StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Bewegliches Denken im Geometrieunterricht der 7. Klasse

1 Inhaltsverzeichnis

2 Vorwort

Liebe Kollegin, lieber Kollege,

Sie haben sich dankenswerter Weise dazu bereit erklärt, mit Ihrer 7. Klasse an einem Unterrichtsversuch im Rahmen eines Forschungsvorhabens teilzunehmen. In diesem Vorhaben möchten wir untersuchen, inwiefern ein Unterricht, der auf *bewegliche Denkstrukturen* besonderen Wert legt, Unterrichtsinhalte besser vermitteln kann als ein Unterricht, der dies nicht tut.
Mir geht es nicht darum, neue Inhalte in den Geometrieunterricht einzubringen, sondern die bisherigen Inhalte etwas anders, nämlich mit einer bewussten Fokussierung auf *Bewegliches Denken* zu vermitteln.

Zu Ihrer Information folgt hier eine knappe Zusammenstellung dessen, was *Bewegliches Denken* ausmacht.

Die im Folgenden angegebenen Komponenten des Beweglichen Denkens sind nach aufsteigendem Schwierigkeitsgrad angeordnet und gehen, je nach Problemstellung, mehr oder weniger fließend ineinander über.

Komponenten des Beweglichen Denkens

- Hineinsehen & Argumentieren
- Erfassen & Analysieren
- Änderungsverhalten Realisieren

Hineinsehen & Argumentieren:

Fähigkeit, in ein scheinbar statisches Phänomen eine Bewegung hineinsehen und dadurch ganzheitlicher erfassen zu können. Darüber hinaus gehört zu dieser Komponente des Beweglichen Denkens aber auch, diese vorgestellte Bewegung zur Argumentation bei Problemlösungen benutzen zu können.

Erfassen & Analysieren:

Fähigkeit, eine reale bzw. vorgestellte / „hineingesehene“ Bewegung in ihren Auswirkungen auf die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren zu können. Dies beinhaltet die Fähigkeit, die Fokussierung auf bestimmte Aspekte wechseln und so jeweils relevante Veränderungen bzw. Invarianten in den Blick nehmen zu können.

Änderungsverhalten Realisieren:

Fähigkeit, das Änderungsverhalten (d. h. die Art und Weise der Änderung) qualitativ erfassen und beschreiben, sowie bei Problemlösungen ggf. (halb)quantitativ konkretisieren zu können.

Neben den von mir explizit ausgearbeiteten Unterrichtseinheiten, möchte ich Sie bitten, soweit es ihnen möglich und sinnvoll erscheint, bewegliche (dynamische) Aspekte bewusst in Ihren Unterricht zu integrieren. Wenn Sie das bei Ihnen eingeführte Schulbuch gerade unter diesem Gesichtspunkt betrachten, werden Sie sicher (mehr oder weniger häufig) entsprechende Aufgaben oder Anregungen finden.

Die folgenden Seiten sind Unterrichtsbausteine, die Sie bitte geeignet in Ihren Unterricht einbauen. Bei jedem Baustein ist angegeben, welche Voraussetzungen die Schülerinnen und Schüler dafür mitbringen müssen. Eine „Unterrichtsstunde“ umfasst in dieser Zusammenstellung 45 Minuten.

Wichtig: Im Ordner Unterrichtsmaterial auf der beiliegenden CD finden Sie dieses Skript als Word- und als PDF-Datei, sowie, in Ordnern für jede Stunde zusammengefasst, die Dateien, die Sie für die Unterrichtsstunde benötigen. Sie können diese Dateien direkt starten, indem Sie bei festgehaltener „Strg-Taste“ die Dateinamen in diesem Skript mit der linken Maustaste anklicken.

Gelegentlich muss vor dem Einsatz einer EUKLID DynaGeo-Datei eine der Einstellungen von DynaGeo verändert werden. Dies wird jeweils in den Beschreibungen der Unterrichtsbausteine angegeben. Wenn die Schüler selbst mit dem Programm arbeiten, sollten Sie diese Einstellungen zu Beginn der Arbeitszeit gemeinsam mit den Schülern durchführen.

StR Jürgen Roth Tel.: (0931) 888 5598
Didaktik der Mathematik E-Mail: mail@juergen-roth.de
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg Homepage: http://www.juergen-roth.de

Wenn Sie noch Fragen haben, dann schreiben Sie mir bitte eine E-Mail (mail@juergen-roth.de) oder rufen mich unter der Nummer (0931) 888 5598 an.

Ich habe noch eine Bitte an Sie:

Um dieses Projekt auswerten zu können, ist es notwendig zu Beginn und am Ende des Projektes einen Test durchzuführen. Dieser **Fragebogen** ist für **40 Minuten Arbeitszeit** konzipiert und soll (unabhängig vom Thema) die Fähigkeit zu Beweglichem Denken abprüfen.

- Um die Entwicklung der einzelnen Schüler nachvollziehen zu können (Zuordnung von Vor- und Nachtest zur Person) ist es unabdingbar, dass die Schüler jeweils ihren **Namen auf das Deckblatt** schreiben. Sollte es hier, entgegen aller Erwartungen, Schwierigkeiten geben, so kann ersatzweise auch die Nummer der Klassenliste angegeben werden. Diese Nummer muss dann allerdings bei Vor- und Nachtest übereinstimmen.
- Es ist sehr wichtig, dass Sie den Schülern die Wichtigkeit dieses Fragebogens erläutern und auch darauf achten, dass jeder den Fragebogen alleine bearbeitet (**Schulaufgabensituation**).
- Bitte fordern Sie die Schüler eindringlich dazu auf, nicht nur anzukreuzen, sondern in den **Kästen** zu jeder Aufgabe zu erklären, wie sie zu Ihrer Antwort gekommen sind. (Gilt nicht für den Online-Fragebogen.)
- Um die Schüler auf einen einheitlichen Stand zu bringen, möchte ich Sie bitten, vor der Durchführung des Tests mit Hilfe der **Folie** einige im Fragebogen verwendete Begriffe **kurz** zu klären oder zu wiederholen.
  Fragebogen_Folie_Vortest.doc Fragebogen_Folie_Endtest.doc

Die Testbögen (Vortest: Fragebogen_BD_Vortest.doc; Endtest: Fragebogen_BD_Endtest.doc) können Sie ausdrucken, kopieren und in Papierform an die Schüler verteilen.

Sie können aber auch einen fertigen Klassensatz einschließlich der Folie bei mir anfordern. Er geht Ihnen dann umgehend auf dem Postweg zu. Teilen Sie mir in diesem Fall bitte auch Ihre Postanschrift und die Schülerzahl Ihrer Klasse mit.

Falls Sie Zugang zu einem Computerraum haben, in dem jeder Schüler alleine an einem Rechner arbeiten kann, können Sie den Fragebogen auch online ausfüllen lassen. Sie finden ihn unter www.wuepro.de

→ Fragebögen → Bewegliches Denken (Vortest) bzw. Bewegliches Denken 2 (Nachtest).

Jeder Schüler soll dann in den Kasten „**K-ID:**" dasselbe schreiben, nämlich folgende 10 Zeichen:

K-ID: XYZ_7x_G_T

Ersetzen Sie dabei bitte XYZ durch die Kurzbezeichnung Ihrer Schule (3 Buchstaben), also z. B. VHH für Gymnasium Veitshöchheim, 7x durch die Klassenbezeichnung Ihrer Klasse, also z. B. 7b, und T durch V (Vortest) bzw. N (Nachtest).

Jeder Schüler muss in den zweiten Kasten „**ID2**:" dreistellig seine Nummer der Klassenliste schreiben, also statt UVW z. B. 002. Jeder Schüler schreibt also etwas anderes in den zweiten Kasten!

ID2: UVW

Ich Ihnen noch einmal für Ihre Bereitschaft zur Teilnahme am Projekt danken und freue mich auf eine gute Zusammenarbeit!

Jürgen Roth

3 Winkel an Geradenkreuzungen

Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	Erarbeitung von Scheitel- und Nebenwinkelsatz als „Erfahrungssätze“
Voraussetzungen:	Begriffe Gerade, Winkel, Winkelgröße
Unterrichtsformen:	a) Partnerarbeit b) Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	a) Partnerarbeit im Computerraum b) Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Scheitel_Nebenwinkel.geo (Scheitel_Nebenwinkel_Definitionsfigur.geo, Stufenwinkel_Definitionsfigur.geo; Nachbarwinkel_Definitionsfigur.geo; Wechselwinkel_Definitionsfigur.geo)
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen“ **abwählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **kein Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen“

Partnerarbeit am Computer:
Finde möglichst viele Beziehungen zwischen den Winkelgrößen der Winkel α , β , γ und δ .
Verändere dazu die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2 zueinander, indem du an den roten Punkten ziehst (vgl. Abb. 1).
Versuche diese Beziehungen zu erklären.

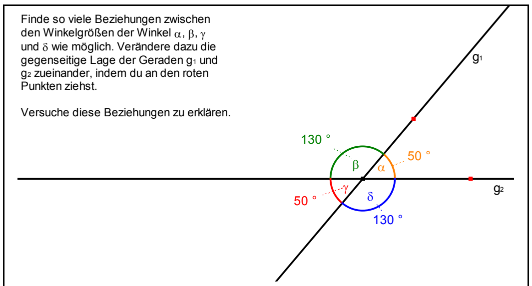
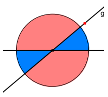
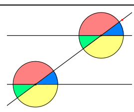
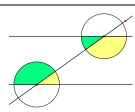
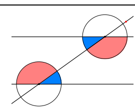


Abb. 1

Reflexion im Unterrichtsgespräch:
Vorstellen der Ergebnisse der Partnerarbeit. Werden nicht alle der unten aufgeführten Gesichtspunkte von den Schülern genannt, so geht der Lehrer darauf ein. Insbesondere sollte auch die Frage, wie sich eine Änderungen der Winkelgröße eines Winkels auf die Änderung der Winkelgröße eines anderen Winkels auswirkt, explizit angesprochen werden.

Gesichtspunkte:
- „Gegenüber liegende“ Winkel sind gleich groß.
  (Beg.: Ihre Schenkel liegen auf denselben Geraden. Sie haben dieselben Schenkel.)
- „Nebeneinander liegende“ Winkel ergänzen sich zu 180°.
  (Begründung: Je einer ihrer Schenkel liegt auf derselben Geraden und die Scheitel fallen zusammen. Diese Schenkel bilden also einen gestreckten Winkel.)
- Wenn ein Winkel verändert wird, dann ändert sich der „gegenüberliegende“ in gleicher Weise.
- Wird ein Winkel vergrößert (verkleinert), so verkleinern (vergrößern) sich die daneben liegenden Winkel in gleicher Weise.
- Wenn die beiden Geraden zusammenfallen, dann entarten zwei Winkel zum Nullwinkel und die beiden anderen sind gestreckte Winkel.

Hefteintrag: Notation des Scheitel- und Nebenwinkelsatzes mit entsprechendem Bild. („Scheitelwinkel sind gleich groß. Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.“)

 **Abb. 2**	 **Abb. 3**	 **Abb. 4**	 **Abb. 5**
Scheitel- und Nebenwinkel	Stufenwinkel	Nachbarwinkel	Wechselwinkel

In dieser Stunde werden auch die Begriffe Neben-, Scheitel-, Stufen-, Wechsel- und Nachbarwinkel an Hand von Bildern mit farbig eingezeichneten Winkeln eingeführt (vgl. Abb. 2 bis Abb. 5).

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Stufenwinkel und Wechselwinkel

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	Erarbeitung von Stufen-, Wechsel- und Nachbarwinkelsatz
Voraussetzungen:	Scheitel- und Nebenwinkelsatz
Unterrichtsformen:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Eratosthenes.geo; Parallelenkreuzung.geo

Hintergrundinformation zu Eratosthenes:

Eratosthenes wurde um 276 v. Chr. in Kyrene (heute Schahhad, Libyen) geboren. Er starb ca. 195 v. Chr. in Alexandria. Eratosthenes war einer der größten Wissenschaftler seiner Zeit. Er beschäftigte sich unter anderem mit Geographie, Astronomie und Mathematik, entwarf eine Erdkarte, stellte einen Sternenkatalog mit 675 Sternen zusammen und erfand ein Verfahren zum Auffinden von Primzahlen („Sieb des Eratosthenes“). Außerdem leitete er die berühmte Bibliothek von Alexandria.

Abb. 6

Einstieg:

Zu einer Zeit, in der allgemein noch die Meinung vorherrschte, die Erde sei eine Scheibe, war Eratosthenes bereits davon überzeugt, dass die Erde kugelförmig ist. Ihn interessierte nun die Größe dieser Kugel. Um die Länge des Erdumfangs zu bestimmen, ging er folgendermaßen vor: Er wusste, dass der Obelisk auf dem Marktplatz in Assuan (damals Syene) in Oberägypten am 21. Juni (nach heutiger Zeitrechnung) jeden Jahres zur Mittagszeit keinen Schatten wirft. Die Sonne steht also zu dieser Zeit genau senkrecht über diesem Obelisk. In Alexandria, das 5000 Stadien (ca. 1000 km) nördlich von Assuan liegt, stand auch ein Obelisk auf dem Marktplatz. Dieser warf zur gleichen Zeit einen deutlich erkennbaren Schatten. Eratosthenes hat den Winkel gemessen, den die Sonnenstrahlen mit dem Obelisken (der Vertikalen) in Alexandria einschlossen. Der Winkel betrug 1/50 des Vollwinkels. Wie konnte Eratosthenes damit den Erdumfang bestimmen? Welches Ergebnis erhielt er?

Erarbeitung:

Gemeinsam wird im Unterrichtsgespräch die Gesamtsituation erarbeitet und eine grobe Tafelskizze hergestellt. Die Skizze wird nach und nach mit den Schülern vervollständigt. Es wird (ggf. mit dem Hinweis, dass die Sonne sehr weit von der Erde entfernt ist) festgehalten, dass die Sonnenstrahlen (fast) parallel auf die Erde fallen.

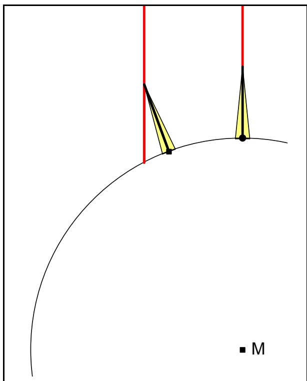


Abb. 7

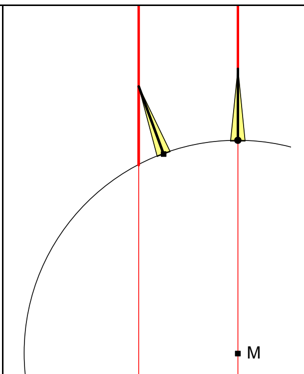


Abb. 8

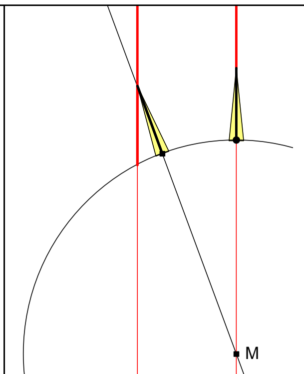


Abb. 9

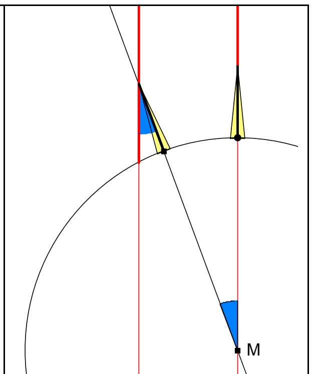


Abb. 10

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Wenn die Skizze soweit gediehen ist, wie in Abb. 10, kann man mit dem Hinweis auf eine sauberere Darstellung zur Datei Eratosthenes.geo wechseln. Mit dem oberen Schieber („Winkel“) lassen sich die blauen Winkelmarkierungen der beteiligten Winkel anzeigen.

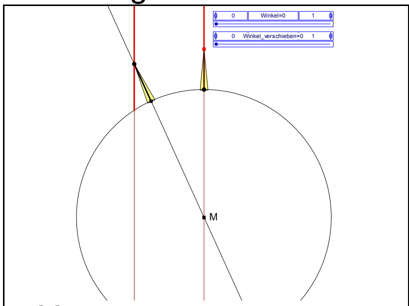


Abb. 11

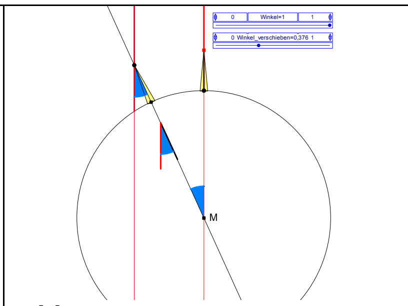


Abb. 12

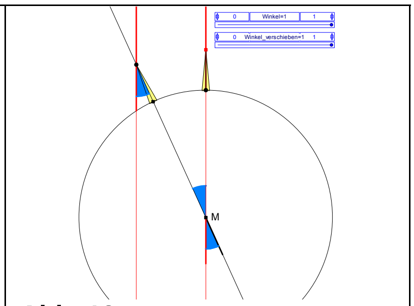


Abb. 13

Wichtige Impulsfragen für die Erarbeitung:

- Was hat ein Winkel (insbesondere auch der gemessene) mit der Frage nach dem Erdumfang zu tun?
  Es wird darauf hingearbeitet, dass mit dem Mittelpunktswinkel auch die Länge des zugehörigen Kreisbogens größer wird. Zum Vollwinkel gehört also der ganze Erdumfang. Damit gehört zu einem fünfzigstel des Vollwinkels auch ein fünfzigstel des Umfanges.
- Wie hängt der gesuchte Mittelpunktswinkel mit dem an der Spitze des Obelisken in Alexandria gemessenen Winkel zusammen?
  Antwort: Sie sind vermutlich beide gleich groß.
- Wie kann man sich das klarmachen? Wie kann man es begründen?
  Hier kommt kann man sehr anschaulich mit einer Bewegung argumentieren: Wenn man den Winkel am Obelisken entlang seines einen Schenkels verschiebt, so bleibt sein zweiter Schenkel immer parallel zu seiner Ausgangslage. Führt man diese Verschiebung mit Hilfe der Datei Eratosthenes.geo durch (unterer Schieber „Winkelverschiebung“), so wird dies offensichtlich. Schiebt man den Winkel so weit, dass sein zweiter Schenkel mit dem „Sonnenstrahl“ durch den anderen Obelisken zusammenfällt (vgl. Abb. 11 – Abb. 13), so erkennt man, dass die Scheitelwinkelkonfiguration entsteht.[1] Folglich sind die beiden Winkel gleich groß.

Zusammenfassung und Verallgemeinerung:

An Hand der Datei Parallelenkreuzung.geo (vgl. Abb. 14) wird noch einmal (Unterrichtsgespräch / Beamer!) vertieft, dass Stufen- und Wechselwinkel gleich groß sind. Zusätzlich wird erarbeitet, dass sich Nachbarwinkel zu 180° ergänzen. Dies geschieht jeweils mit Hilfe der Winkelverschiebung sowie dem Scheitel- bzw. Nebenwinkelsatz.

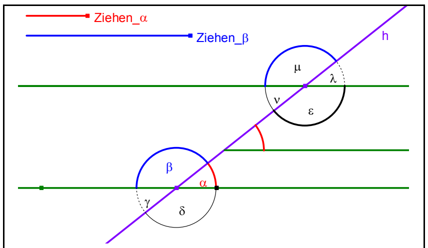


Abb. 14

Abschließend wird die Gerade g_2 am Punkt P verdreht, so dass sie nicht mehr parallel zu g_1 ist. Die offensichtliche Folge ist, dass Stufen- und Wechselwinkel nicht mehr gleich groß sind und Nachbarwinkel sich nicht mehr zu 180° ergänzen. → Es werden der Stufen-, Wechsel- und Nachbarwinkelsatz jeweils in der „Genau dann, wenn …“ - Form ins Heft geschrieben.

Hausaufgabe:

Übliche Aufgaben zum Winkelvergleich. Bitte lassen Sie die Schüler immer auch mit der Winkelverschiebung begründen (expliziter Arbeitsauftrag)!

[1] Eigentlich wird zusätzlich das Parallelenaxiom benötigt. Dies wird hier aber aus Vereinfachungsgründen nicht thematisiert. (Parallelenaxiom: Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden genau eine Parallele.)

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

4 Innenwinkelsumme im Dreieck

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	Erarbeitung des Innenwinkelsummensatzes für Dreiecke Einblick in die Bedeutung von Axiomen
Voraussetzungen:	• Scheitelwinkelsatz • Winkelverschiebung (kann hier evtl. auch erst erarbeitet werden) • Als Hausaufgabe auf diese Stunde hat jeder aus einem DIN A5-Blatt ein Papierdreieck ausgeschnitten und die Innenwinkel mit drei verschiedenen Farben gefärbt.
Unterrichtsformen:	Unterrichtsgespräch (Lehrervortrag)
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Innenwinkelsumme.geo; (Innenwinkelsumme_Motivation.geo); Aussenwinkelsatz.geo

Motivation:
Im Anschluss an die vorhergehende Stunde wird noch einmal die Frage aufgeworfen, wie man den Winkel an der Spitze des Obelisken überhaupt messen kann und ob man dazu wirklich hinaufklettern muss… → Zusammenhang zwischen der Winkelgröße zweier Winkel im Dreieck und dem dritten Winkel wird gesucht (vgl. Abb. 15). Oder: Wie groß sind alle drei Innenwinkel eines Dreiecks zusammen?[2]

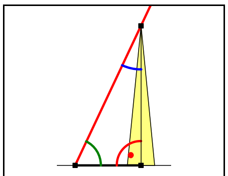


Abb. 15

Um zu ersten Vermutungen zu kommen, wie man die Summe aller Innenwinkelgrößen im Dreieck am besten messen kann. → Alle Winkel zusammenbringen und die Winkelsumme direkt messen (kleinerer Messfehler). → Winkel abreißen und zusammenlegen (vgl. Abb. 16). → Auftrag: **Sehr genau** mit Geodreieck messen. → Ca. aber nicht genau 180°. → Beweis ist nötig um sicher zu sein.

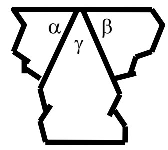


Abb. 16

Ein präformaler Beweis wird im Unterrichtsgespräch erarbeitet:

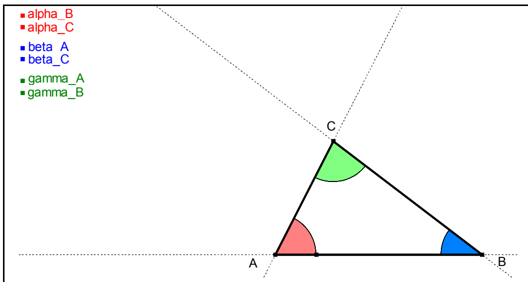


Abb. 17

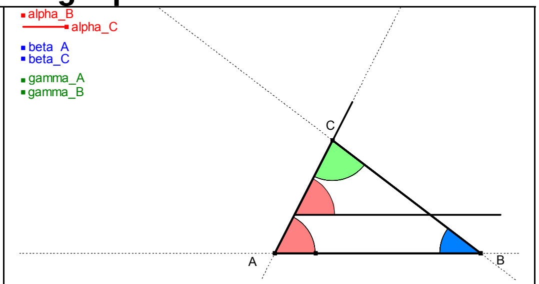


Abb. 18

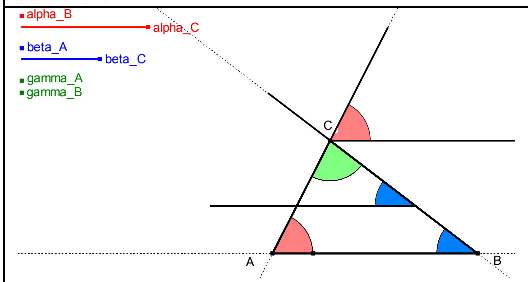


Abb. 19

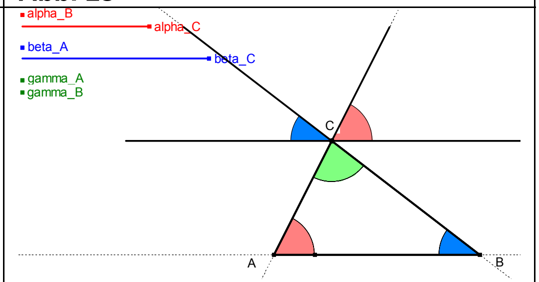


Abb. 20

Es wird erarbeitet, dass man offensichtlich die drei Winkel „zusammenbringen“ muss, um die Innenwinkelsumme zu erfassen. Die Schüler machen Vorschläge, wie das zu bewerkstelligen ist. Es wird nun mit der Datei Innenwinkelsumme.geo gearbeitet. Mit Hilfe der Winkelverschiebung (vgl. Abb. 17 bis Abb. 20) werden die drei Winkel „zueinander gebracht“. (Hierbei wird thematisiert, dass bei einem Winkel, den man ent-

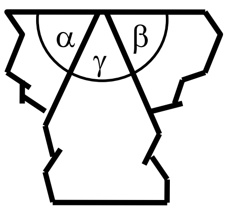
[2] Wenn Sie nicht in der vorgeschlagenen Reihenfolge arbeiten, können Sie auch direkt mit dem „Winkelabreißen“ beginnen.

lang eines seiner Schenkel verschiebt, offensichtlich der zweite Schenkel immer parallel zu seiner Ausgangslage bleibt.[3])

- In der so entstandenen Figur bilden die beiden zweiten Schenkel des blauen und des roten verschobenen Winkels zusammen gerade eine Parallele zu AB durch C[4], können also als Schenkel eines gestreckten Winkels aufgefasst werden (Winkelmaß: 180°)!
- D. h. aber, dass der blaue und der rote Winkel, zusammen mit dem fehlenden Winkel dazwischen, gerade eine Winkelsumme von 180° ergeben.
- Da die ersten Schenkel der beiden Winkel jeweils auf den Geraden AC bzw. BC liegen, (sie wurden ja nur auf ihnen entlang geschoben!) sind der grüne Winkel und der fehlende Winkel gerade Scheitelwinkel!
- Folglich ist der fehlende Winkel genau so groß wie der grüne Winkel (Scheitelwinkelsatz).
- Ergebnis: Der rote, der grüne und der blaue Winkel ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel. Ihre Winkelsumme beträgt folglich 180°.
- Damit ist der Innenwinkelsummensatz bewiesen!
- Nun wird vom Lehrer die Frage aufgeworfen, welche „Hilfsmittel“ / Voraussetzungen benutzt wurden, um den Satz zu beweisen. Es wird auf den Scheitelwinkelsatz und die „Tatsache“ hingearbeitet, dass beim Verschieben eines Winkels entlang seines einen Schenkels der zweite Schenkel parallel zu seiner Ausgangslage bleibt. Letzteres wird als „Winkelverschiebungsaxiom“ bezeichnet.

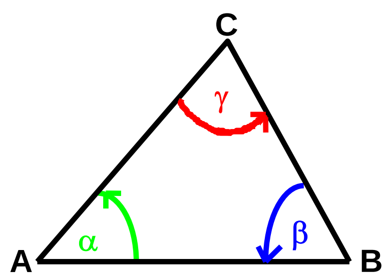
Die bisherigen Ergebnisse der Stunde werden an der Tafel festgehalten (vgl. Abb. 21). Dabei sollte darauf hingearbeitet werden, dass sowohl das Winkelverschiebungsaxiom als auch der Innenwinkelsummensatz von Schülern formuliert werden. Nachdem das Dreieck ΔABC gezeichnet ist, sollten die Schüler wieder dazu aufgefordert werden, den Inhalt des Satzes in Form einer Gleichung mit den Winkelgrößen α, β und γ zu formulieren.

Innenwinkelsumme im Dreieck



Winkelverschiebungsaxiom:
Wird ein Winkel in der Zeichenebene entlang eines Schenkels verschoben, so bleibt der andere Schenkel immer parallel zu seiner Ausgangslage.

Satz: Innenwinkelsumme im Dreieck
Bei einem Dreieck der Zeichenebene beträgt die Summe der Größen der drei Innenwinkel 180°.



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

Abb. 21

[3] Dazu wird während der Bewegung mehrfach innegehalten und die Frage nach der gegenseitigen Lage des zweiten Schenkels des verschobenen Winkels und seiner Ausgangslage (also der Dreiecksseite) gestellt. (Unterrichtsgespräch / Beamer)

[4] Eigentlich wird zusätzlich das Parallelenaxiom benötigt. Dies wird hier aber aus Vereinfachungsgründen nicht thematisiert. (Parallelenaxiom: Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden genau eine Parallele.)

Der Lehrer thematisiert anschließend in einem Lehrervortrag, warum es notwendig war, das Winkelverschiebungsaxiom aufzuschreiben. Dazu arbeitet er mit einem großen Wasserball, auf dem ein Kugeldreieck mit (mindestens) zwei rechten Winkeln aufgemalt oder mit farbigem Klebeband aufgeklebt ist. Ein aus Papier ausgeschnittenes rechtwinkliges Dreieck (steht für einen der Innenwinkel) wird entlang eines seiner Schenkel verschoben. Dabei ist deutlich zu erkennen, dass die Verlängerung des zweiten Schenkels seine eigene Ausgangslage schneidet. D. h. aber, dass auf der Kugel das Winkelverschiebungsaxiom nicht gilt! Die Folge ist (Nachmessen der Innenwinkel mit einem großen Geodreieck!), dass auch der Innenwinkelsummensatz für Dreiecke auf der Kugel nicht gültig ist!

Hausaufgabe:

Jeder Nebenwinkel eines Dreiecksinnenwinkels ist **Außenwinkel** des Dreiecks.

a) Wie viele Außenwinkel besitzt jedes Dreieck?
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Außenwinkel (Nebenwinkel eines Innenwinkels) und den beiden nicht anliegenden Innenwinkeln? Stelle eine Vermutung auf und „beweise“ sie analog zum Beweis der Innenwinkelsumme. Schreibe auf, wie du dabei vorgehst.
c) Formuliere den Außenwinkelsatz.

(Eine Besprechung erfolgt in der Folgestunde mit der Datei Aussenwinkelsatz.geo. Vgl. hierzu die Abb. 22.)

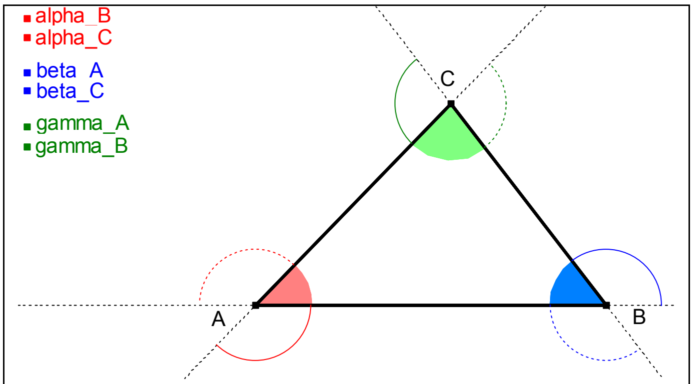


Abb. 22

Anmerkung:

Nach dieser Einheit sollten Sie gemäß Lehrplan die Innen- und Außenwinkel beim Viereck untersuchen und evtl. mit den Schülern die allgemeine Formel für die Innenwinkelsumme bei n-Ecken erarbeiten.

StR Jürgen Roth Tel.: (0931) 888 5598
Didaktik der Mathematik E-Mail: mail@juergen-roth.de
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg Homepage: http://www.juergen-roth.de

5 Achsensymmetrische Figuren und Eigenschaften der Achsenspiegelung

Unterrichtsstunden:	3
Inhaltsziele:	Erarbeitung der Eigenschaften • der Achsenspiegelung • von achsensymmetrischen Figuren • von achsensymmetrischen Dreiecken
Voraussetzungen:	-
Unterrichtsformen:	a) Unterrichtsgespräch b) Partnerarbeit (beim Entdecken der Eigenschaften von Achsen-symmetrischen Figuren)
Computereinsatz:	a) Lehrerrechner & Beamer b) Partnerarbeit im Computerraum
DynaGeo-Dateien:	Achsenklappung_Motivation_Schmetterling.geo Achsenspiegelung_Bewegung.geo P_Achsenpunkt_genau_dann_wenn_AP_gleich_A'P.geo Dreiecksungleichung.geo Achsenspiegelung_Bewegung_Erklaerung.geo Achsenklappung_Punkt_Perspektive_drehbar.geo schiefe_Achsenspiegelung_Dreieck.geo schiefe_Achsenspiegelung_Laengen.geo Dreieck_Figurenachse_Aufgabe.geo Quadrat_Figurenachsen_Klappung.geo

Motivation:
Die Schüler werden mit dem Schmetterling aus
Achsenklappung_Motivation_Schmetterling.geo
konfrontiert (vgl. Abb. 23). (Man sollte evtl. vorher die Bezeichnung Klappen am Schieberegler verstecken.)

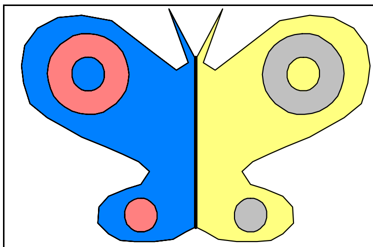


Abb. 23

Fragen:
- Was fällt euch an dem Schmetterling auf? Beschreibt möglichst genau seine Eigenschaften.
  - Kreise sind gleich weit von der Mitte(lachse) entfernt.
  - Der linke und der rechte Flügel haben dieselbe Form.
- Wie kann man diese Eigenschaften überprüfen?
  - In Papierform: Papier falten bzw. eine Seite ausschneiden und auf die andere legen.
  - Grundsätzlich: Eine Seite auf die andere klappen.

Erst nach diesem Teil des Unterrichtsgespräches wird das Klappen wirklich ausgeführt. Es empfiehlt sich auch, den linken Flügel etwas nach links zu verschieben und das Klappen dann zu wiederholen.

Frage:
- Könnt ihr die Bewegung des (Klapp-)Flügels beschreiben?
- Hilfsfrage: Wie bewegt sich ein Punkt des Flügels beim Klappen?

Der Lehrer sagt: „Figuren wie den Schmetterling, bei denen man eine Hälfte durch Klappen um eine Achse mit der anderen Hälfte zur Deckung bringen kann, nennt man achsensymmetrisch."

Arbeitsauftrag für die Partnerarbeit am Computer:
- Erzeugt mit der Datei Achsenspiegelung_Bewegung.geo (vgl. Abb. 24) unterschiedliche achsensymmetrische Figuren, indem ihr die Lage der Eckpunkte der linken Teilfigur verändert. (Achtung: Bitte legt keinen der Punkte der Figur genau auf die Achse, da sonst das Klappen nicht mehr funktioniert!)

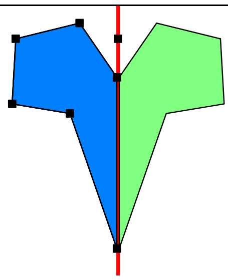


Abb. 24

- Bearbeitet dabei folgende Aufgaben:
  a) Beschreibt die Bewegung eines Punktes der Klappungsfigur möglichst genau. Schreibt eure Lösung in euer Heft!
  b) Findet möglichst viele Eigenschaften von achsensymmetrischen Figuren heraus und notiert sie in euer Heft.
  c) Versucht zu begründen, warum achsensymmetrische Figuren diese Eigenschaften besitzen.

Anmerkung: Im Folgenden werden die erwarteten Antworten aufgelistet. Von den angegebenen Begründungen werden nicht alle von den Schülern direkt erwartet. Einige müssen anschließend im Unterrichtsgespräch angesprochen und erarbeitet werden. Es ist aber sicher nicht notwendig, die Begründungen im Heft zu fixieren.

Erwartete Antworten:

- Der Punkt der Klappfigur bewegt sich auf einem Kreis(bogen).
- Jeder Punkt der einen Teilfigur (Original) ist genau so weit von der Achse entfernt wie der entsprechende Punkt der anderen Teilfigur (Bild). (**Begründung:** Die Bewegung erfolgt auf einem Kreis[bogen].)
- Jeder Punkt der Symmetrieachse ist Fixpunkt, d.h. er fällt mit seinem Bildpunkt zusammen. (**Begründung:** Beim Klappen um die Symmetrieachse wird ein Punkt auf der Achse nicht bewegt!)
- Alle entsprechenden Strecken im Original und im Bild sind gleich lang. (**Begründung:** Entsprechende Strecken werden durch die Klappung um die Achse zur Deckung gebracht.) (Es kann für manche Schüler hilfreich sein, dies mit im Menü „Messen & Rechnen“ nachzumessen. Dies ist jedoch keine Begründung!!)
- Jeder Punkt auf der Achse ist gleich weit von einem Punkt und seinem Bildpunkt entfernt.
  (**Begründung:** Achsenpunkte ändern ihre Lage beim Klappen um die Achse nicht, sie sind Fixpunkte! Beim Klappen um die Achse werden entsprechende Strecken zur Deckung gebracht. → Für alle Punkte P, die auf der Achse liegen gilt: $\overline{AP} = \overline{A'P}$.)

  Für einen Punkt der nicht auf der Achse liegt gilt diese Eigenschaft nicht!! Ein Punkt P ist also genau dann ein Achsenpunkt, wenn für alle Punkte A und ihre Bildpunkte A' gilt: $\overline{AP} = \overline{A'P}$.
  (**Begründung für die Rückrichtung:** Der Beweis wird anschaulich-argumentativ an Hand der Datei P_Achsenpunkt_genau_dann_wenn_AP_gleich_A'P.geo (vgl. Abb. 25) durchgeführt, aber sicher nicht formal aufgeschrieben!
  Liegt ein Punkt P nicht auf der Symmetrieachse, dann schneidet entweder [AP] oder [A'P] die Achse a im Punkt S. Wir betrachten den Fall $\{S\} = [PA'] \cap a$. Wegen $S \in a$ folgt $\overline{AS} = \overline{A'S}$. Also gilt: $\overline{PA'} = \overline{PS} + \overline{SA'} = \overline{PS} + \overline{SA} \overset{\text{Dreiecksungleichung im Dreieck } \Delta ASP}{>} \overline{PA}$.)

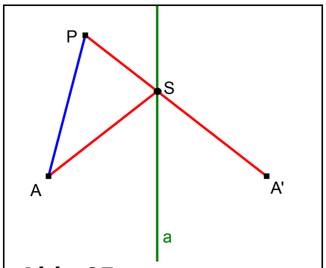


Abb. 25

  Anmerkungen:
  Die Dreiecksungleichung ist für Schüler zunächst sofort einsichtig. Trotzdem sollte man die Chance nutzen, hier eine Konstruktionsaufgabe als **Hausaufgabe** zu stellen:

  Hausaufgabe: Versuche ein Dreieck mit den Seitenlängen a = 2 cm, b = 4 cm und c = 7 cm zu konstruieren. Was stellst du fest? Woran liegt das? Begründe!

  (Die Hausaufgabenbesprechung erfolgt in der Folgestunde an Hand der Datei Dreiecksungleichung.geo (vgl. Abb. 26). Variieren Sie die Länge der Strecke a, b bzw. c!)

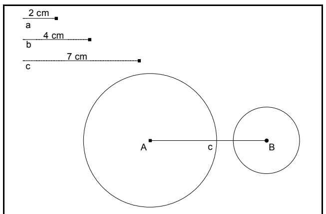


Abb. 26

- Alle entsprechenden Winkelgrößen sind in der Originalfigur und in der Bildfigur gleich groß.
  (**Begründung:** Da alle Strecken, Halbgeraden und Geraden vom Original durch Klappen mit den entsprechenden Bildstrecken, Bildhalbgeraden und Bildgeraden zur Deckung gebracht werden, sind auch die Winkelgrößen der von den entsprechenden „Linien“ begrenzen Winkel gleich groß.)

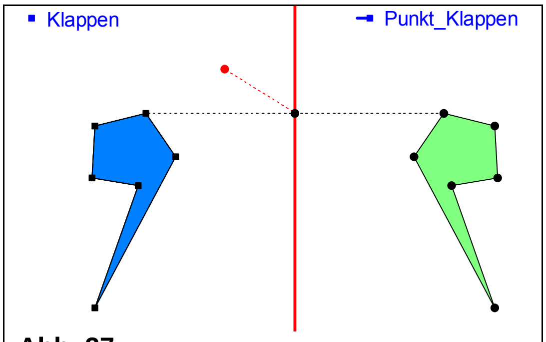


Abb. 27

Im Unterrichtsgespräch werden die Erkenntnisse der Schüler gesammelt und systematisiert. Zur Visualisierung insbesondere des Problems, wie sich ein Punkt beim Klappen bewegt, sollte man die Datei Achsenspiegelung_Bewegung_Erklaerung.geo verwenden (vgl. Abb. 27). Durch Ziehen am Regler „Punkt_Klappen“ wird die Bewegung eines Punktes dargestellt. Wenn einige Schüler dann immer noch Schwierigkeiten damit haben sollten, hier eine Kreisbewegung zu erkennen, dann lässt sich dieses perspektivische Problem mit der Datei Achsenklappung_Punkt_Perspektive_drehbar.geo (vgl. Abb. 28) lösen. Hier lässt sich die Figur um zwei Achsen drehen (Regler „Drehen_1“ und „Drehen_2“). Bei geeigneter Darstellung ist der Halbkreis unverzerrt zu erkennen.

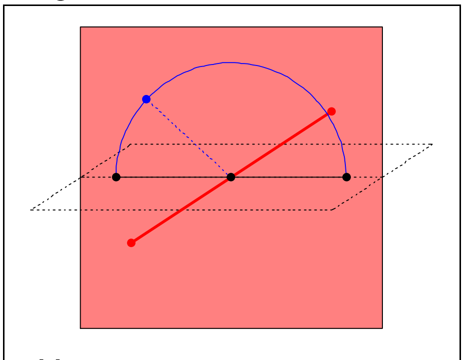


Abb. 28

An Hand der Datei schiefe_Achsenspiegelung_Dreieck.geo (vgl. Abb. 29) **wirft der Lehrer die Frage auf**, warum eigentlich bei einer Achsenklappung jede Verbindungsstrecke zwischen einem Punkt und seinem Bildpunkt senkrecht auf der Symmetrieachse steht. Mit dem Regler „Spiegelungswinkel“ lässt sich dieser Winkel stufenlos einstellen. Was ist; im Vergleich zu den anderen schiefen Achsenspiegelungen, das Besondere an einer Klappung, bei der ein rechter Winkel auftritt? An dieser Stelle sollen den Schülern Gelegenheit gegeben werden, selbst darüber nachzudenken. Unabhängig davon, ob einzelne Schüler die Besonderheit erkennen (oder vermuten) oder nicht, sollte mit Hilfe der Datei schiefe_Achsenspiegelung_Laengen.geo (vgl. Abb. 30) herausgearbeitet werden, dass nur bei einem rechten Schnittwinkel die Längen in Original und Bild gleich sind. Verändert man nämlich, indem man an P oder A zieht, den Schnittwinkel zwischen der Strecke [PP’] und der Symmetrieachse, so wird einer der beiden 90°-Winkel größer und der andere (Nebenwinkel!) entsprechend kleiner oder umgekehrt. Dies bedeutet aber, dass auch eine der Strecken [PQ] und [P’Q] länger und die andere entsprechend kürzer wird. Die Folge ist, dass nur dann, wenn die Verbindungsstrecke von Originalpunkt und Bildpunkt senkrecht auf der Achse steht, die Achsenklappung **längentreu** ist, d.h. Original- und Bildstrecke gleich lang sind. Das gleiche Argument gilt natürlich für die **Winkeltreue**!

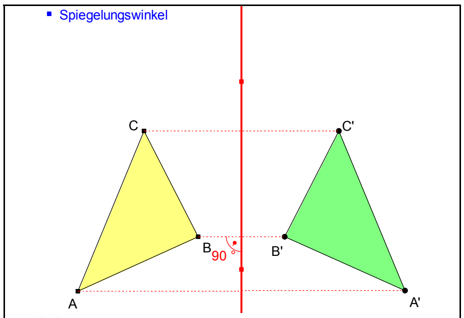


Abb. 29

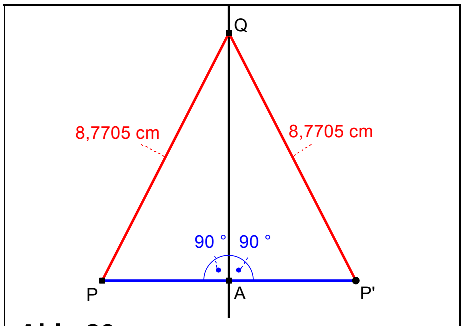


Abb. 30

Bemerkung: Die schiefe Achsenspiegelung besitzt folgende Invarianten: Geradentreue, Verhältnistreue, Parallelentreue, Inzidenztreue (Schnittpunkt bleibt Schnittpunkt).

Nach all diesen Bemühungen wird die Achsensymmetrie im Schulheft definiert:

Definition: Zwei Figuren (Punktmengen) der Zeichenebene sind zueinander achsensymmetrisch bzgl. der Achse (Gerade) a, wenn
- eine Figur durch Klappen um eine Gerade (man nennt sie Symmetrieachse) mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann und
- die Verbindungsstrecke entsprechender Punkte in Original- und Bildfigur senkrecht auf der Symmetrieachse steht.

Auch die entdeckten Eigenschaften werden im Schulheft notiert.

Danach arbeiten die Schüler wieder in Partnerarbeit an der Datei (vgl. Abb. 31)
- Dreieck_Figurenachse_Aufgabe.geo.

Die Schüler vertiefen hier ihr Verständnis der Achsenklappung, entdecken Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks (ohne es bereits hier zu benennen) und lernen implizit, was eine achsensymmetrische Figur und eine Figurenachse ist.

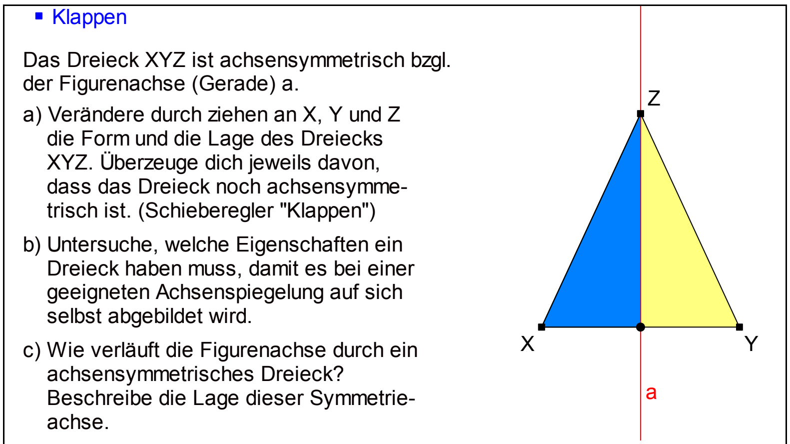


Abb. 31

Anschließend werden die Ergebnisse im Unterrichtsgespräch zusammengetragen. Zur Vertiefung wird die Datei
- Quadrat_Figurenachsen_Klappung.geo

(vgl. Abb. 32) herangezogen. Hier wird nach den Figurenachsen eines Quadrates gefragt. Wenn die Schüler die Figurenachsen als solche erkannt haben, können die entsprechenden Achsenklappungen mit Hilfe der Regler durchgeführt werden.

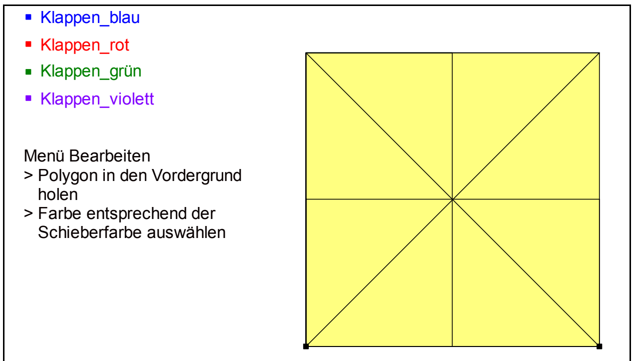


Abb. 32

Wichtig: Vor der Benutzung jedes Reglers müssen folgende drei Schritte durchgeführt werden:
1. Menü „Bearbeiten“ → „Polygon in den Vordergrund holen“ anklicken.
2. Mit der linken Maustaste oben links auf die gelbe Fläche klicken.
3. Im Menü die der Schieberfarbe entsprechende Farbe auswählen

Als **Hausaufgabe** sollen die Schüler jeweils alle Figurenachsen einzelner Figuren finden und ihre Entscheidungen mit Hilfe der Achsenklappung begründen. Unter den Figuren sollten sich insbesondere ein Rechteck, ein gleichseitiges Dreieck, ein beliebiges nicht gleichschenkliges Dreieck (Achtung: Begriffe hier nicht einführen!), eine Raute und ein Parallelogramm befinden.

Anmerkung:
Nach den hier beschriebenen Unterrichtsstunden sollten sich Einheiten anschließen, in denen aus den erkannten Eigenschaften der „Achsenklappung“ eine Reihe von Grundkonstruktionen im Sinne von Problemlösungen hergeleitet werden. Einige davon können auch als Hausaufgabe aufgegeben bzw. in Gruppenarbeit bearbeitet werden. Dies sind:
- Gegeben: Symmetrieachse und ein Punkt P der nicht auf der Symmetrieachse liegt. Erarbeitet wird, wie man den zu P gehörigen Bildpunkt P’ konstruieren kann. (Herleitung aus den Eigenschaften der „Achsenklappung“!)
- Konstruktion der Symmetrieachse zu zwei achsensymmetrischen Punkten. (Es wird erarbeitet, dass man damit auch beliebige Strecken halbieren und Mittelsenkrechten konstruieren kann.)
- Fällen des Lotes auf eine Gerade durch einen Punkt, der **nicht** auf der Gerade liegt.
- Errichten des Lotes auf einer Geraden in einem Punkt, der **auf** der Gerade liegt.
- Konstruktion der Mittelparallelen zu zwei parallelen Geraden.
- Konstruktion der Winkelhalbierenden (Hier sollte man auch darauf eingehen, welche Winkel sich nun konstruieren lassen. Stichwort: Mehrfache Winkelhalbierung)

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

6 Dreiecksgrundformen

Unterrichtsstunden:	ca. 8
Inhaltsziele:	Die Begriffe • rechtwinkliges, • gleichschenkliges, • spitzwinkliges, • stumpfwinkliges Dreieck sollen nicht als statische Prototypen dargeboten, sondern als Strukturen aufgebaut werden, die bereits im Ansatz beweglich sind. Auch im, von den Schülern erarbeiteten und im Unterrichtsgespräch fixierten, **(scheinbar) statischen „Merkbild“** sind eben diese beweglichen Vorstellungen kondensiert. Um hieraus das Wissen wieder verfügbar zu machen ist Bewegliches Denken („Hineinsehen & Argumentieren“ sowie „Erfassen & Analysieren“) notwendig. Ziel ist es, die Begriffe deutlich flexibler verfügbar zu machen als mit statischen Prototypen.

Allgemeine Vorbemerkung:
Der Zugmodus von EUKLID DynaGeo (also z. B. die Möglichkeit jeden Eckpunkt eines konstruierten Dreiecks auf eine beliebige Position der Zeichenebene zu verschieben) hat eine ganz Reihe von Vorteilen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Es ergeben sich aber auch Besonderheiten, die bei einem Geometrieunterricht, der ausschließlich mit der Tafel bzw. dem Heft arbeitet, in der Regel nicht in den Blick genommen werden, aber auch dort relevant sind. Im Folgenden werden einige Phänomene benannt, auf die Schüler, die in Partnerarbeit mit dem Programm EUKLID DynaGeo arbeiten, fast zwangsläufig stoßen. Wir als Lehrer sollten uns also darauf vorbereiten und wissen, wie wir mit entsprechenden Fragen umgehen.

Dreiecksbegriff

Frage: Ist ein Dreieck ABC noch ein Dreieck, wenn man den Punkt C auf die Gerade AB zieht?

Antwort: Nein!

Begründung: Dreiecksdefinition:
Drei Punkte der Zeichenebene, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, bilden ein Dreieck.

Bemerkungen:
- In dieser Definition besteht das Dreieck aus drei Punkten! Je nach Bedarf kann man diese Definition noch um die Verbindungsstrecken der Punkte oder sogar um die von den Verbindungsstrecken eingeschlossene Fläche erweitern.
- Es ist nicht notwendig, eine der Definitionen in das Heft zu notieren. Im Unterrichtsgespräch und bei einschlägigen Fragen sollte aber obige Definition zu Grunde gelegt werden.

Winkelbegriff

Frage: Was passiert mit den Innenwinkeln eines Dreiecks ABC, wenn man den Punkt C auf die andere Seite der Gerade AB zieht?

Antwort:
a) Sie bleiben Innenwinkel.
b) Es sind keine Innenwinkel mehr sondern werden zu den Winkeln, die den entsprechenden Innenwinkel zum Vollwinkel ergänzen.

Begründung: Verschiedene Winkeldefinition:
a) Ein Winkel wird durch zwei Schenkel (Halbgeraden), die in einem gemeinsamen Punkt beginnen, festgelegt und hat keine Orientierung.
Folge: Es gibt nur Winkel zwischen 0° und 180°!
b) Es wird von einem orientierten Winkel ausgegangen, also einem Winkel, der entsteht, wenn man einen 2. Schenkel (Halbgerade), bei einem 1. Schenkel beginnend, in mathematisch positiven Umlaufsinn um ein bestimmtes Maß um den gemeinsamen Scheitelpunkt dreht.

Zusatzfragen: Was passiert mit den Innenwinkeln eines Dreiecks ABC, wenn C auf AB bewegt wird? Was passiert mit den Innenwinkeln, wenn C mit A oder B zusammenfällt?

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke sowie Basiswinkelsatz

Unterrichtsstunden:	2
Inhaltsziele:	Erarbeitung • Begriff: Gleichschenkliges Dreieck • Basiswinkelsatz • Begriff: Gleichseitiges Dreieck
Voraussetzungen:	• Dreiecksdefinition (evtl. nur intuitiv) • Achsensymmetrische Figuren und Eigenschaften der Achsenspiegelung • Definition: Alle Punkte auf der Kreislinie sind gleich weit vom Kreismittelpunkt entfernt.
Unterrichtsformen:	a) Partnerarbeit b) Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	a) Partnerarbeit im Computerraum b) Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Dreieck_starres_Vieleck.geo Dreiecksgrundformen_gleichschenklig.geo Dreiecksgrundformen_gleichschenklig_Loesung.geo gleichschenkliges_Dreieck.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen" **abwählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **kein Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen"

Die Unterrichtssequenz beginnt mit einem kurzen Lehrervortrag, in dem die Wichtigkeit der Dreiecke für die Geometrie herausgestellt wird. Gesichtspunkte, die in diesem Zusammenhang genannt werden sollten:

- Das Dreieck ist die einfachste geometrische Figur.
- Das Dreieck ist das einzige *starre* Vieleck. (Hier kann die Datei Dreieck_starres_Vieleck.geo (vgl. Abb. 33) zur Demonstration verwendet werden. Ziehen Sie jeweils an den Eckpunkten!)
- Eigenschaften spezieller Dreiecke lassen sich nutzen, um Beweise an komplexeren Figuren zu führen. (Alle n-Ecke lassen sich in Dreiecke zerteilen.)

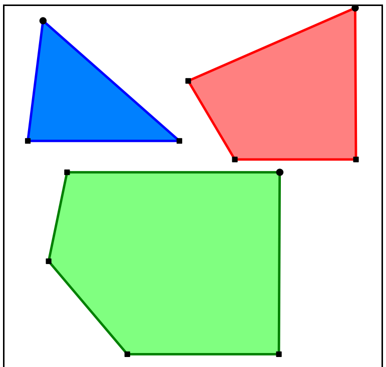


Abb. 33

Es ist folglich sinnvoll, sich näher mit Dreiecken zu beschäftigen und besondere Formen des Dreiecks zu untersuchen. Genau dies werden wir in den nächsten Stunden tun. Heute geht es um Dreiecke, die zwei gleich lange Seiten besitzen. Man nennt solche Dreiecke gleichschenklig.

Die Schüler arbeiten dann in Partnerarbeit im Computerraum mit der Datei Dreiecksgrundfomen_gleichschenklig.geo (vgl. Abb. 34). Sie sollen bei den Aufgaben 2), 4) und 5) jeweils ihre Antworten und Erklärungen ins Heft schreiben.

Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten heißen **gleichschenklig**.

1) **Bewege den Punkt C** so, dass Dreiecke entstehen, die
   a) gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ sind,
   b) gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{AB}$ sind,
   c) gleichschenklig mit $\overline{BC} = \overline{AB}$ sind.
   Markiere für jede Teilaufgabe 10 entsprechende Lagen des Punktes C, indem du einen neuen Punkt setzt. Benutze für jede Teilaufgabe eine andere Farbe für die 10 Punkte.
2) Auf welcher Linie muss C in der Teilaufgabe 1a), 1b) bzw. 1c) bewegt werden, so dass das Dreieck ABC immer gleichschenklig ist? Begründe jeweils deine Antwort!
3) Überprüfe deine Lösung der Aufgabe 2, indem du die Linien zeichnest und den Punkt C entlang dieser Linien bewegst. Was passiert, wenn C die jeweilige Linie verlässt?
4) Achte, während du C entlang der Linien von Aufgabe 3 bewegst, auf die Innenwinkel des Dreiecks. Was fällt dir auf?
5) Überlege mit Hilfe deiner Bearbeitung der Aufgabe 3, für welche Lagen von C alle drei Seiten des Dreiecks gleich lang sind. Gib diese Lagen von C an. Wie würdest du solche Dreiecke nennen? Was kann man über ihre Innenwinkel sagen? Warum ist das so?

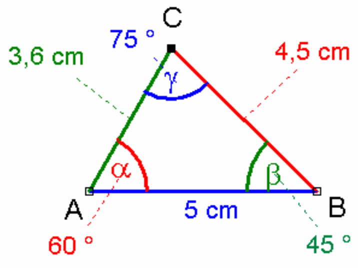


Abb. 34

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Anschließend an die Partnerarbeit werden die Ergebnisse im Unterrichtsgespräch zusammengetragen und insbesondere die Begründungen vertieft. Die Schüler sollen dabei ihre eigenen Aufzeichnungen gegebenenfalls ergänzen. Als Grundlage kann die Datei [Dreiecksgrundformen_gleichschenklig_Loesung.geo]() (vgl. Abb. 35) dienen.

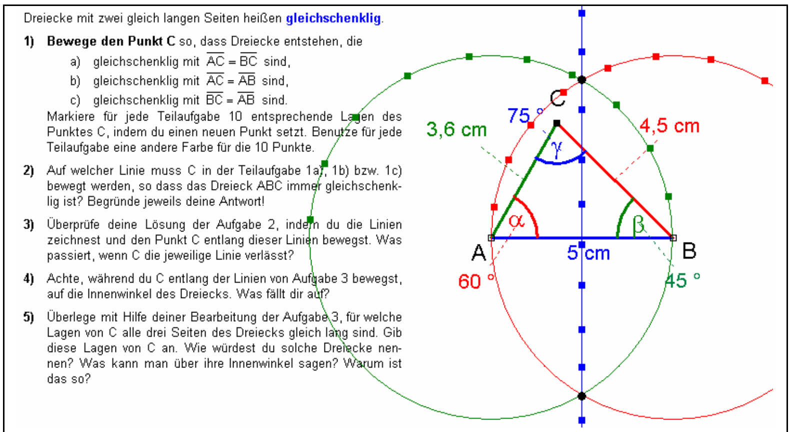


Abb. 35

Stichpunkte:

- **Zu 2a)**
  Die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ von [AB] ist gleichzeitig die Symmetrieachse. → Eigenschaft der Achsenspiegelung: Ein Punkt P liegt genau dann auf $m_{[AB]}$, wenn gilt $\overline{AP} = \overline{BP}$.
- **Zu 2b) und 2c)**
  Alle Punkte die von einem Punkt P der Zeichenebene gleich weit entfernt sind, liegen auf einem Kreis um P. Mit der Länge $\overline{AB}$ ist der Kreisradius vorgegeben.
- **Zu 4)**
  Wenn man den Punkt C entlang einer der drei Linien bewegt, dann ändern sich alle drei Innenwinkel des Dreiecks ABC, wobei zwei (die Basiswinkel) immer gleich groß sind. Es gilt der

> **Basiswinkelsatz:**
> Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei seiner Innenwinkel (die Basiswinkel) gleich groß sind.

Beweis:

⇨ Wir gehen aus von $\overline{AC} = \overline{CB}$. Die Winkelhalbierende w_γ des Winkels $\gamma = \angle ACB$ ist Symmetrieachse. [AC] kommt durch Klappen um w_γ mit [BC] zur Deckung und insbesondere kommt A durch Klappen an w_γ mit B zur Deckung. Damit ist das Dreieck ABC achsensymmetrisch bzgl. w_γ und es folgt: $\alpha = \beta$.

⇦ Wir gehen aus von $\alpha = \beta$. Wir betrachten die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ von [AB]. M ist der Schnittpunkt von $m_{[AB]}$ mit [AB]. Klappt man den Winkel α um $m_{[AB]}$, dann kommt [AM] mit [BM] zu Deckung und wegen $\alpha = \beta$ auch der andere Schenkel von α mit dem andern Schenkel von β. Der Schnittpunkt C dieser beiden Schenkel ist damit Fixpunkt und wird beim Klappen nicht bewegt. Die Folge ist, dass [AC] beim Klappen um $m_{[AB]}$ mit [BC] zur Deckung kommt. Die beiden Strecken sind also gleich lang. Also ist das Dreieck ΔABC gleichschenklig.

> **Bemerkung:** Wir haben damit auch gezeigt, dass jedes gleichschenklige Dreieck achsensymmetrisch ist. Dass jedes achsensymmetrische Dreieck gleichschenklig ist, ergibt sich aus den Eigenschaften der Achsenklappung!

- **Zu 5)**
  Die Strecke [AC] muss so lang wie die Strecke [AB] sein und gleichzeitig muss die Strecke [BC] so lang wie die Strecke [AB] sein. (Dies liegt daran, dass die Länge der Strecke [AB] nicht verändert wird, wenn man den Punkt C bewegt.) C ist folglich (ein) Schnittpunkt der Kreise $k\left(A;\overline{AB}\right)$ und $k\left(B;\overline{AB}\right)$. Dreiecke, bei denen **alle Seiten gleich lang** sind, nennt man **gleichseitig**. Da man jedes Paar von Dreiecksseiten eines gleichseitigen Dreiecks als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks betrachten kann, sind alle benachbarten Innenwinkel gleich groß. → Alle Innenwinkel sind gleich groß. → $\alpha+\alpha+\alpha=3\cdot\alpha=180°\Rightarrow\alpha=60°$, d.h. die Winkelgröße jedes Innenwinkels im gleichseitigen Dreieck beträgt 60°.

Nach dieser Zusammenfassung vertiefen die Schüler im Unterrichtsgespräch an Hand der Datei gleichschenkliges_Dreieck.geo (vgl. Abb. 36 und Abb. 37) ihre Kenntnisse über gleichschenklige Dreiecke und lernen gleichzeitig wesentliche Begriffe (Spitze, Schenkel, Basis, Basiswinkel) kennen, die das Sprechen über solche Dreiecke erleichtern. Insbesondere sollte hier die Möglichkeit genutzt werden, die Lage und die Form des Dreiecks durch Ziehen an den Eckpunkten zu verändern.
Die Schüler sollten (mindestens) zwei sehr verschieden aussehende gleichschenklige Dreiecke mit den jeweiligen Bezeichnungen ins Heft zeichnen oder entsprechende Ausdrucke einkleben (vgl. Abb. 36 und Abb. 37).

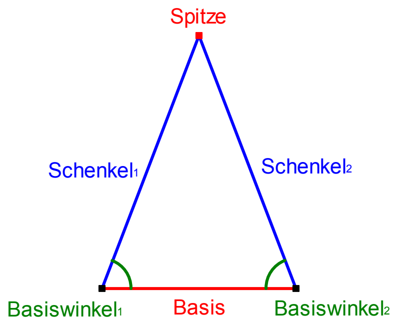


Abb. 36

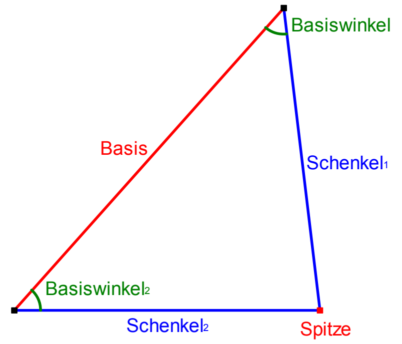


Abb. 37

Hausaufgaben:

a) Wie kann man mit Hilfe des gleichseitigen Dreiecks einen 60°-Winkel konstruieren? Führe die Konstruktion durch. Konstruiere auch einen 30°-Winkel und einen 67,5°-Winkel.
b) Beweise: Sind in einem Dreieck die drei Innenwinkel gleich groß, dann ist das Dreieck gleichseitig.

Hinweis:
Die Hausaufgabe b) ist eine zweimalige Anwendung der Rückrichtung des Basiswinkelsatzes. Dabei muss das gleichschenklige Dreieck nacheinander „von zwei verschiedenen Seiten aus betrachtet“ als gleichschenkliges Dreieck identifiziert werden. Daraus ergibt sich dann, dass alle Seiten gleich lang sind.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Rechtwinklige Dreiecke und Satz des Thales

Unterrichtsstunden:	2
Inhaltsziele:	Erarbeitung • Begriff: Rechtwinkliges Dreieck • Satz des Thales und seine Umkehrung
Voraussetzungen:	• gleichschenkliges Dreieck • Basiswinkelsatz • Innenwinkelsumme im Dreieck • Kreisdefinition
Unterrichtsformen:	a) Partnerarbeit b) Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	a) Partnerarbeit im Computerraum b) Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Dreiecksgrundformen_rechtwinklig.geo Dreiecksgrundformen_rechtwinklig_Loesung.geo Thaleskreis_Beweisfigur.geo Thaleskreis_Umkehrung_Beweisfigur.geo Bewegliche_Staebe.geo Uebungsaufgabe.geo rechtwinkliges_Dreieck.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen“ **abwählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **kein Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen“

Die Schüler arbeiten in Partnerarbeit im Computerraum mit der Datei Dreiecksgrundformen_rechtwinklig.geo (vgl. Abb. 38). Sie sollen bei den Aufgaben 2) und 4) jeweils ihre Antworten und Erklärungen ins Heft schreiben.

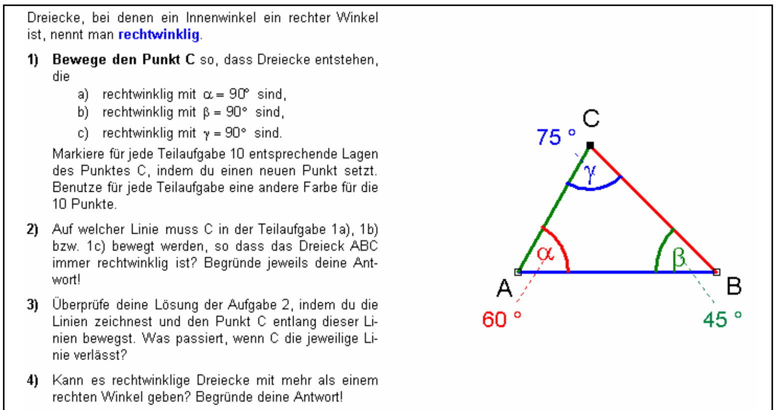


Abb. 38

Anschließend an die Partnerarbeit werden die Ergebnisse im Unterrichtsgespräch zusammengetragen und insbesondere die Begründungen vertieft. Die Schüler sollen dabei ihre eigenen Aufzeichnungen gegebenenfalls ergänzen. Als Grundlage dient die Datei Dreiecksgrundformen_rechtwinlig_Loesung.geo (vgl. Abb. 39).

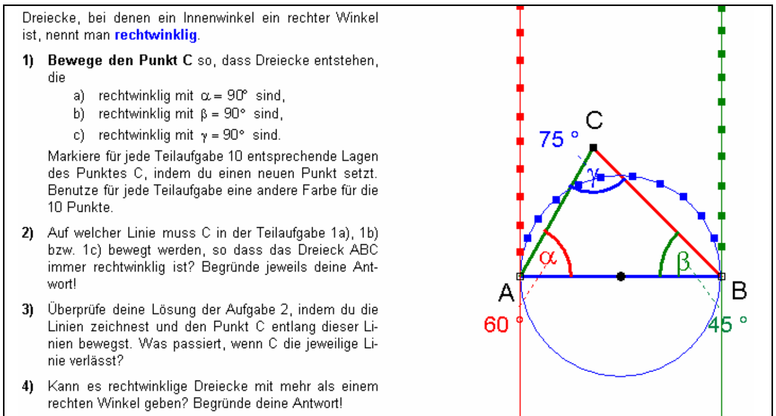


Abb. 39

Stichpunkte:

➢ **Zu 2a) und 2b)**
Wenn C irgendwo auf dem in A (bzw. B) errichteten Lot auf AB liegt, dann ist α (bzw. β) ein rechter Winkel.

Bemerkungen:

a) Dies gilt natürlich nur dann, wenn C nicht mit A (bzw. B) zusammenfällt! In diesem Fall ist ABC kein Dreieck mehr und α (bzw. β) sowie γ sind nicht mehr definiert, da ihnen der zweite Schenkel fehlt!

b) Wenn C „unterhalb“ der Geraden AB liegt, so hat das Dreieck ABC einen mathematisch negativen Umlaufsinn! Wir werden uns nur mit Lagen von C „oberhalb“ von AB auseinandersetzen. Die entsprechenden Situationen „unterhalb“ von AB erhält man durch klappen der oberen Halbebene an AB!

- **Zu 2c)**
Die Begründung für diese Aussage entspricht dem Satz des Thales. Es kann von einem Schüler der 7. Klasse sicher nicht erwartet werden, dass er diesen Beweis führt. Die Idee ist, dass der Satz als solcher von den Schülern entdeckt und das Problem des Nachweises erkannt wird. Dies gilt für beide Richtungen, nämlich:
a) Wenn C auf dem „Thaleskreis“ liegt, dann ist γ ein rechter Winkel.
b) Wenn γ ein rechter Winkel ist, dann liegt C auf dem „Thaleskreis“. (D. h., wenn C nicht auf dem Thaleskreis liegt, dann ist γ auch kein rechter Winkel!)

Dies führt zum

Satz des Thales:
Dreiecke, deren Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, sind rechtwinklig.

Beweis:

Anmerkung: Zur Herleitung die Datei Thaleskreis_Beweisfigur.geo (Abb. 40) benutzen und in der Rückblende die Argumentationsschritte diskutieren. Das Aufschreiben ins Heft erfolgt wie üblich.

Da A, B und C auf k(M; A) liegen folgt:

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta AMC \text{ ist gleichschenklig} \Rightarrow \alpha = \gamma_1 \\ \Delta CMB \text{ ist gleichschenklig} \Rightarrow \beta = \gamma_2 \end{cases}$$

$$\overset{\substack{\text{Innenwinkelsumme} \\ \text{im Dreieck ABC}}}{\Rightarrow} \quad 180° = \alpha + \beta + \gamma$$
$$= \gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)$$
$$= 2 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)$$
$$= 2 \cdot \gamma$$
$$\Rightarrow \gamma = 90° \qquad \#$$

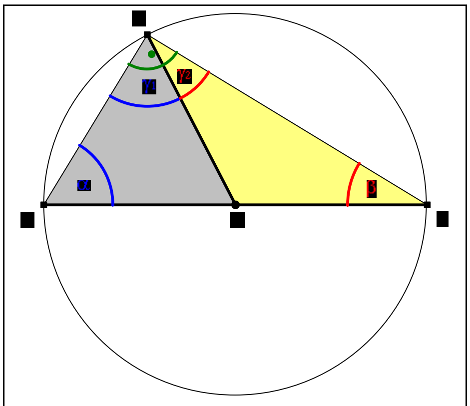


Abb. 40

Gibt es neben den Punkten auf dem „Thaleskreis“ noch andere Lagen von C, so dass $\gamma = 90°$?

Anmerkung: Zur Herleitung die Datei Thaleskreis_Umkehrung_Beweisfigur.geo (vgl. Abb. 41) benutzen, in der Rückblende den Argumentationsschritt $\alpha + \beta = 90°$ diskutieren und schließlich das blaue Dreieck klappen.

$$\gamma = 90° \overset{\text{Innenwinkelsumme}}{\Rightarrow} 180° = \alpha + \beta + 90°$$
$$\Rightarrow \quad 90° = \alpha + \beta$$
$$\Rightarrow \quad 90° - \alpha = \beta \quad (*)$$

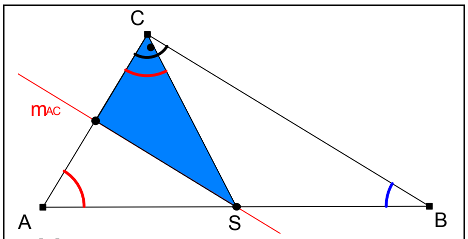


Abb. 41

Klappen des blauen Dreiecks um die Mittelsenkrechte $m_{[AC]}$ von [AC] zeigt, dass der Winkel α ein Teil des rechten Winkels γ ist. Der andere Teil hat offensichtlich die Winkelgröße $\gamma - \alpha = 90° - \alpha \overset{(*)}{=} \beta$.
Mit dem Basiswinkelsatz folgt: ΔASC und ΔCSB sind gleichschenklig!

$$\Rightarrow \overline{AS} = \overline{CS} = \overline{BS} \Rightarrow A, B, C \in k(S; \overline{AS})$$

Der Kreis $k(S; \overline{AS})$ ist aber gerade der Thaleskreis über [AB]. #

- **Zu 4)**
  Es kann kein rechtwinkliges Dreieck mit mehr als einem rechten Winkel geben, da dies nur für Schnittpunkte der bisher gefundenen Linien (die beiden Lote und der Thaleskreis) der Fall wäre. Gemeinsame Punkte der genannten Ortslinien sind aber nur die Punkte A und B. Wenn C mit A oder B zusammenfällt, existiert aber kein Dreieck mehr.
  (Anderes Argument: Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt laut dem Innenwinkelsummensatz 180°. Wenn zwei Innenwinkel jeweils 90°-Winkel sind, dann wäre der dritte Innenwinkel ein 0°-Winkel. Die Figur wäre damit kein Dreieck mehr!)

Nach dieser Zusammenfassung vertiefen die Schüler im Unterrichtsgespräch an Hand der Datei rechtwinkliges_Dreieck.geo (vgl. Abb. 42 und Abb. 43) ihre Kenntnisse über rechtwinklige Dreiecke und lernen gleichzeitig die Begriffe Kathete und Hypotenuse kennen, die das Sprechen über solche Dreiecke erleichtern. Insbesondere sollte hier die Möglichkeit genutzt werden, die Lage und die Form des Dreiecks durch Ziehen an den Eckpunkten frei zu verändern.
Die Schüler sollten zwei sehr verschieden aussehende rechtwinklige Dreiecke mit den jeweiligen Bezeichnungen ins Heft zeichnen oder entsprechende Ausdrucke einkleben (vgl. Abb. 42 und Abb. 43).

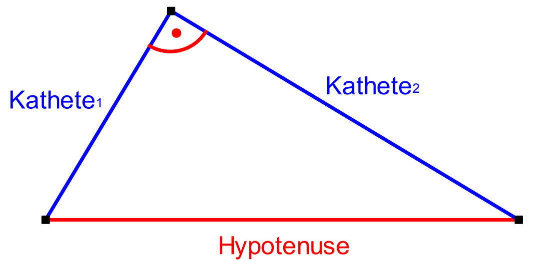


Abb. 42

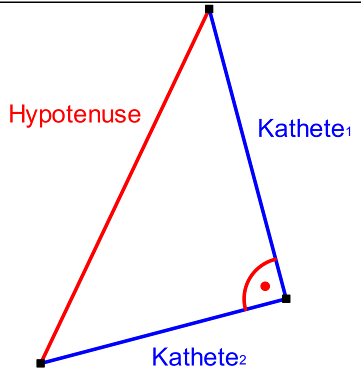


Abb. 43

Hausaufgabe:
Die vier gleich langen Stäbe in der Abbildung sind im Punkt D drehbar verbunden. Kann man die Stellung der Stäbe so verändern, dass die blaue Gummischnur einen (zwei, drei, vier) rechte Winkel bildet? Zeichne und begründe! (Besprechen mit Hilfe der Datei Bewegliche_Staebe.geo (vgl. Abb. 44).
Hinweis: Es sind immer Thaleskreiskonfigurationen herzustellen, d. h. mindestens zwei Stäbe müssen einen Kreisdurchmesser bilden.)

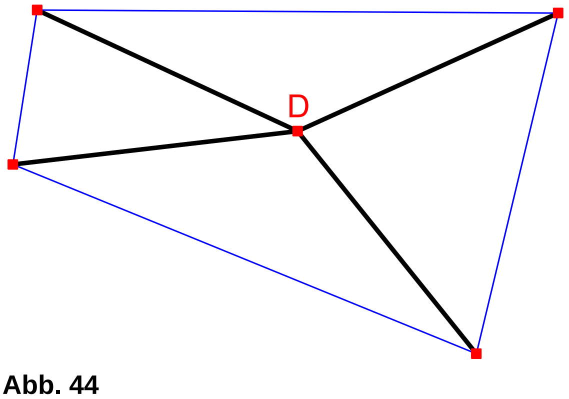


Abb. 44

Dreiecke mit einem 80° bzw. 100°-Winkel (Ausblick: Umfangswinkelsatz)

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	• Vertiefung der Erkenntnis über Dreiecksformen in Abhängigkeit von einem Innenwinkel
Voraussetzungen:	• Satz des Thales und seine Umkehrung
Unterrichtsformen:	a) Partnerarbeit b) Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	a) Partnerarbeit im Computerraum b) Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Dreiecksgrundformen_80_Grad_Winkel.geo; Dreiecksgrundformen_100_Grad_Winkel.geo; Dreiecksgrundformen_x_Grad_Winkel_Loesung.geo; Thaleskreis_Umfangswinkelsatz.geo; Hausaufgabe_Loesung.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen" **abwählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **kein Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen"

Die Schüler arbeiten in Partnerarbeit im Computerraum nacheinander mit den Dateien (vgl. Abb. 45 & Abb. 46) Dreiecksgrundformen_80_Grad_Winkel.geo Dreiecksgrundfomen_100_Grad_Winkel.geo. Sie sollen bei der 2. Aufgabe jeweils ihre Antworten und Begründungen ins Heft schreiben.

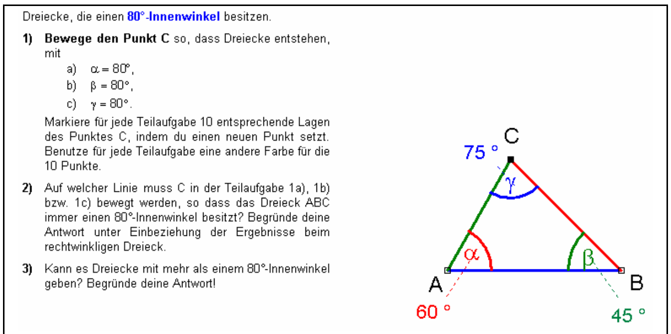


Abb. 45

Anschließend an die Partnerarbeit werden die Ergebnisse im Unterrichtsgespräch zusammengetragen und insbesondere die Begründungen vertieft. Die Schüler sollen dabei ihre eigenen Aufzeichnungen gegebenenfalls ergänzen. Als Grundlage dient die Datei Dreiecksgrundformen_x_Grad_Winkel_Loesung.geo (vgl. Abb. 47). Mit dem Schieberegler unten links kann die Winkelgröße X verändert werden. Wird nun C an eine der Schwarzen Linien gebunden, dann kann man experimentell feststellen, dass der entsprechende Winkel

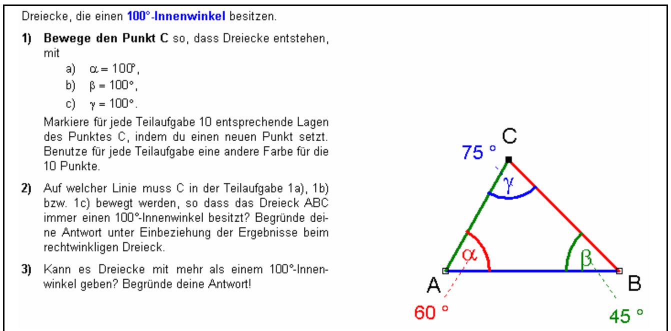


Abb. 46

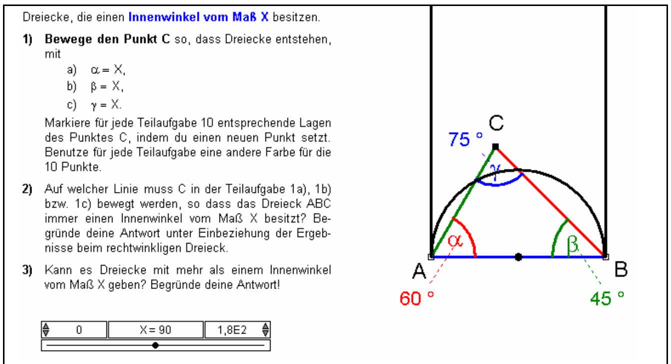


Abb. 47

- immer gleich bleibt, wenn man C auf der Linie bewegt,
- nur dann diese Winkelgröße annimmt, wenn man sich auf der Ausgangslinie bewegt, da durch Variation der Winkelgröße X mit dem Schieberegler die Linie die gesamte obere Halbebene überstreicht und dabei jeweils andere Winkelgrößen auftreten.

Hinweis: Klickt man den Punkt C mit der rechten Maustaste an, so erscheint ein Kontextmenü. Dort klickt man auf den Befehl „**An Linie binden …**" und anschließend auf die gewünschte Linie. Will man C anschließend an eine andere Linie binden, so benutzt man zunächst im Kontextmenü den Befehl „**Bindung aufheben**" und wiederholt obigen Vorgang mit der neuen Linie.

Stichpunkte:

- **Zu 2a) und 2b)**
  Wenn C irgendwo auf dem zweiten Schenkel eines in A (bzw. B) an AB angetragenen 80°-Winkels [100°-Winkels] liegt, dann ist α (bzw. β) ein 80°-Winkel [100°-Winkel].

  Bemerkungen:
  a) Dies gilt natürlich nur dann, wenn C nicht mit A (bzw. B) zusammenfällt! In diesem Fall ist ABC kein Dreieck mehr und α (bzw. β) sowie γ sind nicht mehr definiert, da ihnen der zweite Schenkel fehlt!
  b) Wenn C „unterhalb" der Geraden AB liegt, so hat das Dreieck ABC einen mathematisch negativen Umlaufsinn! Wir werden uns nur mit Lagen von C „oberhalb" von AB auseinandersetzen. Die entsprechenden Situationen „unterhalb" von AB erhält man durch klappen der oberen Halbebene an AB!

- **Zu 2c)**
  Die Begründung für diese Aussage entspricht dem Umfangswinkelsatz, der in der 8. Klasse bewiesen wird. Hier geht es zunächst nur um die empirische Erkenntnis, dass C auf einem Kreisbogen über [AB] liegt, wenn γ eine feste Winkelgröße hat. Zu Begründen ist hier nur die Tatsache, dass für Winkelmaße von γ
  - die **kleiner als 90°** sind der entsprechende **Kreisbogen außerhalb des Thaleskreises** liegt.
  - die **größer als 90°** sind der entsprechende **Kreisbogen innerhalb des Thaleskreises** liegt.

  Die Begründung erfolgt wieder über ein dynamisches Argument mit Betrachtung eines dabei auftretenden Extremfalls:
  Je näher C an die Strecke [AB] heranwandert, desto mehr nähert sich die Winkelgröße von γ dem gestreckten Winkel an, wird also immer größer. (Vorsicht, das Argument funktioniert nur, wenn C in Abb. 48 im hinterlegten Streifen über [AB] bewegt wird!)

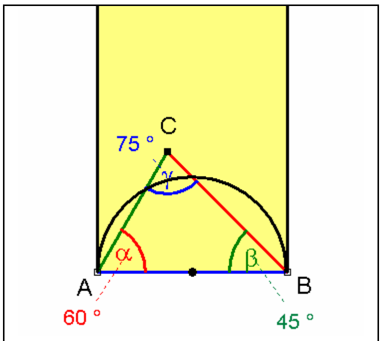


Abb. 48

Ergänzend kann mit Hilfe der Datei Thaleskreis_Umfangswinkelsatz.geo der Zusammenhang zwischen der Lage des Mittelpunktes des (Um-) Kreises und der Winkelgröße von γ graphisch dargestellt werden.

> **Hinweis:** Sie können C bzw. C' auch an den unteren (Fasskreis-) Bogen binden.

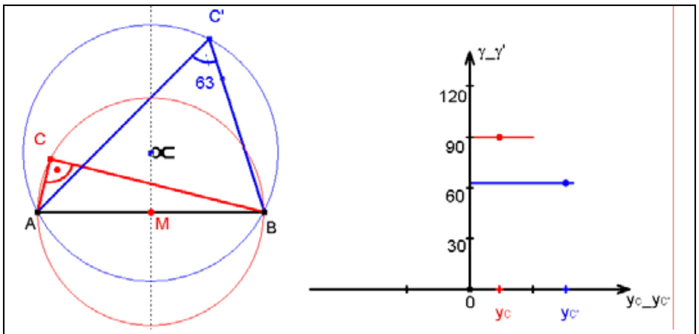


Abb. 49

Hausaufgabe:

Gibt es Dreiecke mit einem 80°-Winkel (einem 100°-Winkel) die
a) gleichschenklig
b) rechtwinklig

sind?
Wie viele verschiedene derartige Dreiecke gibt es gegebenenfalls, wenn eine Dreiecksseite (z. B. [AB]) fest vorgegeben ist?

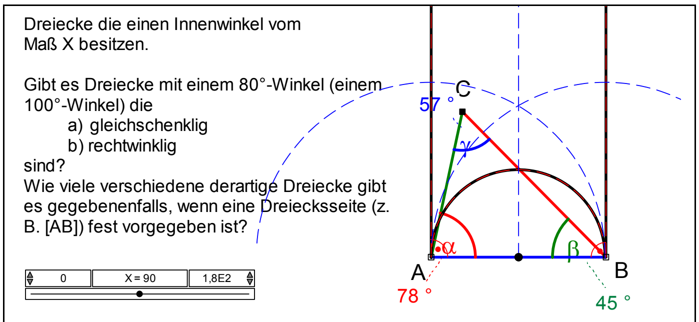


Abb. 50

Die Verbesserung der Hausaufgabe erfolgt an Hand der Datei Hausaufgabe_Loesung.geo (vgl. Abb. 50).

> **Hinweis:** Die Schnittpunkte der schwarzen Linien mit den jeweiligen gestrichelten Linien für gleichschenklige bzw. rechtwinklige Dreiecke (siehe dazu die entsprechenden Unterrichtseinheiten) ergeben jeweils die möglichen Lösungen.

Stumpfwinklige und spitzwinklige Dreiecke / Erarbeitung des „Merkbildes“

Unterrichtsstunden:	2 (Wegen der notwendigen ausführlichen Hausaufgabenbesprechnung zum „Merkbild“.
Inhaltsziele:	• Vertiefung der Erkenntnis über Dreiecksformen in Abhängigkeit von einem Innenwinkel • Begriff: Stumpfwinkliges Dreieck • Begriff: Spitzwinkliges Dreieck
Voraussetzungen:	• Begriffe „stumpfer Winkel“ und „spitzer Winkel“ • Vorhergehende Stunden im Rahmen der Dreiecksgrundformen
Unterrichtsformen:	a) Partnerarbeit b) Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	a) Partnerarbeit im Computerraum b) Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Dreiecksgrundformen_stumpfwinklig.geo; Dreiecksgrundformen_spitzwinklig.geo; Dreicksgrundformen_spitz_stumpfwinklig_Loesung.geo; Dreiecksgrundformen_Legende.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen“ **abwählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **kein Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen“

Die Schüler arbeiten in Partnerarbeit im Computerraum zunächst mit der Datei

- Dreiecksgrundformen_stumpfwinklig.geo (vgl. Abb. 51).

Sie sollen bei den Aufgaben 2a), 2b), 2c) und 4) jeweils ihre Antworten und Begründungen ins Heft schreiben. Im Anschluss daran bearbeiten die Schüler in Partnerarbeit die Datei

- Dreiecksgrundfomen_spitzwinklig.geo (vgl. Abb. 52)

und schreiben auch hier ihre Antworten und Begründungen zu Aufgabe 2) ins Heft.

Anschließend an die Partnerarbeit werden die Ergebnisse im Unterrichtsgespräch zusammengetragen und insbesondere die Begründungen vertieft. Die Schüler sollen dabei ihre eigenen Aufzeichnungen gegebenenfalls ergänzen. Als Grundlage dient die Datei (vgl. Abb. 53)

- Dreicksgrundfomen_spitz_stumpfwinklig_Losung.geo

Mit dem Schieberegler unten rechts kann die Winkelgröße X verändert werden, die mit den dicken schwarzen Linien korrespondiert.

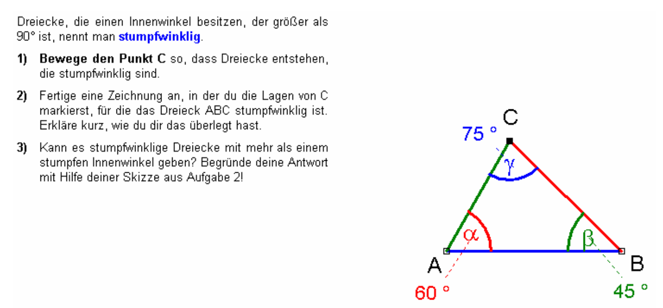


Abb. 51

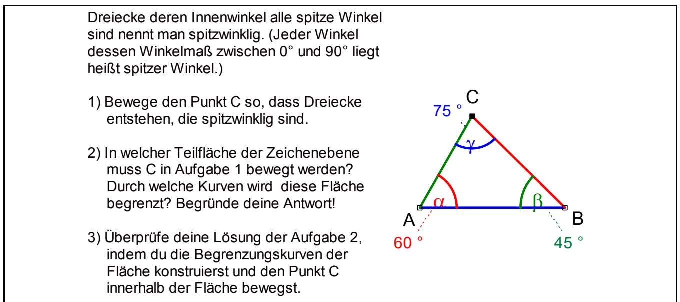


Abb. 52

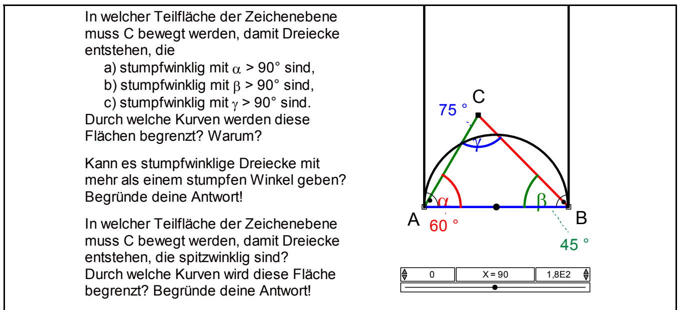


Abb. 53

Hinweis: Nachdem jeweils eine der Teilflächen erarbeitet ist, kann Sie über die Schaltfläche „Objekt verbergen / anzeigen“ durch anklicken sichtbar gemacht werden!

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Wird C an eine der Schwarzen Linien gebunden, dann wissen wir bereits, dass der entsprechende Winkel

- o immer gleich bleibt,
- o nur dann eine bestimmte Winkelgröße annimmt,

wenn C sich auf der entsprechenden Linie bewegt.

Stichpunkte:

- **Stumpfwinklig mit $\alpha > 90°$ bzw. $\beta > 90°$**

  Wenn $\alpha > 90°$ ist (vgl. Abb. 54), dann liegt C irgendwo auf dem zweiten Schenkel eines in A an [AB angetragenen Winkels mit einem Winkelmaß größer als 90°. Dieser zweite Schenkel wird durch die linke schwarze Halbgerade dargestellt. Wird X nun mit dem Schieberegler im Bereich 90°< X < 180° variiert, so überstreicht diese Halbgerade den im linken Bild grau hinterlegten Bereich. Für alle Lagen von C auf der grauen Teilfläche ist das Dreieck ABC also stumpfwinklig, wobei $\alpha > 90°$ ist. Analog verläuft das Argument für $\beta > 90°$ (vgl. Abb. 55).

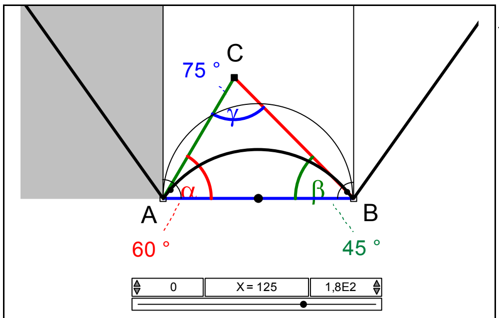


Abb. 54

⇦ $\alpha > 90°$

$\beta > 90°$ ⇨

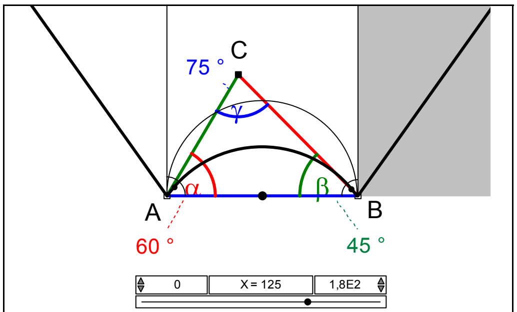


Abb. 55

- **Stumpfwinklig mit $\gamma > 90°$** (vgl. Abb. 56)

  Wenn $\gamma > 90°$ ist, dann liegt C irgendwo auf einem Kreisbogen, der in B beginnt, innerhalb des „Thaleshalbkreises“ verläuft und in A endet. Wird X nun mit dem Schieberegler im Bereich 90°< X < 180° variiert, so überstreicht dieser Kreisbogen das gesamte Innere des „Thaleshalbkreises“ (im Bild grau hinterlegten). Für alle Lagen von C auf der grauen Teilfläche ist das Dreieck ABC also stumpfwinklig, wobei $\gamma > 90°$ ist.

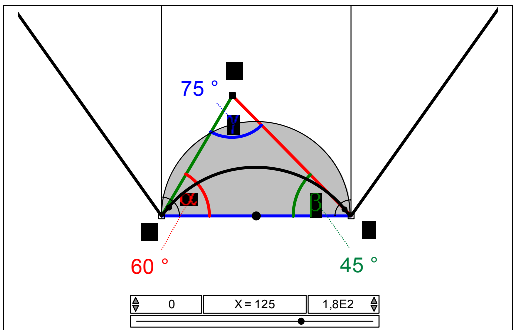


Abb. 56

- **Stumpfwinklig: Begrenzungskurven**

  Alle grau hinterlegten Flächen werden durch die Gerade AB begrenzt, da für Lagen von C auf AB
  - die entsprechenden Winkel nicht mehr stumpf sondern gestreckt wären und
  - für diese Lagen von C die Figur ABC kein Dreieck mehr ist.

  Die grau hinterlegten Flächen werden jeweils durch die Kurven begrenzt, für die der entsprechende Winkel die Winkelgröße 90° annimmt, da für Lagen von C auf diesen Kurven (dünne schwarze Linien) das Dreieck ABC nicht mehr stumpf- sondern rechtwinklig ist (vgl. Abb. 57).

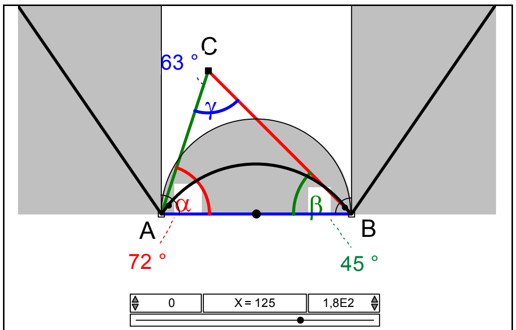


Abb. 57

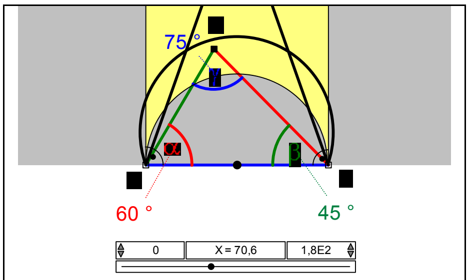


Abb. 58

- **Spitzwinklig, also** $\alpha, \beta, \gamma < 90°$

  Wie wir eben gesehen haben ist das Dreieck ABC stumpfwinklig, wenn C sich innerhalb der grau hinterlegten Flächen bewegt. Es ist nahe liegend zu vermuten, dass die im Bild gelb hinterlegte Fläche die Lagen von C repräsentiert, für die ABC spitzwinklig ist.

  Die Begründung dafür ist hier etwas aufwändiger als oben, da nun **alle** Innenwinkel **gleichzeitig spitzwinklig** sein müssen!

  - Wenn $\boxed{\gamma < 90°}$ ist, dann liegt C irgendwo auf einem Kreisbogen, der in B beginnt, außerhalb des „Thaleshalbkreises" verläuft und in A endet. Diese Kreisbögen verlaufen aber immer zum Teil in der linken oder rechten grau hinterlegten Fläche. Für diese Teile des Kreisbogens sind die zugehörigen Dreiecke nicht spitzwinklig, da entweder $\alpha > 90°$ oder $\beta > 90°$.
  - Analoge Überlegungen für $\boxed{\alpha < 90°}$ und $\boxed{\beta < 90°}$ führen zur Erkenntnis, dass nur wenn C innerhalb der gelb hinterlegten Fläche bewegt wird, die zugehörigen Dreiecke ABC spitzwinklig sind

- **Spitzwinklig: Begrenzungskurven**

  Die gelb hinterlegte Fläche wird durch die Kurven begrenzt, für die der entsprechende Winkel die Winkelgröße 90° annimmt, da für Lagen von C auf diesen Kurven (dünne schwarze Linien) das Dreieck ABC nicht mehr spitz- sondern rechtwinklig ist.

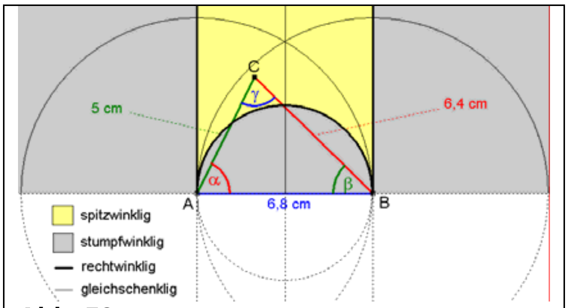


Abb. 59

Hausaufgabe:

Gib dir eine Strecke [AB] der Länge 6 cm vor. Kennzeichne die Punkte, Linien oder Flächen mit verschiedenen Farben, innerhalb der sich ein dritter Punkt C bewegen kann, so dass das Dreieck ABC

a) gleichschenklig ist,
b) gleichseitig ist,
c) rechtwinklig ist,
d) stumpfwinklig ist,
e) spitzwinklig ist,
f) gleichschenklig-spitzwinklig ist,
g) gleichschenklig-stumpfwinklig ist.

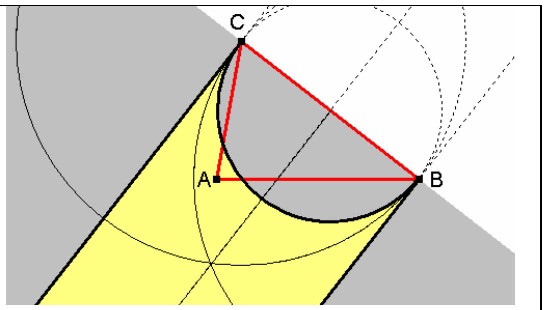


Abb. 60

In der Folgestunde wird die Hausaufgabe an Hand der Datei Dreiecksgrundformen_Legende.geo (vgl. Abb. 59) verbessert. Dabei sollte insbesondere noch einmal herausgearbeitet werden, dass dieses Bild Bereiche abgrenzt, in denen ein Eckpunkt (hier C) bewegt werden kann, so dass das zugehörige Dreieck ABC einem bestimmten Dreieckstyp entspricht. Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch, ergänzend dazu (im Unterrichtsgespräch) ein beliebiges Dreieck zu konstruieren und mit Hilfe des **Makros „Dreiecksklassifikation" zu einer anderen Seite als [AB]** (in Abb. 60 [BC]) die Bereiche einzeichnen zu lassen. In diesem Fall beziehen sie sich wieder auf die Lagen des dritten Punktes (in Abb. 60 A). (Lagen der Punkte B und C durch Ziehen variieren!)

Makro „Dreiecksklassifikation":
Makro aufrufen und nacheinander den linken und rechten Endpunkt der gegebenen Strecke anklicken.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

„Dreiecksgrundformen“ beim Wandern eines Eckpunktes entlang einer Kurve

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	• Vertiefung und Flexibilisierung der Fähigkeit Dreiecksgrundformen zu Erkennen
Voraussetzungen:	• Vorhergehende Stunden im Rahmen der Dreiecksgrundformen
Unterrichtsformen:	a) Unterrichtsgespräch b) Partnerarbeit
Computereinsatz:	a) Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Dreiecksgrundformen_Eckpunkt_auf_Parabel.geo Dreiecksgrundformen_Eckpunkt_auf_Kreis.geo Dreiecksgrundformen_Eckpunkt_auf_Gerade.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen“ **abwählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **kein Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen“

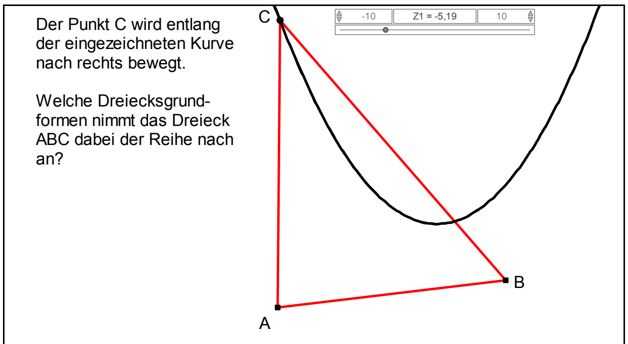


Abb. 61

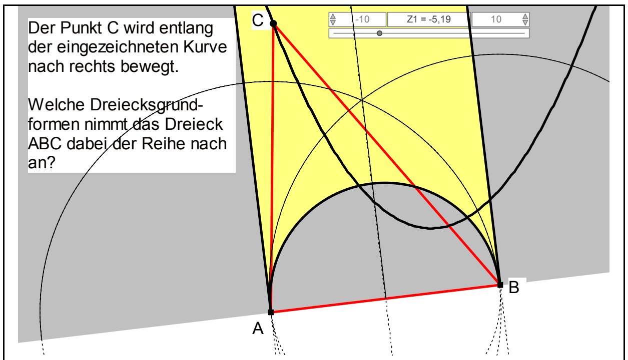


Abb. 62

Im Unterrichtsgespräch wird die Aufgabe aus der Datei Dreiecksgrundformen_Eckpunkt_auf_Parabel.geo (vgl. Abb. 61) bearbeitet. Zunächst wird nur die Aufgabenstellung gezeigt und (bei Bedarf) der Punkt C mit Hilfe des Schiebereglers entsprechend bewegt. Gemeinsam mit den Schülern wird im Rückgriff auf die letzte Stunde erarbeit, dass man sich als erstes überlegt, wo die Linien verlaufen, die zu den rechtwinkligen Dreiecken gehören. Damit hat man dann auch die Teilflächen der Ebene, die zu den stumpfwinkligen und den spitzwinkligen Dreiecken gehören. Zuletzt überlegt man sich noch, wo die Linien ungefähr verlaufen, die zu den gleichschenkligen Dreiecken gehören. Auf dem Papier oder auch auf der Tafel lassen sich diese Linien frei Hand einzeichnen. Damit ist es relativ einfach, die Aufgabe zu lösen. Erst wenn auf diese Weise eine Lösung erarbeitet wurde, wird mit Hilfe des Makros **Dreiecksklassifikation.mak** das Klassifikationsschema eingeblendet und das erarbeitet Ergebnis damit verglichen (vgl. Abb. 62).

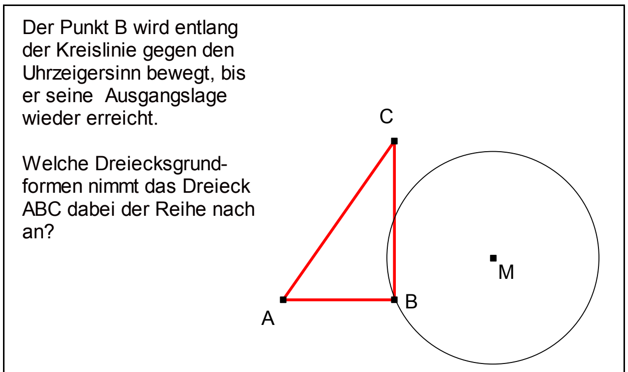


Abb. 63

Anschließend wird den Schülern das Bild der Datei Dreiecksgrundformen_Eckpunkt_auf_Kreis.geo (vgl. Abb. 63) als Arbeitsblatt ausgeteilt. Sie erhalten den Auftrag, die Aufgabe in Partnerarbeit nur mit Papier und Bleistift zu lösen. Am Ende der Stunde wird die Aufgabe dann wieder mit Hilfe des Makros **Dreiecksklassifikation.mak** im Unterrichtsgespräch an Hand der Beamer-Präsentation gemeinsam verbessert.

Nach dem Einsatz des Makros **Dreiecksklassifikation.mak** ergibt sich eine Darstellung wie in Abb. 64.

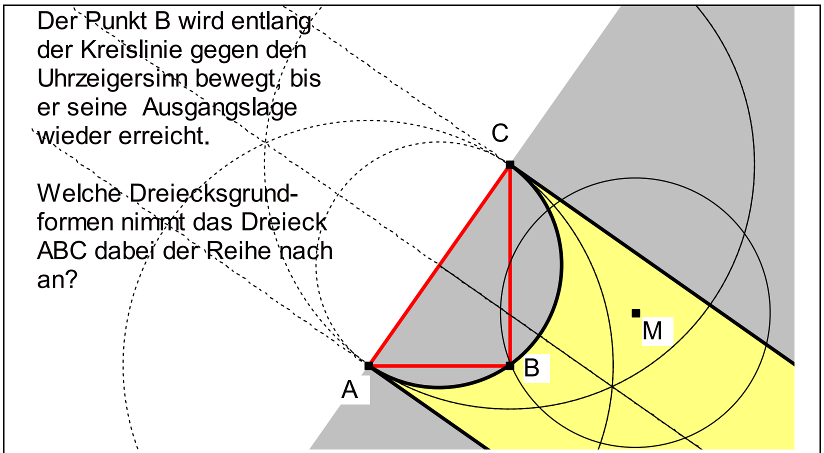


Abb. 64

Hausaufgabe:
Als Hausaufgabe erhalten die Schüler einen Ausdruck der Datei [Dreiecksgrundfomen_Eckpunkt_auf_Gerade.geo] (vgl. Abb. 65). Die Aufgabe ist im Kopf oder höchstens mit Papier und Bleistift zu bearbeiten.
Die Hausaufgabenbesprechung erfolgt dann in der nächsten Stunde an Hand der Datei [Dreiecksgrundfomen_Eckpunkt_auf_Gerade.geo] und mit Hilfe des Makros **Dreiecksklassifikation.mak.** Nach dem Einsatz des Makros ergibt sich eine Darstellung wie in Abb. 66.

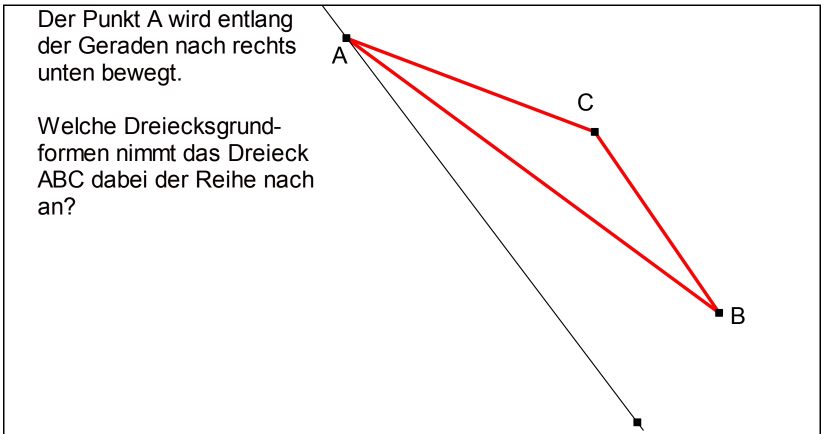


Abb. 65

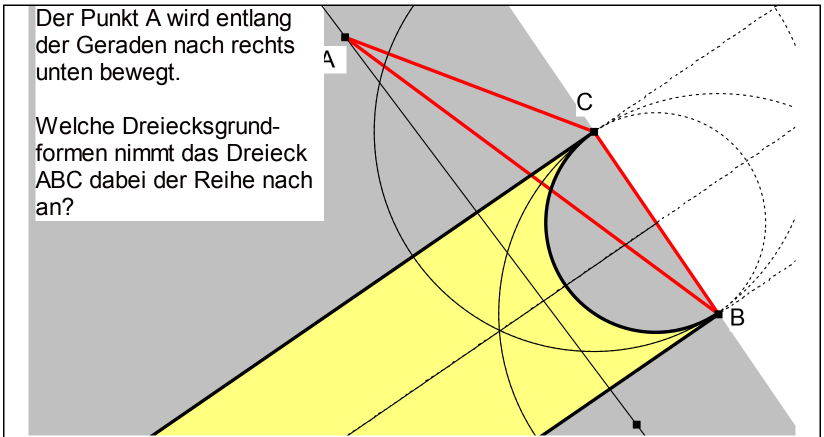


Abb. 66

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

7 Aufgaben für die Schulaufgabe zum Thema Dreiecksgrundformen

Anmerkungen:
- Die hier folgenden Aufgaben haben Vorschlagscharakter. Für jeden Aufgabentyp sind jeweils zwei vergleichbare Aufgaben angegeben, damit in der Schulaufgabe im Bedarfsfall mit zwei Gruppen gearbeitet werden kann.
- Im Anschluss an die Aufgabendarstellung und die Lösungshinweise sind auf Seite 31 die Aufgaben in der Form dargestellt, wie sie in der Schulaufgabe gestellt werden könnten.

Dreieckskonstruktionen

1. Von einem Dreieck ABC ist bekannt, dass es rechtwinklig ist, zwei 45°-Innenwinkel besitzt und die Seite [BC] die Länge $\overline{BC} = 5\text{ cm}$ hat.
   a) Konstruiere ein Dreieck mit den genannten Eigenschaften.
   b) Wie viele Dreiecke mit diesen Eigenschaften gibt es? Begründe deine Antwort!
   c) Ergänze die oben angegebenen Bedingungen so, dass dein in a) konstruiertes Dreieck das einzige ist, das die Bedingungen erfüllt.

Lösung:
Aufgaben a) und b): Vgl. Abb. 67! Zu b) Begründung: Jedes Dreieck, das zwei gleiche Innenwinkel besitzt, ist nach dem Basiswinkelsatz gleichschenklig. Die möglichen Lagen von A ergeben sich damit durch die Schnittpunkte der „Linien der Gleichschenkligkeit“ mit denen der „Rechtwinkligkeit“. (Diese Linien umfassen jeweils alle Möglichkeiten!) Es sind also genau sechs derartige Dreiecke möglich. Die Konstruktion der genannten Linien ist Teil der Lösung!
Aufgabe c): Die Antwort bezieht sich auf das in Abb. 67 eingezeichnete Dreieck. Winkel β ist der rechte Winkel und das Dreieck ABC hat einen mathematisch positiven Umlaufsinn.

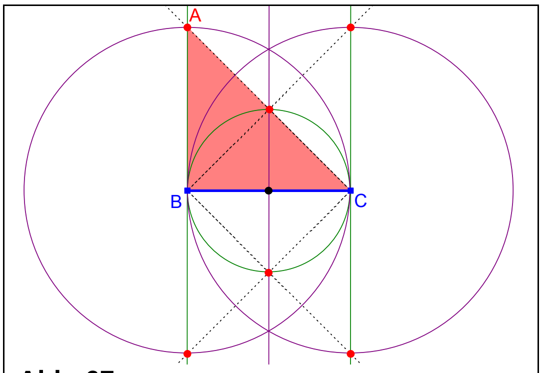


Abb. 67

2. Von einem Dreieck DEF ist bekannt, dass es gleichschenklig ist, einen 90°-Innenwinkel besitzt und die Seite [DF] die Länge $\overline{DF} = 5\text{ cm}$ hat.
   a) Konstruiere ein Dreieck mit den genannten Eigenschaften.
   b) Wie viele Dreiecke mit diesen Eigenschaften gibt es? Begründe deine Antwort!
   c) Ergänze die oben angegebenen Bedingungen so, dass dein in a) konstruiertes Dreieck das einzige ist, das die Bedingungen erfüllt.

Lösung:
Aufgaben a) und b): Vgl. Abb. 68! Zu b) Begründung: Die möglichen Lagen von A ergeben sich durch die Schnittpunkte der „Linien der Gleichschenkligkeit“ mit denen der „Rechtwinkligkeit“. (Diese Linien umfassen jeweils alle Möglichkeiten!) Es sind also genau sechs derartige Dreiecke möglich. Die Konstruktion der genannten Linien ist Teil der Lösung!
Aufgabe c): Die Antwort bezieht sich auf das in Abb. 68 eingezeichnete Dreieck. Der Innenwinkel bei E (der Winkel ε) ist der rechte Winkel und das Dreieck ABC hat einen mathematisch positiven Umlaufsinn.

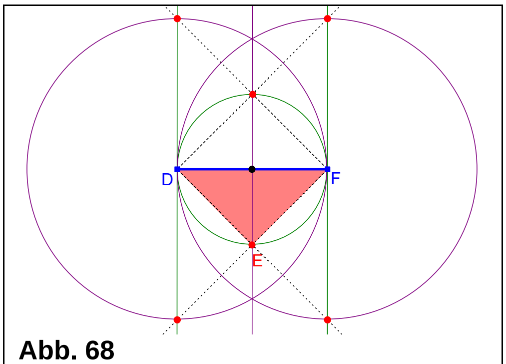


Abb. 68

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Dreicksgrundformen beim Wandern entlang einer Kurve

3. Der Eckpunkt Y des Dreiecks XYZ wandert entlang der in der Abbildung (vgl. Abb. 69) eingezeichneten Kurve. Die eingezeichnete Lage von Y ist der Startpunkt. Von hier aus wandert Y entlang der Kurve nach rechts. Welche Dreiecksgrundformen durchläuft das Dreieck XYZ dabei der Reihe nach?

   Hinweis: Zur Bearbeitung der Aufgabe kannst du direkt auf diesem Blatt in die Abbildung (vgl. Abb. 69) Hilfslinien einzeichnen.

   Anmerkungen:
   - Unter „Dreiecksgrundformen“ sind die folgende Dreiecksarten zu verstehen: Stumpfwinklig, spitzwinklig, gleichschenklig, rechtwinklig, gleichseitig, gleichschenklig-rechtwinklig, gleichschenklig-stumpfwinklig, gleichschenklig-spitzwinklig.
   - Es kann auch Lagen von Y geben, so dass XYZ kein Dreieck ist. Gib in diesem Fall als „Dreiecksform“ **Kein Dreieck** an.

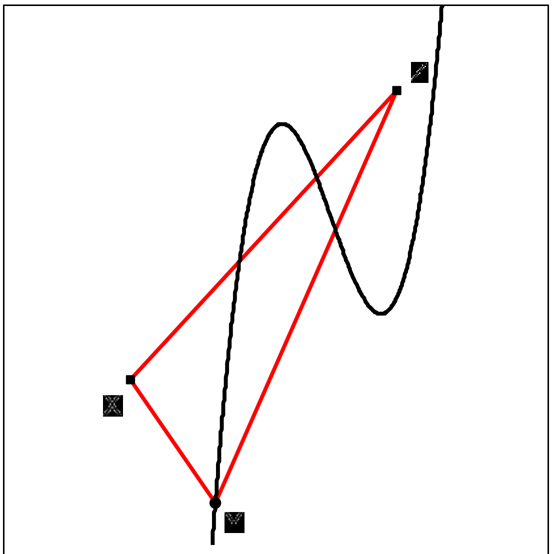


Abb. 69

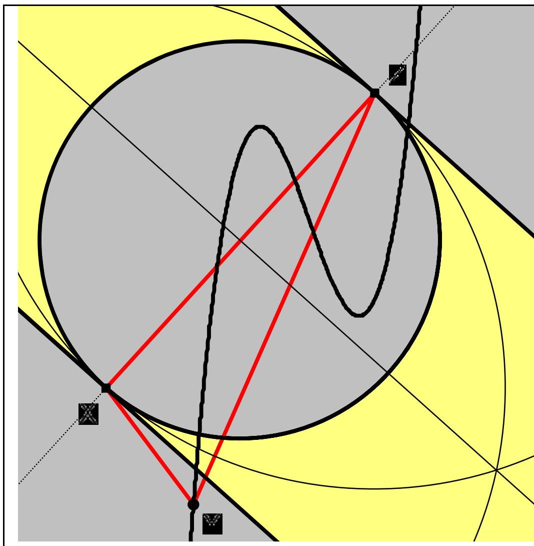


Abb. 70

Lösung: (Vgl. Abb. 70)
(Umlaufsinn positiv (+) bzw. negativ (–).)

- Stumpfwinklig (+)
- rechtwinklig (+)
- spitzwinklig (+)
- gleichschenklig-spitzwinklig (+)
- spitzwinklig (+)
- rechtwinklig (+)
- stumpfwinklig (+)
- **kein Dreieck**
- stumpfwinklig (–)
- gleichschenklig-stumpfwinklig (–)
- stumpfwinklig (–)
- **kein Dreieck**
- stumpfwinklig (+)
- rechtwinklig (+)
- spitzwinklig (+)
- gleichschenklig-spitzwinklig (+)
- spitzwinklig (+)
- rechtwinklig (+)
- stumpfwinklig (+)
- **kein Dreieck**
- stumpfwinklig (–)

4. Der Eckpunkt U des Dreiecks UVW wandert entlang der in der Abbildung (vgl. Abb. 71) eingezeichneten Kurve. Die eingezeichnete Lage von U ist der Startpunkt. Von hier aus wandert U entlang der Kurve nach rechts. Welche Dreiecksgrundformen durchläuft das Dreieck UVW dabei der Reihe nach?

   Hinweis: Zur Bearbeitung der Aufgabe kannst du direkt auf diesem Blatt in die Abbildung (vgl. Abb. 71) Hilfslinien einzeichnen.

   Anmerkungen:
   - Unter „Dreiecksgrundformen“ sind die folgende Dreiecksarten zu verstehen: Stumpfwinklig, spitzwinklig, gleichschenklig, rechtwinklig, gleichseitig, gleichschenklig-rechtwinklig, gleichschenklig-stumpfwinklig, gleichschenklig-spitzwinklig.
   - Es kann auch Lagen von U geben, so dass UVW kein Dreieck ist. Gib in diesem Fall als „Dreiecksform“ **Kein Dreieck** an.

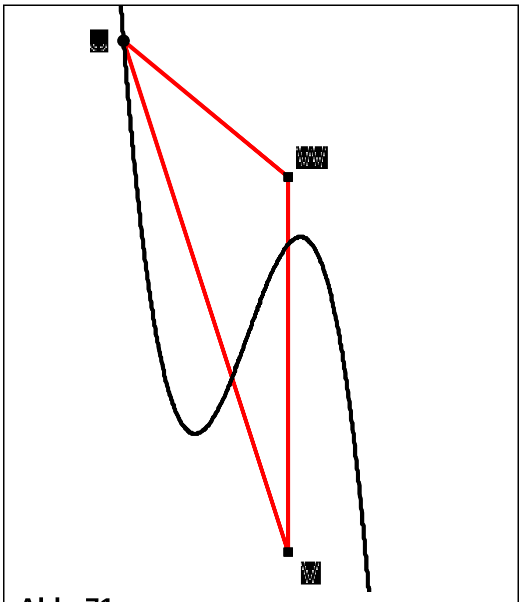


Abb. 71

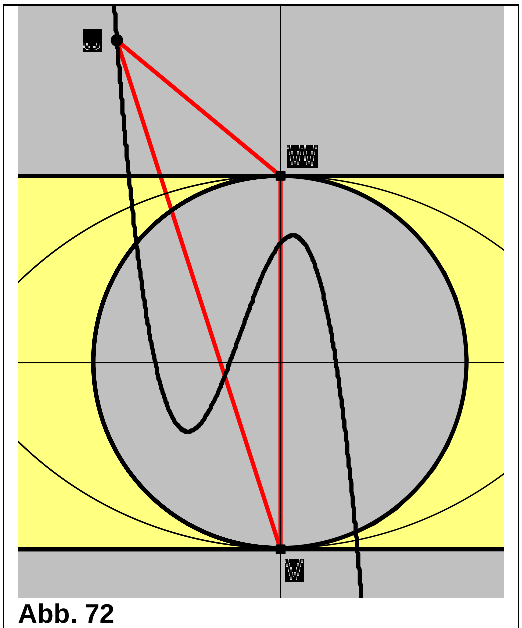


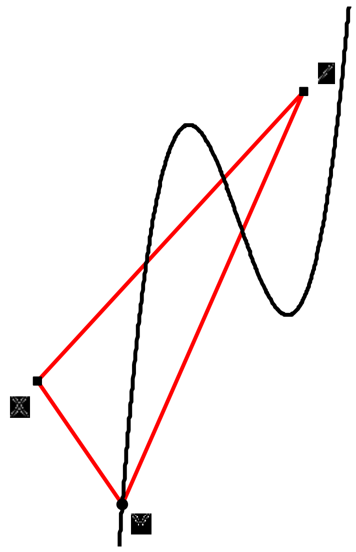
Abb. 72

Lösung: (Vgl. Abb. 72)
(Umlaufsinn positiv (+) bzw. negativ (–).)

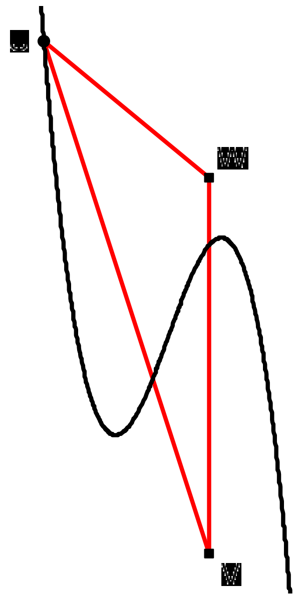
- Stumpfwinklig (+)
- rechtwinklig (+)
- spitzwinklig (+)
- gleichschenklig-spitzwinklig (+)
- spitzwinklig (+)
- rechtwinklig (+)
- stumpfwinklig (+)
- gleichschenklig-stumpfwinklig (+)
- stumpfwinklig (+)
- gleichschenklig-stumpfwinklig (+)
- stumpfwinklig (+)
- **kein Dreieck**
- stumpfwinklig (–)
- gleichschenklig-stumpfwinklig (–)
- stumpfwinklig (–)
- rechtwinklig (–)
- spitzwinklig (–)
- gleichschenklig-spitzwinklig (–)
- spitzwinklig (–)
- rechtwinklig (–)
- stumpfwinklig (–)

Darstellung der Aufgaben in Schulaufgabenform

i. Der Eckpunkt Y des Dreiecks XYZ wandert entlang der in der Abbildung eingezeichneten Kurve. Die eingezeichnete Lage von Y ist der Startpunkt. Von hier aus wandert Y entlang der Kurve nach rechts. Welche Dreiecksgrundformen durchläuft das Dreieck XYZ dabei der Reihe nach?



ii. Der Eckpunkt U des Dreiecks UVW wandert entlang der in der Abbildung eingezeichneten Kurve. Die eingezeichnete Lage von U ist der Startpunkt. Von hier aus wandert U entlang der Kurve nach rechts. Welche Dreiecksgrundformen durchläuft das Dreieck UVW dabei der Reihe nach?



iii. Von einem Dreieck ABC ist bekannt, dass es rechtwinklig ist, zwei 45°-Innenwinkel besitzt und die Seite [BC] die Länge $\overline{BC} = 5\text{ cm}$ hat.
   a) Konstruiere ein Dreieck mit den genannten Eigenschaften.
   b) Wie viele Dreiecke mit diesen Eigenschaften gibt es? Begründe deine Antwort!
   c) Ergänze die oben angegebenen Bedingungen so, dass dein in a) konstruiertes Dreieck das einzige ist, das die Bedingungen erfüllt.

iv. Von einem Dreieck DEF ist bekannt, dass es gleichschenklig ist, einen 90°-Innenwinkel besitzt und die Seite [DF] die Länge $\overline{DF} = 5\text{ cm}$ hat.
   a) Konstruiere ein Dreieck mit den genannten Eigenschaften.
   b) Wie viele Dreiecke mit diesen Eigenschaften gibt es? Begründe deine Antwort!
   c) Ergänze die oben angegebenen Bedingungen so, dass dein in a) konstruiertes Dreieck das einzige ist, das die Bedingungen erfüllt.

8 Dreieckstransversalen

Unterrichtsstunden:	3
Inhaltsziele:	• Dreieckstransversalen wiederholen bzw. kennen lernen • Entdecken des gemeinsamen Schnittpunktes • Konstruktionen
Voraussetzungen:	• Vorhergehende Stunden im Rahmen der Dreiecksgrundformen
Unterrichtsform:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Hoehen.geo; Mittelsenkrechte.geo; Winkelhalbierende.geo; Radius_des_Inkreises.geo; Seitenhalbierende.geo; Dreiecksklassifikation.MAK; Dreiecksklassifikation_g_E.MAK; Hoehen_2.geo, Mittelsenkrechte_2.geo; Winkelhalbierende_2.geo; Hoehenschnittpunkt_Lage.geo; Umkreismittelpunkt_Lage.geo; Innkreismittelpunkt_Lage.geo; Schwerpunkt_Lage.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen“ **abwählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **kein Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen“

Anmerkungen:

- Um etwas Zeit zu sparen, werden die Dreieckstransversalen (transversus [lat.]: „quer durch“) im Unterrichtsgespräch eingeführt. Die entsprechenden Hefteinträge finden Sie auf den Seiten 34 bis 38.
- Die Entdeckung, dass sich die Transversalen jeweils in einem Punkt schneiden, wird zunächst nebenbei beim Konstruieren der Transversalen (mit Zirkel und Lineal) gemacht. Zumindest beim Umkreismittelpunkt (Schnittpunkt aller drei Mittelsenkrechten) sollte man darüber sprechen, warum auch die dritte Mittelsenkrechte durch den Schnittpunkt der beiden anderen Mittelsenkrechten laufen muss.[5] Es geht darum zu **verstehen, warum das so sein muss** und nicht darum, dass es so ist!
- Falls Sie (aus Zeitgründen) bei einzelnen Transversalen im Unterricht keine Konstruktion durchführen wollen, finden Sie auf Seite 33 alle Abbildungen zum Austeilen an die Schüler. Beachten Sie dabei bitte, dass es an dieser Stelle sehr wichtig ist, die Konstruktionen aller Transversalen zu üben! (Vgl. dazu die Hausaufgaben auf Seite 38.)
- Im Sinne des Beweglichen Denkens ist die Frage interessant, wie sich die Lage der Transversalenschnittpunkte verändert, wenn man die Dreiecksform variiert. Anhand der Dateien Mittelsenkrechte.geo, Winkelhalbierende.geo, Hoehen.geo und Seitenhalbierende.geo wird im Unterrichtsgespräch diskutiert, wann sich die Transversalen **innerhalb des Dreiecks**, **auf dem Rand des Dreiecks** bzw. **außerhalb des Dreiecks** schneiden, falls man einen Eckpunkt bewegt. Für die Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden geschieht dies direkt im Unterricht.[6] Dabei ist darauf zu achten, dass die Schüler zuerst Vermutungen anstellen und diese begründen, bevor eine Überprüfung mit der Datei Mittelsenkrechte.geo erfolgt. Es soll also die Abhängigkeit von den „Dreiecksgrundformen“ untersucht werden. Hier geht es darum, im Kopf, durch geeignete Argumente gestützt, zu den Ergebnissen (vgl. die Hefteinträge auf den Seiten 34 bis 38) zu kommen.[7]

---

[5] Zeichnungen zu allen in diesem Schuljahr durchführbaren Beweisen finden Sie in den Dateien Hoehen_2.geo, Mittelsenkrechte_2.geo und Winkelhalbierende_2.geo. Da diese Beweise einen eher statischen Charakter haben, wird hier nicht näher darauf eingegangen.

[6] Bei den anderen Transversalenschnittpunkten werden diese Fragen als Hausaufgabe (vgl. Seite 38) gestellt und erarbeitet. Bei der Hausaufgabenbesprechung anhand der genannten Dateien, werden die Ergebnisse und deren Begründungen gesichert.

[7] Zur genauen Überprüfung der begründeten Vorhersagen können auch die Makros Dreiecksklassifikation.MAK bzw. Dreiecksklassifikation_g_E.MAK eingesetzt werden.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

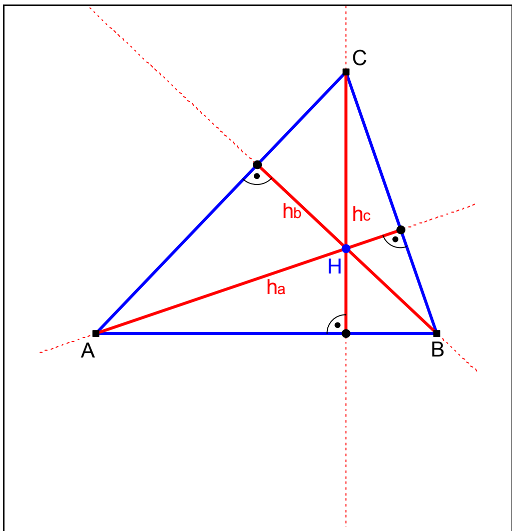


Abb. 73

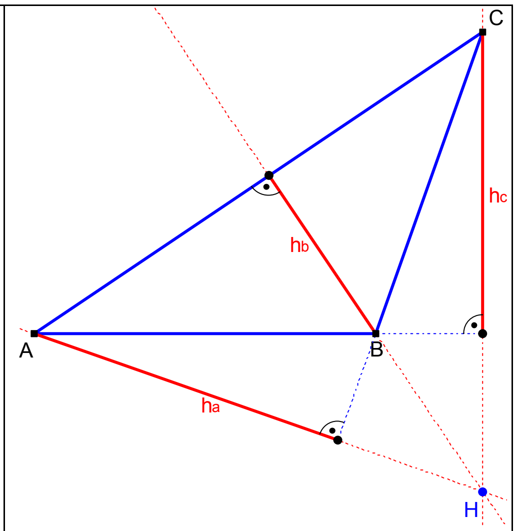


Abb. 74

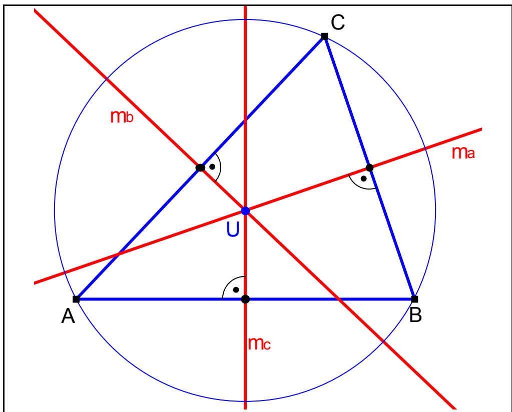


Abb. 75

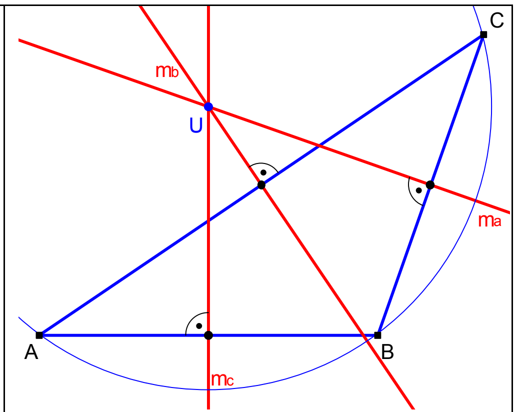


Abb. 76

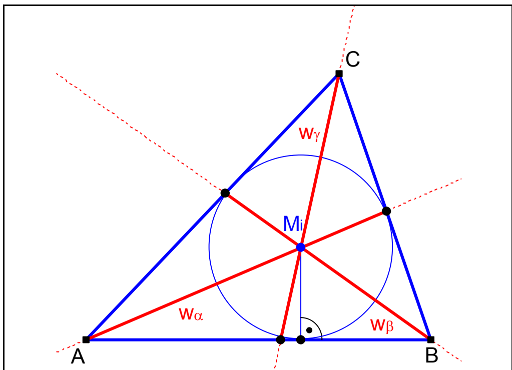


Abb. 77

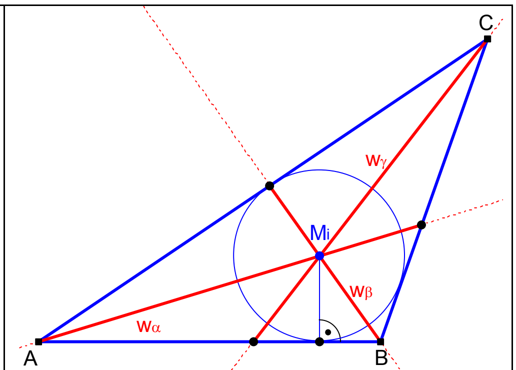


Abb. 78

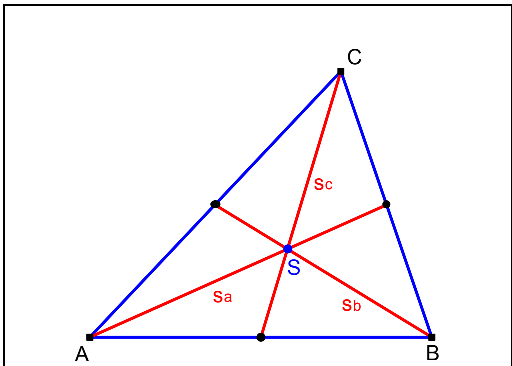


Abb. 79

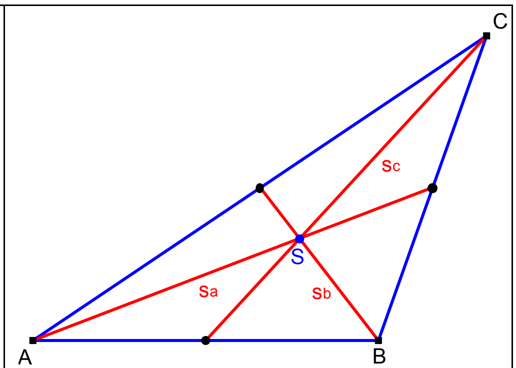


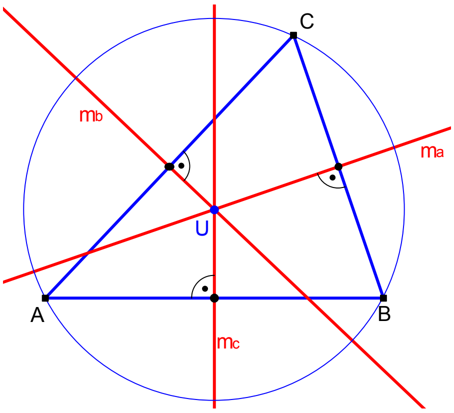
Abb. 80

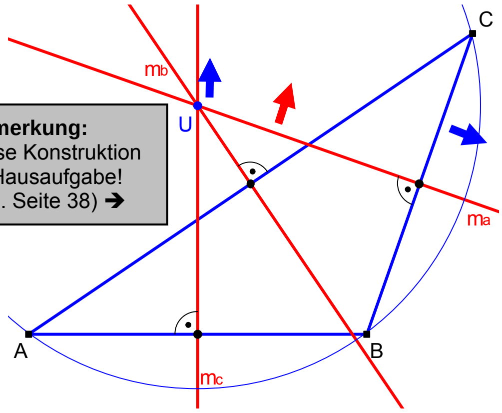
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Hefteintrag:

Transversalen im Dreieck

a) Mittelsenkrechte

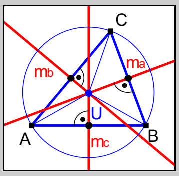




Anmerkung:
Diese Konstruktion ist Hausaufgabe!
(Vgl. Seite 38) ➔

Anmerkungen:

- Ausgangspunkt kann hier die Frage sein, ob jedes Dreieck (nicht nur die rechtwinkligen mit dem Thaleskreis) einen Umkreis besitzt. Welche Eigenschaft muss der Mittelpunkt des Umkreises haben? (Gleiche Entfernung zu allen Eckpunkten.) Wo liegen alle Punkte, die zu **zwei** Eckpunkten dieselbe Entfernung haben? …
- Die Mittelsenkrechten von zwei verschiedenen Dreiecksseiten schneiden sich immer, da sie andernfalls echt parallel sein müssten, was zur Folge hätte, dass auch die beiden Dreiecksseiten entweder echt parallel sein oder auf derselben Gerade liegen müssten. Dies ist offensichtlich nicht möglich.
- Die dritte Mittelsenkrechte muss durch den Schnittpunkt der beiden anderen Mittelsenkrechten laufen. Die Erklärung dafür liefert der folgende



Beweis: (Vgl. Mittelsenkrechte_2.geo)

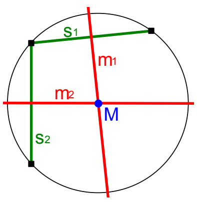
O.B.d.A.: $\{U\} = m_a \cap m_b$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} U \in m_a \Rightarrow \overline{UB} = \overline{UC} \\ U \in m_b \Rightarrow \overline{UA} = \overline{UC} \end{cases}\right\} \Rightarrow \overline{UA} = \overline{UB} \Rightarrow U \in m_c$$

$$\Rightarrow \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC} \Rightarrow \{A; B; C\} \subset k\left(U; \overline{UA}\right) \qquad \#$$

Merke:

- Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt, dem **Umkreismittelpunkt**.
- Der Umkreismittelpunkt liegt bei
  - spitzwinkligen Dreiecken innerhalb des Dreiecks,
  - rechtwinkligen Dreiecken auf der Mitte einer Seite (Thaleskreis!),
  - stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks.
- Damit kann man den **Mittelpunkt eines Kreises** konstruieren, wenn man ihn noch nicht kennt: Man zeichnet zwei Kreissehnen ein und konstruiert die Mittelsenkrechten zu diesen Sehnen. Deren Schnittpunkt ist der Mittelpunkt.

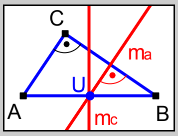


Anmerkung: (Vgl. Kreismittelpunkt.geo → Rückblende)

Allgemeine Anmerkung: Die **Begründungen für die Lagen der Transversalenschnittpunkte** (hier des Umkreismittelpunktes) **sollten verbal erfolgen und nicht aufgeschrieben werden.** Der Lerneffekt tritt über die Übung ein. Eine Notation von Formulierungen in das Schulheft führt eher zum auswendig Lernen und Abspulen, als zu einem reflektierten Umgang! Auch die folgenden Argumentationshinweise sollten in diesem Sinn nur als Anhaltspunkt verstanden werden. Es gibt sicher verschiedene Möglichkeiten der Verbalisierung. Es sollten insbesondere die heuristischen Fragen **„Was passiert mit … , wenn …“** und **„Was ändert sich nicht, wenn …“** thematisiert und als hilfreich herausgearbeitet werden!

Anmerkung:

Der Umkreismittelpunkt liegt bei



- rechtwinkligen Dreiecken auf der Mitte der Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

  Mögliche Argumentation:
  Es handelt sich um den Mittelpunkt des Thaleskreises!

- spitzwinkligen Dreiecken innerhalb und bei stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks.

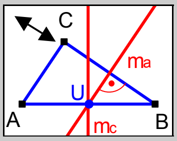
  Mögliche Argumentation:
  Jede Bewegung von C in der oberen Halbebene (oberhalb der Geraden AB) kann durch zwei Teilbewegungen realisiert werden:

  (1) Bewegung von C auf der Halbgeraden [BC, d. h. Änderung der Länge von [BC].

  (2) Bewegung von C auf einem Kreisbogen $k\left(B; \overline{BC}\right)$ um B mit festem Radius, d. h. Änderung der Richtung von [BC.

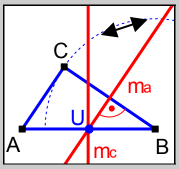
  Beide genannten Bewegungen ändern die Lage von mc nicht!

  Wir betrachten im Folgenden die beiden Teilbewegungen getrennt voneinander.



(1) **Änderung der Länge von [BC]** bewirkt eine Parallelverschiebung von m_a.

- Verkürzung von [BC] aus der gezeichneten Länge
  - lässt β konstant, verkleinert α und vergrößert damit γ (Innenwinkelsumme). Ausgangsgröße von γ war 90°. → Dreieck stumpfwinklig.
  - führt zu einer Verschiebung von m_a nach rechts unten. → U wandert nach unten aus dem Dreieck hinaus.
- Verlängerung von [BC] aus der gezeichneten Länge
  - lässt β konstant, vergrößert α und verkleinert damit γ (Innenwinkelsumme). Ausgangsgröße von γ war 90°. → Dreieck spitzwinklig. Diese Argumentation funktioniert so lange, bis $\alpha = 90°$ wird. Dann liegt wieder ein rechtwinkliges Dreieck vor und m_a und m_c schneiden sich in der Mitte der Strecke [BC]. Bewegt man anschließend noch weiter, so wird $\alpha > 90°$ und das Dreieck wird stumpfwinklig.
  - führt zu einer Verschiebung von m_a nach links oben. → U wandert nach oben durch das Dreieck und schließlich aus dem Dreieck hinaus.



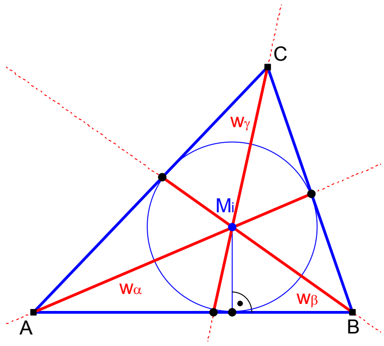
(Vgl. Umkreismittelpunkt_Lage.geo)

(2) Änderung der Richtung von [BC] bewirkt eine Drehung von ma.

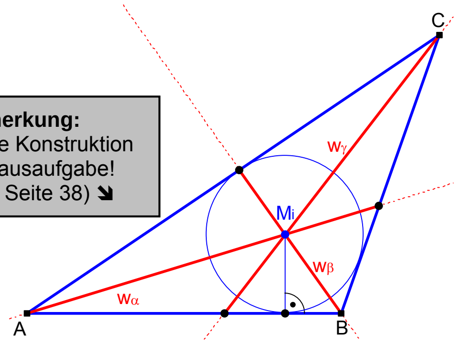
- Rechtsdrehung von [BC] aus der gezeichneten Lage
  - vergrößert β und verkleinert α und γ. Damit legt die Winkelgröße von β die Form des Dreiecks fest. ($\beta < 90°$ → Dreieck spitzwinklig; $\beta = 90°$ → Dreieck rechtwinklig; $\beta > 90°$ → Dreieck stumpfwinklig)
  - führt m_a im 90°-Winkel mit, dreht als m_a nach rechts. → U wandert nach oben durch das Dreieck und schließlich aus dem Dreieck hinaus.
- Linksdrehung von [BC] aus der gezeichneten Lage
  - verkleinert β und α und vergrößert γ. Ausgangsgröße von γ war 90°. → Dreieck stumpfwinklig.
  - führt m_a im 90°-Winkel mit, dreht als m_a nach links. → U bewegt sich nach unten aus dem Dreieck hinaus.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

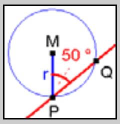
b) Winkelhalbierende

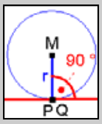


Anmerkung:
Diese Konstruktion ist Hausaufgabe! (Vgl. Seite 38) ➘



Anmerkungen:

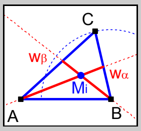




- Ausgangspunkt kann hier die Frage sein, ob jedes Dreieck neben einem Umkreis auch einen Inkreis besitzt. Welche Eigenschaft muss ggf. der Mittelpunkt des Inkreises haben? (Gleiche Entfernung zu allen Seiten.) Wo liegen alle Punkte, die zu **zwei** sich schneidenden Geraden dieselbe Entfernung haben? …
- Um den Inkreisradius zu erarbeiten kann folgende Hilfe gegeben werden: „Der Inkreis berührt alle Seiten von Innen." Die Bedeutung dieser Aussage kann mit Hilfe der Datei Radius_des_Inkreises.geo noch zusätzlich herausgearbeitet werden.

Merke:
- Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, dem **Inkreismittelpunkt**.
- Der Inkreis berührt alle Seiten von innen.
- Der Radius des Inkreises ergibt sich als Lotstrecke des vom Inkreismittelpunkt auf eine Dreiecksseite errichteten Lotes.
- Der Inkreismittelpunkt liegt immer innerhalb des Dreiecks!

Anmerkung: (Vgl. die allgemeine Anmerkung auf Seite 35 zum Umkreismittelpunkt.)

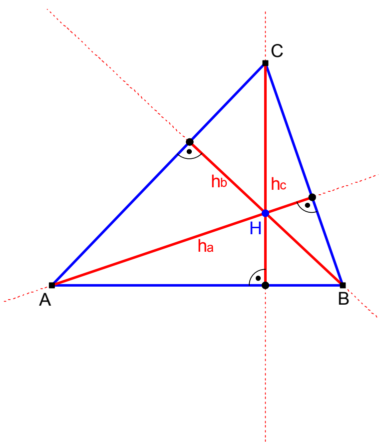


(Vgl. Inkreismittelpunkt_Lage.geo)

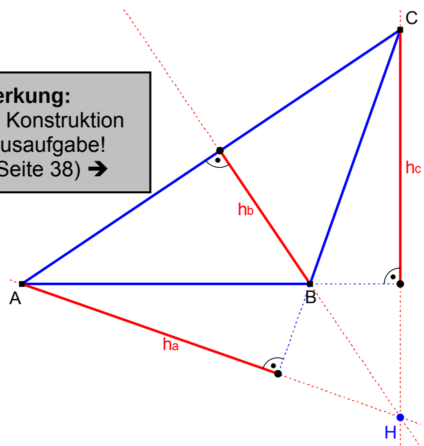
Unabhängig davon, wie der Punkt C bewegt wird, haben die Winkelhalbierenden immer denselben Abstand zu zwei Dreiecksseiten. Nähert sich nun ein im Inneren des Dreiecks liegender Punkt einer Winkelhalbierenden einer Dreiecksseite, so muss er sich in gleicher Weise einer weiteren Dreiecksseite nähern. Dies hat zur Folge, dass ein Punkt einer Winkelhalbierenden (insbesondere auch der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender) sich nicht aus dem Dreieck herausbewegen kann. Nähert sich der Punkt nämlich immer mehr einer Dreiecksseite, so wird ein Innenwinkel des Dreiecks immer kleiner. Erreicht der Punkt die Dreiecksseite, so ist der Innenwinkel ein Nullwinkel und das Dreieck damit zur Strecke entartet!

c) Höhen

Definition: Eine Höhe im Dreieck ist das von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Dreieckseite (Gerade!) gefällte Lot (bzw. die Lotstrecke).



Anmerkung:
Diese Konstruktion ist Hausaufgabe! (Vgl. Seite 38) ➔

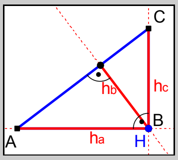


StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Merke:
- Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt (**Höhenschnittpunkt**).
- Der Höhenschnittpunkt liegt bei
  - spitzwinkligen Dreiecken innerhalb des Dreiecks,
  - rechtwinkligen Dreiecken auf einem Eckpunk,
  - stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks.

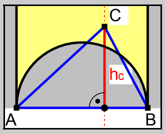
Anmerkung: (Vgl. die allgemeine Anmerkung auf Seite 35 zum Umkreismittelpunkt. Diese Argumentation ist Hausaufgabe. Vgl. hierzu Seite 38.)

Der Höhenschnittpunkt liegt bei



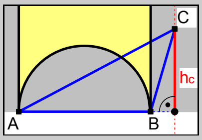
- rechtwinkligen Dreiecken auf einem Eckpunkt,

  Mögliche Argumentation:
  Zwei der Höhen sind die Katheten des Dreiecks!



- spitzwinkligen Dreiecken innerhalb des Dreiecks,

  Mögliche Argumentation:
  Jeder Höhenfußpunkt liegt auf der zugehörigen Dreiecksseite, da der Eckpunkt beim spitzwinkligen Dreieck im Streifen [ohne Thaleskreis] zwischen den Loten zu den Endpunkten der Seite liegt. Damit verlaufen alle Höhen „quer durch das Dreieck" und müssen sich folglich im Dreieck schneiden.



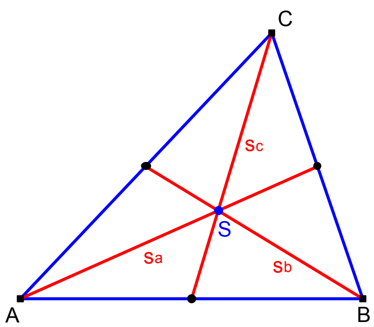
(Vgl. Hoehenschnittpunkt_Lage.geo)

- stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks.

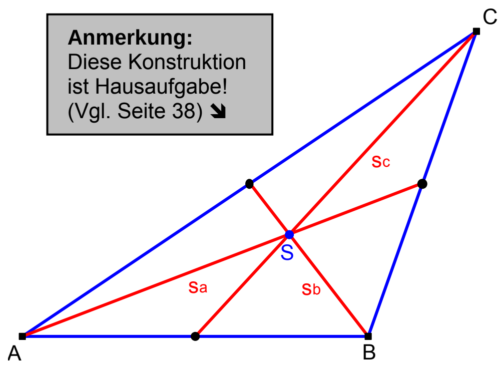
  Mögliche Argumentation:
  Wird ein Innenwinkel über 90° hinaus vergrößert, so „wandern zwei Lotfußpunkte aus den Seiten heraus", d.h. sie liegen nur noch auf den zugehörigen Geraden. Damit wandern aber auch die zugehörigen Höhen und die Lotgeraden aus dem Dreieck heraus und haben nur noch den jeweiligen Eckpunkt mit dem Dreieck gemeinsam. → Der Höhenschnittpunkt wandert aus dem Dreieck heraus.

d) Seitenhalbierende

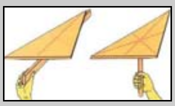
Definition: Eine **Seitenhalbierende** (Schwerlinie) im Dreieck ist eine Verbindungsstrecke von einem Eckpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Dreieckseite.



Anmerkung:
Diese Konstruktion ist Hausaufgabe!
(Vgl. Seite 38) ➘

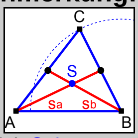


Anmerkung: Die Schwerlinien und Schwerpunkteigenschaft sollte man mit einem Dreieck aus Pappe vorführen (vgl. die Abbildung). Schöner ist es, wenn jeder Schüler selbst ein Pappdreieck ausschneidet, die Seitenhalbierenden einzeichnet und die Eigenschaften überprüft. Dabei werden die Schwerlinien auf einem Lineal und der Schwerpunkt auf einer Bleistiftspitze balanciert.



Merke: Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Schwerpunkt**.
Der Schwerpunkt liegt für alle Dreiecksformen innerhalb des Dreiecks!

Anmerkung:



(Vgl. Schwerpunkt _Lage.geo)

(Vgl. die allgemeine Anmerkung auf Seite 35 zum Umkreismittelpunkt. Diese Argumentation ist Hausaufgabe. Vgl. hierzu Seite 38.)

Unabhängig davon, wie der Punkt C bewegt wird, verlaufen die Seitenhalbierenden, die einen Eckpunkt und die gegenüberliegende Seitenmitte verbinden, immer im Inneren des Dreiecks. Wenn sie sich also schneiden, dann tun sie das innerhalb des Dreiecks.

Anmerkung: Die folgenden Sätze sind im Unterricht sicher schon als Erfahrungstatsachen aufgetaucht und werden hier als solche noch einmal expliziert, um sie für Argumentationen benutzen zu können.

Merke: Offensichtlich gilt in jedem Dreieck:

- Dem größeren Innenwinkel liegt die längere Dreiecksseite gegenüber (und umgekehrt).
- **Dreiecksungleichung:**
  Die Summe zweier Seitenlängen ist größer als die dritte Seitenlänge $(a+b>c;\quad a+c>b;\quad b+c>a)$.

Hausaufgaben:

Anmerkungen:

- Die Aufgabe (2) ist im Sinne des Beweglichen Denkens die entscheidende Aufgabe!
- Die Hausaufgaben (1) und (3) sind als Konstruktionsübungen zu verstehen. Die Aufgabe (3) ist als Ergänzung gedacht und kann bedenkenlos entfallen. Wenn sie aufgegeben wird, dann geht es bei „Was fällt dir auf?“ nur um die Entdeckung, aber sicher nicht um eine Begründung dieser Eigenschaft.

(1) Im Unterricht wurden die Transversalen zu einem spitzwinkligen Dreieck konstruiert. Konstruiere (mit Zirkel und Lineal) die entsprechenden Transversalen zu einem stumpfwinkligen Dreieck in dein Schulheft.

(2) Überlegt euch, wo (innerhalb, auf dem Rand bzw. außerhalb des Dreiecks) sich
   a) die Höhen,
   b) die Seitenhalbierenden

   bei spitzwinkligen, rechtwinkligen bzw. stumpfwinkligen Dreiecken schneiden. Schreibt dies jeweils in euer Hausheft und notiert dazu, wie man das erklären kann.

(3) Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck (kleinste Seitenlänge 6 cm) in dein Heft und konstruiere dazu den Höhenschnittpunkt H, den Umkreismittelpunkt U, den Inkreismittelpunkt M_i und den Schwerpunkt S. Zeichne die Gerade HU. Was fällt dir auf? (Eulersche Gerade)

Anmerkung: An die ausgeführten Stunden sollte sich eine Stunde anschließen, in der auf Dreieckskonstruktionen eingegangen wird, die auch die Längen von Transversalstrecken als gegebenen Größen beinhalten. Die entscheidende Idee ist hier, zunächst ein geeignetes Teildreieck zu konstruieren und dieses zum gesuchten Dreieck zu „ergänzen“. Zu diesem Zweck muss auch kurz darauf eingegangen werden, dass für Transversalen, die eigentlich Geraden sind (Winkelhalbierende) im Zusammenhang mit Konstruktionsaufgaben oft Längen angegeben sind. Diese beziehen sich dann auf die Teilstrecke der Gerade, die sich innerhalb des Dreiecks befindet.
(Vgl. hierzu **Basis Mathematik 7**, Ausgabe B Geometrie, bsv, 1995^2, **S. 85 ff**
oder **Lambacher Schweizer**, Geometrie Bayern 7, Klett, 1993, **S. 98 ff**
oder **Schmitt Wohlfarth**, Mathematik Buch 7 G Geometrie, bsv, 1995, **S. 88 ff**)

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

9 Weitere Kongruenzabbildungen und ihre Eigenschaften

Unterrichtsstunden:	4
Inhaltsziele:	Erarbeitung der Eigenschaften von • Verschiebung, • Drehung und • Punktspiegelung
Voraussetzungen:	Eigenschaften der Achsenklappung
Unterrichtsform:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer

Anmerkungen:

- Die drei verbleibenden Bewegungen (Kongruenzabbildungen), nämlich die Verschiebung, die Drehung und die Punktspiegelung werden in knapper Form im Unterrichtsgespräch eingeführt. Hier soll die intensive Vorarbeit bei der Achsenklappung und entsprechende Analogien genutzt werden.
- Bewegungen werden über ihre Eigenschaften eingeführt, die jeweils aus realen Bewegungen (von Punkten bzw. Figuren) anschaulich hergeleitet (bzw. erzeugt) werden. Hier wird ein anschauliches aus der realen bzw. hineingesehenen Bewegung erfasstes Verständnis der geometrischen Abbildungen angestrebt. Auf dieses so erzeugte Verständnis, wird später im Rahmen der Kongruenzsätze (und wo immer sonst abbildungsgeometrische Argumente benötigt werden) aufgebaut. Insbesondere wird hier darauf verzichtet, die Punktspiegelung, die Drehung und die Verschiebung auf eine doppelte Achsenklappung zurückzuführen.[8]
- Die Erarbeitung einer Definition und erster Eigenschaften der drei Bewegungen erfolgt jeweils mit Hilfe der entsprechenden Datei mit dem Wort „**Motivation**" im Namen.[9] Weitere Eigenschaften lassen sich dann in der Regel besser mit Hilfe der Dateien „**…_Bewegung_Erklaerung.geo**" erarbeiten.

Punktspiegelung

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	Erarbeitung der Eigenschaften der Punktspiegelung
Voraussetzungen:	Achsenklappung
Unterrichtsformen:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Punktspiegelung_Motivation_Karte.geo Punktspiegelung_Motivation_Karte_800_600.geo Punktspiegelung_Bewegung_Erklaerung.geo Punktspiegelung_Bewegung_Erklaerung_2.geo

Anmerkung:

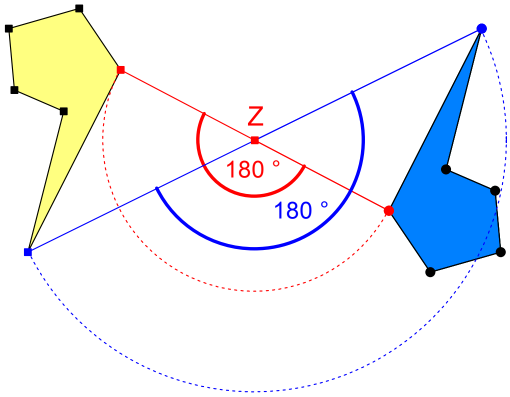
Zunächst wird die Karte (das Bild) in der Datei Punktspiegelung_Motivation_Karte.geo betrachtet und die Frage geklärt, was daran auffällt. Die Schüler werden schnell die beiden analogen Teile erkennen. Hier knüpft man die Frage an, wie die beiden Teile des Bildes miteinander zur Deckung gebracht werden können. Nach einigen Diskussionen in der Klasse wird man auf die Idee kommen, die eine Teilfigur um den roten Punkt zu drehen. Diese Drehung lässt sich durch Ziehen am blauen Punkt links oben realisieren. Es bleibt die Frage zu klären, wie weit man drehen muss. Hier kann das Einzeichnen einer Verbindungsgeraden der beiden hellgrünen Punkte die entscheidende Idee liefern. Anschließend wird die Definition in das Heft notiert.

[8] Wenn Sie sich dafür interessieren, wie eine Zurückführung auf eine doppelte Achsenspiegelung mit Hilfe von Euklid DynaGeo aussehen könnte, dann betrachten Sie die Dateien Drehung_Bewegung_Achsenspiegelung.geo bzw. Verschiebung_Dreieck_Achsenspiegelung.geo in der Rückblende.

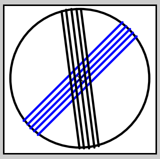
[9] Die jeweiligen Dateien „**…_Motivation_800_600.geo**" sind für den Fall zu benutzen, dass in der Projektion nur eine Bildschirmauflösung von 800x600 Pixel möglich ist.

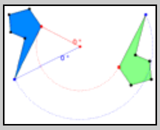
Definition:

- Figuren der Zeichenebene, die durch Drehung um einen Punkt Z (Zentrum) um 180° miteinander zur Deckung kommen, heißen zueinander **punktsymmetrisch**.
- **Eine** Figur heißt **punktsymmetrisch** (zu sich selbst), wenn sie durch Drehung um einen Punkt Z um 180° mit ihrer Ausgangslage zur Deckung kommt.



Anmerkung:





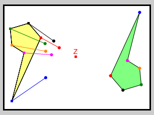
Die Symmetrie **einer** Figur zu sich selbst wird nur bei dieser Definition exemplarisch notiert, sollte aber bei jeder „Symmetrieform" kurz angesprochen werden (vgl. die Hausaufgaben). Zur Begriffsklärung empfiehlt es sich die Datei punktsymmetrische_Figur.geo aufzurufen und durch Ziehen am blauen Punkt links oben die Drehung durchzuführen.
Die unten aufgeführten Eigenschaften von punktsymmetrischen Figuren werden an Hand der Datei Punktspiegelung_Bewegung_Erklaerung.geo diskutiert. Es geht insbesondere darum, zu erarbeiten, dass eine Drehung der Gesamtfigur(!) die Winkel, Strecken, Schnittpunkte, … nur in Ihrer Lage, nicht aber in Ihren Eigenschaften verändert. Die Eigenschaft, dass entsprechende Strecken und Geraden parallel zueinander sind, lässt sich über das Winkelverschiebungsaxiom oder den Stufenwinkelsatz begründen. („Sehen" die Schüler diesen Zusammenhang selbst und können Sie ihn entsprechend begründen?)

Eigenschaften:

Bei zueinander punktsymmetrischen Figuren gilt:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß und haben gleichen Umlaufsinn (**gleichsinnige Winkeltreue**),
- entsprechende Strecken sind gleich lang (**Längentreue**),
- entsprechende Strecken und Geraden sind parallel zueinander,
- das Zentrum Z ist der einzige Punkt der Zeichenebene, der sich bei der Drehung nicht bewegt (**Fixpunkt**),
- Geraden durch das Zentrum sind punktsymmetrisch zu sich selbst (**Fixgeraden**),
- Schnittpunkte entsprechender Linien (Strecken, Geraden, Kreise, …) sind zueinander punktsymmetrisch (**Inzidenztreue**).
- entsprechende Punkte P und P′ liegen auf einer Gerade durch Z $\left(P' \in PZ\right)$ und haben den gleichen Abstand zu Z $\left(\overline{PZ} = \overline{P'Z}\right)$. Damit gilt: $\{P'\} = [PZ \cap k\left(Z; \overline{PZ}\right)$. (**Konstruktions- und Prüfeigenschaft**).

Anmerkung:



Die letzte Eigenschaft wird anhand der Datei Punktspiegelung_Bewegung_Erklaerung_2.geo erarbeitet. Hier wird ausgehend von der Bewegung der Punkte auf das Zentrum zu und dann darüber hinaus noch einmal die gegenseitige Lage von punktsymmetrischen Punkten zueinander thematisiert und vertieft. Die Bewegung der Punkte lässt sich mit Hilfe des roten Schiebereglers „Gleiten" durchführen. Diese Bewegung sollte langsam erfolgen, im Zentrum unterbrochen und dann bis zum jeweiligen punktsymmetrischen Punkt fortgesetzt werden. Bei der Pause im Zentrum wird die Frage gestellt, wie, d. h. in welche Richtung, die Bewegung nun weitergeht. Ziel ist hier, den Zusammenhang Drehung um 180° → gestreckter Winkel → Gerade ins Bewusstsein der Schüler zu rufen.
Diese Eigenschaften werden stark hervorgehoben, da sie die entscheidenden Eigenschaften für Konstruktionen und zu Prüfzwecken sind. Wichtig ist, deutlich herauszuarbeiten, dass diese Eigenschaften **nur eine andere Formulierung** der definierenden Eigenschaften für punktsymmetrische Figuren sind.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

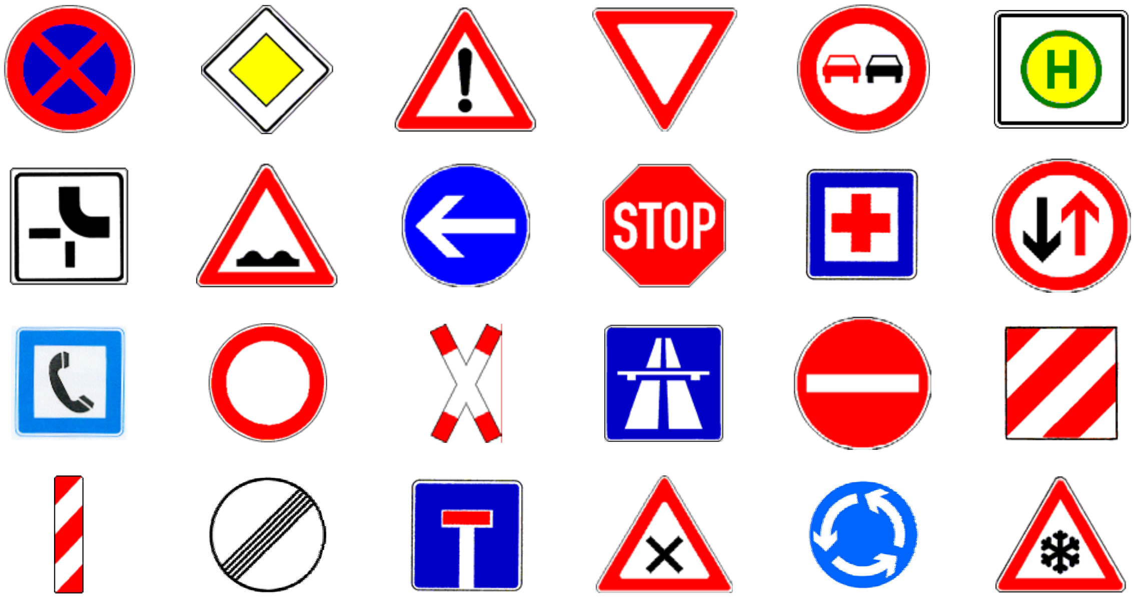
Hausaufgaben:

(1) Konstruiere zu einer von dir gezeichneten Figur (Vieleck) und einem von dir gewählten Zentrum die zugehörige punktsymmetrische Figur. Färbe punktsymmetrische Teilflächen mit derselben Farbe.

(2) Konstruiere zu zwei von dir beliebig vorgegebenen punktsymmetrischen Punkten P und P’ das Zentrum.

(3) Konstruiere ein punktsymmetrisches Viereck.

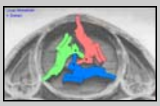
(4) Welche der Verkehrszeichen sind punktsymmetrisch zu sich selbst? Begründung!

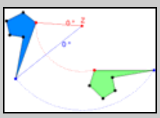


Drehung

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	Erarbeitung der Eigenschaften der Drehung
Voraussetzungen:	Punktspiegelung und ihre Eigenschaften
Unterrichtsformen:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Drehung_Motivation_Hasenfenster_Paderborn.geo Drehung_Motivation_Hasenfenster_Paderborn_800_600.geo Drehung_Motivation_Hasenfenster_Paderborn_Foto.geo Drehung_Motivation_Hasenfenster_Paderborn_Foto_800_600.geo Drehung_Bewegung_Erklaerung.geo (Drehung_Bewegung_Achsenspiegelung.geo)

Anmerkung:





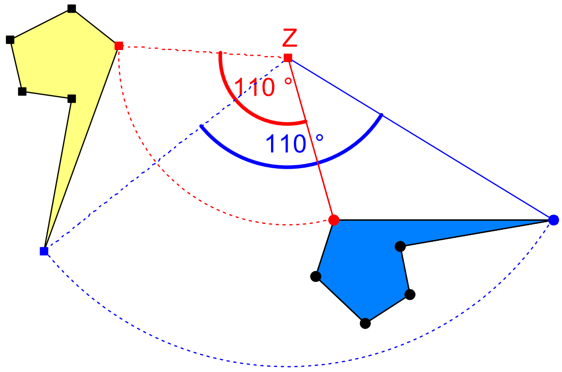
Zur Motivation kann entweder die Datei Drehung_Motivation_Hasenfenster_Paderborn_Foto.geo (Foto des realen Fensters im Hintergrund) oder Drehung_Motivation_Hasenfenster_Paderborn.geo (Zeichnung des Fensters mit identischen Hasen im Hintergrund) verwendet werden.[10] (Mit dem Schieberegler „Vermehren“ lassen sich aus dem einen alle drei farbig erzeugen.)
Die Erarbeitung der Eigenschaften erfolgt mit der Datei Drehung_Bewegung_Erklaerung.geo. Nachdem bereits die Punktspiegelung als Drehung um den Winkel 180° definiert wurde, lassen sich die dort gewonnenen Einsichten leicht auf eine (allgemeine) Drehung übertragen. **Wichtig ist insbesondere, die Unterschiede zwischen einer (allgemeinen) Drehung und einer Punktspiegelung herauszuarbeiten.** (Entsprechende Strecken sind in der Regel $(\text{d. h. wenn } \varphi \notin \{0°; 180°; 360°\})$ **nicht parallel** zueinander und es existieren in der Regel **keine Fixgeraden**!)

[10] Im Garten des Kreuzgangs des Paderborner Domes befindet sich das berühmte Hasenfenster, ein Wahrzeichen der Stadt Paderborn. Es ist ein Symbol für die Dreifaltigkeit Gottes. Jeder der drei Hasen besitzt nur ein eigenes Ohr, in der Gesamtdarstellung ergänzen sich die Ohren aber so, dass jeder Hase zwei Ohren zu haben scheint.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Definition:
Figuren der Zeichenebene, die durch Drehung um einen Punkt (Zentrum) um einen Winkel φ miteinander zur Deckung kommen, heißen zueinander **drehsymmetrisch**.



Eigenschaften: Bei zueinander drehsymmetrischen Figuren gilt:

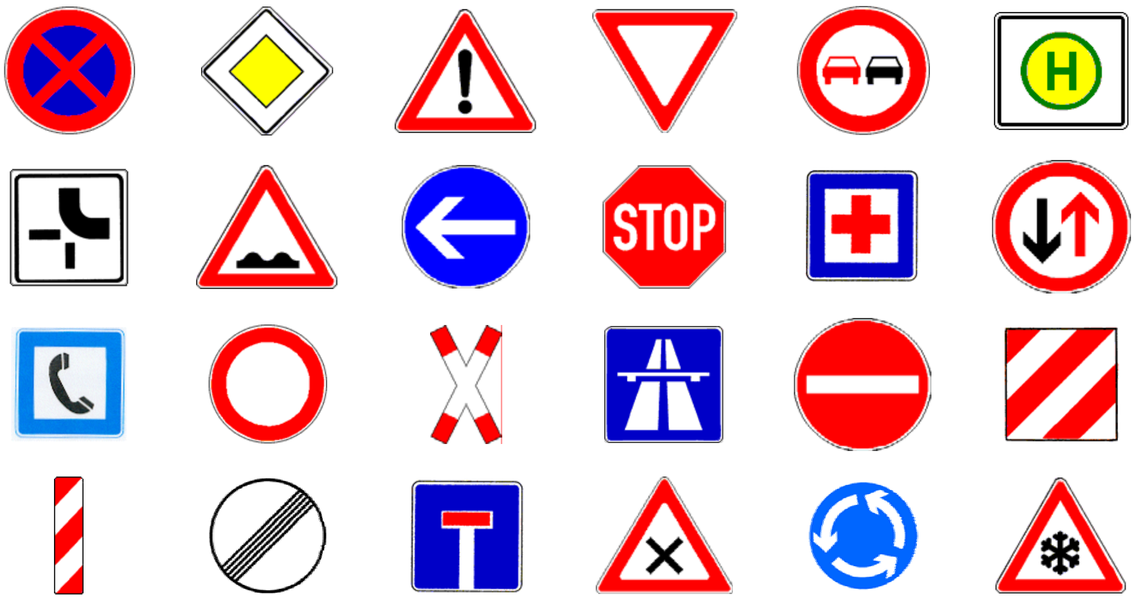
- Entsprechende Winkel sind gleich groß und haben gleichen Umlaufsinn (**gleichsinnige Winkeltreue**),
- entsprechende Strecken sind gleich lang (**Längentreue**),
- entsprechende Strecken und Geraden sind in der Regel $(\text{d.h. wenn } \varphi \notin \{0°; 180°; 360°\})$ **nicht parallel** zueinander,
- das Zentrum Z ist der einzige Punkt der Zeichenebene, der sich bei der Drehung nicht bewegt (**Fixpunkt**),
- es gibt in der Regel $(\text{d.h. wenn } \varphi \notin \{0°; 180°; 360°\})$ keine Geraden die punktsymmetrisch zu sich selbst sind (**keine Fixgeraden**),
- Schnittpunkte entsprechender Linien (Strecken, Geraden, Kreise, …) sind zueinander drehsymmetrisch (**Inzidenztreue**).
- **Folgerung:** Drehsymmetrische Punkte P und P' bilden zusammen mit dem Zentrum Z ein gleichschenkliges Dreieck ΔP'ZP.

Hausaufgaben:

(1) Zeichne eine Figur (Vieleck) und lege ein Zentrum Z fest. Konstruiere die zugehörige drehsymmetrische Figur bzgl. des Zentrums Z und des Drehwinkels 60° (positiver Drehsinn). Färbe punktsymmetrische Teilflächen mit derselben Farbe.

(2) Zeichne zwei Punkte P und Q. Wo liegen die Drehzentren Z aller Drehungen, die P auf Q drehen? Konstruiere Z für einen Drehwinkel φ mit $\varphi = 90°$.

(3) Welche der Verkehrszeichen sind drehsymmetrisch zu sich selbst? Wie groß ist jeweils der (bzw. sind die möglichen) Drehwinkel? Begründung!



StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Material zum Einkleben in das Schul- bzw. Hausheft

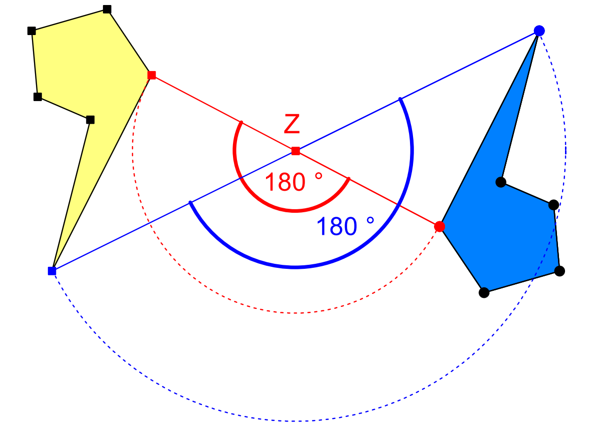


Abb. 81

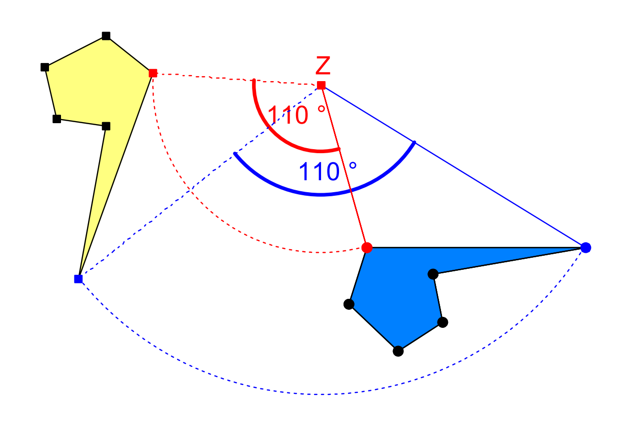


Abb. 82

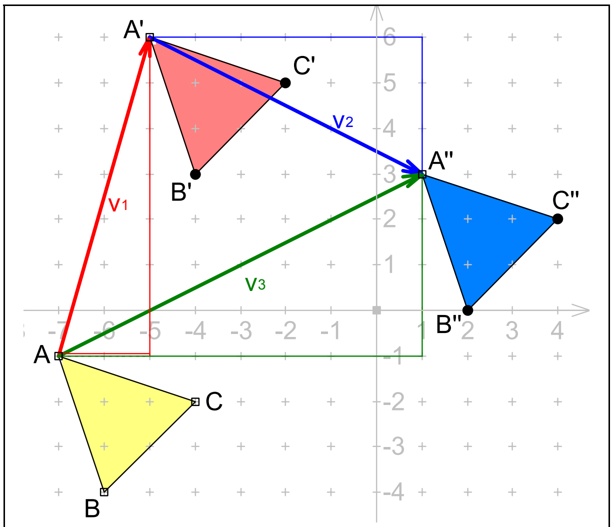


Abb. 83

A(−7 | −1); A′(−5 | 6); A″(1 | 3)

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-(-7) \\ 6-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hier wird 2 LE in x-Richtung nach rechts und 7 LE in y-Richtung nach oben verschoben.

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{A'A''} = \begin{pmatrix} x_{A''} - x_{A'} \\ y_{A''} - y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-5) \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hier wird 6 LE in x-Richtung nach rechts und 3 LE in y-Richtung nach unten verschoben.

$$\vec{v}_3 = \overrightarrow{AA''} = \begin{pmatrix} x_{A''} - x_A \\ y_{A''} - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-7) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hier wird 8 LE in x-Richtung nach rechts und 4 LE in y-Richtung nach oben verschoben.

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 7+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

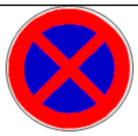


Abb. 84

Abb. 85

Abb. 86

Abb. 87

Abb. 88

Abb. 89

Abb. 90

Abb. 91

Abb. 92

Abb. 93

Abb. 94

Abb. 95

Abb. 96

Abb. 97

Abb. 98

Abb. 99

Abb. 100

Abb. 101

Abb. 102

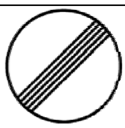


Abb. 103

Abb. 104

Abb. 105

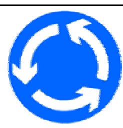


Abb. 106

Abb. 107

Verschiebung

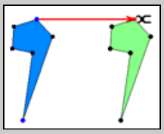
Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	Erarbeitung der Eigenschaften der Verschiebung
Voraussetzungen:	• Achsenklappung und ihre Eigenschaften • Gleichschenkliges Dreieck
Unterrichtsformen:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Verschiebung_Motivation_Bandornament.geo Verschiebung_Motivation_Bandornament_800_600.geo Verschiebung_Bewegung_Erklaerung.geo (Verschiebung_Dreieck_Achsenspiegelung.geo)[11]

Anmerkung:

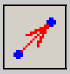
Zunächst werden die Pinguine in der Datei Verschiebung_Motivation_Bandornament.geo betrachtet und es wird die Frage geklärt, was daran auffällt. Die Schüler werden schnell die analogen Teile nennen. Hier knüpft man die Frage an, wie die gleichen Teile des Bildes miteinander zur Deckung gebracht werden können. Neben den Achsenspiegelungen ist so schnell auch die Verschiebung erarbeitet. Mit den Schiebereglern sind sowohl die Achsenklappung als auch die möglichen Verschiebungen realisierbar. (Experimentieren Sie etwas und betätigen Sie die Schieberegler in verschiedenen Reihenfolgen!) Es empfiehlt sich, die **Beschriftung der Schieberegler** vor dem Einsatz im Unterricht zu **verstecken**, da andernfalls die Motivation zur Erarbeitung der Bewegungen fehlt.

Definition: Figuren der Zeichenebene, die durch Verschiebung um einen Verschiebungsvektor miteinander zur Deckung kommen, heißen zueinander **verschiebungssymmetrisch**. Der Verschiebungsvektor $\vec{v}$ legt dabei die Richtung und die Laufweite (Länge) der Verschiebung fest.

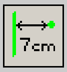
Anmerkung:

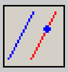


Der Verschiebungsvektor wird nicht definiert. Er wird aus der Anschauung entnommen und nur verbal beschrieben! Anhand der Datei Verschiebung_Bewegung_Erklaerung.geo wird erarbeitet, dass man einen Verschiebungsvektor durch die Angabe von zwei Punkten, nämlich einem Anfangspunkt A und einem Endpunkt E festlegen kann. Damit ist die Richtung (Bewegung auf der Geraden AE von A nach E) und die Laufweite / Länge (Streckenlänge der Strecke [AE]) der Verschiebung vorgegeben.



Zieht man am roten Punkt „Ziehen“, so kann man die Figur verschieben (und gleichzeitig das Original erhalten). Dabei wird ein roter Pfeil (ein Repräsentant des Verschiebungsvektors) mit aufgezogen. Verbindet man nun entsprechende Punkte der beiden verschiebungssymmetrischen Figuren mit weiteren Pfeilen, so kann man sich zunächst durch Überlegung erarbeiten, dass alle Pfeile gleich lang und parallel zueinander sein müssen. Man wird an dieser Stelle dann darüber sprechen, dass der Verschiebungsvektor die Menge aller dieser (unendlichen vielen) „parallelgleichen Pfeile“ ist. Durch Längenmessung und Einzeichnen von Parallelen zum roten Pfeil kann man diese Überlegungen experimentell „bestätigen“.





Die Eigenschaften der Verschiebung sind so offensichtlich, wenn man die reale Verschiebung im Kopf hat, dass man sie nur mit der Klasse zusammenträgt und gemeinsam notiert

Die im Lehrplan verlangte Koordinatenschreibweise wird am konkreten Beispiel (vgl. den Hefteintrag auf Seite 52) erarbeitet. Dieses Beispiel sollte an der Tafel bzw. im Heft durchgeführt werden. Anhand des Ergebnisses (alle Pfeile haben dieselben Koordinaten) wird noch einmal der Begriff „Vektor“ als Menge aller parallelgleichen Pfeile aufgegriffen.

[11] Es wird hier nicht auf den Zusammenhang Verschiebung ⇔ doppelte Achsenspiegelung eingegangen. Wenn Sie sich dafür interessieren, wie eine Zurückführung auf eine doppelte Achsenspiegelung mit Hilfe von Euklid DynaGeo aussehen könnte, dann betrachten Sie die Datei Verschiebung_Dreieck_Achsenspiegelung.geo in der Rückblende.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Eigenschaften: Bei zueinander verschiebungssymmetrischen Figuren gilt:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß und haben gleichen Umlaufsinn (**gleichsinnige Winkeltreue**),
- entsprechende Strecken sind gleich lang (**Längentreue**),
- entsprechende Strecken und Geraden sind parallel zueinander,
- es existiert **kein Fixpunkt**,
- Schnittpunkte entsprechender Linien (Strecken, Geraden, Kreise, …) sind zueinander verschiebungssymmetrisch (**Inzidenztreue**).

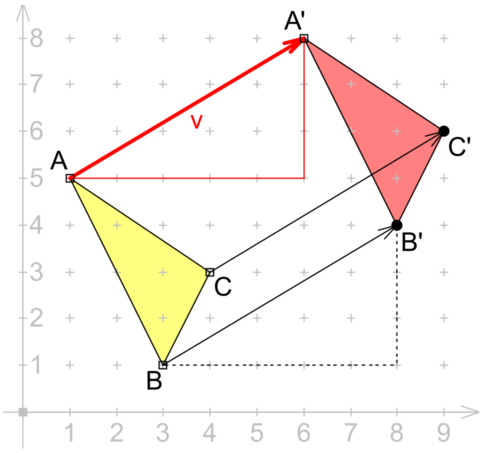
Beispiel: Aus d. Zeichnung: $A(1\,|\,5); A'(6\,|\,8); B(3\,|\,1); B'(8\,|\,4); C(4\,|\,3); C'(9\,|\,6)$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

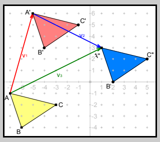
$$= \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} x_{B'} - x_B \\ y_{B'} - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} x_{C'} - x_C \\ y_{C'} - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-4 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

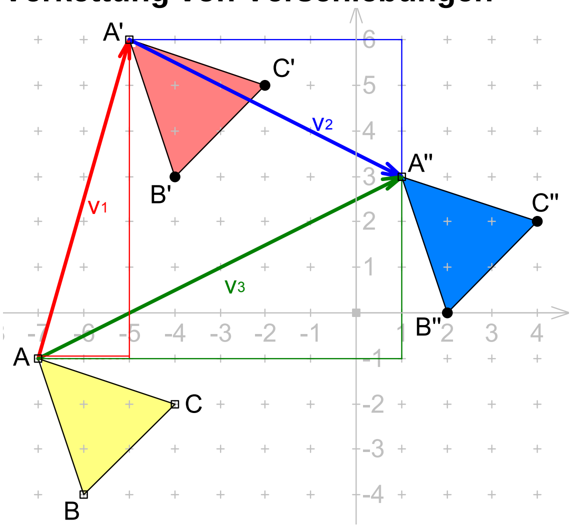
Hier wird 5 LE in x-Richtung nach rechts und 7 LE in y-Richtung nach oben verschoben.



Anmerkung: Die im Lehrplan verlangte Verkettung von Verschiebungen wird am konkreten Beispiel erarbeitet. Hier kann man das Bild projizieren, sollte aber die einzelnen Koordinatenberechnungen an der Tafel durchführen. Die Schüler sollen sich hier auf das Mitdenken konzentrieren. Sie bekommen das Ergebnis im Anschluss an die Erarbeitung zum Einkleben in das Heft ausgeteilt. Am Bild wird deutlich, dass z. B. die Bewegung in x-Richtung bei der Verschiebung V_3 sich gerade aus den entsprechenden Bewegungen in x-Richtung der beiden anderen Verschiebungen V_1 und V_2 zusammensetzt. Anhand der Datei Verschiebung_Vektoren.geo lässt sich die Allgemeingültigkeit dieser Aussage noch einmal experimentell untersuchen. Dazu kann man die Lage aller drei Dreiecke getrennt voneinander variieren sowie die Form des Dreiecks ABC verändern.



Verkettung von Verschiebungen



$A(-7\,|-1); A'(-5\,|\,6); A''(1\,|\,3)$

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-(-7) \\ 6-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hier wird 2 LE in x-Richtung nach rechts und 7 LE in y-Richtung nach oben verschoben.

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{A'A''} = \begin{pmatrix} x_{A''} - x_{A'} \\ y_{A''} - y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-5) \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hier wird 6 LE in x-Richtung nach rechts und 3 LE in y-Richtung nach unten verschoben.

$$\vec{v}_3 = \overrightarrow{AA''} = \begin{pmatrix} x_{A''} - x_A \\ y_{A''} - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-7) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hier wird 8 LE in x-Richtung nach rechts und 4 LE in y-Richtung nach oben verschoben.

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 7+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

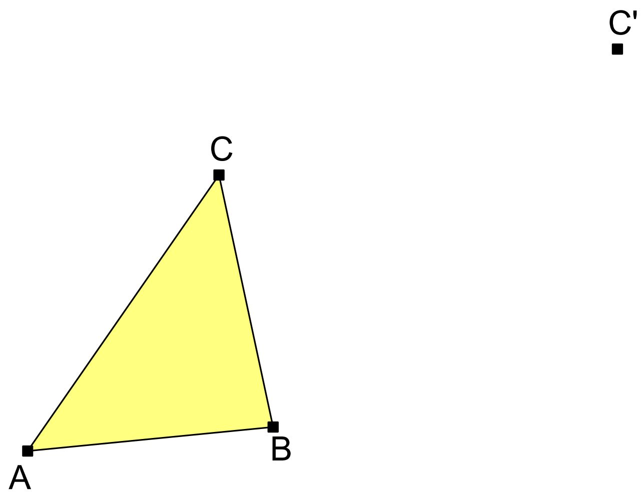
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Anmerkung: Die Hausaufgabe (1) zielt darauf ab, dass eine Verschiebung einer endlichen Figur diese nicht mit sich selbst (in ihrer Ausgangslage) zur Deckung bringt. Um dies zu erreichen, müsste die Figur in Verschiebungsrichtung und ihre Gegenrichtung jeweils unendlich lang sein.

Hausaufgaben:

(1) Gibt es Figuren, die zu sich selbst verschiebungssymmetrisch sind? Welche Eigenschaft müssen solche Figuren haben?

(2) Das Dreieck ΔABC und der Punkt C' sind gegeben.



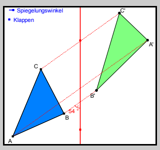
Konstruiere das zu ΔABC verschiebungssymmetrische Dreieck ΔA'B'C'. Benutze dazu die Eigenschaften der Verschiebung!

(3) Es sind das Dreieck ΔDEF mit D(–6|–3), E(–3|–2), F(–5|1) sowie der Punkt F'(7|4) gegeben. Bestimme ohne Konstruktion die Koordinaten der Eckpunkte des zu ΔDEF verschiebungssymmetrischen Dreiecks ΔD'E'F'.

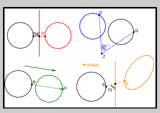
Kontrastbeispiel: Schiefe Achsenspiegelung

Unterrichtsstunden:	0,5
Inhaltsziele:	Nicht alle denkbaren Abbildungen sind längen-, winkel- und kreistreu!
Voraussetzungen:	Alle Bewegungen und ihre Eigenschaften.
Unterrichtsformen:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	schiefe_Achsenspiegelung_Dreieck.geo; Kreistreue.geo

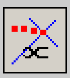
Anmerkung: Es geht hier primär um ein Gegensteuern gegen die verbreitete Idee, alle denkbaren Abbildungen hätten die gemeinsamen Eigenschaften der Kongruenzabbildungen, nämlich z. B. die Längen-, Winkel- und Kreistreue. Ein mögliches Gegenbeispiel ist die bereits bei der Achsenklappung betrachtete schiefe Achsenspiegelung (vgl. S. 12).



Die schiefe Achsenspiegelung ist wie die Achsenklappung eine Spiegelung an einer Achse, wobei, wie bei der Achsenklappung, die Achse die Verbindungsstrecke zwischen Urpunkt und Bildpunkt halbiert. Im Unterschied zur Achsenklappung steht die Verbindungsstrecke allerdings nicht senkrecht auf der Achse, sondern schneidet sie in einem ausgezeichneten (anderen) Winkel.



Rufen Sie die Datei schiefe_Achsenspiegelung_Dreieck.geo auf, stellen Sie einen Klappungswinkel ungleich 90° ein (z. B. 54°) und demonstrieren Sie noch einmal, dass Original und Bilddreieck nicht kongruent sind, also insbesondere keine Längen- und Winkeltreue vorliegt.



Besonders eindrucksvoll ist, dass alle Kongruenzabbildungen kreistreu sind, also Kreise auf Kreise abbilden, dies für die schiefe Achsenspiegelung aber nicht gilt. Sie zeigen dies, indem Sie die Datei Kreistreue.geo aufrufen und nacheinander die Ortslinien von P', Q', R', und S' aufzeichnen.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Kongruenz und Kongruenzabbildungen

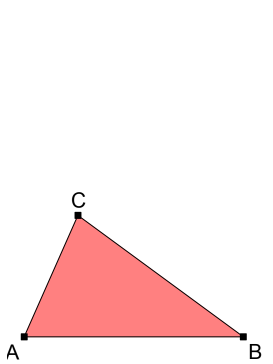
Unterrichtsstunden:	0,5
Inhaltsziele:	Definition von Kongruenz und Kongruenzabbildung
Voraussetzungen:	Alle Bewegungen und ihre Eigenschaften.
Unterrichtsformen:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Aufgabe_Kongruenzabbildung.geo Aufgabe_Kongruenzabbildung_Loesung.geo

Definition: Zwei Figuren heißen **kongruent**, wenn man sie zur Deckung bringen kann.

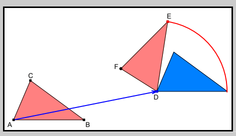
Eigenschaften: Offensichtlich sind bei kongruenten Figuren entsprechende Strecken gleich lang und entsprechende Winkel gleich groß.

Definition: Die Bewegungen Achsenklappung, Punktspiegelung, Drehung, Verschiebung und beliebige Verkettungen davon heißen **Kongruenzabbildungen**, weil man mit ihrer Hilfe kongruente Figuren zur Deckung bringen kann.

Aufgabe:
Gegeben sind die kongruenten Dreiecke ΔABC und ΔDEF. Gib eine möglichst einfache Kongruenzabbildung an, die die beiden Dreiecke zur Deckung bringt.



Mögliche Lösung: Verschieben von ΔABC, so dass A mit D zur Deckung kommt und anschließend drehen um D, so dass B mit E zur Deckung kommt. Damit liegt [AB] genau auf [DE]. Da die beiden Dreiecke kongruent waren, sind alle Winkel und Seitenlängen gleich groß. Daraus folgt, dass das Dreieck ΔABC genau mit dem Dreieck ΔDEF zur Deckung kommt.



In der Datei Aufgabe_Kongruenzabbildung_Loesung.geo lässt sich die hier vorgeschlagene Lösung dynamisch durchführen.
Ziehen am blauen Punkt A'. → Ziehen am roten Punkt B''.

Die Idee ist hier, direkt mit Bewegungen zu argumentieren. Dies erhöht die Anschaulichkeit. Auf diese Argumentation baut (neben der eindeutigen Konstruierbarkeit) auch die „Beweisführung" bei den Kongruenzsätzen im nächsten Abschnitt.

10 Kongruenzsätze

Unterrichtsstunden:	4
Inhaltsziele:	• Die Kongruenzsätze für Dreiecke erarbeiten. • Konstruktionen üben.
Voraussetzungen:	• Kongruenzabbildungen • Dreiecksungleichung
Unterrichtsform:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Ordner „Erarbeitung“: sss.geo; ssw.geo; sws.geo; sww.geo; wsw.geo; www_Fragezeichen.geo Ordner „Loesung“: sss.geo; ssw.geo; sws.geo; sww.geo; wsw.geo; www_Fragezeichen.geo Ordner „Aufgaben“: Aufgabe_sss.geo; Aufgabe_sss_2.geo; Aufgabe_Ssw.geo; Aufgabe_sws.geo; Aufgabe_sww.geo; Aufgabe_wsw.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen“ **wählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen“

Anmerkungen:

- Das Vorgehen im Unterricht wird auf den folgenden Seiten am Kongruenzsatz SSS ausführlich erläutert. Für die weiteren Kongruenzsätze erfolgt die Erarbeitung analog! Die Inhalte sind dem „Arbeitsblatt: Kongruenzsätze am Dreieck“ auf S. 51ff zu entnehmen.
- Ausgangspunkt bei der Behandlung der Kongruenzsätze ist die Frage, wie viele (und welche) Bestimmungstücke ausreichen, um ein Dreieck eindeutig (d. h. bis auf Kongruenz) konstruieren zu können.
- Ziel ist es, die Schüler selbst Vorschläge machen zu lassen und (gemeinsam) zu erforschen, ob die angegebenen Bestimmungstücke ausreichen, um ein entsprechendes Dreieck eindeutig konstruieren zu können. (Deshalb gibt es auch die Dateien www_Fragezeichen.geo.)
- Die Kongruenzsätze werden als Zusammenspiel von eindeutiger Konstruierbarkeit und Argumentationen mit Bewegungen begründet.
- Gearbeitet wird hier mit Dateien, in der zu einem Ausgangsdreieck (gelb), von dem bestimmte Stücke bekannt sind, ein Dreieck mit den entsprechenden Bestimmungsstücken konstruiert wird. Anschließend wird eine (zusammengesetzte) Bewegung erarbeitet, die das konstruierte Dreieck mit dem Ausgangsdreieck zur Deckung bringen soll. Auf Grund der bekannten Invarianzeigenschaften dieser Bewegung, lässt sich dann argumentieren, dass (bzw. ob) die beiden Dreiecke wirklich miteinander zur Deckung kommen, also kongruent sind.
- Vor jeder Konstruktion soll ein Konstruktionsplan angefertigt werden, um ein zielgerichtetes Konstruieren zu gewährleisten. Der Konstruktionsplan wird zunächst komplett erarbeitet und **an der Tafel** fixiert. Erst danach wird konstruiert!
- Nach jeder Konstruktion wird überprüft, ob
  - die Konstruktion eindeutig oder mehrdeutig ist (im zweiten Fall sind die gegebenen Stücke offensichtlich kein Kongruenzkriterium),
  - „das“ konstruierte Dreieck kongruent zum gegebenen Grunddreieck ist, ob man die Dreiecke also durch geeignete Bewegungen zur Deckung bringen kann (diese Bewegungen werden anschließend realisiert),
  - welche Auswirkungen Veränderungen der Form des Grunddreiecks auf die Konstruktion haben. Dabei stellt sich einerseits heraus, ob Fallunterscheidungen notwendig sind, andererseits gewinnt man (zumindest potentiell) einen Überblick über alle denkbaren Dreiecke. Dabei soll den Schülern deutlich werden, dass die Erkenntnisse über Kongruenzkriterien unabhängig vom betrachteten, speziellen Fall sind.

Unterrichtsstunden:	1
Inhaltsziele:	• Erarbeitung des Kongruenzsatzes sss
Voraussetzungen:	• Kongruenzabbildungen • Dreiecksungleichung
Unterrichtsform:	Unterrichtsgespräch
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Ordner „Erarbeitung“: sss.geo Makro: Dreieck_Drehen_Verschieben.MAK Ordner „Loesung“: sss.geo Ordner „Aufgaben“: Aufgabe_sss.geo; Aufgabe_sss_2.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen“ **wählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen“

Unterrichtsschritte:

i) **Aufgabenstellung** entsprechend Abb. 108 mit dem Beamer projizieren und besprechen.

ii) **Konstruktionsplan** erarbeiten. Vorschlag für einen **Konstruktionsplan:**
   1) A und B als Endpunkte von c.
   2) C liegt auf
      a) k(A; b),
      b) k(B; a).

iii) **Konstruktion** und Diskussion des Ergebnisses. Hier ergibt sich, dass ΔABC und $\Delta ABC'$ kongruent zueinander sind, da ΔABC durch Klappung um AB mit $\Delta ABC'$ zur Deckung gebracht werden kann. (Vgl. Abb. 109)

iv) **Nachweis der** (bzw. Prüfung auf) **Kongruenz von konstruiertem und vorgegebenem Dreieck.** Methode: Suche nach einer anschaulich einfachen (zusammengesetzten) Bewegung, die die beiden Dreiecke zur Deckung bringt. Hier leistet z. B. eine Verschiebung die A mit A_{Grund} zur Deckung bringt und eine anschließende Drehung um A_{Grund} um den Winkel $\angle CA_{Grund}C_{Grund}$ im Gegenuhrzeigersinn das Gewünschte.

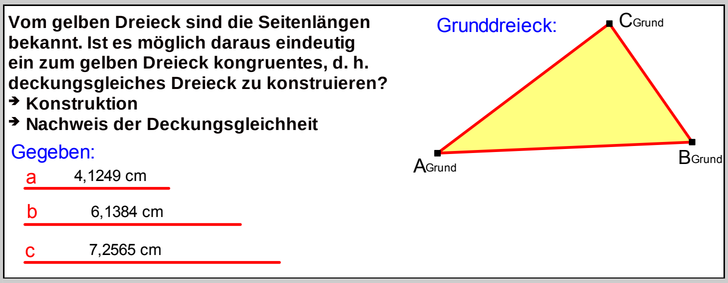


Abb. 108: Datei Erarbeitung\sss.geo

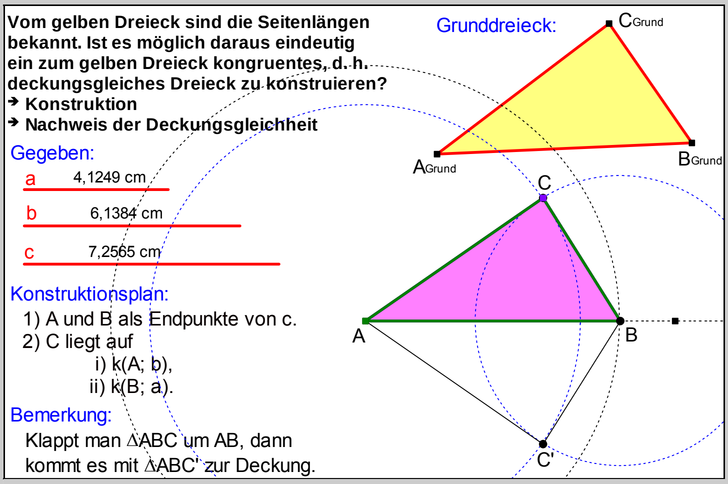


Abb. 109: Datei Loesung\sss.geo

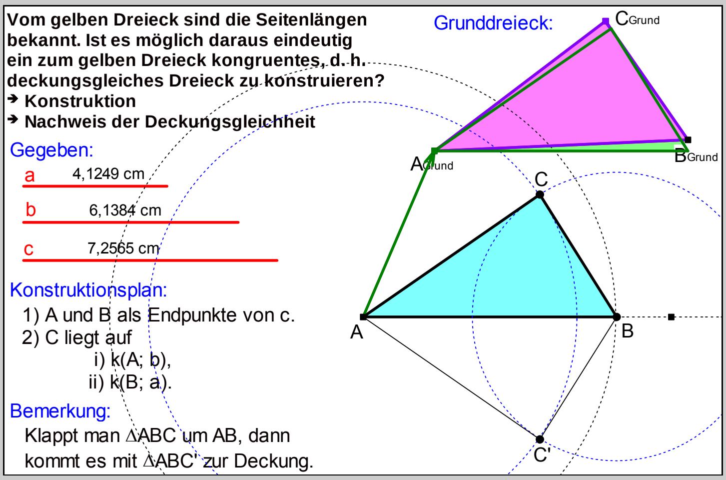


Abb. 110

Wird diese zusammengesetzte Bewegung zu Grunde gelegt, so kann mit Hilfe des Makros Dreieck_Drehen_Verschieben.MAK diese Bewegung auch realisiert werden.

Bedienung des Makros:

- Einen neuen freien Punkt direkt über den Punkt A des konstruierten Dreiecks setzten, diesen „Ziehen" nennen und evtl. grün färben.
- Das Makro Dreieck_Drehen_Verschieben.MAK laden und aufrufen.
- Nacheinander die Fläche des konstruierten Dreiecks und den Punkt „Ziehen" anklicken.
- Nun kann man durch Ziehen am Punkt Ziehen ein zum konstruierten Dreieck kongruentes (deckungsgleiches) Dreieck so verschieben, dass A mit A_{Grund} zur Deckung kommt. Am violetten Punkt lässt sich das Dreieck dann noch um den Punkt „Ziehen" drehen, so dass der violette Punkt mit C_{Grund} zur Deckung kommt.

Nach der Realisierung der Bewegung stellt sich die Frage, ob die beiden Dreiecke wirklich deckungsgleich sind oder ob das nur so aussieht.

Mögliche (**mündliche!**) Begründung:

- A wird mit A_{Grund} zur Deckung gebracht.
- Da die Strecken [AC] und [$A_{Grund}C_{Grund}$] gleich lang sind (das wurde so konstruiert!) liegen der verschobene Punkt C und C_{Grund} auf einem Kreis um A_{Grund} mit Radius $\overline{AC}$. Damit kommen C und C_{Grund} nach der Drehung zur Deckung.
- Wenn nun noch der dritten Eckpunkte (also B und B_{Grund}) miteinander zur Deckung kommen, dann sind die beiden Dreiecke deckungsgleich und damit kongruent. Da die beiden Bewegungen (Verschiebung und Drehung) die Längen der Strecken nicht ändern gilt weiterhin: $a = a_{Grund}$ und $c = c_{Grund}$. Damit ist sowohl B als auch B_{Grund} Schnittpunkt der Kreise $k(A_{Grund}; c)$ und $k(C_{Grund}; a)$. Da sie auf derselben Seite von $A_{Grund}C_{Grund}$ liegen sind sie deckungsgleich.

v) **Verändern der Form des Grunddreiecks.** Nachdem die Konstruktion durchgeführt wurde und der Nachweis der Kongruenz erbracht ist, wird die Form des Grunddreiecks variiert und damit untersucht, ob die Eindeutigkeit der durchgeführten Konstruktion von der besonderen Form des Grunddreiecks abhängig ist. Der Lehrer wird also die Frage stellen, ob man die Form des Grunddreiecks so verändern kann, dass die Konstruktion mit den gegebenen Stücken nicht mehr eindeutig ist. Dies ist hier nicht der Fall. Im Fall SsW kann mit diesem Vorgehen direkt die nötige Fallunterscheidung erarbeitet werden. (vgl. S. 52)

Anmerkungen:

- Im Ordner „Loesung" findet sich zu jeder der Dateien im Ordner „Erarbeitung" eine entsprechende Lösungsdatei mit demselben Namen. In diesen Daten sind jeweils eine Konstruktionsbeschreibung, die entsprechende Konstruktion und die Möglichkeit enthalten, die Bewegungen zum Nachweis der Kongruenz mit dem Grunddreieck direkt auszuführen. Ziehen sie zum Verschieben des Dreiecks am grünen Punkt („Ziehen") und zum Drehen am violetten Punkt („Drehen").
- An Stelle von Hefteinträgen können den Schülern nach und nach die vier Seiten des Arbeitsblattes (S. 51 – 54) ausgeteilt werden.

Hausaufgaben:

Im Ordner „Aufgaben" befinden sich EUKLID DynaGeo-Dateien, die als Aufgaben im Unterricht in Übungsphasen oder als Hausaufgabe gestellt werden können. Bei fast allen Aufgaben geht es darum zu einem vorgegebenen Dreieck mit drei bekannten Bestimmungsstücken ein entsprechendes kongruentes Dreieck zu konstruieren und die Kongruenz dadurch nachzuweisen, dass Bewegungen angegeben werden, die die beiden Dreiecke zur Deckung bringen. Die Ergebnisse dieser Bewegungen lassen sich mit Hilfe der Abbildungsmakros von EUKLID DynaGeo (Reiter „Abbildungen") direkt erzeugen und so die eigenen Überlegungen überprüfen.

Nur zum Kongruenzsatz SSS finden sich zwei Aufgaben. Mit Aufgabe_sss_2 sollen die Schüler mit der Problematik der Dreiecksungleichung vertraut werden.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Arbeitsblatt: Kongruenzsätze am Dreieck

Vom gelben Dreieck sind die Seitenlängen bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?
➔ Konstruktion
➔ Nachweis der Deckungsgleichheit

Gegeben:

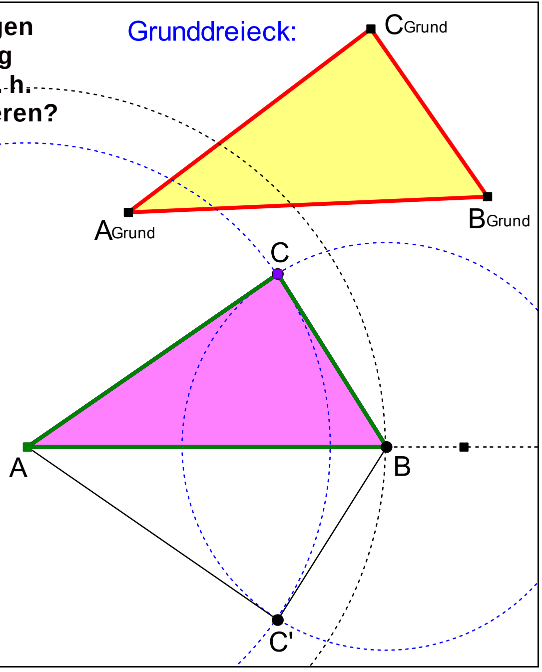
a 4,1249 cm

b 6,1384 cm

c 7,2565 cm

Konstruktionsplan:
1) A und B als Endpunkte von c.
2) C liegt auf
i) k(A; b),
ii) k(B; a).

Bemerkung:
Klappt man ΔABC um AB, dann kommt es mit ΔABC' zur Deckung.



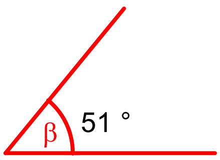
Kongruenzsatz (SSS): Wenn zwei Dreiecke in den drei Seitenlängen übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

Vom gelben Dreieck sind zwei Seitenlängen und der Zwischenwinkel bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?
➔ Konstruktion
➔ Nachweis der Deckungsgleichheit

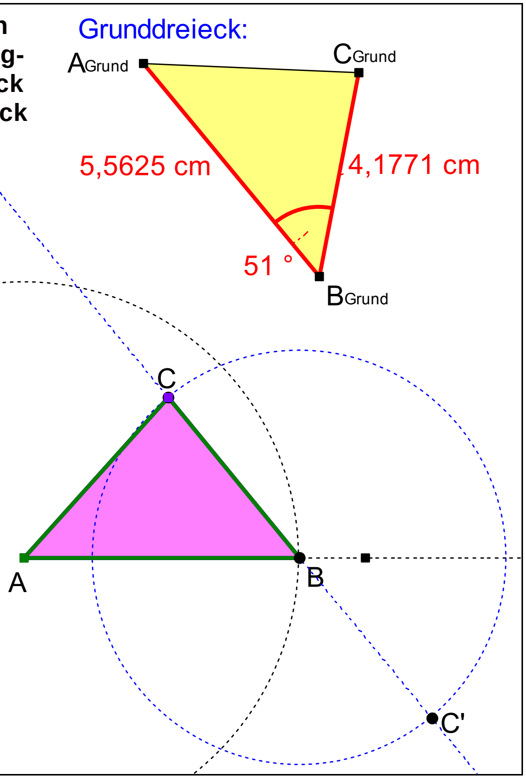
Gegeben:

a 4,1771 cm

c 5,5625 cm



Konstruktionsplan:
1) A und B als Endpunkte von c.
2) C liegt auf:
i) dem ersten Schenkel des an [BA angetragenen Winkels β,
ii) k(B; a).



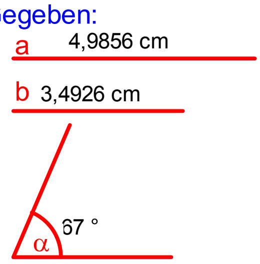
Kongruenzsatz (SWS): Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

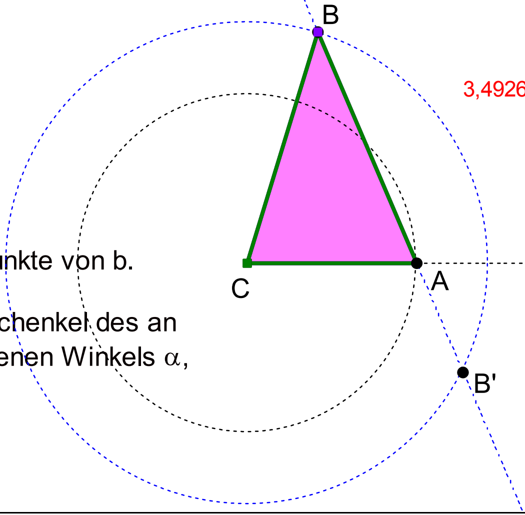
StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Vom gelben Dreieck sind zwei Seiten und der, der längeren Seite gegenüberliegende Winkel bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?

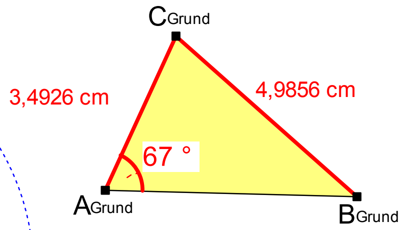
- ➔ **Konstruktion**
- ➔ **Nachweis der Deckungsgleichheit**

Gegeben:





Grunddreieck:



Konstruktionsplan:

1) C und A als Endpunkte von b.
2) B liegt auf:
   i) dem ersten Schenkel des an [AC angetragenen Winkels α,
   ii) k(C; a).

Bemerkung:

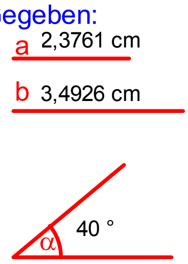
Das Dreieck ΔAB'C besitzt keinen 67°-Innenwinkel, die Konstruktion ist also eindeutig.

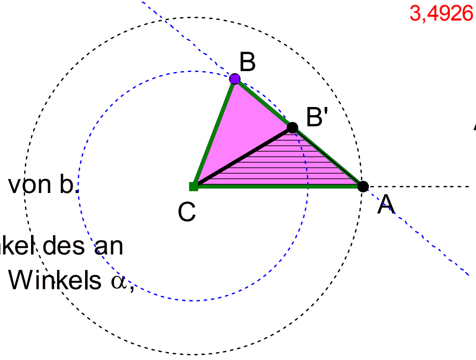
Kann man die Form des gelben Dreiecks so verändern, dass die Konstruktion mit den gegebenen Stücken nicht mehr eindeutig ist?

Vom gelben Dreieck sind zwei Seiten und der, der längeren Seite gegenüberliegende Winkel bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?

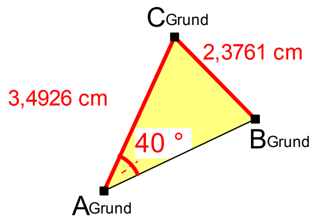
- ➔ **Konstruktion**
- ➔ **Nachweis der Deckungsgleichheit**

Gegeben:





Grunddreieck:



Konstruktionsplan:

1) C und A als Endpunkte von b.
2) B liegt auf:
   i) dem ersten Schenkel des an [AC angetragenen Winkels α,
   ii) k(C; a).

Bemerkung:

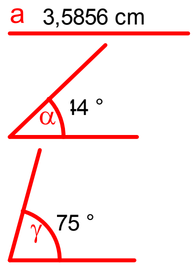
Offensichtlich ist die Konstruktion, wenn der gegebene Winkel der kleineren Seite gegenüberliegt, nicht eindeutig, da sich hier zwei nicht kongruente Dreiecke ΔABC und ΔAB'C ergeben.

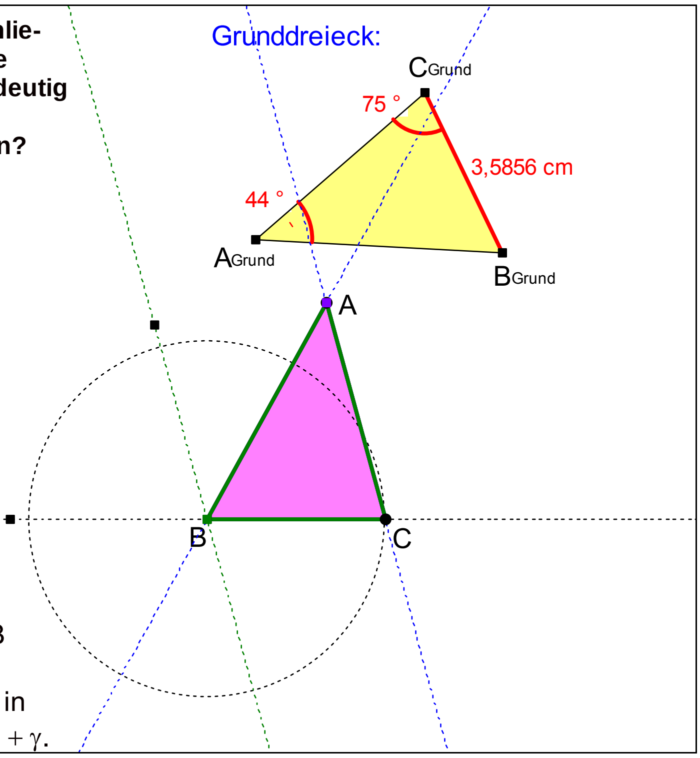
Kongruenzsatz (SsW): Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

Vom gelben Dreieck sind eine Seite, ein anliegender Winkel und der gegenüberliegende Winkel bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?

- **➔ Konstruktion**
- **➔ Nachweis der Deckungsgleichheit**

Gegeben:





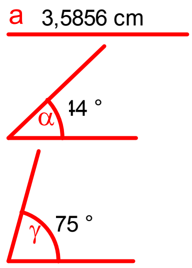
Konstruktionsplan:

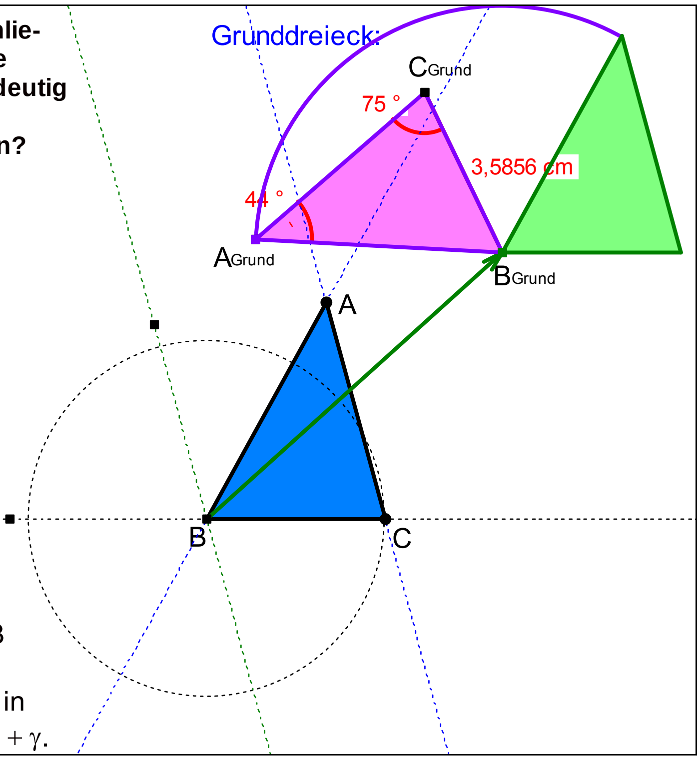
1) B und C als Endpunkte von a.
2) A liegt auf:
   i) dem ersten Schenkel des an [CB angetragenen Winkels γ,
   ii) dem ersten Schenkel des an BC in B angetragenen Außenwinkels $\alpha + \gamma$.

Vom gelben Dreieck sind eine Seite, ein anliegender Winkel und der gegenüberliegende Winkel bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?

- **➔ Konstruktion**
- **➔ Nachweis der Deckungsgleichheit**

Gegeben:





Konstruktionsplan:

1) B und C als Endpunkte von a.
2) A liegt auf:
   i) dem ersten Schenkel des an [CB angetragenen Winkels γ,
   ii) dem ersten Schenkel des an BC in B angetragenen Außenwinkels $\alpha + \gamma$.

Kongruenzsatz (SWW): Wenn zwei Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem Gegenwinkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

Vom gelben Dreieck sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?

➔ Konstruktion

➔ Nachweis der Deckungsgleichheit

Gegeben:

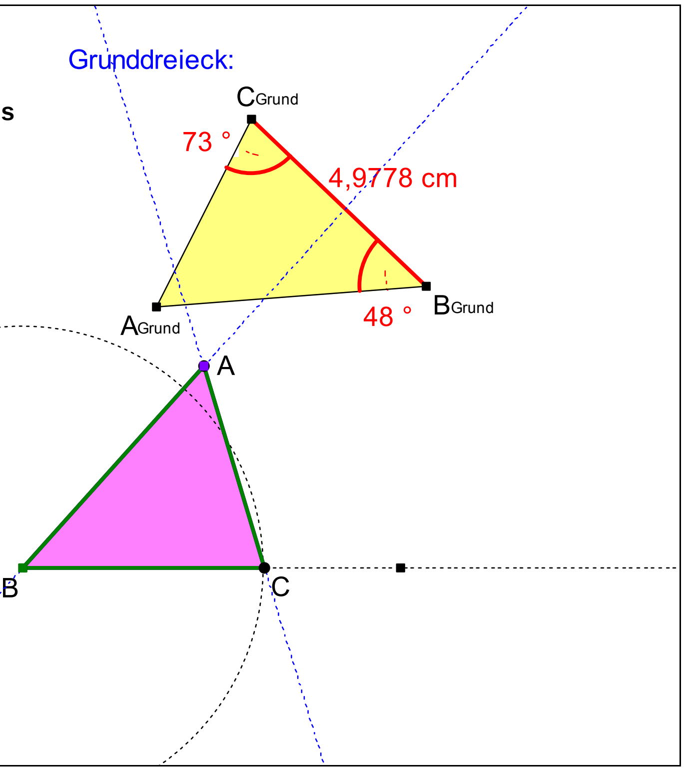
a 4,9778 cm

β 48 °

γ 73 °

Konstruktionsplan:

1) B und C als Endpunkte von a.
2) A liegt auf:
   i) dem ersten Schenkel des an [CB angetragenen Winkels γ,
   ii) dem zweiten Schenkel des an [BC angetragenen Winkels β.



Vom gelben Dreieck sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt. Ist es möglich daraus eindeutig ein zum gelben Dreieck kongruentes, d. h. deckungsgleiches Dreieck zu konstruieren?

➔ Konstruktion

➔ Nachweis der Deckungsgleichheit

Gegeben:

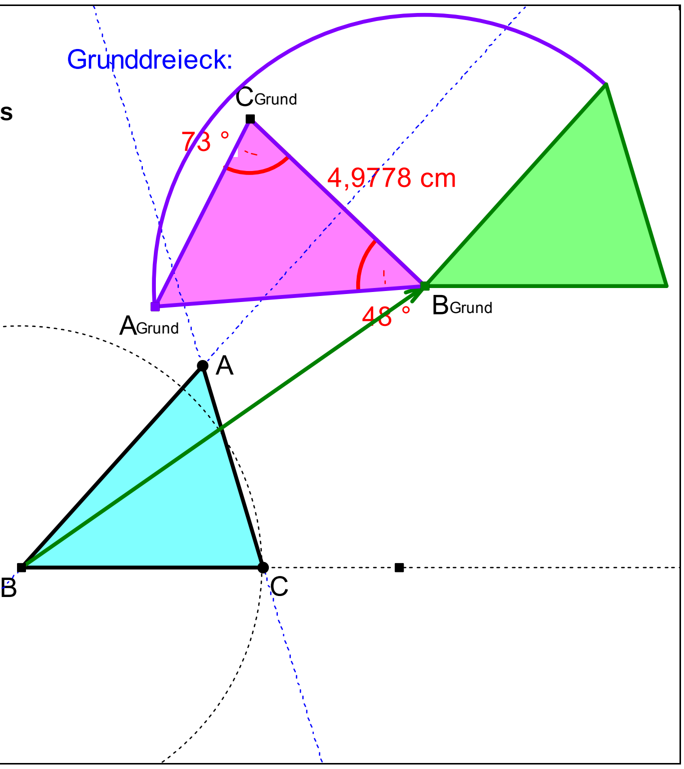
a 4,9778 cm

β 48 °

γ 73 °

Konstruktionsplan:

1) B und C als Endpunkte von a.
2) A liegt auf:
   i) dem ersten Schenkel des an [CB angetragenen Winkels γ,
   ii) dem zweiten Schenkel des an [BC angetragenen Winkels β.



Kongruenzsatz (WSW): Wenn zwei Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem Gegenwinkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

11 Änderungsverhalten

Unterrichtsstunden:	2 – 3
Inhaltsziele:	• Änderungsverhalten realisieren üben
Voraussetzungen:	• Die Schüler sollten mit der Betrachtung von Veränderungen und Bewegungen vertraut sein und sich Bewegungen vorstellen können.
Unterrichtsform:	Unterrichtsgespräch Gruppenarbeit
Computereinsatz:	Lehrerrechner & Beamer
DynaGeo-Dateien:	Kolbenmotor.geo; Kolbenmotor_mit_Graph.geo; Laengen_Dreieck_Kreis.geo; Laengen_Dreieck_Kreis_mit_Graphen.geo; Krandreieck.geo; Krandreieck_mit_Graph.geo; Winkel_Dreieck_Gerade.geo; Winkel_Dreieck_Gerade_mit_Graphen.geo; Winkel_Dreieck_Kreisbogen.geo; Winkel_Dreieck_Kreisbogen_mit_Graphen.geo
Winkeleinstellung:	„Winkelorientierung berücksichtigen" **wählen** **DynaGeo-Menü:** Verschiedenes → Einstellungen → Maße und Winkel → **Haken** bei „Winkelorientierung berücksichtigen"

Anmerkungen:

- Bisher wurde im Wesentlichen die Fähigkeit geschult, sich bei gleichmäßiger Änderung einer Größe, für eine von ihr abhängige Größe die Änderung vorzustellen. Bei den folgenden Aufgaben geht es zusätzlich darum, die Art dieser Änderung wahrzunehmen und zu beschreiben. In diesem Zusammenhang werden folgende Fragen gestellt:
  - **Wie** erfolgt die Änderung der abhängigen Größe? Wird sie größer, wird sie kleiner, bleibt sie gleich oder gibt es Bereiche in denen sie sich ändert und andere, in denen sie gleich bleibt?
  - Erfolgt die Änderung gleichmäßig oder ist sie in bestimmten Bereichen (Welchen?) schneller und in anderen langsamer?
  - Gibt es Extremlagen, also solche Stellen, für die die beobachtete Größe maximal (am größten) bzw. minimal (am kleinsten) ist? Wo, d. h. für welche Lagen der Ausgangsgröße, ist dies der Fall?
- Vorgehen im Unterricht:
  - Es sollen eine Reihe von Aufgaben in arbeitsteiliger Gruppenarbeit bearbeitet werden.
  - Um die Schüler mit der grundlegenden Fragestellung und den Grundlagen der Gruppenarbeit vertraut zu machen, wird die Aufgabe für „Gruppe 1" (S. 57), im Unterrichtsgespräch erarbeitet. Das Arbeitsblatt hat hier bewusst dieselbe Form wie die folgenden Aufgabenblätter für die Gruppenarbeit. Dadurch werden die Schüler mit der Aufgabenstellung vertraut und die Anlaufphase in der eigentlichen Gruppenarbeit wird verkürzt. Es folgen einige **Lösungshinweise zu Gruppe 1:**
    a) Der Kolbenkopf bewegt sich linear (geradlinig) auf und ab.
    b) Der Kolbenhub ist doppelt so groß wie der Abstand vom roten Ansatzpunkt der Kolbenstange zum Schwungradmittelpunkt. Begründung: Der Kolbenhub wird durch die höchste und die niedrigste Lage der Kolbenstange festgelegt, da der Schwungradmittelpunkt fixiert ist. Diese Extremlagen sind wieder durch die höchste bzw. tiefste Lage des roten Ansatzpunktes der Stange bestimmt.

c) Der Kolbenkopf bewegt sich nicht immer gleichmäßig, sondern wird schneller und langsamer. Entscheidend dabei ist, dass Bewegungen des roten Ansatzpunktes der Stange am Schwungrad in Richtung des Kolbenhubs deutlich zur Kolbenbewegung beitragen, während Bewegungen senkrecht dazu sich kaum auf die Kolbenbewegungen auswirken. Damit ist die Kolbenbewegung bei der Aufwärts- und Abwärtsbewegung am schnellsten und um die höchste bzw. tiefste Lage herum am langsamsten.

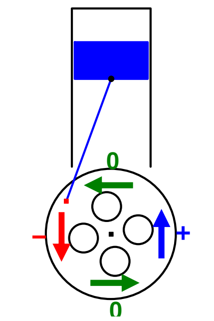


Abb. 111

- Nachdem diese Aufgaben an Hand der Abbildung oder einer Skizze erarbeitet sind, sollte die Datei Kolbenmotor _mit_Graph.geo geöffnet und mit dem Beamer projiziert werden. Hier wird zunächst geklärt, welche Größen im Diagramm gegeneinander aufgetragen sind. Es handelt sich um eine Darstellung der Kolbenlage in Abhängigkeit vom Drehwinkel ϕ des Schwungrades (vgl. Abb. 112).

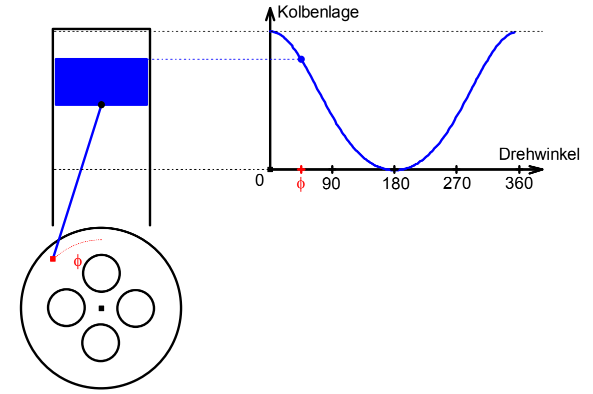


Abb. 112

- Anschließend empfiehlt es sich, langsam am roten Ansatzpunkt der Kolbenstange am Schwungrad zu ziehen und dabei sowohl die Bewegung des Kolbens als auch die Bewegung des Punktes auf dem Graphen zu verfolgen. Auf diese Weise lassen sich Graph und Modell wechselseitig interpretieren. (Stichworte: Maxima und Minima, Steigung des Kurve ⇔ Geschwindigkeit der Bewegung/Änderung) Diese Interpretation sollte explizit von den Schülern gefordert und nicht vom Lehrer vorgegeben werden.
- Es wäre günstig, wenn für das eben geschilderte Unterrichtsgeschehen die letzten 20 Minuten einer Unterrichtsstunde herangezogen werden könnten, da die nun folgende Gruppenarbeitsphase (ca. 30 Minuten) in einer eigenen Stunde stattfinden sollte. Um die Gruppenarbeit sinnvoll zu gestalten, ist es notwendig, dass sie ohne Zeitdruck und am Stück durchgeführt wird. Sollte am Ende dieser Stunde noch Zeit sein, so kann man bereits die erste(n) Gruppe(n) ihre Ergebnisse und deren Begründungen vorstellen lassen.
- Zur Gruppenarbeit wird die Klasse zunächst in sieben Gruppen eingeteilt. Jede Gruppe erhält für die Präsentation einen großen Bogen Papier für ein Plakat oder eine OVP-Folie. Ferner bekommt jedes Gruppenmitglied eine Kopie des Gruppenarbeitsblattes. Die Gruppen sollen selbständig arbeiten. Natürlich steht der Lehrer für Verständnisfragen zur Verfügung.
- In der Folgestunde stellen die Gruppensprecher die Gruppenergebnisse der Klasse vor. Im Anschluss an die Präsentationen zu einer Problemgruppe (gemeinsame „Grundbewegung“) werden die mit Papier und Bleistift erarbeiteten Lösungen mit den entsprechenden EUKLID DynaGeo-Dateien mit Graphen verglichen (Projektion mit dem Beamer) und die Ergebnisse mit der Klasse diskutiert. Dabei wird insbesondere wieder die Möglichkeit der wechselseitigen Interpretation von Graph und Modell herausgearbeitet und intensiv genutzt.

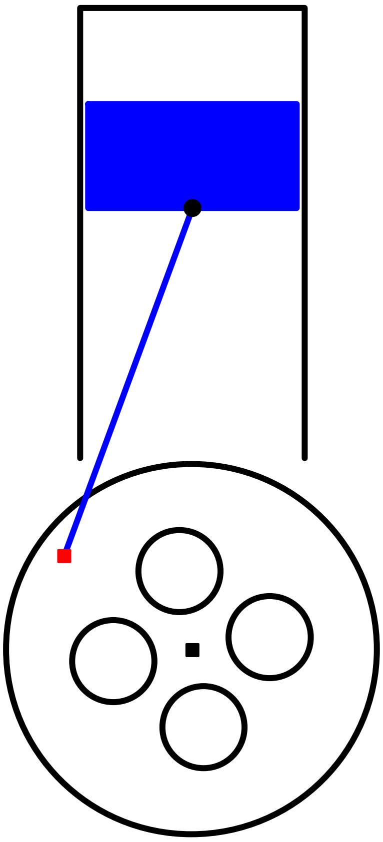
Gruppe 1

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Bei einem Kolbenmotor bewegt sich das „Schwungrad“ immer gleichmäßig in dieselbe Richtung.



a) Beschreibt, wie sich dabei der Kolbenkopf (blaue Fläche in der Abbildung) bewegt.

b) Wie groß ist der Kolbenhub[12]? (Gebt ein Vergleichsmaß aus der Zeichnung an!)

c) Bewegt sich der Kolbenkopf immer gleichmäßig oder ist er manchmal schneller und manchmal langsamer? Gebt gegebenenfalls an, in welchen Bewegungssituationen er sich schneller und in welchen er sich langsamer bewegt. Begründet eure Antwort.

[12] Der Kolbenhub ist der Abstand zwischen der höchsten und der tiefsten Lage des Kolbenkopfes.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

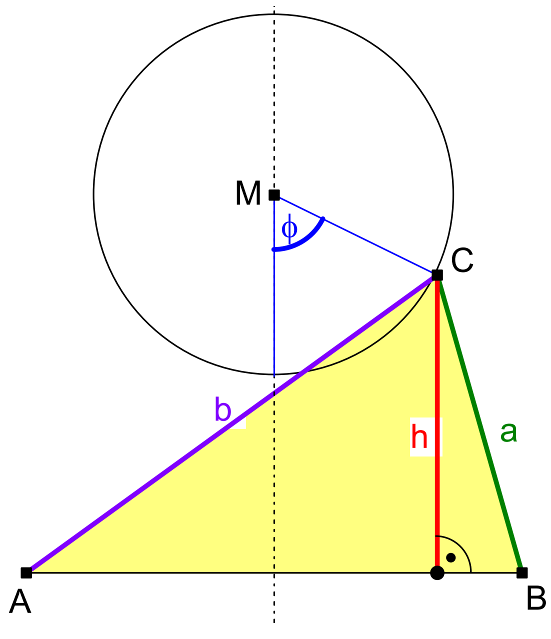
Gruppe 2

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt C wird gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **a**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die die Länge von **a** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von C ist die Strecke **a** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich die Länge der Strecke **a** überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen sie sich schneller und andere in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

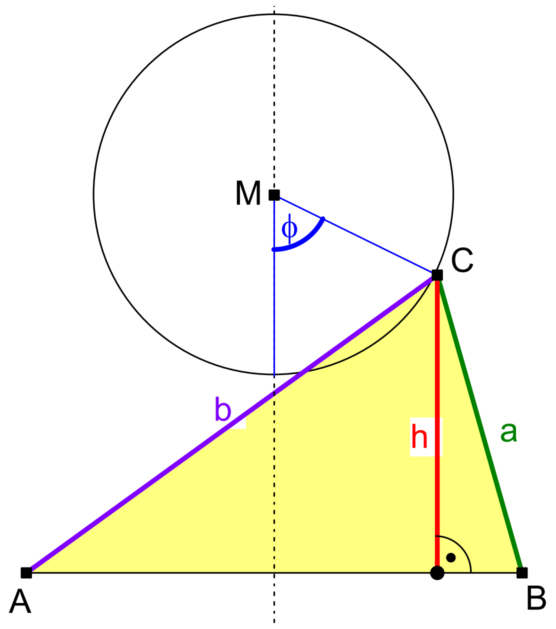
Gruppe 3

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt C wird gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **b**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die die Länge von **b** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von C ist die Strecke **b** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich die Länge der Strecke **b** überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen sie sich schneller und andere in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

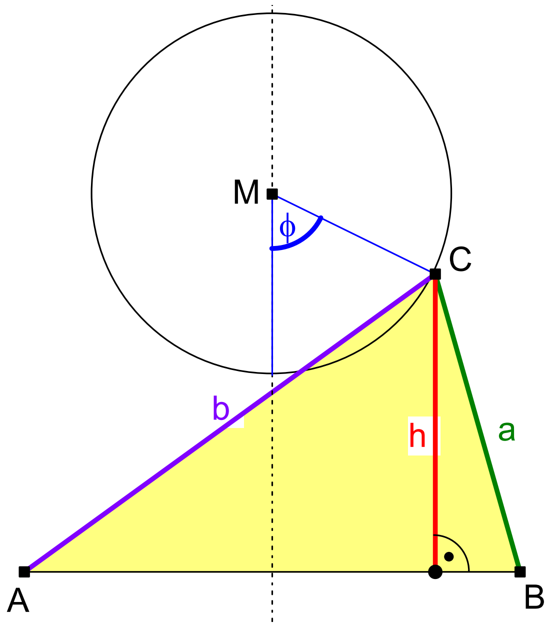
Gruppe 4

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt C wird gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **h**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die die Länge von **h** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von C ist die Strecke **h** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

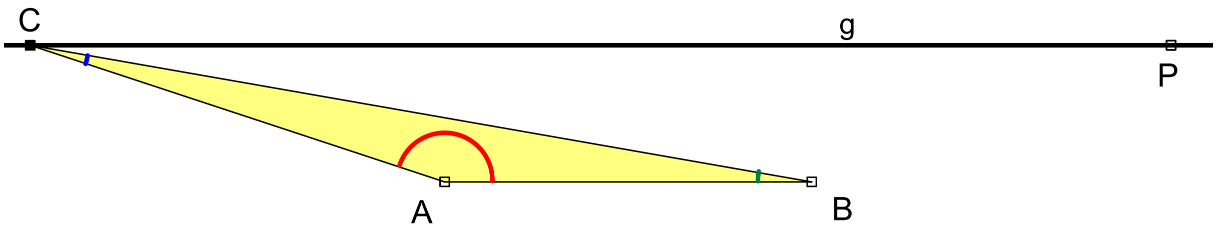
c) Ändert sich die Länge der Strecke **h** überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen sie sich schneller und andere in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Gruppe 5

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:



Der Punkt C wird gleichmäßig nach rechts entlang der Geraden g bis zum Punkt P bewegt.

a) Wie ändert sich dabei der Winkel α? Wird er größer oder kleiner? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die der Winkel größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Gibt es maximale und minimale Winkelgrößen von α und für welche Lage(n) von C treten sie gegebenenfalls auf? Begründet eure Antwort.

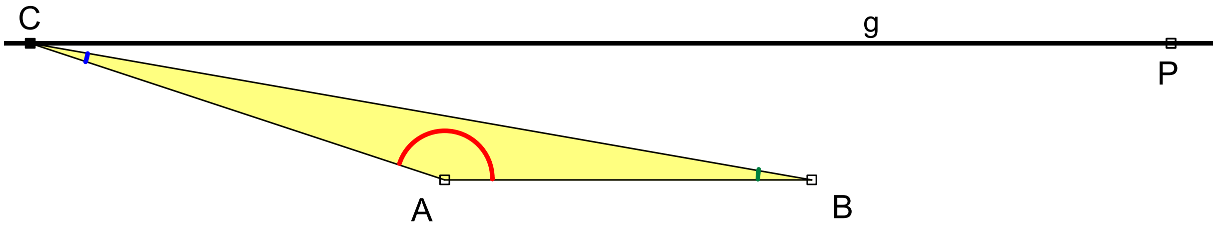
c) Ändert sich der Winkel α überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen er sich schneller und andere in denen er sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Gruppe 6

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:



Der Punkt C wird gleichmäßig nach rechts entlang der Geraden g bis zum Punkt P bewegt.

a) Wie ändert sich dabei der Winkel β? Wird er größer oder kleiner? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von C an, für die der Winkel größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Gibt es maximale und minimale Winkelgrößen von β und für welche Lage(n) von C treten sie gegebenenfalls auf? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich der Winkel β überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen er sich schneller und andere in denen er sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

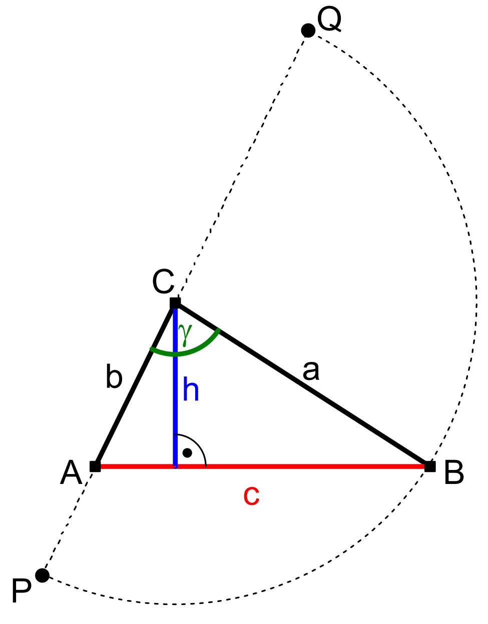
Gruppe 7

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt B wird gleichmäßig auf dem Kreisbogen von P nach Q bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **c**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von B an, für die die Länge von **c** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von B ist die Strecke **c** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich die Länge der Strecke **c** überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von B, in denen sie sich schneller und andere in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

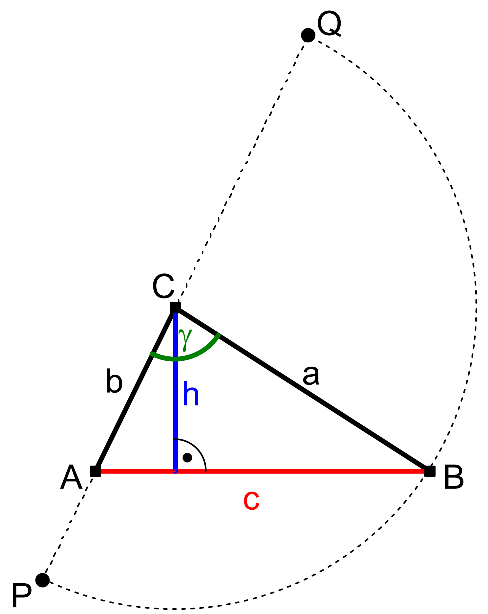
Gruppe 8

Aufgabenblatt für die Gruppenarbeit

1. Bestimmt eine Gruppensprecherin bzw. einen Gruppensprecher, die / der euer Ergebnis dem Rest der Klasse vorstellt.
2. Diskutiert die Aufgaben in der Gruppe und erarbeitet gemeinsam eine Lösung. Euer Ziel muss sein, dass jede und jeder in der Gruppe eure Lösung verstanden hat. Erklärt euch eure Lösungsansätze gegenseitig!
3. Macht euch Notizen, während ihr die Aufgaben diskutiert. An Hand dieser Notizen gestaltet ihr zum Schluss gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr eure Lösung präsentiert.
4. Ihr habt insgesamt 30 Minuten Zeit dafür.

Aufgaben:

Der Punkt B wird gleichmäßig auf dem Kreisbogen von P nach Q bewegt.



a) Wie ändert sich dabei die Länge der Strecke **h**? Wird sie länger oder kürzer? Gebt gegebenenfalls jeweils Bereiche für die Lage von B an, für die die Länge von **h** größer bzw. kleiner wird. Erläutert, wie ihr euch das überlegt habt.

b) Für welche Lage von B ist die Strecke **h** am längsten bzw. am kürzesten? Begründet eure Antwort.

c) Ändert sich die Länge der Strecke **h** überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von B, in denen sie sich schneller und andere in denen sie sich langsamer ändert? Gebt gegebenenfalls diese Bereiche an. Beschreibt, wie ihr euch das überlegt habt.

Tel.: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Lösungshinweise für die Aufgaben der Gruppenarbeitsphase

Lösungshinweise zu den Gruppen 2, 3 und 4:

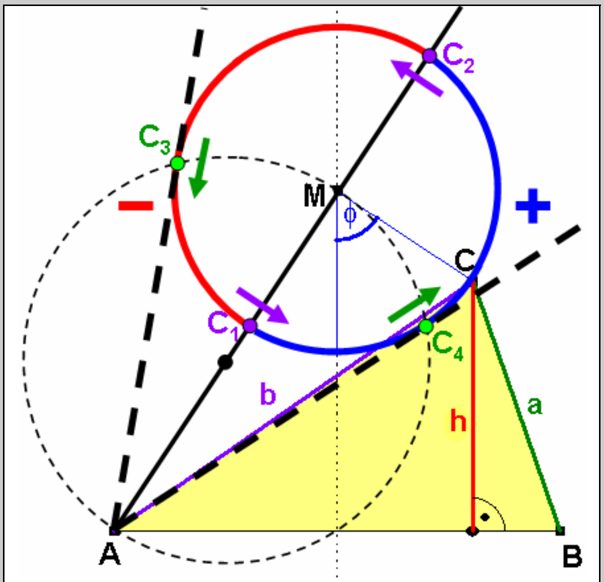


Abb. 113: Erläuterung für b

- Grundsätzlich werden die Strecken a, b und h dann länger, wenn C, der eine Endpunkt der Strecke, sich vom anderen Endpunkt wegbewegt und entsprechend kürzer, wenn C sich auf den anderen Endpunkt zubewegt (bzw. im Fall h auf die Gerade AB zubewegt).
- Da der Punkt C sich auf dem Kreis bewegt, ist er dem jeweils anderen Endpunkt am nächsten, wenn die Streckenlänge dem Abstand der Kreislinie zum Endpunkt entspricht (bzw. im Fall h: Abstand Kreislinie ⇔ Gerade AB). Am weitesten entfernt vom anderen Endpunkt ist C, wenn er sich genau auf der gegenüberliegenden Seite der Kreislinie befindet. **Genauer:** Die Lagen von C, für die die jeweilige Strecke am kürzesten bzw. am längsten ist, sind die Schnittpunkte der Kreislinie mit der Geraden BM für a, der Geraden AM für b bzw. dem von M auf AB errichteten Lot für h.
- Die genannten Geraden teilen die Kreislinie jeweils in zwei Kreisbögen. Bewegt sich C im Gegenuhrzeigersinn auf dem rechten Kreisbogen (vom jeweiligen anderen Endpunkt aus gesehen), so wird die zugehörige Strecke länger. Entsprechend wird sie bei einer Bewegung auf dem linken Kreisbogen kürzer.
- Für die Geschwindigkeit der Änderung der Streckenlänge ist es entscheidend, ob sich C in Richtung der durch C und den anderen Endpunkt der Strecke festgelegten Geraden bewegt oder senkrecht dazu. Im ersten Fall wird die Bewegung von C vollständig in eine Längenänderung der Strecke umgesetzt, im zweiten Fall ändert sich die Länge der Strecke nur unwesentlich (bzw. gar nicht).
- Eine anschauliche Hilfe ist die Vorstellung eines Gummibandes, das man an einer Seite festhält und spannt. Wie (d. h. in welche Richtung) muss man am anderen Ende ziehen, damit sich die Länge des Gummibandes maximal bzw. überhaupt nicht ändert? Die maximale Längenänderung erfolgt offensichtlich, wenn man in die, durch die aktuelle Lage des Gummibandes festgelegte Richtung weiter zieht. Fast keine Änderung erfolgt, wenn man senkrecht zur aktuellen „Streckenrichtung“ zieht. (Konsequente Fortsetzung dieser Zugweise führt zu einer Kreisbewegung der Hand, wobei das Gummiband als Radius des Kreises seine Länge nicht verändert.)
- Entsprechend ändert sich die Streckenlänge fast gar nicht, wenn C sich auf einem Kreislinienstück bewegt, dass nahezu senkrecht zur aktuellen „Streckenrichtung“ verläuft. (Für die Strecke b sind das Bewegungen auf der Kreislinie in der Nähe der Punkte C_1 und C_2.)
- Die Streckenlänge ändert sich am schnellsten, wenn C sich auf einem Teil des Kreises bewegt, der fast der aktuellen „Streckenrichtung“ verläuft. Das ist sicher irgendwo zwischen C_1 und C_2 der Fall. Diese Erkenntnis reicht hier für die Gruppenarbeit vollkommen aus. Genauer betrachtet ändert sich die Länge der Strecke am stärksten, wenn C sich gerade so bewegt, dass die aktuelle Lage der Strecke tangential zum Kreis verläuft. (Vgl. C_3 und C_4 in Abb. 113).

- Diese Überlegungen werden an Hand der Datei Laengen_Dreieck_Kreis_mit_Graphen.geo überprüft. Diese Datei stellt zwei graphische Darstellungen zur Verfügung, ein Balkendiagramm und die Funktionsgraphen der Funktionen a(ϕ), b(ϕ) und h(ϕ). Diese Darstellungen sollten getrennt voneinander in der genannten Reihenfolge beim Bewegen von C betrachtet und analysiert werden. Dabei kann das Balkendiagramm helfen die Funktionsgraphen zu verstehen.

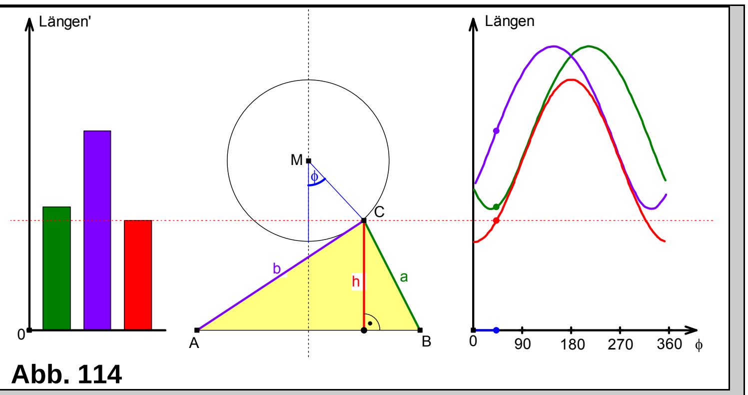


Abb. 114

  Hinweise:
  - Die beiden Diagramme lassen sich durch Ziehen am jeweiligen „Koordinatenursprung" aus dem „Versteck" am rechten Rand in das Blickfeld ziehen.
  - Am Ende der Betrachtungen kann es interessant sein, die Veränderungen der Graphen zu beobachten, wenn man die Lage des Kreismittelpunkts verändert.

Lösungshinweise zu den Gruppen 5 und 6:

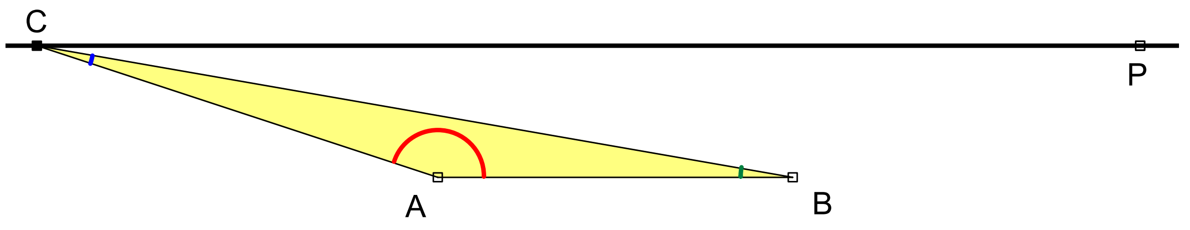


Abb. 115

- Für die Winkel α und β gilt jeweils, dass der durch die Gerade AB festgelegte Schenkel sich nicht verändert, wenn C auf der Geraden durch P bewegt wird. Verändert man die Lage von C, so wird allerdings der jeweils andere Schenkel der beiden Winkel in seiner Neigung und damit die Winkelgröße des entsprechenden Winkels verändert.
- Wandert der Punkt C, beginnend in der in Abb. 115 dargestellten Lage, entlang der Geraden bis P, so wird
  - der zweite Schenkel des Winkels α immer stärker in Richtung des ersten Schenkels geklappt. ➔ α wird immer kleiner. ➔ Die in Abb. 115 dargestellte Lage von C markiert die maximale Winkelgröße für α. Wenn C mit P zusammenfällt, dann ist α minimal.
  - der erste Schenkel des Winkels β immer stärker vom zweiten Schenkel weggeklappt. ➔ β wird immer größer. ➔ Die in Abb. 115 dargestellten Lage von C markiert die minimale Winkelgröße für β. Wenn C mit P zusammenfällt, dann ist β maximal.
- Eine Winkelgröße wird dann am stärksten verändert, wenn man an einem Punkt des Schenkels senkrecht zur „Schenkelrichtung" zieht. Die Winkelgröße wird überhaupt nicht verändert, wenn man in „Schenkelrichtung" zieht. Damit bewirkt eine Bewegung von C dann die größte Veränderung der jeweiligen Winkelgröße, wenn der zugehörige Schenkel des Winkels senkrecht auf der Geraden durch P steht, wenn also C über A bzw. über B liegt. Je weiter weg von dieser Lage sich C befindet, desto mehr erfolgt die Bewegung in „Schenkelrichtung" und desto geringer ist die Änderung der Winkelgröße. Insgesamt ergibt sich damit:

- Die Winkel ändern sich nur sehr langsam, wenn C sich in der Nähe seiner Ausgangslage bewegt. Die Änderung wird schneller, wenn sich C auf eine Lage über A (bzw. B) zubewegt, ist in der Umgebung von dieser Lage am schnellsten und wird dann immer langsamer (bis C mit P zusammenfällt). In der Umgebung von P erfolgt die Änderung wieder sehr langsam.
- Diese Überlegungen werden an Hand der Datei Wikel_Dreieck_Gerade_mit_Graphen.geo überprüft. Diese Datei stellt zwei graphische Darstellungen zur Verfügung, ein Balkendiagramm und die Funktionsgraphen der Funktionen $\alpha(x_C)$, $\beta(x_C)$ und $\gamma(x_C)$. Diese Darstellungen sollten getrennt voneinander in der genannten Reihenfolge beim Bewegen von C betrachtet und analysiert werden. Dabei kann das Balkendiagramm helfen die Funktionsgraphen zu verstehen.

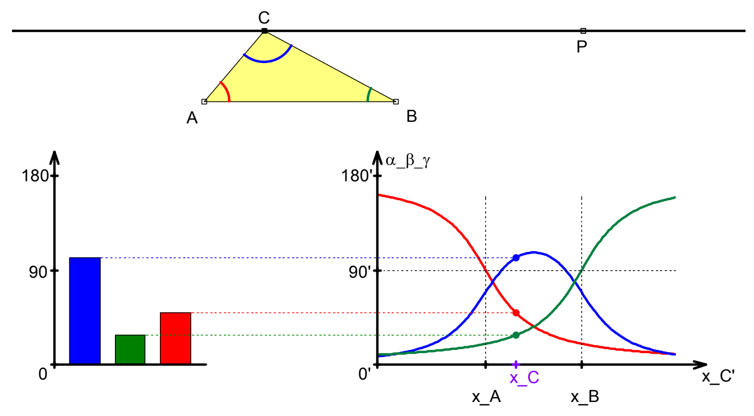


Abb. 116

Hinweise:
  - Die beiden Diagramme lassen sich durch Ziehen am jeweiligen „Koordinatenursprung“ aus dem „Versteck“ am rechten Rand in das Blickfeld ziehen.
  - Interessant ist hier auch die Betrachtung der Änderung von γ. Da man hier zur Erklärung aber mit Hilfe von Fasskreisbögen argumentieren müsste (vgl. die Lösungshinweise zur Zusatzaufgabe S. 68ff), die den Schülern noch nicht zur Verfügung stehen, wurde diese Aufgabe nicht für die Gruppenarbeit gestellt.
  - Es lohnt sich an Hand der Diagramme noch einmal den Basiswinkelsatz und damit das Verständnis des Begriffes gleichschenkliges Dreieck zu vertiefen! (Anmerkung: Die Schnittpunkte der Graphen gehören zu Lagen von C, für die das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig ist.)

Lösungshinweise zu den Gruppen 7 und 8:

- Die Länge von h ist der Abstand von C zur Geraden AB. Wenn B mit P zusammenfällt, dann liegt C auf der Geraden AB und damit beträgt die Länge von h Null Längeneinheiten. Entsprechendes gilt, wenn B und Q zusammenfallen. Dazwischen muss es also eine Lage von B geben, so dass h maximal wird. Die maximale Länge von h ist aber gerade dann gegeben, wenn h mit b zusammenfällt, wenn also gilt: $h = b$. Dies ist dann der Fall, wenn B auf dem in A auf PQ errichteten Lot l liegt.
- Da der Weg, den der Punkt B von P bis zum Schnittpunkt von l mit dem Kreisbogen zurücklegen muss, deutlich geringer ist, als der Weg vom Schnittpunkt bis Q, ändert sich h am Anfang recht schnell, um das Maximum herum kaum und nach dem Maximum deutlich langsamer als vorher.

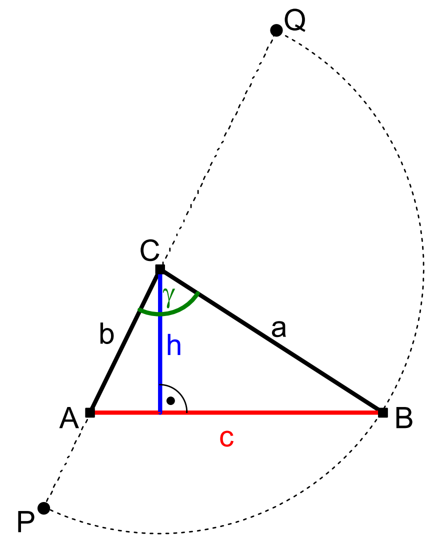


Abb. 117

- Wenn B mit P zusammenfällt, dann ist die Länge von c die Differenz aus den Längen von a und b. Wenn B mit Q zusammenfällt, dann ist die Länge von c die Summe aus den Längen von a und b. Dies sind auf Grund der Dreiecksungleichung $(c < a + b \quad \wedge \quad a < c + b \quad \Rightarrow \quad a - b < c < a + b)$ auch die minimale bzw. die maximale Länge von c. (Die Längen von a und b ändern sich nicht!)

- Die Länge von c wird also während der gesamten Bewegung größer, sie ändert sich allerdings am Anfang und am Ende der Bewegung von B nur sehr geringfügig, da die Bewegung in diesen Bereichen nahezu senkrecht zur Streckenrichtung von c erfolgt. Im Bereich dazwischen erfolgt die Änderung deutlich schneller.

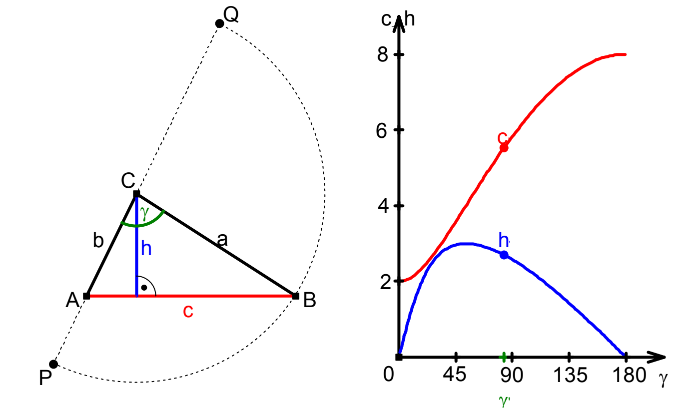


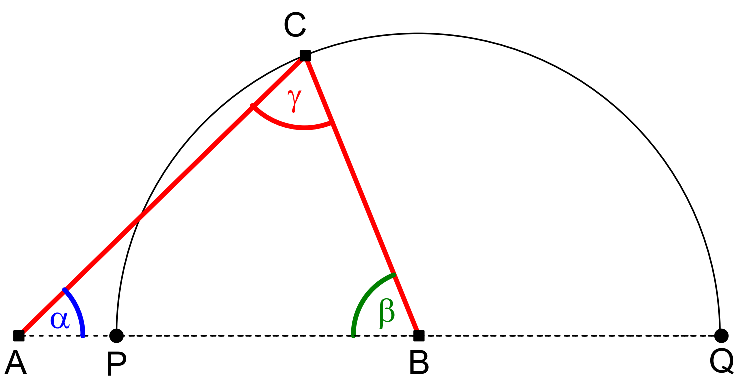
Abb. 118

- Diese Überlegungen werden an Hand der Datei Krandreieck_mit_Graph.geo überprüft. In dieser Datei werden neben dem Modell auch die Graphen der Funktionen $c(\gamma)$ und $h(\gamma)$ ausgegeben. Beim Bewegen von B werden nun die Figur und die zugehörigen Graphen parallel betrachtet und analysiert.

Zusatzaufgabe für Interessierte

a) Zeige: Wenn der Punkt C auf dem Halbkreis wandert, so ist stets $\gamma > \alpha$ oder $\gamma = \alpha$.

b) Wo liegt C, wenn $\gamma = \alpha$?



c) Wie ändert sich γ, wenn C gleichmäßig auf dem Halbkreis von P nach Q wandert?

d) Wie ändert sich α, wenn C gleichmäßig auf dem Halbkreis von P nach Q wandert?

e) Was passiert mit den Kurven, wenn A auf PB] in Richtung B wandert?

- Wie sehen die Graphen aus, wenn A und P zusammenfallen?
- Wie sehen die Graphen aus, wenn A und B zusammenfallen?

Lösungshinweise:
(Vgl. auch die Dateien Winkel_Dreieck_Kreisbogen.geo, Winkel_Dreieck_Gerade_mit_Graphen.geo und Winkel_Dreieck_Kreisbogen_Fasskreisboegen.geo.)

a) $\gamma > \alpha$

- $\overline{AB} = \text{const.}$
  $\wedge$ $\overline{AB} = \text{const.}$
  $\wedge$ $\overline{AB} > \overline{BC}$
- Da der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, folgt $\gamma > \alpha$.

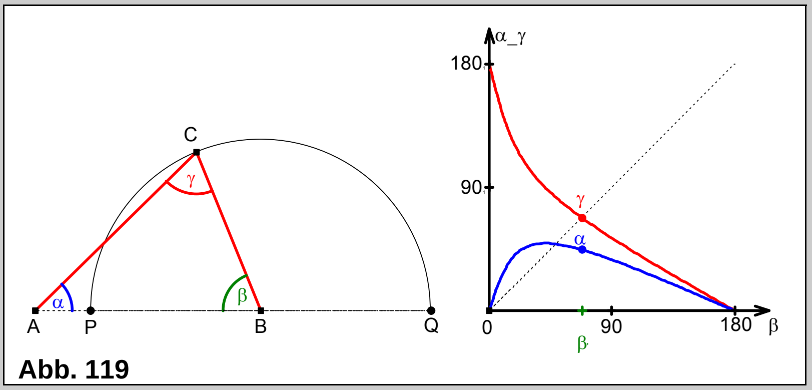


Abb. 119

b) $\gamma = \alpha$

- Wenn C mit P zusammen fällt, dann gilt $\gamma = 180° \wedge \alpha = 0°$, es folgt also weiterhin $\gamma > \alpha$.

c) Wenn allerdings C mit Q zusammenfällt, dann gilt $\gamma = 0° \wedge \alpha = 0°$, also folgt $\gamma = \alpha$.

d) Wie ändert sich γ?

- $C = P: \quad \gamma = 180°$
- $C = Q: \quad \gamma = 0°$
- Dazwischen wird γ immer kleiner, da immer neue Fasskreisbögen geschnitten werden. Die Änderung erfolgt zunächst relativ schnell (Die Fasskreisbögen liegen dicht beieinander.) und wird dann geringer.
  Anmerkung: Die Argumentation über die Fasskreisbögen steht den Schülern in der 7. Klasse noch nicht zur Verfügung. Interessant ist hier die Frage, welche Überlegungen die Schüler hier anstellen.

e) Wie ändert sich α?

- α wird zunächst sehr schnell größer, da die Bewegung nahezu senkrecht zum 2. Schenkel erfolgt.
- Dann langsamer, da die Bewegung immer mehr „in Richtung des 2. Schenkels“ erfolgt.
- Maximum: AC ist Tangente an den Kreis $(\gamma = 90°)$.
  Begründung:
  1. AC ist Sekante (C ist erster / linker Schnittpunkt)
  2. AC ist Tangente (C ist Berührpunkt)
  3. AC ist Sekante (C ist zweiter / rechter Schnittpunkt)
     Der erste Schnittpunkt bewegt sich wieder auf den Punkt P zu. Da der Weg von C (dem zweiten Schnittpunkt) aber nun deutlich länger ist, wird α deutlich langsamer kleiner als er vorher gewachsen ist.

f) Wie ändert sich der Graph von $\alpha(\beta)$?

- **A → P:**
  Der Berührpunkt der Tangente wandert auf P zu. → Das Maximum verschiebt sich nach links und wird größer.

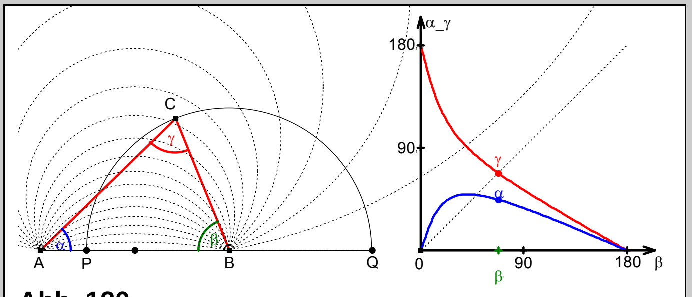


Abb. 120

- **A = P:**
  Das ΔABC ist gleichschenklig. → $\alpha = \gamma$. Die beiden Winkelgrößen nehmen linear von 90° beginnend ($C = P$) bis zu 0° ($C = Q$) ab.
- **P – A – B:**
  1. $C = P: \quad \alpha = 180°$
  2. $C = Q: \quad \alpha = 0°$
  3. Dazwischen wird γ immer kleiner, zuerst relativ schnell, da die Bewegung fast senkrecht zum zweiten Schenkel erfolgt, dann langsamer.
- **A = B:**
  α ist Nebenwinkel von β. Da β linear von 0° auf 180° anwächst, nimmt α linear von 180° auf 0° ab.

Wie ändert sich der Graph von $\gamma(\beta)$?

- **A → P:**
  Am Anfang immer steiler, da die Fasskreisbögen immer enger beieinander liegen, am Ende immer flacher, da die Fasskreisbögen immer weiter auseinander liegen.
- **A = P:**
  Das ΔABC ist gleichschenklig. → $\gamma = \alpha$. Die beiden Winkelgrößen nehmen linear von 90° beginnend ($C = P$) bis zu 0° ($C = Q$) ab.
- **P – A – B:**
  γ hat ein Maximum, da einer der Fasskeisbögen, den Kreis $k(B; \overline{BP})$ berührt. In der Umgebung des Maximums ist die Änderung gering, da C sich annähernd auf einer Tangente an den Berührfasskreisbogen bewegt.
- **A = B:**
  Die beiden Schenkel von γ fallen zusammen, d. h. es gilt: $\gamma \equiv 0°$.