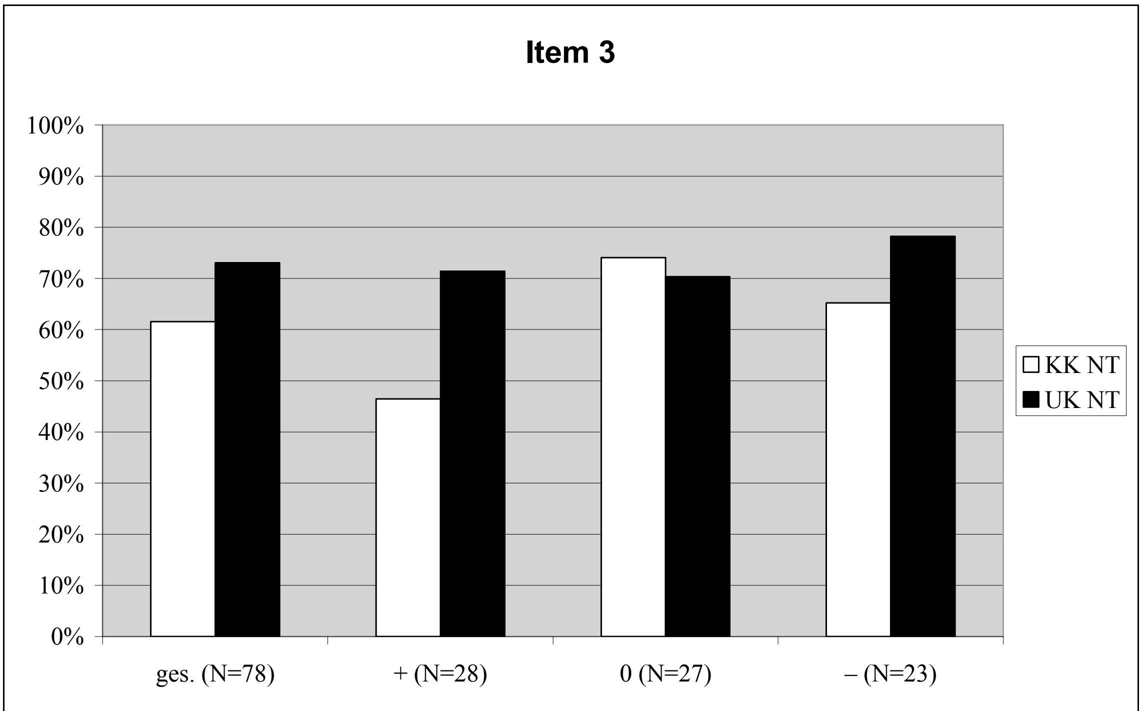


Abb. 102: Anteil der richtigen Lösungen von Item 3 in Prozent

Item 4

Dreieck ABC ist rechtwinklig-gleichschenklig mit dem rechten Winkel bei C. Falls $\overline{CE}$ eine Seitenhalbierende des Dreiecks ist, dann hat $\overline{CE}$ die gleiche Länge wie

a) $\overline{CA}$

b) $\overline{CB}$

c) $\overline{AB}$

d) $\boldsymbol{\overline{AE}}$

Abb. 103: Formulierung des Items 4. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

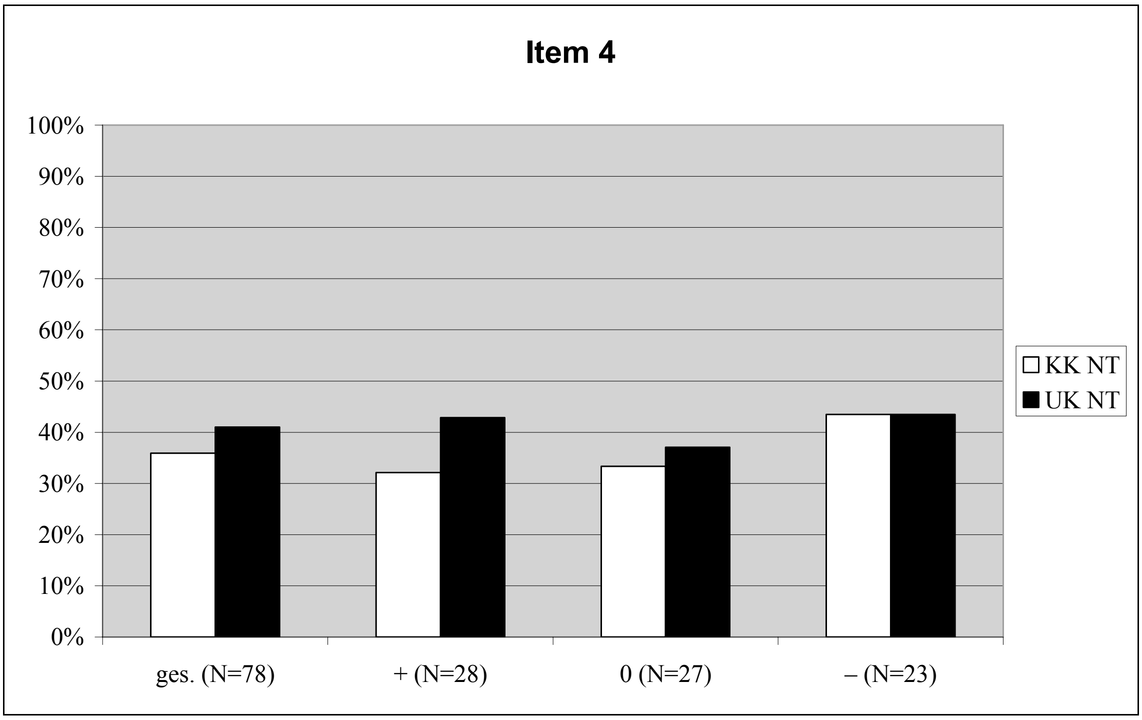


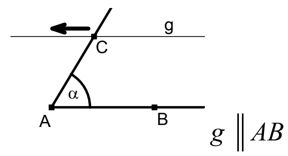
Abb. 104: Anteil der richtigen Lösungen von Item 4 in Prozent

Item 5

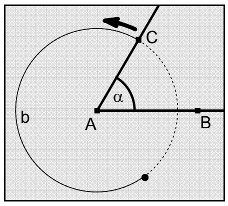
Der Punkt *C* des zweiten Schenkels des Winkels *α* bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf dem Kreisbogen *b* bzw. der Geraden *g*.

Bei welcher Bewegung von *C* wird der **Winkel *α* gleichmäßig größer**?

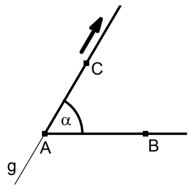
a)



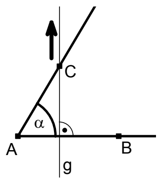
b)



c)



d)



e)

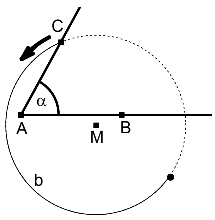


Abb. 105: Formulierung des Items 5. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

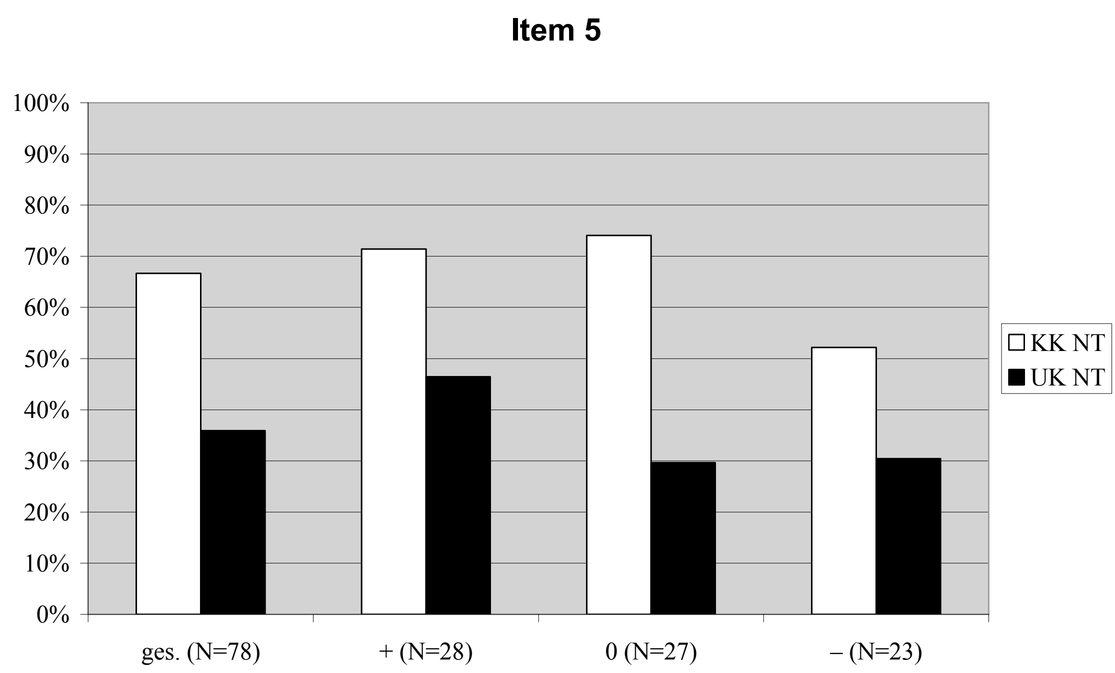


Abb. 106: Anteil der richtigen Lösungen von Item 5 in Prozent

Item 6

Der Punkt *R* des Dreiecks *PQR* bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf der Kreislinie *k*. Dabei ändert sich die Länge der Strecke [*PR*].

Zwischen welchen Punkten bewegt sich *R*, wenn sich die Länge der Strecke [*PR*] am wenigsten ändert?

a) Zwischen 1 und 2
b) Zwischen 2 und 3
c) Zwischen 3 und 4
d) Zwischen 4 und 5
e) Zwischen 5 und 6
f) Zwischen 6 und 7
g) Zwischen 7 und 8
h) Zwischen 8 und 1

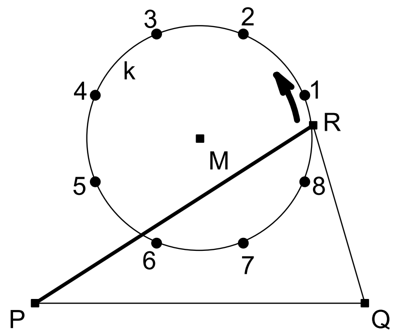


Abb. 107: Formulierung des Items 6. Die richtigen Auswahlantworten sind markiert.

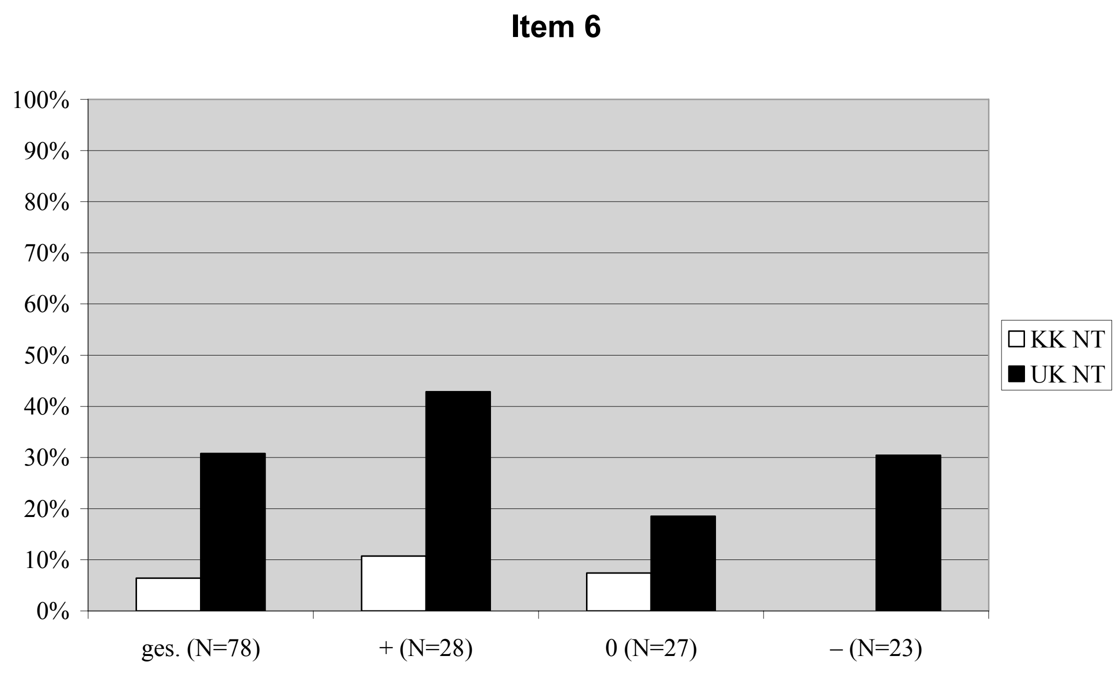


Abb. 108: Anteil der richtigen Lösungen von Item 6 in Prozent

Item 7A
Wir betrachten den Term $x + 3$. Stelle dir vor, dass du den **x-Wert, bei – 4 beginnend, gleichmäßig immer größer werden lässt, bis er + 4 erreicht**. Wie verhält sich dabei der Termwert? Der **Termwert wird**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert, a) immer kleiner. **b) immer größer.** c) manchmal kleiner und manchmal größer.

Abb. 109: Formulierung des Items 7A. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

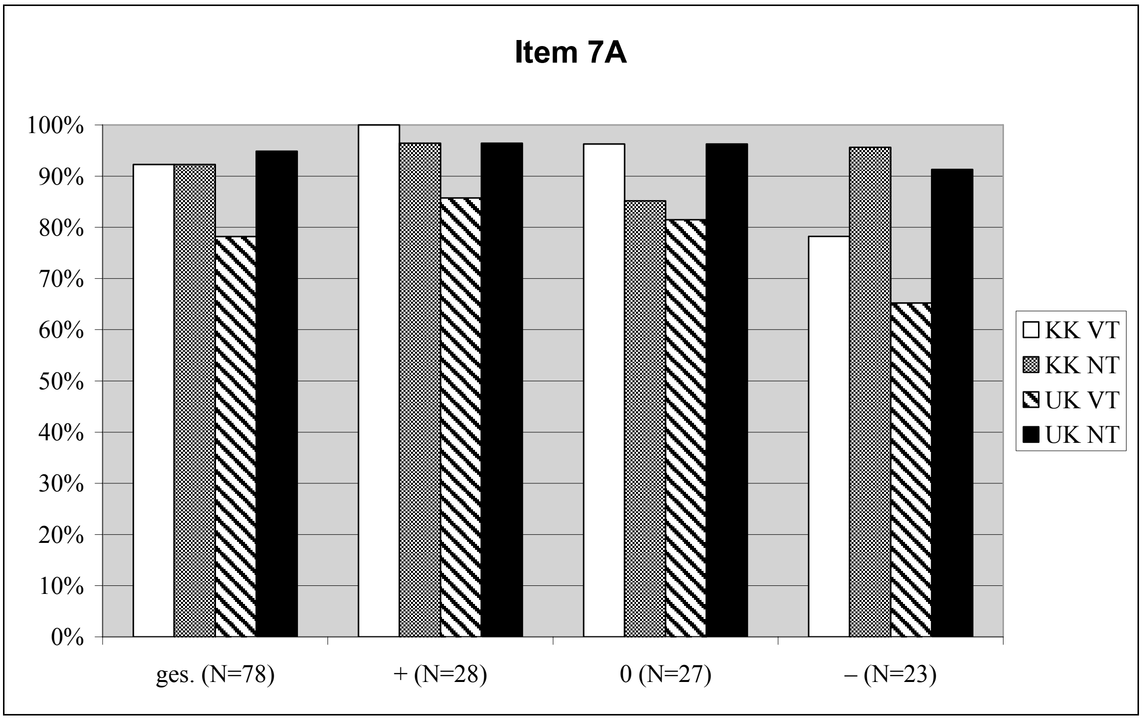


Abb. 110: Anteil der richtigen Lösungen von Item 7A in Prozent

Item 7B
Wir betrachten den Term $\boldsymbol{x+3}$. Stelle dir vor, dass du den **x-Wert, bei – 4 beginnend, gleichmäßig immer größer werden lässt, bis er + 4 erreicht**. Wie verhält sich dabei der Termwert? Der **Termwert ändert sich**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert, a) langsamer als der x-Wert. b) schneller als der x-Wert. **c) genau so schnell wie der x-Wert.** **d) gleichmäßig.** e) manchmal schneller und manchmal langsamer.

Abb. 111: Formulierung des Items 7B. Die richtigen Auswahlantworten sind markiert.

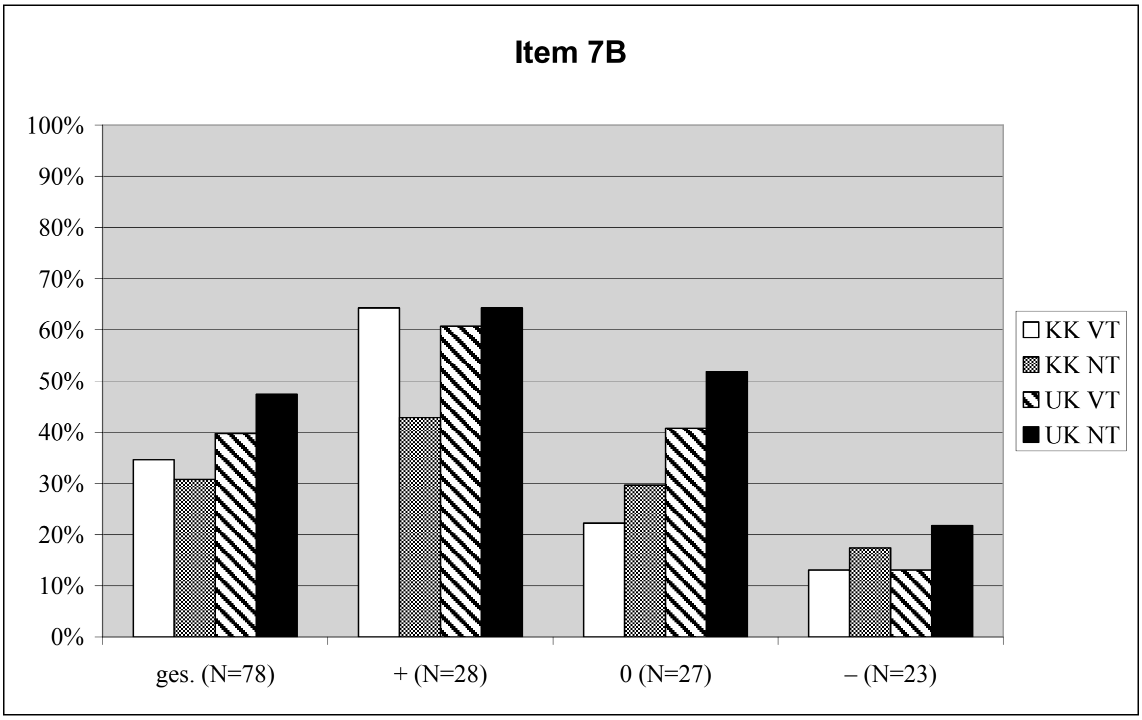


Abb. 112: Anteil der richtigen Lösungen von Item 7B in Prozent

Item 8A
Wir betrachten den Term **3 – *x***. Stelle dir vor, dass du den **x-Wert, bei – 4 beginnend, gleichmäßig immer größer werden lässt, bis er + 4 erreicht**. Wie verhält sich dabei der Termwert? Der **Termwert wird**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert, **a) immer kleiner.** b) immer größer. c) manchmal kleiner und manchmal größer.

Abb. 113: Formulierung des Items 8A. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

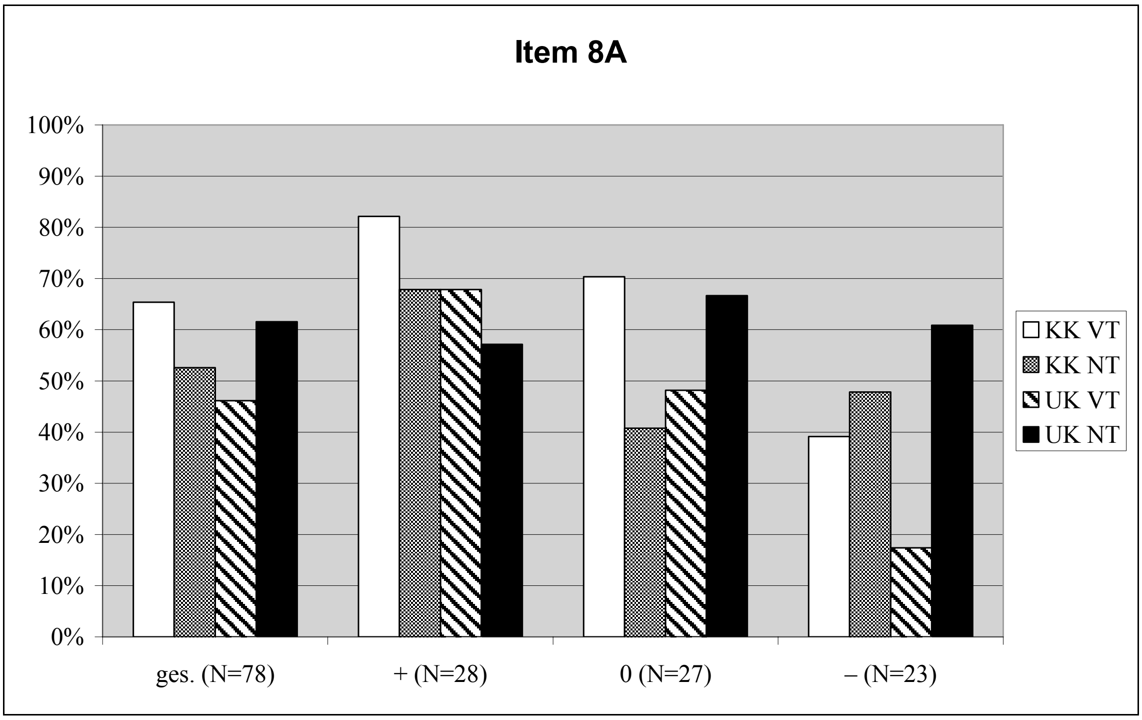


Abb. 114: Anteil der richtigen Lösungen von Item 8A in Prozent

Item 8B
Wir betrachten den Term **3 – *x***. Stelle dir vor, dass du den **x-Wert, bei – 4 beginnend, gleichmäßig immer größer werden lässt, bis er + 4 erreicht**. Wie verhält sich dabei der Termwert? Der **Termwert ändert sich**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert, a) langsamer als der x-Wert. b) schneller als der x-Wert. **c) genau so schnell wie der x-Wert.** **d) gleichmäßig.** e) manchmal schneller und manchmal langsamer.

Abb. 115: Formulierung des Items 8B. Die richtigen Auswahlantworten sind markiert.

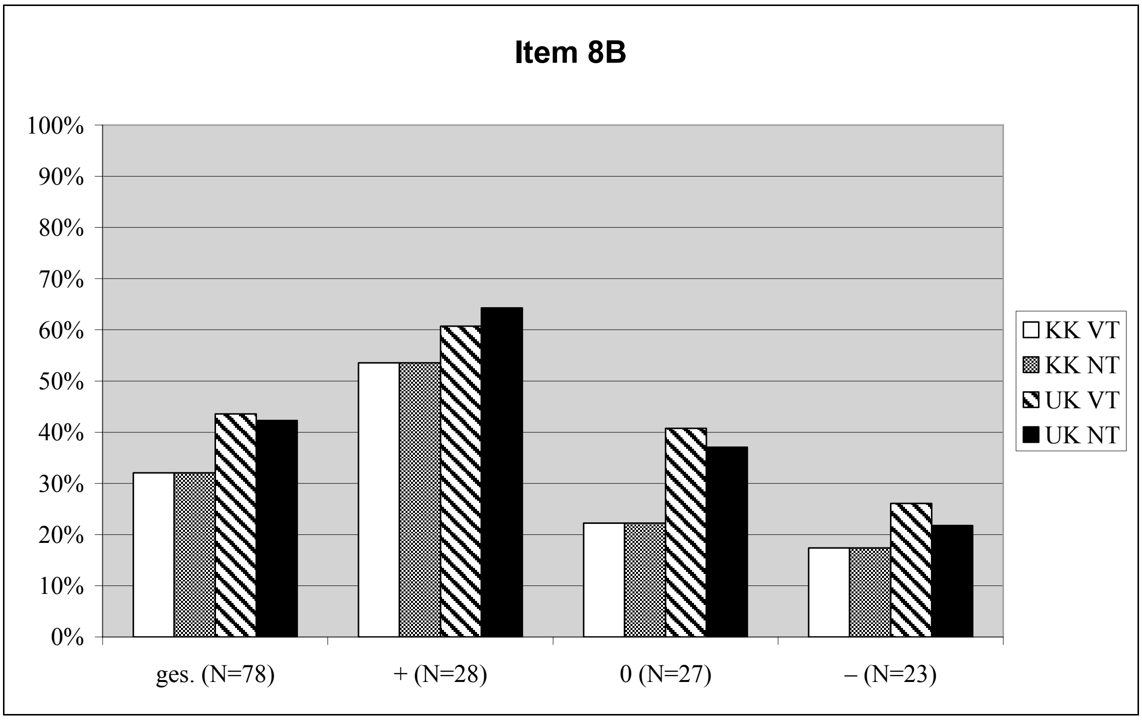
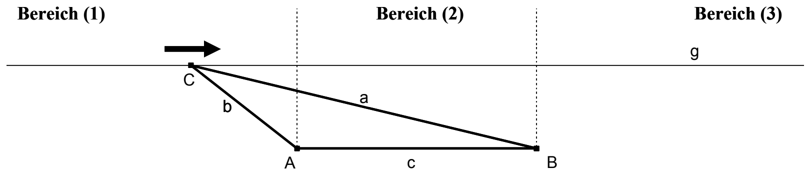


Abb. 116: Anteil der richtigen Lösungen von Item 8B in Prozent

Item 9A
Es ist ein Dreieck *ABC* gegeben. Der Eckpunkt *C* wird auf der Geraden *g* in Pfeilrichtung bewegt. Wir unterscheiden je nach Lage von *C* drei Bereiche.



Es gibt im **Bereich (2)** eine Lage von *C*, so dass zwei Seiten des Dreiecks, nämlich

a) a und b, gleich lang sind,
b) a und c, gleich lang sind,
c) b und c, gleich lang sind.
d) Es gibt keine solche Lage für *C*.

Abb. 117: Formulierung des Items 9A. Die richtigen Auswahlantworten sind markiert.

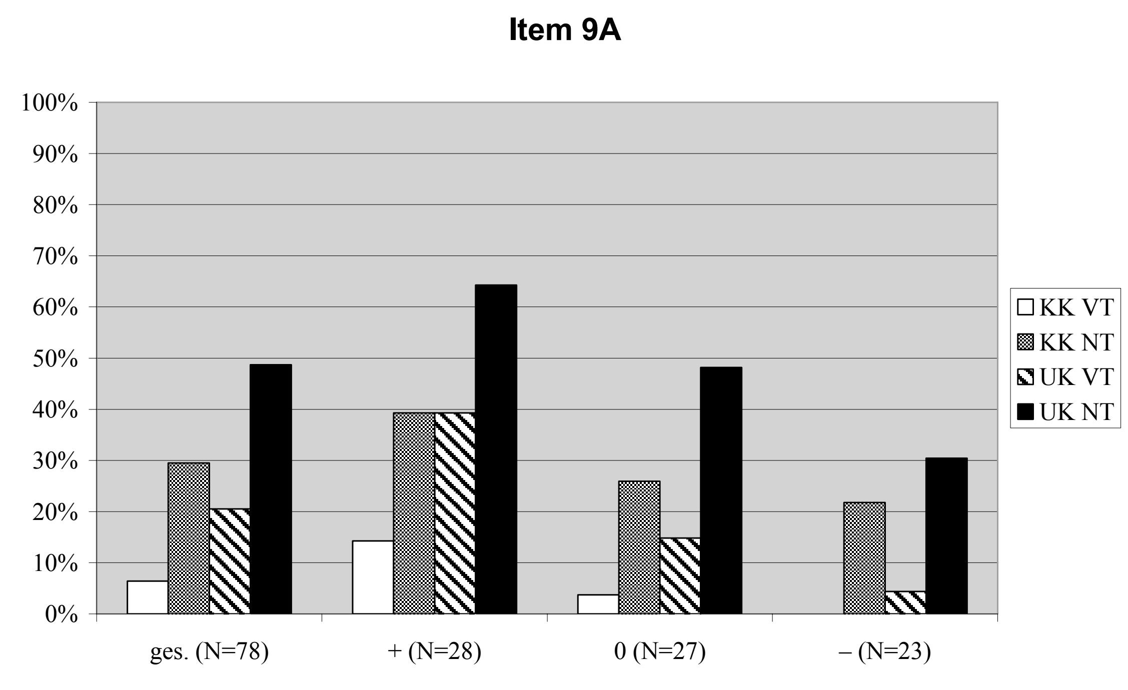
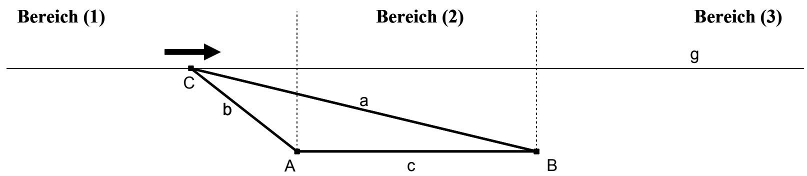


Abb. 118: Anteil der richtigen Lösungen von Item 9A in Prozent

Item 9B

Es ist ein Dreieck *ABC* gegeben. Der Eckpunkt *C* wird auf der Geraden *g* in Pfeilrichtung bewegt. Wir unterscheiden je nach Lage von *C* drei Bereiche.



Es gibt im **Bereich (3)** eine Lage von *C*, so dass zwei Seiten des Dreiecks, nämlich

a) *a* und *b*, gleich lang sind,

b) a und c, gleich lang sind,

c) *b* und *c*, gleich lang sind.

d) Es gibt keine solche Lage für *C*.

Abb. 119: Formulierung des Items 9B. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

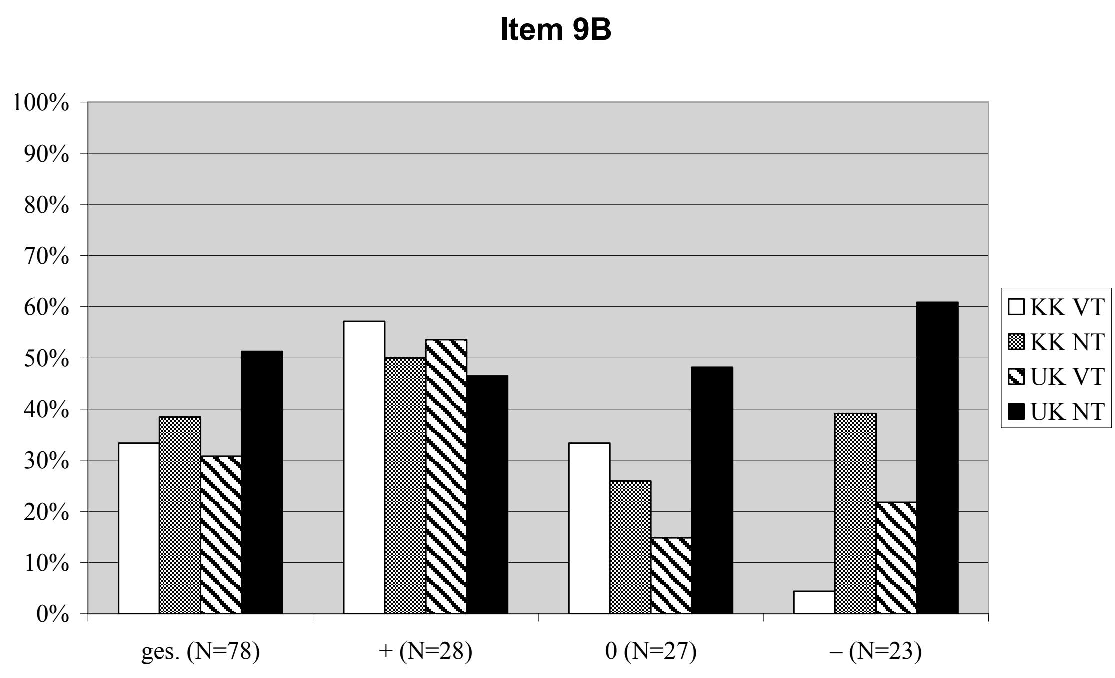


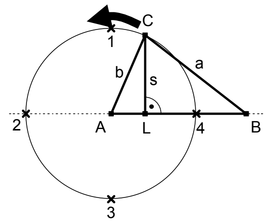
Abb. 120: Anteil der richtigen Lösungen von Item 9B in Prozent

Item 10A

Der Punkt *C* bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis mit Mittelpunkt *A* bis zur Stelle 4.

L ist der Schnittpunkt der Geraden *AB* mit dem von *C* auf die Gerade *AB* gefällten Lot.

Wie verändern sich dabei die Längen der Strecken *a*, *b* und *s*?



Für die Länge der **Strecke *a*** gilt:

a) Sie wird immer länger.
b) Sie wird immer kürzer.
c) Sie bleibt immer gleich.
d) Sie wird manchmal länger und manchmal kürzer.
e) Sie wird bis zur Stelle 2 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.
f) Sie wird bis zur Stelle 1 länger und dann bis zur Stelle 2 wieder kürzer.
g) Sie wird von Stelle 2 bis zur Stelle 3 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

Abb. 121: Formulierung des Items 10A. Die richtigen Auswahlantworten sind markiert.

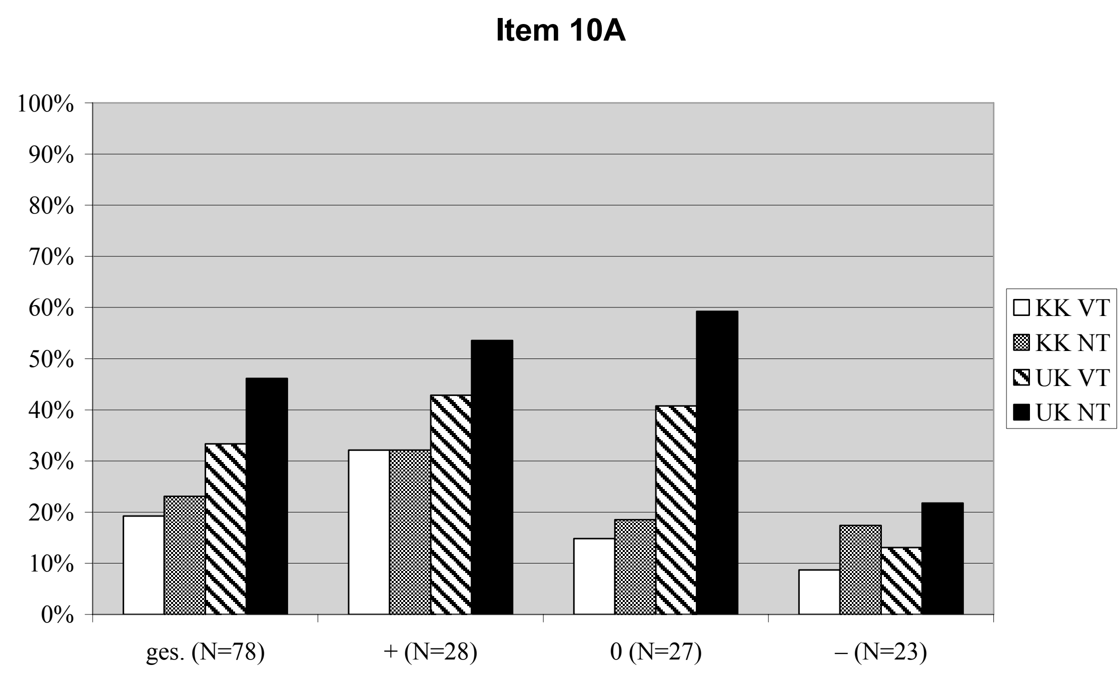


Abb. 122: Anteil der richtigen Lösungen von Item 10A in Prozent

Item 10B
Der Punkt C bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis mit Mittelpunkt A bis zur Stelle 4. L ist der Schnittpunkt der Geraden AB mit dem von C auf die Gerade AB gefällten Lot. Wie verändern sich dabei die Längen der Strecken a, b und s? Für die Länge der **Strecke *b*** gilt: a) Sie wird immer länger. b) Sie wird immer kürzer. **c) Sie bleibt immer gleich.** d) Sie wird manchmal länger und manchmal kürzer. e) Sie wird bis zur Stelle 2 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer. f) Sie wird bis zur Stelle 1 länger und dann bis zur Stelle 2 wieder kürzer. g) Sie wird von Stelle 2 bis zur Stelle 3 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.

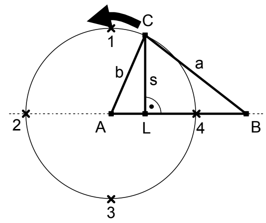


Abb. 123: Formulierung des Items 10B. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

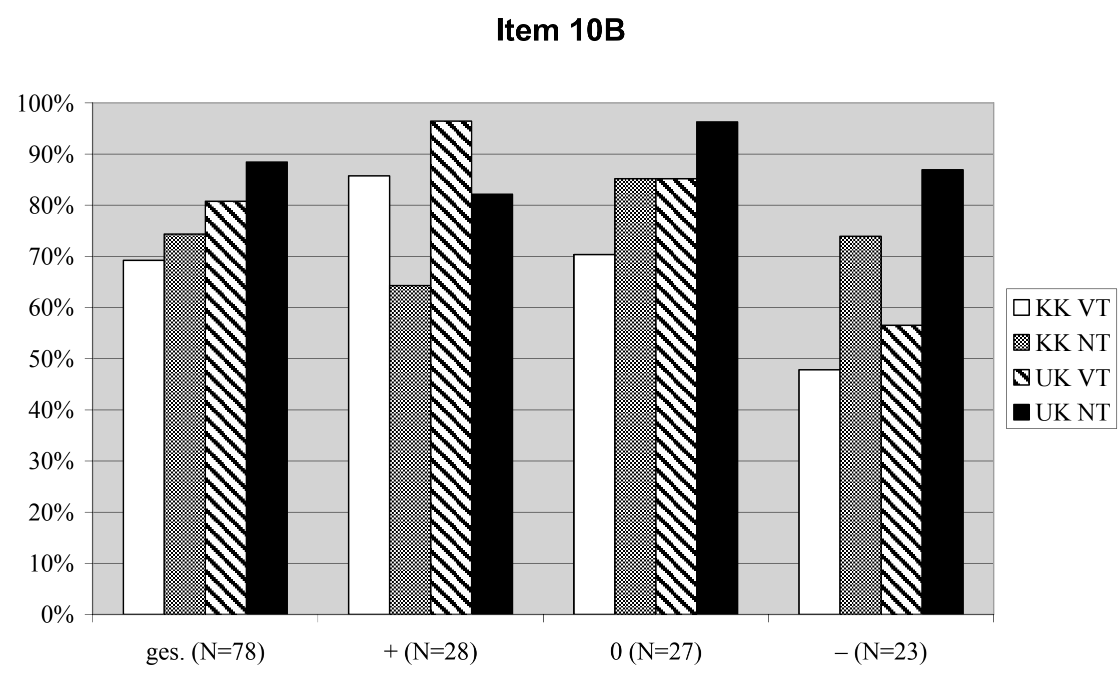


Abb. 124: Anteil der richtigen Lösungen von Item 10B in Prozent

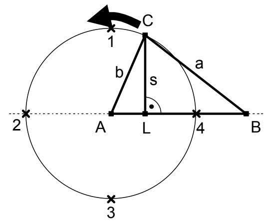
Item 10C	
Der Punkt C bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis mit Mittelpunkt A bis zur Stelle 4. L ist der Schnittpunkt der Geraden AB mit dem von C auf die Gerade AB gefällten Lot. Wie verändern sich dabei die Längen der Strecken a, b und s? Für die Länge der **Strecke *s*** gilt:	
a) Sie wird immer länger. b) Sie wird immer kürzer. c) Sie bleibt immer gleich. **d) Sie wird manchmal länger und manchmal kürzer.**	e) Sie wird bis zur Stelle 2 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer. **f) Sie wird bis zur Stelle 1 länger und dann bis zur Stelle 2 wieder kürzer.** **g) Sie wird von Stelle 2 bis zur Stelle 3 länger und dann bis zur Stelle 4 wieder kürzer.**

Abb. 125: Formulierung des Items 10B. Die richtigen Auswahlantworten sind markiert.

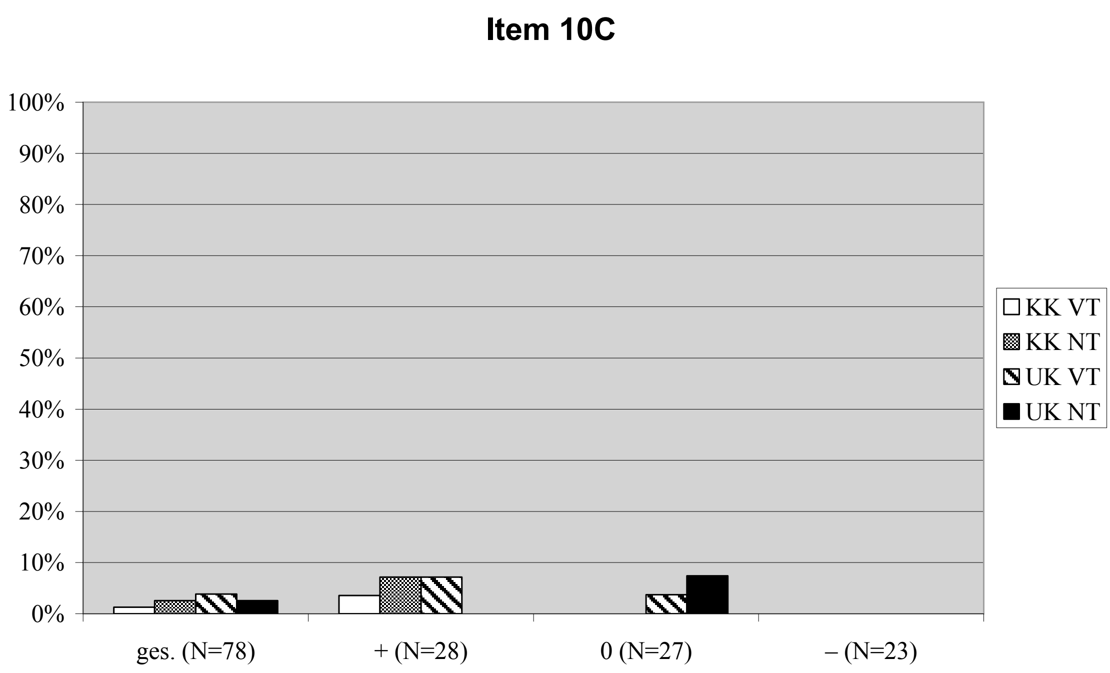
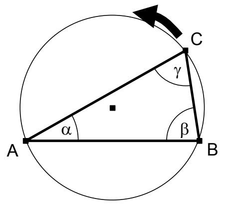


Abb. 126: Anteil der richtigen Lösungen von Item 10C in Prozent

Item 11A



Die Eckpunkte des Dreiecks *ABC* liegen auf dem Kreis.

Der Punkt *C* bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis bis kurz vor den Punkt *A*.

Wie verhalten sich dabei die Winkel α und β?

Für den **Winkel** $\boldsymbol{\alpha}$ gilt:

- **a) Er wird immer größer.**
- b) Er wird immer kleiner.
- c) Er bleibt immer gleich.
- d) Lässt sich so nicht sagen.
- e) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer größer und dann wieder kleiner.
- f) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer kleiner und dann wieder größer.

Abb. 127: Formulierung des Items 11A. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

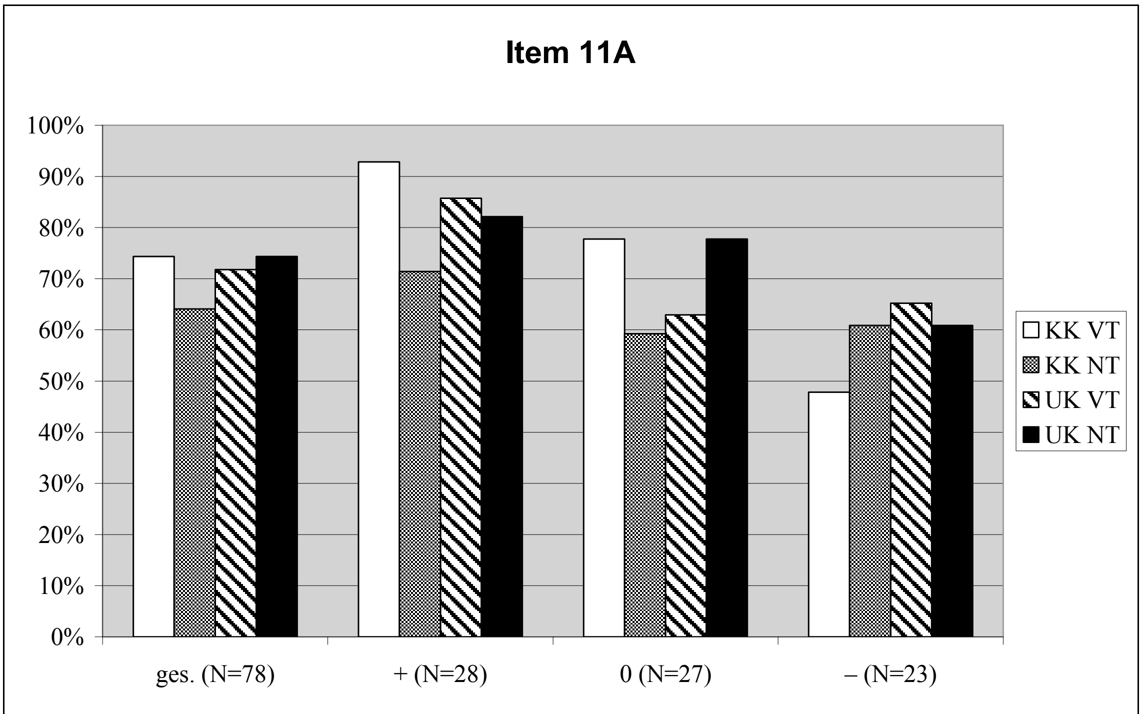


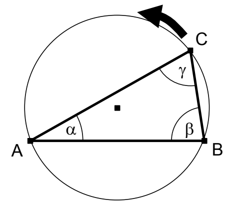
Abb. 128: Anteil der richtigen Lösungen von Item 11A in Prozent

Item 11B

Die Eckpunkte des Dreiecks ABC liegen auf dem Kreis.

Der Punkt C bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis bis kurz vor den Punkt A.

Wie verhalten sich dabei die Winkel α und β?



Für den **Winkel β** gilt:

a) Er wird immer größer.
b) Er wird immer kleiner.
c) Er bleibt immer gleich.
d) Lässt sich so nicht sagen.
e) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer größer und dann wieder kleiner.
f) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer kleiner und dann wieder größer.

Abb. 129: Formulierung des Items 11B. Die richtige Auswahlantwort ist markiert.

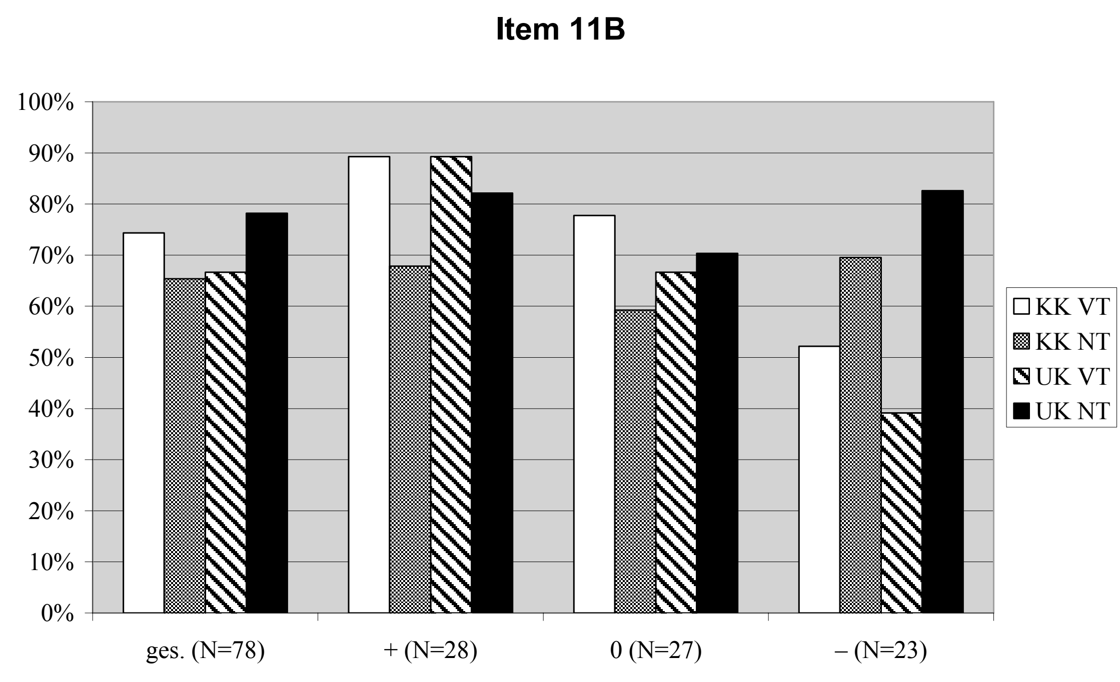


Abb. 130: Anteil der richtigen Lösungen von Item 11B in Prozent

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

AEBLI (1980)	**Aebli, Hans:** *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie.* Klett-Cotta, Stuttgart, 1980
AEBLI (1981)	**Aebli, Hans:** *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse.* Klett-Cotta, Stuttgart, 1981
AEBLI (1985)	**Aebli, Hans:** *Das operative Prinzip.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 4-6
AEBLI (2001)	**Aebli, Hans:** *Zwölf Grundformen des Lehrens.* Klett-Cotta, Stuttgart, 2001[11]
ANDERSON (2001)	**Anderson, John R.:** *Kognitive Psychologie.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001[3]
APPELL (1995)	**Appell, Kristina:** *Funktionsbetrachtungen an der Zapfsäule.* In: Mathematik in der Schule, Jahrgang 33 (1995), Heft 10, S. 515-524
ARISTOTELES (1987)	**Aristoteles:** *[Physik] – Aristoteles' Physik. Vorlesung über Natur. Erster Halbband: Bücher I(A)–IV(Δ). Übersetzt, mit einer Einleitung und mit Anmerkungen herausgegeben von Hans Günter Zekl.* Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1987
ARISTOTELES (1988)	**Aristoteles:** *[Physik] – Aristoteles' Physik. Vorlesung über Natur. Zweiter Halbband: Bücher V(E)–VIII(Θ). Übersetzt, mit einer Einleitung und mit Anmerkungen herausgegeben von Hans Günter Zekl.* Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1988
AUFSCHNAITER/WELZEL (2001)	**Aufschnaiter, Stefan von; Welzel, Manuela (Hrsg.):** *Nutzung von Videodaten zur Untersuchung von Lehr-Lern-Prozessen – Aktuelle Methoden empirischer pädagogischer Forschung.* Waxmann, Münster, New York, München, Berlin, 2001
BALL (2002)	**Ball, Barbara:** *What is mathematical thinking?* In: Mathematics Teaching, 181, December 2002, S. 17-19
BAPTIST (2001)	**Baptist, Peter:** *Aus der Praxis des Modellprogramms: Mathematikunterricht verändern – Verständnis fördern.* In: Klieme, Eckhard; Baumert, Jürgen (Hrsg.): TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht. Bundesministerium für Bildung und Forschung, Bonn, 2001, S. 67-73
BAPTIST/WINTER (2001)	**Baptist, Peter; Winter, Heinrich:** *Überlegungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Oberstufe des Gymnasiums.* 2001
BARDY (1993)	**Bardy, Peter:** *Ergebnisse empirischer Untersuchungen zur Entwicklung funktionalen Denkens im Verlauf der Grundschulzeit.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 14 (1993), Heft 3/4, S. 307-330
BARZEL (2000)	**Barzel, Bärbel:** *Selbsttätiges Lernen – neue Methoden, neues Glück?* In: Wilfried Herget & Hans-Georg Weigand & Thomas Weth (Hrsg.): Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht, Bericht über die 17. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 24. bis 26. September 1999 in Wolfenbüttel, Franzbecker, Hildesheim, 2000
BASLER (1994)	**Basler, Herbert:** *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistischen Methodenlehre.* Physica-Verlag, Heidelberg, 1994[11]
BAUER (1978)	**Bauer, Ludwig:** *Mathematische Fähigkeiten – Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben.* Ferdinand Schöningh, Paderborn, 1978
BAUMERT/LEHMANN (1997)	**Baumert, Jürgen; Lehmann, Rainer u. a.:** *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde.* Leske + Budrich, Opladen, 1997

BECK/MAIER (1993) **Beck, Christian; Maier, Hermann:** *Das Interview in der Mathematikdidaktischen Forschung.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 14 (1993), Heft 2, S. 147-179

BECK/MAIER (1994a) **Beck, Christian; Maier, Hermann:** *Mathematikdidaktik als Textwissenschaft. Zum Status von Texten als Grundlage empirischer mathematikdidaktischer Forschung.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 15 (1994), Heft 1/2, S. 35-78

BECK/MAIER (1994b) **Beck, Christian; Maier, Hermann:** *Zur Methode der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung.* In: Maier, Hermann; Voigt, Jörg (Hrsg.): Verstehen und Verständigung: Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung (IDM-Reihe; Bd. 19), Aulis-Verlag Deubner, Köln, 1994, S. 43-76

BECKER (1994) **Becker, Gerhard:** *Das Unterrichtswerk „Lehrbuch der Elementar-Geometrie" von J. Henrici und P. Treutlein – Entstehungsbedingungen, Konzeption, Wirkung.* In: Schönbeck/Struve/Volkert (Hrsg.): Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften. Band I: Mathematik, Deutscher Studien Verlag, Weinheim, 1994, S. 89-112

BECKMANN (1989) **Beckmann, Astrid:** *Zur didaktischen Bedeutung der abbildungsgeometrischen Beweismethode für 12- bis 15jährige Schüler.* Texte zur mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Lehre, 27, Verlag Barbara Franzbecker, Bad Salzdetfurth, 1989

BECKMANN (1997) **Beckmann, Astrid:** *Beweisen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I.* Studienbücher für den Unterricht in Lehre und Schule, Band 2, Lit Verlag, Hamburg, 1997

BECKMANN (2001) **Beckmann, Astrid:** *Probleme beim Beweisenlernen, DGS als Lösung?* In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 21-30

BENDER (1982) **Bender, Peter:** *Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 14 (1982), Heft 1, S. 9-24

BENDER (1989) **Bender, Peter:** *Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen.* In: Kautschitsch, Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. 7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, B. G. Teubner, Stuttgart, 1989, S. 95-145

BENDER (1999) **Bender, Peter:** *Mathematik-didaktische Paradigmen und Computer – unter besonderer Berücksichtigung der Geometrie.* In: Kadunz et al. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien: Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 28.9.-2.10.1998, Teubner, Stuttgart Leipzig, 1999, S. 33-52

BENDER (2001) **Bender, Peter:** *Schul-Geometrie und Computer-Geometrie.* In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 31-40

BENDER/SCHREIBER (1985) **Bender, Peter; Schreiber, Alfred:** *Operative Genese der Geometrie.* Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1985

BESUDEN (1984) **Besuden, Heinrich:** *Knoten, Würfel, Ornamente: Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschulen.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1984

BESUDEN (1985)	**Besuden, Heinrich:** *Kippfolgen mit einer Streichholzschachtel – Zum Vergnügen und zur Ausbildung räumlichen Denkens.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 46-48
BLASCHKE/MÜLLER (1956)	**Blaschke, Wilhelm; Müller, Hans Robert:** *Ebene Kinematik.* Oldenbourg, München, 1956
BLUM (2001)	**Blum, Werner:** *Was folgt aus TIMSS für Mathematikunterricht und Mathematiklehrerausbildung?* In: Klieme, Eckhard; Baumert, Jürgen (Hrsg.): TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht. Bundesministerium für Bildung und Forschung, Bonn, 2001, S. 75-83
BOCK/WERGE (1992a)	**Bock, Hans; Werge, Christian:** *Finden von Vermutungen durch Funktionale Betrachtungen – Folge 1: Konstruktionsaufgaben.* In: Mathematik in der Schule 30 (1992), Heft 11, S. 627-631
BOCK/WERGE (1992b)	**Bock, Hans; Werge, Christian:** *Finden von Vermutungen durch Funktionale Betrachtungen – Folge 2: Extremwertaufgaben.* In: Mathematik in der Schule 30 (1992), Heft 12, S. 697-699
BORNELEIT ET AL. (2000)	**Borneleit, Peter; Danckwerts, Rainer; Henn, Hans-Wolfgang; Weigand, Hans-Georg:** *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe.* 2000
BORTZ (2004)	**Bortz, Jürgen:** *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler.* Springer Medizin Verlag, Heidelberg, 2004[6]
BORTZ/DÖRING (2002)	**Bortz, Jürgen; Döring, Nicola:** *Forschungsmethoden und Evaluation für Sozialwissenschaftler*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002[3]
BOTSCH (1958)	**Botsch, Otto:** *Bewegungsgeometrie, Trigonometrie der Ebene, Vektorgeometrie.* Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main, Berlin, Bonn, 1958[2]
BOURBAKI (1961)	**Bourbaki, Nicolas:** *Die Architektur der Mathematik.* In: Physikalische Blätter, 17 (1961), S. 161-166 und S. 212-218
BREIDENBACH ET AL. (1992)	**Breidenbach, Daniel; Dubinsky, Ed; Hawks, Julie; Nichols, Devilyna:** *Development of the Process Conception of Function.* In: Educational Studies in Mathematics, Volume 23, 1992, p. 247-285
BROMME/STEINBRING (1990)	**Bromme, Rainer; Steinbring, Heinz:** *Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß. Eine empirische Analyse von vier Unterrichtsstunden in der Sekundarstufe I.* In: Bromme, Rainer; Seeger, Falk; Steinbring, Heinz (Hrsg.): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler. Aulis Verlag Deubner & CoKG, Köln, 1990, S. 151-229
BRUDER (2002)	**Bruder, Regina:** *Lernen, geeignete Fragen zu stellen – Heuristik im Mathematikunterricht.* In: Mathematik lehren, Heft 115, Dezember 2002, S. 4-8
BÜHNER (2004)	**Bühner, Markus:** *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion.* Pearson Studium, München, 2004
BUNDESMINISTERIUM DER FINANZEN (2003)	**Bundesministerium der Finanzen (Hrsg.):** *Finanzplan des Bundes 2003-2007.* Berlin, August 2003
COURANT/ROBBINS (1962)	**Courant, Richard; Robbins, Herbert:** *Was ist Mathematik?* Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962
DANCKWERTS ET AL. (2000)	**Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart; Maczey, Dorothee:** *Ein klassisches Problem – dynamisch visualisiert.* In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Jahrgang 53, 2000, Heft 6, Dümmler, Köln, S. 342-346
DANCKWERTS/VOGEL (2001)	**Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart:** *Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung.* Der Mathematikunterricht, Jahrgang 47, Heft 4, August 2001
DANCKWERTS/VOGEL (2003)	**Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart:** *Dynamisches Visualisieren und Mathematikunterricht – Ein Ausloten der Chancen an zwei Beispielen.* In: Mathematik lehren, Heft 117, April 2003, S. 19-22 und S. 39
DAVIS/HERSH (1985)	**Davis, Philip J.; Hersh, Reuben:** *Erfahrung Mathematik.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1985

DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM (2001) **Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.):** *PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Leske + Budrich, Opladen, 2001

DIENES (1971) **Dienes, Zoltan P.:** *Die sechs Stufen im mathematischen Lernprozeß.* Verlag Herder, Freiburg im Breisgau, 1971

DIENES/GOLDING (1968) **Dienes, Zoltan P.; Golding, Edmond W.:** *Mathematisches Denken und logische Spiele – Erlernen der Logik im Spiel.* Verlag Herder, Freiburg im Breisgau, 1968[2]

DIENES/GOLDING (1969) **Dienes, Zoltan P.; Golding, Edmond W.:** *Topologie und Schattengeometrie.* Verlag Herder, Freiburg im Breisgau, 1969

DIENES/JEEVES (1968) **Dienes, Zoltan P.; Jeeves, Malcolm A.:** *Denken in Strukturen – Eine psychologische Untersuchung mathematischer Lernprozesse.* Verlag Herder, Freiburg im Breisgau, 1968

DISESSA (1993) **diSessa, Andrea A.:** *The Many Faces of a Computational Medium: Teaching the Mathematics of Motion.* In: Proceedings of the Conference Technology in Mathematics Teaching (TMT93), University of Birmingham, 17-20 September 1993

DOLL/PRENZEL (2004) **Doll, Jörg; Prenzel, Manfred (Hrsg.):** *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung.* Waxmann, Münster, 2004

DÖRFLER (1991) **Dörfler, Willibald:** *Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium.* In: Dörfler, Willibald et al. (Hrsg.): Computer – Mensch – Mathematik: Beiträge zum 6. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 23.-27.09.1990, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, Teubner, Stuttgart, 1991, S. 51-75

DÖRNER (1984) **Dörner, Dietrich:** *Die Fähigkeit des Menschen zum Denken in komplexen Systemen: Determinanten der Vorausschau.* Universität Bamberg, Lehrstuhl Psychologie II, Memorandum Nummer 29, 1984

DÖRNER (1986) **Dörner, Dietrich:** *Diagnostik der operativen Intelligenz.* Universität Bamberg, Lehrstuhl Psychologie II, Memorandum Nummer 44, 1986

DUBINSKY/HAREL (1992) **Dubinsky, Ed; Harel, Guershon:** *The Nature of the Process Conception of Function.* In: Dubinsky, Ed; Harel, Guershon (Eds.): The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 25, 1992, p. 85-132

EDELMANN (1994) **Edelmann, Walter:** *Lernpsychologie – Eine Einführung.* Beltz Psychologie-Verlags-Union, Weinheim, 1994[4]

ELSCHENBROICH (1999) **Elschenbroich, Hans-Jürgen:** *Anschaulich(er) Beweisen mit dem Computer – Neue Möglichkeiten für visuelle Beweise.* In: Kadunz et al. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien: Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 28.9.-2.10.1998, Teubner, Stuttgart, 1999, S. 61-68

ELSCHENBROICH (2000) **Elschenbroich, Hans-Jürgen:** *Neue Ansätze im Geometrieunterricht des S I durch elektronische Arbeitsblätter.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000, S. 165-168

ELSCHENBROICH (2003a) **Elschenbroich, Hans-Jürgen:** *Ein dynamischer Zugang zu Funktionen und Gleichungen.* In: MNU, Jahrgang 56, 2003, Heft 8, S. 454-460

ELSCHENBROICH (2003b) **Elschenbroich, Hans-Jürgen:** *Funktionen dynamisch entdecken.* In: Bender, Herget, Weigand, Weth (Hrsg.): Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 2002 in Soest, Franzbecker, Hildesheim, 2003, S. 43-53

EMBACHER (1999)	**Embacher, Franz:** *Multimedia-Didaktik und spontanes Verstehen.* In: Kadunz et al. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien: Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 28.9.-2.10.1998, Teubner, Stuttgart Leipzig, 1999, S. 69-76
ENTGELMEIER (2000)	**Entgelmeier, Dirk:** *Neue Werkzeuge für eine inhaltlich-anschauliche Einführung des Ableitungsbegriffs.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000, S. 177-180
EUKLID (1997)	**Euklid:** *Die Elemente, Bücher I-XIII.* Aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer mit einem Vorwort von W. Trageser. Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Band 235, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1997[3]
FISCHER (1984)	**Fischer, Roland:** *Offene Mathematik und Visualisierung.* In: Mathematica didactica, 7 (1984), Heft 3/4, S. 139-160
FISCHER (2003)	**Fischer, Roland:** *Reflektierte Mathematik für die Allgemeinheit.* In: Hefendehl-Hebeker, Lisa; Hußmann, Stephan (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie: Festschrift für Norbert Knoche. Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2003, S. 42-52
FLICK (2002)	**Flick, Uwe:** *Qualitative Sozialforschung – Eine Einführung.* Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 2002
FLICK ET AL. (2003)	**Flick, Uwe; von Kardorff, Ernst; Steinke, Ines (Hrsg.):** *Qualitative Forschung – Ein Handbuch.* Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 2003[2]
FREUDENTHAL (1968)	**Freudenthal, Hans:** *Mathematik in Wissenschaft und Alltag.* Kindler Verlag, München, 1968
FREUDENTHAL (1973a)	**Freudenthal, Hans:** *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1973
FREUDENTHAL (1973b)	**Freudenthal, Hans:** *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Band 2, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1973
FREUDENTHAL (1977)	**Freudenthal, Hans:** *Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe.* Der Mathematikunterricht, Jahrgang 23, Heft 3, Juli 1977, S. 46-73
FREUDENTHAL (1983)	**Freudenthal, Hans:** *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983
FRIEBE (2001)	**Friebe, Kristine:** *Dynamische Geometrie mit dem elektronischen Werkzeug Euklid DynaGeo.* In: Computer und Unterricht, 44, 2001, S. 20-23
FRÖHLICH (2003)	**Fröhlich, Werner D.:** *Wörterbuch Psychologie.* Digitale Bibliothek, Band 83, Directmedia, Berlin, 2003
FÜHRER (1985a)	**Führer, Lutz:** *„Funktionales Denken“: Bewegtes fassen – das Gefaßte bewegen.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 12-13
FÜHRER (1985b)	**Führer, Lutz:** *Ein wenig schneller ...* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 14
FÜHRER (1997)	**Führer, Lutz:** *Pädagogik des Mathematikunterrichts – Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1997
GALLIN/RUF (1998)	**Gallin, Peter; Ruf, Urs:** *Sprache und Mathematik in der Schule – Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Kallmeyer, Seelze, 1998
GARDNER (1989)	**Gardner, Howard:** *Dem Denken auf der Spur – Der Weg der Kognitionswissenschaft.* Klett-Cotta, Stuttgart, 1989
GAWLICK (2001a)	**Gawlick, Thomas:** *Exploration reell algebraischer Kurven mit DGS und CAS.* In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 69-76

GAWLICK (2001b) **Gawlick, Thomas:** *Zur mathematischen Modellierung des dynamischen Zeichenblatts.* In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 55-68

GAWLICK (2004) **Gawlick, Thomas:** *Hebebühne, Seilwinde, Radfahrer – Modelle in der Realschule.* In: Heinze, Aiso; Kuntze, Sebastian (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, Franzbecker, Hildesheim, 2004, S. 189-192

GERICKE (2003) **Gericke, Helmuth:** *Mathematik in Antike, Orient und Abendland.* Fourier Verlag, Wiesbaden, 2003[6]

GOLDBERG ET AL. (1992) **Goldberg, Paul; Lewis, Philip; O'Keefe, James:** *Dynamic Representation and the Development of a Process Understanding of Function.* In: Dubinsky, Ed; Harel, Guershon (Eds.): The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 25, 1992, p. 235-260

GRABNER ET AL. (2003) **Grabner, Roland H.; Stern, Elsbeth; Neubauer, Aljoscha C.:** *When intelligence losses its impact: neural efficiency during reasoning in a familiar area.* In: International Journal of Psychophysiology, 49 (2003), p. 89-98

GRAUMANN ET AL. (1996) **Graumann, Günter; Hölzl, Reinhard; Krainer, Konrad; Neubrand, Michael; Struve, Horst:** *Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 17 (1996), Heft 3/4, S. 55-68

GULLASCH (1973) **Gullasch, Reinhard:** *Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 1973[2]

HAAPASALO (2000) **Haapasalo, Lenni:** *Zusammenhang zwischen zwei Typen mathematischen Wissens.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000, S. 241-244

HÄCKER/STAPF (1998) **Häcker, Hartmut; Stapf, Kurt H.:** *Dorsch Psychologisches Wörterbuch.* Verlag Hans Huber, Bern, 1998[13]

HARTMANN (2000) **Hartmann, Jens:** *Räumlich geometrisches Training und Transfer auf Leistungen im Geometrieunterricht der Grundschule.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000, S. 245-248

HEFENDEHL-HEBEKER (1997) **Hefendehl-Hebeker, Lisa:** *Geometrie-Unterricht als Chance für die Mathematik.* In: Mathematica didactica, 20 (1997), Heft 2, S. 79-93

HEINTZ (2000) **Heintz, Gabi:** *WWW-basierte interaktive Arbeitsblätter für den Geometrieunterricht*. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000, S. 273-277

HEINTZ (2003) **Heintz, Gabi:** *Einsatz von DGS am Beispiel von Cinderella*. In: Bender, Herget, Weigand, Weth (Hrsg.): Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 2002 in Soest, Franzbecker, Hildesheim, 2003, S. 71-78

HELMHOLZ (1981) **Helmholz, Claus Peter:** *Funktionale Betrachtungen und Entwicklung fachspezifischen Könnens im Mathematikunterricht der Klassen 6 bis 10.* Dissertation zur Promotion A, Karl-Marx-Universität Leipzig, Sektion Mathematik, Methodik des Mathematikunterrichts, 1981

HENRICI/TREUTLEIN (1891) **Henrici, Julius; Treutlein, Peter:** *Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbildung ohne Maßänderung.* B. G. Teubner, Leipzig, 1891[2]

HENRICI/TREUTLEIN (1897) **Henrici, Julius; Treutlein, Peter:** *Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Zweiter Teil. Abbildung in verändertem Maße. Berechnung der Größen der Ebenen Geometrie.* B. G. Teubner, Leipzig, 1897[2]

HENRICI/TREUTLEIN (1901)	**Henrici, Julius; Treutlein, Peter:** *Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Dritter Teil. Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildungen von einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte).* B. G. Teubner, Leipzig, 1901[2]
HENSCHEL/PRUZINA (1995)	**Henschel, Thorsten; Pruzina, Manfred:** *Graphikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht – Ergebnisse aus einem Schulversuch (in Klasse 9/10).* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 16 (1995), Heft 3/4, S. 193-232
HENSE ET AL. (2001)	**Hense, Jan; Mandl, Heinz; Gräsel, Cornelia:** *Problemorientiertes Lernen – Warum der Unterricht mit neuen Medien mehr sein muss als Unterricht mit neuen Medien.* In: Computer und Unterricht 44, (2001), S. 6-11
HERRMANN (2004)	**Herrmann, Ulrich:** *Gehirnforschung und die Pädagogik des Lehrens und Lernens: Auf dem Weg zu einer „Neurodidaktik"?* In: Zeitschrift für Pädagogik, 50 (2004), Heft 4, S. 471-474
HEUGL (1999)	**Heugl, Helmut:** *Computeralgebrasysteme – das gelobte Land des Mathematikunterrichts?* In: Kadunz et al. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien: Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 28.9.-2.10.1998, Teubner, Stuttgart Leipzig, 1999, S. 127-146
HEUGL ET AL. (1996)	**Heugl, H. & Klinger, W. & Lechner, J.:** *Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen (Ein Didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt).* Addison-Wesley, Bonn, 1996
HEYMANN (1996)	**Heymann, Hans Werner:** *Allgemeinbildung und Mathematik.* Studien zur Schulpädagogik und Didaktik Band 13, Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 1996
HEYMANN (2000)	**Heymann, Hans Werner:** *Was ist eine zeitgemäße mathematische Allgemeinbildung?* In: Mathematische Semesterberichte, Band 47, Heft 2, Dezember 2000, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2000
HILBERT (1999)	**Hilbert, David:** *Grundlagen der Geometrie.* B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1999[14]
HINKELMANN (1999)	**Hinkelmann, Heinz-Dieter:** *Experimente zur Mechanik mit dem CBR.* Bk-Teachware, Hagenberg (Austria), 1999
HOLLAND (2001)	**Holland, Gerhard:** *Geometrie in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001[2]
HÖLZL (1994)	**Hölzl, Reinhard:** *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie – Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer.* Deutscher Studien Verlag, Weinheim, 1994
HÖLZL (1999a)	**Hölzl, Reinhard:** *Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software.* Wißner-Verlag, Augsburg, 1999
HÖLZL (1999b)	**Hölzl, Reinhard:** *Aspekte des heuristischen Einsatzes von Dynamischer Geometriesoftware.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 47, Heft 4, August 2001, S. 52-60
HÜTHER (2004)	**Hüther, Gerald:** *Die Bedeutung sozialer Erfahrungen für die Strukturierung des menschlichen Gehirns.* In: Zeitschrift für Pädagogik, 50 (2004), Heft 4, S. 487-495
ISB (2001)	**Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung (Hrsg.):** *Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur – Handreichung für den Mathematikunterricht.* München, 2001
JAHNKE (1999)	**Jahnke, Hans Niels (Hrsg.):** *Geschichte der Analysis.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1999
JANVIER (1978)	**Janvier, Claude:** *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations – studies and teaching experiments.* Thesis submitted to the University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy, Nottingham, 1978

JANVIER (1987) **Janvier, Claude (Hrsg.):** *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey, 1987

JAWORSKI ET AL. (1999) **Jaworski, Barbara; Wood, Terry; Dawson, Sandy:** *Mathematics Teacher Education – Critical International Perspectives*. Studies in Mathematics Education Series: 12, Falmer Press, London, Philadelphia, 1999

JUNDT (1985) **Jundt, Werner:** *Sechs Beispiele zur experimentellen Geometrie.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 37-41

KANDLER (2004) **Kandler, Maya:** *Interessefördernde Aspekte beim Lernen mit Lernsoftware aus der Sicht von Schülerinnen und Schülern.* In: Zeitschrift für Pädagogik, 50 (2004), Heft 4, S. 471-474

KAULBACH (1965) **Kaulbach, Friedrich:** *Der philosophische Begriff der Bewegung. Studien zu Aristoteles, Leibniz und Kant.* (Münstersche Forschungen 16), Böhlau Verlag, Köln, 1965

KAUTSCHITSCH (1994) **Kautschitsch, Hermann:** *„Neue" Anschaulichkeit durch „neue" Medien.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1999, Heft 3, S. 79-82

KAUTSCHITSCH (1999) **Kautschitsch, Hermann:** *Reaktivierung funktionalen Denkens durch computerunterstützte experimentelle Mathematik.* In: Kadunz et al. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien: Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 28.9.-2.10.1998, Teubner, Stuttgart Leipzig, 1999, S. 175-182

KAUTSCHITSCH/METZLER (1982) **Kautschitsch, Hermann; Metzler, Wolfgang (Hrsg.):** *Mathematische Anschauung und Mathematikfilm.* 2. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt vom 5. bis 9. Juli 1982, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982

KAUTSCHITSCH/METZLER (1983) **Kautschitsch, Hermann; Metzler, Wolfgang (Hrsg.):** *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun.* 3. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt vom 11. bis 16. Juli 1983, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, B. G. Teubner, Stuttgart, 1983

KAUTSCHITSCH/METZLER (1984) **Kautschitsch, Hermann; Metzler, Wolfgang (Hrsg.):** *Anschauung und mathematische Modelle.* 4. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt vom 16. bis 21. Juli 1984, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, B. G. Teubner, Stuttgart, 1984

KAUTSCHITSCH/METZLER (1989) **Kautschitsch, Hermann; Metzler, Wolfgang (Hrsg.):** *Anschauliches Beweisen.* 7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, B. G. Teubner, Stuttgart, 1989

KERST (1916) **Kerst, B.:** *Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben.* B. G. Teubner Verlag, Leipzig und Berlin, 1916

KIRSCHE (1992) **Kirsche, Peter:** *Kongruenzabbildungen im Geometrieunterricht der Primarstufe.* Franzbecker, Hildesheim, 1992

KLEIN (1968) **Klein, Felix:** *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus – Erster Band.* Nachdruck der vierten Auflage von 1933, Springer-Verlag, Berlin, 1968

KLEINE (2004a) **Kleine, Michael:** *Wie lassen sich mathematische Kompetenzstufen inhaltlich beschreiben?* In: Heinze, Aiso; Kuntze, Sebastian (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, Franzbecker, Hildesheim, 2004, S. 293-296

KLEINE (2004b) **Kleine, Michael:** *Quantitative Erfassung von mathematischen Leistungsverläufen in der Sekundarstufe I – Methodische Grundlagen, Testkonstruktion und Testentwicklung.* Franzbecker, Hildesheim, 2004

KLOTZEK (2001) **Klotzek, Benno:** *Euklidische und nichteuklidische Elementargeometrie.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2001

KLUWE (1983) **Kluwe, Rainer H.:** *Beweglichkeit des Denkens.* In: Montada et al. (Hrsg.): Kognition und Handeln, Klett-Cotta, Stuttgart, 1983, S. 33-52

KÖHLER (1963)	**Köhler, Wolfgang:** *Intelligenzprüfungen an Menschenaffen.* Springer, Heidelberg, 1963[2]
KORTENKAMP (1999)	**Kortenkamp, Ulrich:** *Foundations of Dynamic Geometry PhD.* Dissertation ETH, Zürich, 1999
KORTENKAMP (2000)	**Kortenkamp, Ulrich:** *Kontinuität in Dynamischer Geometrie.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000, S. 358-361
KOSSLYN (1994)	**Kosslyn, Stephen M.:** *Image and Brain – The Resolution of the Imagery Debate.* A Bradford Book, The MIT Press, Cambridge (Massachusetts), London (England), 1994
KRAINER ET AL. (2002)	**Krainer, Konrad; Dörfler, Willibald; Jungwirth, Helga; Kühnelt, Helmut; Rauch, Franz; Stern, Thomas:** *Lernen im Aufbruch: Mathematik und Naturwissenschaften – Pilotprojekt IMST2.* Innovationen im Mathematik- und Naturwissenschaftsunterricht, Band 1, Studienverlag, Innsbruck, 2002
KRAPP/WEIDENMANN (2001)	**Krapp, Andreas; Weidenmann, Bernd (Hrsg.):** *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch.* Beltz Psychologie Verlags Union, Weinheim, 2001[4]
KRATZ (1993)	**Kratz, Johannes:** *Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht.* Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, 1993
KRATZ (1998)	**Kratz, Johannes:** *Kinematische Betrachtungen in der Elementargeometrie.* In: Mathematik in der Schule 36 (1998), Heft 11, S. 594-605
KRAZER (1915)	**Kratzer, Adolf:** *Zur Geschichte der graphischen Darstellung von Funktionen.* In: A. Gutzmer (Hrsg.): Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 24. Band, B. G. Teubner, Leipzig, 1915
KRÜGER (2000a)	**Krüger, Katja:** *Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform.* In: Mathematische Semesterberichte, Band 47, Heft 2, Dezember 2000, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2000
KRÜGER (2000b)	**Krüger, Katja:** *Erziehung zum funktionalen Denken – Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips.* Dissertation vorgelegt am Fachbereich Mathematik der J. W. Goethe-Universität Frankfurt im Juli 1999, Logos-Verlag, Berlin, 2000
KULTUSMINISTERIUM BW (2004)	**Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.):** *Bildungsplan für das Gymnasium der Normalform.* Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, Stuttgart, 2004
KULTUSMINISTERIUM BY (1991)	**Bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.):** *Lehrplan für das bayerische Gymnasium. Fachlehrplan für Mathematik.* In: Amtsblatt des Bayerischen Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst, Sondernummer 8, Jahrgang 1991, München, S. 1189-1254
KULTUSMINISTERIUM BY (2003)	**Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.):** *Lehrplan für das Gymnasium in Bayern.* Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus, München, 2003
KUSSEROW (1985)	**Kusserow, Wilhelm:** *Los von Euklid! – Eine Raumlehre für den Arbeitsunterricht, durchgehend auf Bewegung gegründet.* Dürr'sche Buchhandlung, Leipzig, 1928. Nachdruck als Band 5 der Reihe Klassiker der Mathematikdidaktik, Ferdinand Schöningh, Paderborn, 1985
LABORDE, C. (2001)	**Laborde, Colette:** *Zwischen Zeichnung und Theorie – Geometrielernen mit DGS.* In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 145-160

LABORDE, J.-M. (2001)	**Laborde, Jean-Marie:** *Zur Begründung der dynamischen Geometrie.* In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 161-172
LEHMANN (1992)	**Lehmann, Eberhard:** *Einführung in Parameterdarstellungen in der Sek. I.* In: Praxis der Mathematik, 34 (1992), Heft 4, S. 173-178
LIETZMANN (1959)	**Lietzmann, Walter:** *Experimentelle Geometrie.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1959
LÖDING (2001)	**Löding, Wolfgang:** *Ein geometrisches Optimierungsproblem – Blick auf einen Problemlöseprozess mit vielen Vernetzungen.* In: Kaiser, Gabriele (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 396-399
LOGIE/GILHOOLY (1998)	**Logie, Robert H.; Gilhooly, Kenneth J. (Eds.):** *Working Memory and Thinking.* Psychology Press, Hove, East Sussex, 1998
LOMPSCHER ET AL. (1976)	**Lompscher, Joachim; Hasdorf, Walter; Zimmer, Irmtraud; Köster, Egon:** *Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit.* Volk und Wissen, Berlin, 1976
LUDWIG (1999)	**Ludwig, Matthias:** *Ein Schuljahr mit EUKLID – Arbeiten mit dynamischer Geometriesoftware in Klasse 9.* In: Mathematik in der Schule 37 (1999), Heft 5, S. 297-304
MAIER (1999a)	**Maier, Peter Herbert:** *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Auer Verlag, Donauwörth, 1999
MAIER (1999b)	**Maier, Peter Herbert:** *Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts*. Der Mathematikunterricht, Jahrgang 45, Heft 3, 1999, S. 4-18
MAIER/BECK (2001)	**Maier, Hermann; Beck, Christian:** *Zur Theoriebildung in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 22 (2001), Heft 1, S. 29-50
MAIER/SCHWEIGER (2001)	**Maier, Hermann; Schweiger, Fritz:** *Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* öbv & hpt Verlagsgesellschaft, Wien, 1999
MALLE (1993)	**Malle, Günther:** *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Vieweg, Wiesbaden, 1993
MALLE (2000a)	**Malle, Günther:** *Funktionen untersuchen – ein durchgängiges Thema.* In: Mathematik lehren, Heft 103, Dezember 2000, S. 4-7
MALLE (2000b)	**Malle, Günther:** *Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation.* In: Mathematik lehren, Heft 103, Dezember 2000, S. 8-11
MASON ET AL. (1992)	**Mason, John; Burton, Leone; Stacey, Kaye:** *Hexeneinmaleins: kreativ mathematisch denken.* Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1992[3]
MAYER (1978)	**Mayer, Richard E.:** *Effects of Meaningfulness on the Representation of Knowledge and the Process of Inference for Mathematical Problem Solving*. In: R. Revlin, R. E. Mayer (Hrsg.): Human Reasoning. V. H. Winston & Sons, Washington D. C., 1978, p. 207-241
MAYRING (2000)	**Mayring, Philipp:** *Qualitative Inhaltsanalyse – Grundlagen und Techniken.* Deutscher Studien Verlag, Weinheim, 2000[7]
MEVARECH/STERN (1997)	**Mevarech, Zemira R.; Stern, Elsbeth:** *Interaction between Knowledge and Context on Understanding Abstract Mathematical Concepts.* In: Journal of Experimental Child Psychology, 65 (1997), p. 68-95
MITSCHKA ET AL. (1998)	**Mitschka, Arno; Strehl, Reinhard; Hollmann, Erwin:** *Einführung in die Geometrie.* Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 1998
MONK (1992)	**Monk, Steve:** *Students' Understanding of a Function Given by a Physical Model.* In: Dubinsky, Ed; Harel, Guershon (Eds.): The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 25, 1992, p. 175-193
MÖSSNER (2000)	**Mössner, André:** *Funktionen dynamisch untersuchen.* In: Mathematik lehren, Heft 103, Dezember 2000, S. 22 und S. 47-50

MÜLLER (1956) **Müller, Hans Robert:** *Sphärische Kinematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962

MÜLLER-PHILIPP (1994) **Müller-Philipp, Susanne:** *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht – Eine Analyse für die Sekundarstufe I unter Berücksichtigung lernpsychologischer Erkenntnisse und der Einbeziehung des Computers als Lernhilfe.* Waxmann, Münster, New York, 1994

NESHER/KILPATRICK (1990) **Nesher, Pearla; Kilpatrick, Jeremy (Eds.):** *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990

NEVILLE (1929) **Neville, E. H. (Ed.):** *The Teaching of Geometry in Schools.* A report prepared for the Mathematical Association. G. Bell & Sons, London, 1929[3]

NEWTON (1670/71) **Newton, Isaac :** *De methodis serierum et fluxionum. In: D. T. Whiteside: The Mathematical Papers of Isaac Newton, Volume III, 1670-1673,* Cambridge at the University Press, Cambridge, 1969, p. 32-353

NEWTON (1963) **Newton, Isaac:** *Mathematische Prinzipien der Naturlehre – Philosophiae naturalis principia mathematica <dt.>,* Wolfers, J. P. (Hrsg.), Unveränderter fotomechanischer Nachdruck der Ausgabe Berlin 1872, Wiss. Buchges., Darmstadt, 1963

OSSIMITZ (2000) **Ossimitz, Günther:** *Entwicklung systemischen Denkens. Theoretische Konzepte und empirische Untersuchungen.* Profil Verlag, München, 2000

OSSIMITZ (2001) **Ossimitz, Günther:** *Entwicklung systemischen Denkens. Theoretische Konzepte und empirische Untersuchungen.* In: Kaiser, Gabriele (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 468-471

OSSIMITZ (2003) **Ossimitz, Günther:** *Zeitliche Dynamik verstehen.* In: Mathematik lehren, Heft 120, Oktober 2003, S. 60-63

PERELS ET AL. (2002) **Perels, Franziska; Schmitz, Bernhard; Bruder, Regina:** *Lernstrategien zur Förderung von Problemlösekompetenzen.* (Vorabdruck), 2002

PIAGET (1967) **Piaget, Jean:** *Die Genese der Zahl beim Kind.* In: Piaget, Jean; Resag, Kurt; Fricke, Arnold; van Hiele, Pierre Marie; Odenbach, Karl: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Georg Westermann Verlag, Braunschweig, 1967[3]

PIAGET (1972a) **Piaget, Jean:** *Die Entwicklung des Erkennens I – Das Mathematische Denken.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1972

PIAGET (1972b) **Piaget, Jean:** *Psychologie der Intelligenz.* Walter-Verlag, Olten und Freiburg im Breisgau, 1972[5]

PIAGET (1973) **Piaget, Jean:** *Der Strukturalismus.* Walter-Verlag, Olten und Freiburg im Breisgau, 1973

PIAGET (1974) **Piaget, Jean:** *Abriss der genetischen Epistemologie.* Walter-Verlag, Olten und Freiburg im Breisgau, 1974

PIAGET (1975) **Piaget, Jean:** *Das Erwachen der Intelligenz beim Kinde.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1975

PIAGET ET AL. (1974) **Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel; Szeminska, Alina:** *Die natürliche Geometrie des Kindes.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1974

PIAGET ET AL. (1977) **Piaget, Jean; Grize, Jean-Blaise; Szeminska, Alina; Bang, Vinh:** *Epistemologie und Psychologie der Funktion.* Klett-Kotta, Stuttgart, 1977

PIAGET/INHELDER (1973a) **Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel:** *Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen.* Teil 1 und Teil 2, Pädagogischer Verlag Schwann, Düsseldorf, 1973

PIAGET/INHELDER (1973b) **Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel:** *Die Psychologie des Kindes.* Walter-Verlag, Olten und Freiburg im Breisgau, 1973[2]

PIAGET/INHELDER (1971) **Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel:** *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1971

PIAGET/SZEMINSKA (1969) — **Piaget, Jean; Szeminska, Alina:** *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1969[2]

PLANCK (1948) — **Planck, Max:** *Der Kausalbegriff in der Physik.* Johann Ambrosius Barth Verlag, Leipzig, 1948[4]

POINCARÉ (1914) — **Poincaré, Henri:** *Wissenschaft und Hypothese.* Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1914[3]

POLYA (1967) — **Polya, Georg:** *Vom Lösen mathematischer Aufgaben – Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, Band II.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1967

POLYA (1979) — **Polya, Georg:** *Vom Lösen mathematischer Aufgaben – Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, Band I.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1979[2]

POLYA (1980) — **Polya, Georg:** *Wie lehren wir Problemlösen?* In: Mathematiklehrer, Heft 1 (1980), S. 3-5

POLYA (1995) — **Polya, Georg:** *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme.* Francke Verlag, Tübingen, 1995[4]

POLYA (2002) — **Polya, Georg:** *The goals of mathematical education*. In: Mathematics Teaching, 181, December 2002, S. 6-7 und S. 42-44

POTTMANN (1994) — **Pottmann, Helmut:** *Kinematische Geometrie*. In: O. Giering, J. Hoschek (Hrsg.): Geometrie und ihre Anwendungen. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1994, S. 141-175

PRATT (2002) — **Pratt, Nick:** *Mathematics as thinking*. In: Mathematics Teaching, 181, December 2002, S. 34-37

PROKLUS DIADOCHUS (1945) — **Proklus Diadochus:** *Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“.* Aus dem Griechischen ins Deutsche übertragen und mit textkritischen Anmerkungen versehen von P. Leander Schönberger. Eingeleitet, mit Kommentaren und bibliographischen Nachweisen versehen und in der Gesamtedition besorgt von Max Steck. Herausgegeben im Namen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinisch Deutschen Akademie der Naturforscher von Emil Abderhalden, Halle (Saale), 1945

RALLE (2000) — **Ralle, Bernd:** *Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften im Kontext.* In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Jahrgang 53, 2000, Heft 3, Dümmler, Köln, S. 131

RASFELD (1999) — **Rasfeld, Peter:** *Untersuchung von Funktionen bei Anwendung linearer Transformationen mit Hilfe eines Computeralgebrasystems.* In: Mathematica didactica, 22 (1999), Heft 2, S. 79-109

ROST (2004) — **Rost, Jürgen:** *Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion.* Verlag Hans Huber, Bern, 2004[2]

ROTH (2002) — **Roth, Jürgen:** *Bewegliches Denken – ein wichtiges Prozessziel des Mathematikunterrichts.* In: Peschek, Werner (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, Franzbecker, Hildesheim, 2002, S. 423-426

ROTH (2003) — **Roth, Jürgen:** *Bewegliches Denken im Geometrieunterricht.* In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, Franzbecker, Hildesheim, 2003, S. 537-540

ROTH (2004) — **Roth, Jürgen:** *Wie kommt eine didaktische Idee in die Unterrichtswirklichkeit? – Ein Weg zur dynamischen Geometrie in Klasse 7.* In: Heinze, Aiso; Kuntze, Sebastian (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, Franzbecker, Hildesheim, 2004, S. 481-484

ROTH (2005a) — **Roth, Jürgen:** *Kurvenerzeugende Sehnen.* In: Mathematik lehren, Heft 130, Juni 2005, S. 8-10

ROTH (2005b) — **Roth, Jürgen:** *Figuren verändern – Funktionen verstehen.* Erscheint in: Graumann, Günter (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2005

ROTH (2005c)	**Roth, Jürgen:** *Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen?* Erscheint in: Kortenkamp, Ulrich; Weigand, Hans-Georg; Weth, Thomas (Hrsg.): Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 23. bis 25. September 2005 in Dillingen an der Donau, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2005
RUBINSTEIN (1968)	**Rubinstein, Sergej L.:** *Das Denken und die Wege seiner Erforschung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968
RUDERT (1919)	**Rudert, Gerhardt:** *Die Grundlagen des funktionalen Denkens in ihren Bedeutungen für den ersten mathematischen Unterricht.* Verlag von Otto Salle, Berlin, 1919
SCHEID (2001)	**Scheid, Harald:** *Elemente der Geometrie.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001[3]
SCHLAGENHECKEN (1998)	**Schlagenhecken, Friederike:** *Begriffsrepräsentationen im Gedächtnis – Interne Struktur von Basis- und Oberbegriffen.* Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden, 1998
SCHMIDT (2003)	**Schmidt, Günter:** *Aufgabenvariation im Schulbuch.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 49, Heft 5, Oktober 2003, S. 52-62
SCHOENFELD (1994)	**Schoenfeld, Alan H. (Ed.):** *Mathematical Thinking and Problem Solving.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, 1994
SCHORNSTEIN (1999)	**Schornstein, Johannes:** *Funktionen und ihre Änderungsrate in der Mittelstufe? Ein Beitrag zur Allgemeinbildung und eine Vorbereitung der Analysis.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1999, Franzbecker, Hildesheim, 1999, S. 449-452
SCHREIBER (1979)	**Schreiber, Alfred:** *Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik.* In: Mathematica didactica, 2 (1979), Heft 3, S. 165-171
SCHRÖDER (1982)	**Schröder, Eberhard M.:** *Ein neuer Winkelbegriff für die Elementargeometrie.* In: Praxis der Mathematik, 24 (1982), Heft 9, S. 257-269
SCHUMANN (1985)	**Schumann, Heinz:** *Umfangsgleiche Rechtecke – Ein Bericht über einen Unterrichtsversuch in Klasse 7.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 42-45
SCHUMANN (1991)	**Schumann, Heinz:** *Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer – Beiträge zur Didaktik des interaktiven Konstruierens*. J. B. Metzler, Stuttgart, B. G. Teubner, Stuttgart, 1991
SCHUMANN (1998)	**Schumann, Heinz:** *Dynamische Behandlung elementarer Funktionen.* In: Mathematik in der Schule, Jahrgang 36, (1998), Heft 3
SCHUMANN (1999)	**Schumann, Heinz:** *Methodenvariation mittels dynamischer Geometrie – exemplarisch.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1999, Heft 4, S. 121-132
SCHUMANN (2000a)	**Schumann, Heinz:** *Computerunterstützte Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben*. Franzbecker, Hildesheim, 2000
SCHUMANN (2000b)	**Schumann, Heinz:** *Computerisierte Behandlung funktionaler Beziehungen an geometrischen Figuren.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000, S. 575-578
SCHUMANN (2001)	**Schumann, Heinz:** *Die Behandlung von Funktionen einer reellen Variablen mit Methoden der dynamischen Geometrie*. In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 173-182
SCHUMANN/STRÄSSER (1992)	**Schumann, Heinz; Sträßer, Rudolf:** *Computerunterstützter Geometrieunterricht.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1992, Heft 5, S. 202-203

SCHÜPBACH (2000) **Schüpbach, Jürg:** *Nachdenken über das Lehren – Vorder- und Hintergründiges zur Didaktik im Schulalltag.* Haupt, Bern, Stuttgart, Wien, 2000[2]

SCHUPP (1992) **Schupp, Hans:** *Optimieren. Exremwertbestimmung im Mathematikunterricht.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992

SCHUPP (1998) **Schupp, Hans:** *Figuren und Abbildungen.* Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 1998

SCHUPP (2002) **Schupp, Hans:** *Themen mit Variation – Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 1998

SCHUPP (2003) **Schupp, Hans:** *Variatio delectat!* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 49, Heft 5, Oktober 2003, S. 4-12

SCHWANK (1996) **Schwank, Inge:** *Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendungen.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 28 (1996), Heft 6, S. 168-183

SCHWANK (2000) **Schwank, Inge:** *Zum funktionalen/prädikativen Denken und operativen Prinzip im Mathematikunterricht der Grundschule.* In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Franzbecker, Hildesheim, 2000; S. 579-582

SCHWANK (2003) **Schwank, Inge:** *Einführung in prädikatives und funktionales Denken.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 35 (2003), Heft 3, S. 70-78

SPITZER (2002) **Spitzer, Manfred:** *Lernen – Gehirnforschung und die Schule des Lebens.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2002

SPRENGEL (1969) **Sprengel, Heinrich:** *Anschaulicher Raumlehreunterricht.* A. W. Zwickfeldt Verlag, Hannover, 1969[2]

STEINECKE (1985) **Steinecke, Gudrun:** *Kreistangenten.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 46-48

STEINER (1967) **Steiner, Hans-Georg:** *Zur Behandlung des Funktionsbegriffs.* In: Heinrich Behnke und Hans-Georg Steiner (Hrsg.): Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1967, S. 139-173

STEINER (1969) **Steiner, Hans-Georg:** *Aus der Geschichte des Funktionsbegriffs.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 15, Heft 3, 1969, S. 13-39

STEINER (1973) **Steiner, Gerhard:** *Mathematik als Denkerziehung.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1973

STERN (2001) **Stern, Elsbeth:** *Intelligenz, Wissen, Transfer und der Umgang mit Zeichensystemen?* In: Stern, Elsbeth; Guthke, Jürgen (Hrsg.): Perspektiven der Intelligenzforschung. Pabst Science Publishers, Lengerich, 2001, S. 163-203

STERN (2004) **Stern, Elsbeth:** *Wie viel Hirn braucht die Schule?* In: Zeitschrift für Pädagogik, 50 (2004), Heft 4, S. 531-538

STRÄSSER (1994) **Sträßer, Rudolf:** *Didaktische Perspektiven auf Werkzeugsoftware im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1992, Heft 5, S. 197-201

STRUNZ (1968) **Strunz, Kurt:** *Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht.* Quelle & Meyer, Heidelberg, 1968

SWEENEY/STERMAN (2000) **Sweeney, Linda Booth; Sterman, John D.:** *Bathtub dynamics: initial results of a systems thinking inventory.* In: System Dynamics Review, Vol. 16 No. 4 (Winter 2000), S. 249-286

THIES (2001) **Thies, Silke:** *Diskrete Mathematik – Neue Impulse für den Mathematikunterricht.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 47, Heft 3, Juni 2001, S. 4-15

THIES (2002) **Thies, Silke:** *Zur Bedeutung diskreter Arbeitsweisen im Mathematikunterricht.* Dissertation, Universität Gießen, April 2002

TREUTLEIN (1911) **Treutlein, Peter:** *Der geometrische Anschauungsunterricht.* B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1911

ULM (2003)	**Ulm, Volker:** *Wechselspiele zwischen Figur und Zahl mit dynamischer Mathematik erleben.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 49, Heft 6, Dezember 2003, S. 38-49
URHAHNE ET AL. (2000)	**Urhahne, Detlef; Prenzel, Manfred; von Davier, Matthias; Senkbeil, Martin; Bleschke, Michael:** *Computereinsatz im naturwissenschaftlichen Unterricht – Ein Überblick über die pädagogisch-psychologischen Grundlagen und ihre Anwendung.* In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, Jg. 6, 2000, S. 157-186
VOLKERT (1986)	**Volkert, Klaus Thomas:** *Die Krise der Anschauung.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986
VOLKERT (1989)	**Volkert, Klaus:** *Die Bedeutung der Anschauung für die Mathematik – historisch und systematisch betrachtet.* In: Kautschitsch, Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. 7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, B. G. Teubner, Stuttgart, 1989, S. 9-31
VOLLRATH (1984)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1984
VOLLRATH (1986)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *Zur Beziehung zwischen Begriff und Problem in der Mathematik.* In: Journal für Mathematikdidaktik 7 (1986), S. 243-268
VOLLRATH (1989)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *Funktionales Denken.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 10 (1989), Heft 1, S. 3-37
VOLLRATH (1993)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *Paradoxien des Verstehens von Mathematik.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 14 (1993), Heft 1, S. 35-58
VOLLRATH (1999)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *An geometrischen Formeln Zusammenhänge erkennen.* In: Mathematik in der Schule 37 (1999), S. 70-75
VOLLRATH (2000)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *Argumentationen mit Winkeln.* In: Flade, L.; Herget, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS – Anregungen für die Sekundarstufen, Volk und Wissen, Berlin, 2000, S. 51-58
VOLLRATH (2001)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001
VOLLRATH (2003)	**Vollrath, Hans-Joachim:** *Algebra in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2003[2]
VOM HOFE (1992)	**vom Hofe, Rudolf:** *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 13 (1992), Heft 4, S. 345-364
VOM HOFE (1995)	**vom Hofe, Rudolf:** *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995
VOM HOFE (1996a)	**vom Hofe, Rudolf:** *Überlegungen zur Ausprägung funktionalen Denkens beim Einsatz interaktiver Analysissoftware – dargestellt an drei Beispielen zur Behandlung von Exponentialfunktionen mit dem CAS Theorist/MathPlus.* In: Horst Hischer & Michael Weiß (Hrsg.): Rechenfertigkeit und Begriffsbildung, Bericht über die 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 22. bis 25. September 1995 in Wolfenbüttel, Franzbecker, Hildesheim, 1996
VOM HOFE (1996b)	**vom Hofe, Rudolf:** *Neue Beweglichkeit beim Umgang mit Funktionen.* In: Mathematik lehren, Heft 78, Oktober 1996, S. 50-54
VOM HOFE (1998a)	**vom Hofe, Rudolf:** *Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 19 (1998), Heft 4, S. 257-291
VOM HOFE (1998b)	**vom Hofe, Rudolf:** *Computergestützte Lernumgebungen im Analysisunterricht – Fallstudien und Analysen.* Habilitationsschrift zur Erlangung der Venia Legendi an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Augsburg, Dezember 1998

VOM HOFE (1999) **vom Hofe, Rudolf:** *Explorativer Umgang mit Funktionen – Interaktion und Kommunikation in selbstorganisierten Arbeitsphasen.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 20 (1999), Heft 2/3, S. 186-221

VOM HOFE (2004) **vom Hofe, Rudolf:** *„Jetzt müssen wir das Ding noch stauchen!“ – Über den manipulierenden und reflektierenden Umgang mit Funktionen.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 50, Heft 6, Dezember 2004, S. 46-56

VOM HOFE ET AL. (2002) **vom Hofe, Rudolf; Pekrun, Reinhard; Kleine, Michael; Götz, Thomas:** *Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Konstruktion des Regensburger Mathematikleistungstests für 5. bis 10. Klassen.* In: Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft, November 2002, S. 83-100

VON GLASERSFELD (1991) **von Glasersfeld, Ernst (Ed.):** *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991

VON HARTEN ET AL. (1986) **von Harten, Gerd; Jahnke, Hans Niels; Mormann, Thomas; Otte, Michael; Seeger, Falk; Steinbring, Heinz; Stellmacher, Hubertus:** *Funktionsbegriff und funktionales Denken.* Aulis Verlag Deubner, Köln, 1986

WAGENSCHEIN (1969) **Wagenschein, Martin:** *Das Exemplarische Lehren als fächerverbindendes Prinzip.* In: Meyer, E. (Hrsg.): Exemplarisches Lehren – Exemplarisches Lernen. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1969

WAGENSCHEIN (1975) **Wagenschein, Martin:** *Verstehen lehren – Genetisch-Sokratisch-Exemplarisch.* Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 1975[5]

WAISMANN (1947) **Waismann, Friedrich:** *Einführung in das Mathematische Denken – Die Begriffsbildung der modernen Mathematik.* Gerold & Co., Wien, 1947[2]

WATSON/MASON (1998) **Watson, Anne; Mason, John:** *Questions and prompts for mathematical thinking.* Derby: Association of Teachers of Mathematics, Feb. 1998

WEIGAND (1988a) **Weigand, Hans-Georg:** *Zur Bedeutung von Zeitfunktionen für den Mathematikunterricht.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 9 (1988), Heft 1, S. 55-86

WEIGAND (1988b) **Weigand, Hans-Georg:** *Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 9 (1988), Heft 4, S. 287-325

WEIGAND (1993) **Weigand, Hans-Georg:** *Zur Didaktik des Folgenbegriffs.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993

WEIGAND (2001a) **Weigand, Hans-Georg:** *Zur Bedeutung didaktischer Prinzipien im Entschleunigungsprozess beim Lernen mit neuen Technologien.* In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, Hildesheim, 2001, S. 195-205

WEIGAND (2001b) **Weigand, Hans-Georg:** *Tabellenkalkulation – ein schrittweise erweiterbares didaktisches Werkzeug.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 47, Heft 3, Juni 2001, S. 16-27

WEIGAND (2004) **Weigand, Hans-Georg:** *Standards, Medien und Funktionen.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 50, Heft 6, Dezember 2004, S. 3-10

WEIGAND/FLACHSMEYER (1997) **Weigand, Hans-Georg; Flachsmeyer, Jürgen:** *Ein computerunterstützter Zugang zu Funktionen von zwei Veränderlichen.* In: Mathematica didactica, 20 (1997), Heft 2, S. 3-23

WEIGAND/WELLER (2001) **Weigand, Hans-Georg; Weller, Hubert:** *Changes of Working Styles in a Computer Algebra Environment – The Case of Functions*. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning, Kluwer, 6 (March 2001), S. 87-111

WEIGAND/WETH (2002) **Weigand, Hans-Georg; Weth, Thomas:** *Computer im Mathematikunterricht – Neue Wege zu alten Zielen.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2002

WEINACHT (1958) **Weinacht, Josef Hermann:** *Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1958

WERTHEIMER (1957) **Wertheimer, Max:** *Produktives Denken.* Verlag Waldemar Kramer, Frankfurt am Main, 1957

WETH (1993) **Weth, Thomas:** *Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht.* Franzbecker, Hildesheim, 1999

WETH (1999) **Weth, Thomas:** *Kreativität im Mathematikunterricht – Begriffsbildung als kreatives Tun.* Franzbecker, Hildesheim, 1999

WETH (2002) **Weth, Thomas:** *Der Computer als heuristisches Werkzeug im Geometrieunterricht.* In: Peschek, Werner (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, Franzbecker, Hildesheim, 2002, S. 511-514

WINTER (1972) **Winter, Heinrich:** *Über den Nutzen der Mengenlehre für den Arithmetikunterricht der Grundschule*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1972, Teil 2, Schroedel Verlag, Hannover, 1972, S. 161-192

WINTER (1985) **Winter, Heinrich:** *Neunerregel und Abakus – schieben, denken, rechnen*. In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 22-26

WINTER (1989) **Winter, Heinrich:** *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht.* Vieweg, Braunschweig, 1989

WINTER (1992) **Winter, Heinrich:** *Entdeckungen an Zykloiden – oder: Die Zykloide als Wiege der Analysis*. In: Mathematica didactica, 15 (1992), Heft 1, S. 105-128

WINTER (1996) **Winter, Heinrich:** *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung.* In: Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), Nr. 2, 1996, S. 35-41

WITTENBERG (1963) **Wittenberg, Alexander I.:** *Bildung und Mathematik – Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1963

WITTMANN (1985a) **Wittmann, Erich Christian:** *Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 7-11

WITTMANN (1985b) **Wittmann, Erich Christian:** *Operative Übungen für das 6./7. Schuljahr.* In: Mathematik lehren, Heft 11, August 1985, S. 7-11

WITTMANN (1987) **Wittmann, Erich Christian:** *Elementargeometrie und Wirklichkeit – Einführung in geometrisches Denken*. Vieweg, Braunschweig, 1987

WITTMANN (1992) **Wittmann, Erich Christian:** *Mathematikdidaktik als „design science“.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, 13 (1992), Heft 1, S. 55-70

WITTMANN/MÜLLER (1988) **Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard:** *Wann ist ein Beweis ein Beweis?* In: Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter, Cornelsen, Berlin, 1988

WUSSING (1979) **Wußing, Hans:** *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979

ZECH (1998) **Zech, Friedrich:** *Grundkurs Mathematikdidaktik.* Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 1998[9]

ZEITLER (2000) **Zeitler, Herbert:** *Maria Agnesi und die Versiera.* In: Praxis der Mathematik, 42 (2000), Heft 6, S. 241-244

ZIEGLER (1991) **Ziegler, Theodor:** *Was kann ein computerunterstützter Mathematikunterricht leisten?* In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Jahrgang 44, 1991, Heft 5, Dümmler, Köln, 1991, S. 300-302

ZIMBARDO (1995) **Zimbardo, Philip G.:** *Psychologie.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1995[6]