

Grundvorstellungen aufbauen

Was sind Grundvorstellungen? Welche Rolle spielen sie beim Lernen von Mathematik? Und wie kann man die Entstehung und Entwicklung von Grundvorstellungen fördern?

**RUDOLF
VOM HOFE,
JÜRGEN ROTH**

Auf diese Fragen geben wir eine Antwort und erklären zunächst, was man im Allgemeinen unter Grundvorstellungen versteht. Dabei handelt es sich nicht um statische Vorstellungsbilder, sondern um ein lebendiges System, das mit fortschreitendem Kompetenzaufbau erweitert und vernetzt wird. Anhand von Beispielen zeigen wir, wie sich Grundvorstellungen vom Beginn der Schulzeit bis in die Sekundarstufe hinein entwickeln.

Das Lernen besser verstehen

Wie spielt man Volleyball?

Betrachten wir Jugendliche, die Beachvolleyball spielen (**Abb. 1**). Wie machen die das? Woher wissen sie, wie sie die Hand halten müssen, wie hoch sie springen und wie sie ihren Körper strecken müssen? Natürlich hat dies viel mit Übung zu tun und mit Wissen und Erfahrung, die im Langzeitgedächtnis gespeichert sind. Doch wie? Merkt man sich „fotografisch“ Spielsituationen, um sie später wieder abzurufen? Oder merkt man sich einzelne Bewegungsabläufe und ihre Kombinationen?

Aus der Sportpsychologie wissen wir, dass Bewegungsabläufe durch *Bewegungsvorstellungen* gesteuert werden. Komplexe Bewegungsabläufe setzen sich aus Einzelbewegungen zusammen, die – je nach Situation – flexibel koordiniert werden können. Diesen Einzelbewegungen entsprechen *motorischen Elementarvorstellungen*. Diese sind im Langzeitgedächtnis gespeichert und können – je nach Situation – kombiniert und als Komplex abgerufen werden (s. Schack u. a. 2020).

Und wie ist das beim Mathematiklernen?

Im Gegensatz zum Volleyball hat man bei der Mathematik mehr Zeit zum Überlegen (**Abb. 2**). Aber woher weiß man, wie man eine Aufgabe angeht, ob Addieren oder Multiplizieren, ob eine lineare oder eine quadratische Funktion passend ist?

Wie wir aus vielen Untersuchungen wissen, ist auch mathematisches Denken und Handeln immer mit *Vorstellungen* verbunden, die bewusst oder

unbewusst wirksam sind. Diese Vorstellungen sind ebenfalls im Langzeitgedächtnis gespeichert und vernetzt. Oft müssen mehrere Vorstellungen aktiviert und koordiniert werden, um eine Aufgabe zu bewältigen. Diese Vorstellungen können für die Lösung zielführend sein – aber auch Fehler verursachen.

Tragfähige mathematische Vorstellungen nennen wir *Grundvorstellungen*; abgekürzt GV.

(vom Hofe/Blum 2016)

Die Bedeutung von Grundvorstellungen wird besonders deutlich, wenn wir ihre Rolle im Modellierungsprozess betrachten (s. Blum/Leiss 2005). Für die wichtige Übersetzung zwischen Realität und Mathematik (in **Abb. 3** an den Stellen 2 und 4) sind Grundvorstellungen erforderlich. Ist etwa eine Situation mit einem linearen Wachstum gegeben, brauche ich eine Vorstellung davon, mit welchen mathematischen Mitteln man dieses Wachstum darstellen kann. Welche Funktionen sind dafür geeignet und welche nicht? Fehlen solche Vorstellungen, stehen sich Realität und Mathematik beziehungslos gegenüber.

Bei vielen Lernenden ist dies tatsächlich der Fall: Sie können sich gut in realen Kontexten bewegen, haben aber keine Ahnung, wie sie diese in Mathematik übersetzen können. Aber auch das Gegenteil kommt häufig vor: Lernende können gut rechnen, wissen aber nicht, was ihre Rechnungen für Anwendungssituationen bedeuten. Und auch innerhalb der Mathematik (in **Abb. 3** an Stelle 3) sind Grundvorstellungen erforderlich, wenn etwa zwischen Geometrie und Algebra übersetzt werden muss und eine graphisch dargestellte lineare Steigung mit einem Term auszudrücken ist.

Wie entstehen Grundvorstellungen?

Basis für die Entwicklung von Grundvorstellungen sind mathematische Handlungserfahrungen. Diese entwickeln sich über Prozesse der Verinnerlichung zu Handlungsmustern. Die Ausprägung von Grundvorstellungen hängt ab vom Umfang der entsprechenden Handlungserfahrungen und von der Häufigkeit ihrer Aktivierung. Dabei lassen sich zwei Arten von Grundvorstellungen unterscheiden:



Abb. 1: Bewegungsabläufe setzen sich aus Einzelbewegungen (motorischen Elementarvorstellungen) zusammen. Diese werden im Langzeitgedächtnis gespeichert.



Abb. 2: Mathematisches Denken und Handeln beruht auf Vorstellungen, die ebenfalls im Langzeitgedächtnis gespeichert und vernetzt sind.

- *Primäre Grundvorstellungen* haben ihren Ursprung in Handlungen mit realen Objekten; zum Beispiel „Hinzufügen“ (als GV der Addition) oder „Wegnehmen“ (als GV der Subtraktion). Diese Grundvorstellungen entwickeln sich schon lange vor der Schulzeit, z. B. aus dem spielerischen Umgang mit Spielsteinen, Äpfeln, Geld usw.
- *Sekundäre Grundvorstellungen* entwickeln sich im Unterricht und basieren auf dem Umgang mit mathematischen Objekten wie Termen, Gleichungen oder Funktionen. Ein Beispiel ist das *mentale Bewegen im Koordinatensystem*, wenn man in Gedanken die x -Achse durchläuft und die davon abhängige Änderung des Funktionswerts betrachtet. Dies entspricht der „Kovariation“ als einer der wichtigen Grundvorstellungen für funktionales Denken.

wir vermitteln möchten, und den Vorstellungen, die sich bei den Lernenden tatsächlich ausbilden.

Insofern ist es sinnvoll zu unterscheiden, ob man von Grundvorstellungen im normativen oder im deskriptiven Sinne spricht:

Normativ formulierte Grundvorstellungen

sind didaktische Leitlinien, die Deutungsmöglichkeiten eines mathematischen Inhalts oder Verfahrens beschreiben.

Deskriptiv ermittelte Schülervorstellungen

geben Aufschluss über die individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle, die Lernende tatsächlich haben; diese weichen mehr oder weniger von den intendierten Grundvorstellungen ab.

Welche Rolle spielen Grundvorstellungen im Mathematikunterricht?

Wie wir wissen, ist Lernen ein individueller und konstruktiver Prozess, der sich durch guten Unterricht unterstützen, aber nicht bis ins letzte Detail steuern lässt. Mathematische Begriffe und Verfahren können nicht einfach in das Denken der Schülerinnen und Schüler transferiert werden, sondern müssen über sinnvolle Erkundungen und Erklärungen, Übungen und Anwendungen erworben werden. Dabei entspricht das, was gelernt wird, nicht immer dem, was Lehrende vermitteln möchten. Ebenso ist es mit den Grundvorstellungen, welche

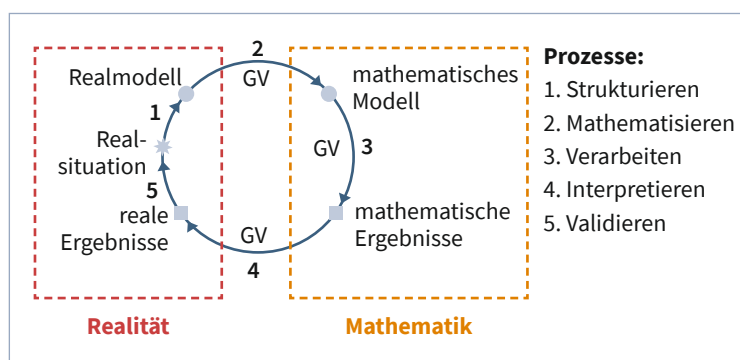


Abb. 3: Grundvorstellungen sind besonders wichtig bei der Übersetzung zwischen Realität und Mathematik, d. h. an den Stellen 2 und 4.

Im Idealfall entwickeln sich aus den vom Unterricht intendierten (normativen) Grundvorstellungen auch entsprechende tragfähige Vorstellungen der Lernenden.

Abb. 4 zeigt die Unterrichtsschritte und die individuellen Lernschritte in ihrem Zusammenspiel: Am Beginn steht die Überlegung, welche Grundvorstellungen für die Vermittlung bestimmter Inhalte oder Verfahren sinnvoll sind. Daraus folgt die Entwicklung geeigneter Lernkontexte als Verstehensanker, die das Vorwissen der Lernenden aktivieren und zum neuen Inhalt führen. So können die Lernenden den Lernkontext erfassen, tragfähige Grundvorstellungen aufbauen und nach entsprechenden Übungs- und Anwendungsphasen den Begriff bzw. das Verfahren verstehen. In diesem Sinne kann man sagen:

Grundvorstellungen

sind anschauliche Deutungen eines mathematischen Begriffs, die diesem Sinn geben und Verständnis ermöglichen.

Die Entwicklung von Grundvorstellungen erstreckt sich vom Kindergarten bis zur gymnasialen Oberstufe und darüber hinaus. Dementsprechend gibt es Grundvorstellungen von verschiedener Komplexität, die wir im Folgenden exemplarisch aufzeigen möchten. Wir betrachten zunächst elementare Grundvorstellungen am Beispiel des Übergangs vom Rechnen mit natürlichen Zahlen zur Bruchrechnung.

Elementare Grundvorstellungen von natürlichen Zahlen und Brüchen

Addieren – in verschiedenen Situationen

Die Addition ist die erste Grundrechenart. **Abb. 5** gibt einen Überblick über die für die Addition relevanten Grundvorstellungen (als Wurzeln) und ihre

Anwendungssituationen (als darüber liegende Äste). Beginnen wir mit der ersten Sachsituation von links: Lilly hat 3€, ihre Mutter gibt ihr 4€ hinzu. Wie viel Euro hat Lilly insgesamt? Die Situation entspricht der Vorstellung des *Hinzufügens*: Die Ausgangssituation ist ein Zustand, dann erfolgt eine Änderung, das Ergebnis ist wieder ein Zustand. Wir haben die Struktur Zustand–Änderung–Zustand, kurz Z–Ä–Z.

Lilly bekommt von Onkel Kevin 3€ und von Tante Chantal 4€ ... Hier haben wir die Struktur Änderung–Änderung–Änderung, zwei Änderungen werden zu einer Gesamtänderung zusammengefasst.

Lilly hat 3€, Marc hat 4€. Wie viel Euro haben sie zusammen? Hier passiert nichts, es ist eine statische Situation. Man stellt sich nur vor, wie viel beide zusammen haben. Diese Vorstellung ist abstrakter als die ersten beiden und entspricht der mengentheoretischen Vereinigung.

Lilly hat von ihrem Taschengeld 4€ ausgegeben, jetzt hat sie noch 3€. Wie viel hatte sie vorher? Dies ist für Lernende die schwierigste Situation, weil die Oberflächenstruktur des Textes eine Subtraktion darstellt, die Tiefenstruktur der Aufgabe jedoch eine Addition erfordert. Es handelt sich um eine Umkehraufgabe, die Rückwärtsrechnen erfordert.

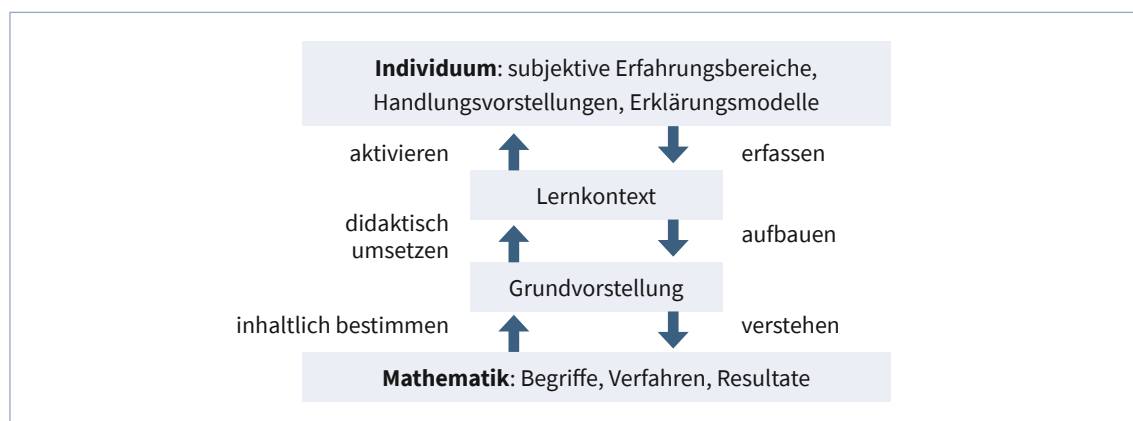
Subtrahieren – in verschiedenen Situationen

Nun zur Subtraktion (**Abb. 6**). Hier haben wir die Vorstellung des *Wegnehmens* und die Struktur Z–Ä–Z. Bei den nächsten zwei Beispielen geht es um den Vergleich von Änderungen und Zuständen. Bei der Situation Ä–Ä–Ä geht es um den Unterschied zweier Änderungen. Bei der Situation Z–Z–Z wird nichts weggenommen, es ist eine statische Situation des Vergleichs. Bei der letzten Situation handelt es sich wieder um die Umkehraufgabe; dem entspricht die Vorstellung des *Ergänzens*, die manchen schwerfällt, für das Rechnen jedoch wichtig ist.

Multiplizieren und Dividieren

Betrachten wir noch kurz Multiplikation und Division. Die wichtigste Grundvorstellung des

Abb. 4: Unterrichtliche Schritte (links) und individuelle Lernschritte (rechts) im Zusammenspiel



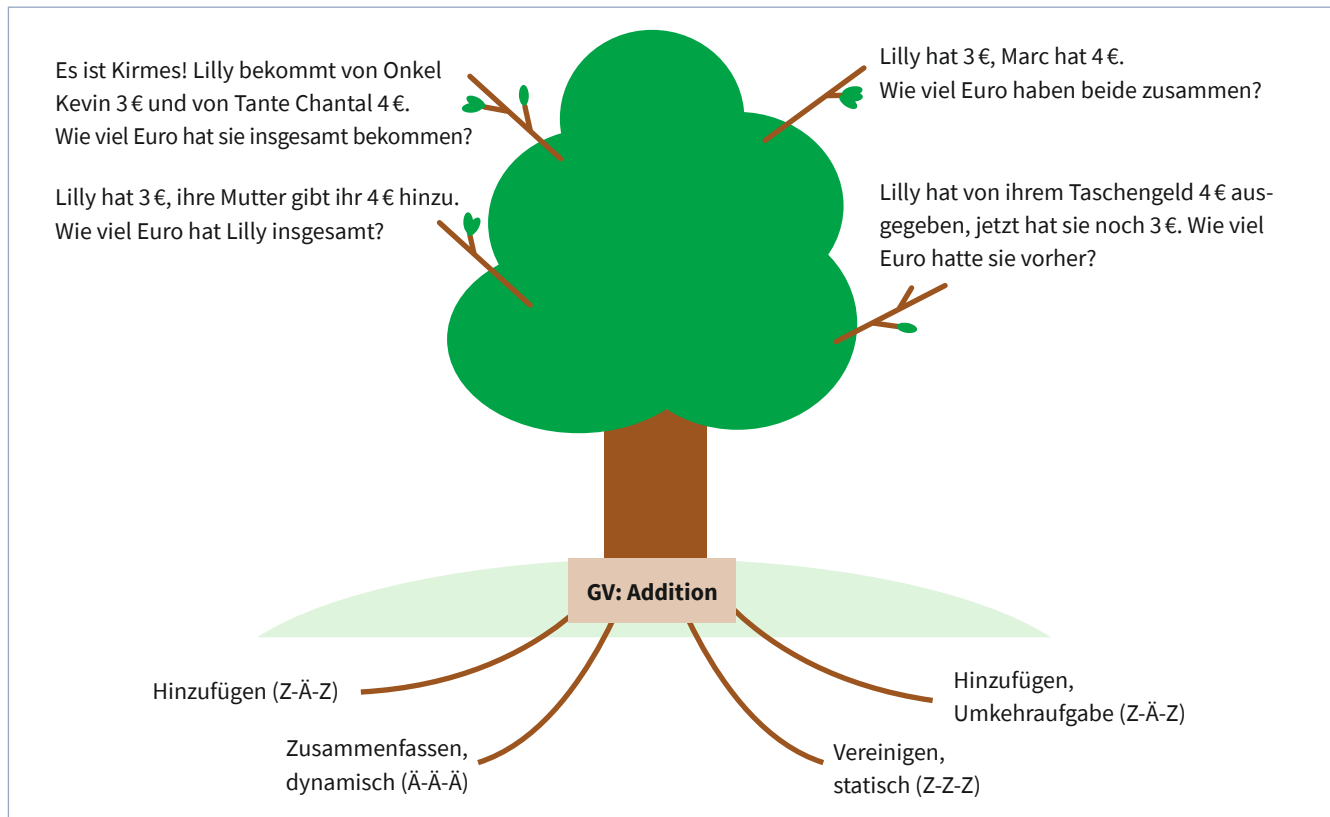


Abb. 5: Grundvorstellungen zur Addition (mit Z = Zustand, Ä = Änderung) und entsprechende Aufgaben

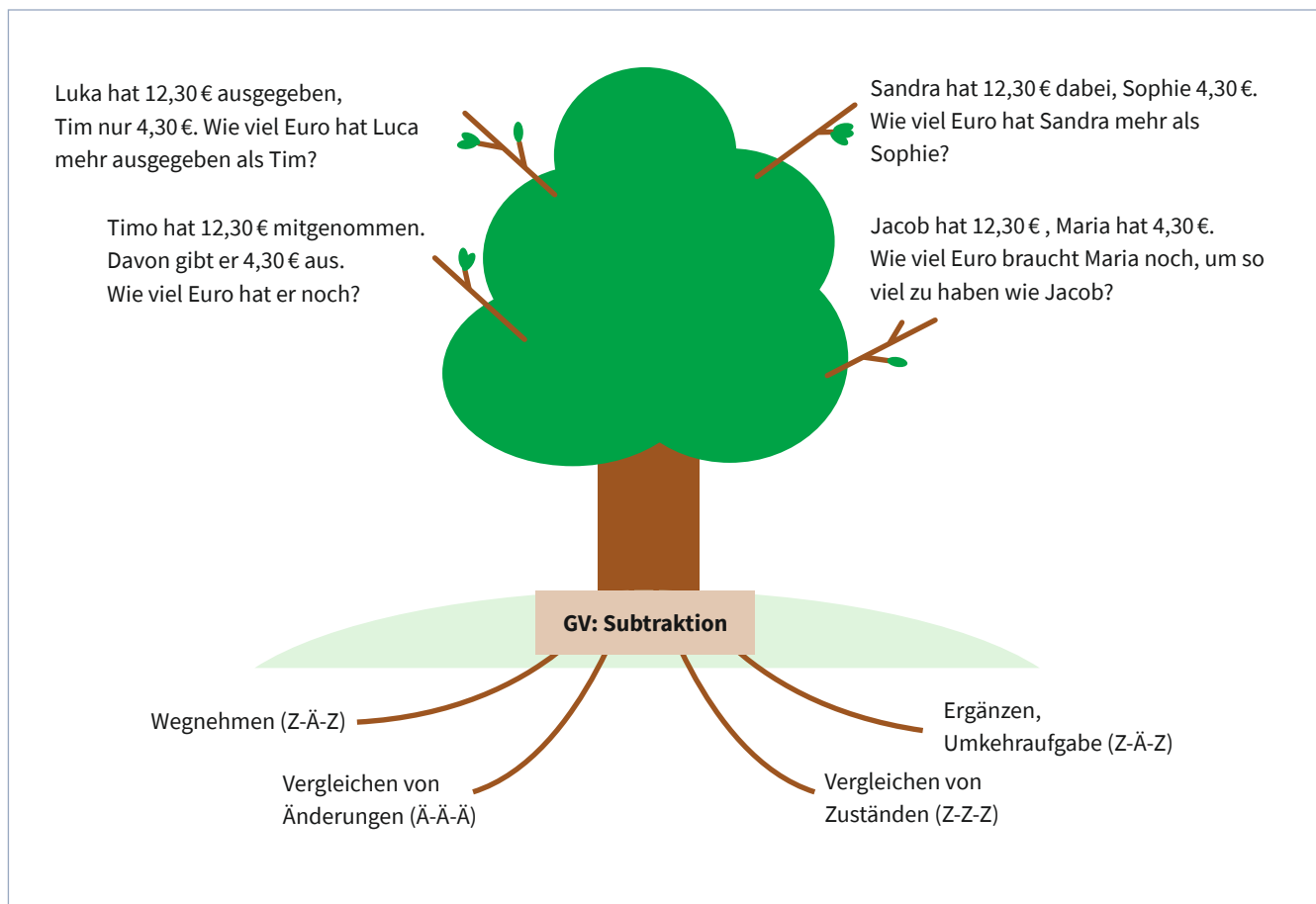


Abb. 6: Grundvorstellungen zur Subtraktion (mit Z = Zustand, Ä = Änderung) und entsprechende Aufgaben

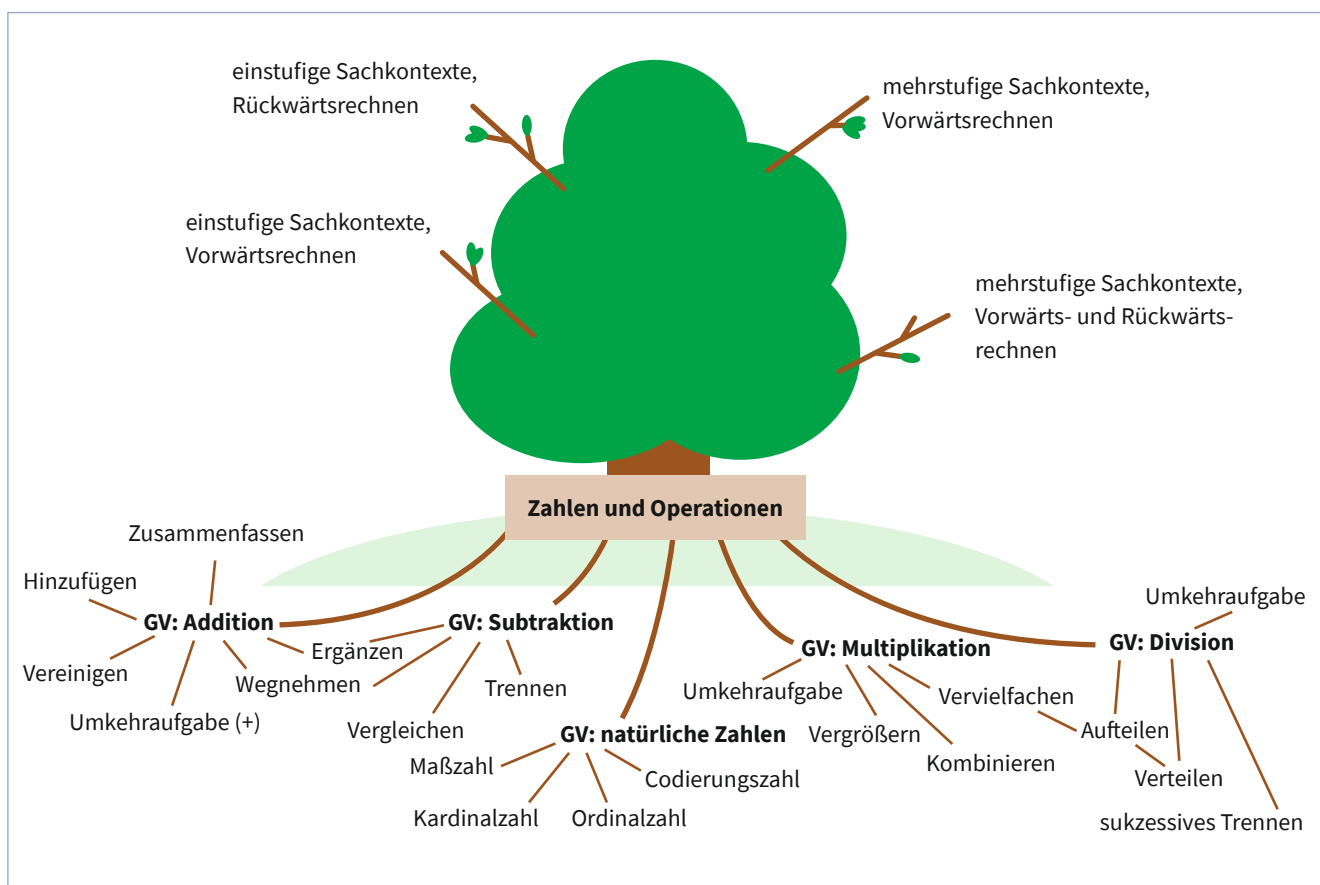


Abb. 7: Vernetzte Grundvorstellungen zu natürlichen Zahlen

Multiplizieren ist das mehrfache Addieren, d. h. die *Vervielfachung*. Eine völlig andere Vorstellung ist die des *Kombinierens* (Lena hat 5 T-Shirts und 3 Hosen; wie viele Möglichkeiten gibt es, diese zu kombinieren?). Eine weitere Vorstellung ist die des *kontinuierlichen Vergrößerns* (ein Käfer soll in dreifacher Größe in einem Buch abgebildet werden).

Bei der Division haben wir die Grundvorstellungen *Verteilen*, *Aufteilen* und *sukzessives Abtrennen*. Hinzu kommen jeweils die entsprechenden Umkehraufgaben. In **Abb. 7** sind die wichtigsten Grundvorstellungen zum Umgang mit natürlichen Zahlen

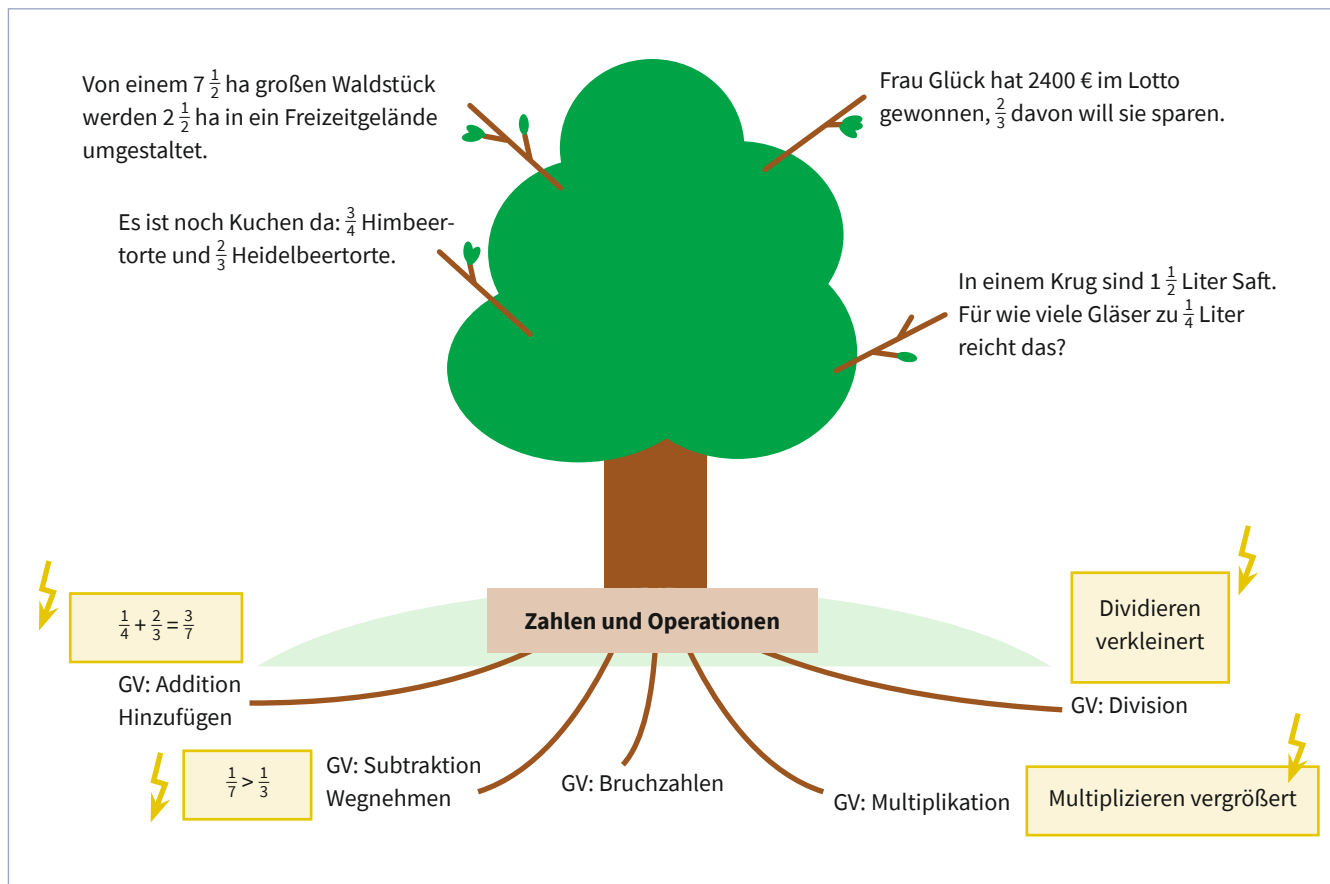
zusammengefasst. Sie vermittelt einen Eindruck davon, was es bedeutet, dass sich Grundvorstellungen zu einem vernetzten System entwickeln. Die Fähigkeit, Sachaufgaben zu lösen, hängt entscheidend davon ab, wie gut dieses System ausgebildet ist und wie gut die vorhandenen Grundvorstellungen aktiviert und koordiniert werden können.

Ein kurzer Blick auf die Bruchrechnung

Warum ist diese so fehleranfällig? Und hat das etwas mit Grundvorstellungen zu tun? Vieles ändert sich beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den

Tab. 1: Brüche kommen hinzu, Vorstellungen ändern sich

Was ändert sich von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}$?		
	natürliche Zahlen	Brüche
Zahldarstellung	eine Zahl – eine Darstellung: 3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 0,4\overline{9}$
Anordnung, Dichte	Vorgänger, Nachfolger	immer eine Zahl dazwischen
Multiplizieren	vergrößert	kann auch verkleinern
Dividieren	verkleinert	kann auch vergrößern



Bruchzahlen (s. **Tab. 1**, vgl. mathematik lehren 123 oder Schulz/Wartha 2021). Bruchzahlen tauchen als Zahlenpaare auf, getrennt durch einen Strich. Während man bei den natürlichen Zahlen ein klares Zeichen für eine Zahl hat, gibt es nun unendlich viele Brüche, die alle die gleiche Bruchzahl bezeichnen. Auch die Orientierung an einem eindeutigen Vorgänger und Nachfolger einer Zahl ist dahin; stattdessen liegen nun in jedem noch so kleinen Intervall wieder eine und somit unendlich viele Bruchzahlen. Und Bruchzahlen geben nicht mehr – wie natürliche Zahlen – Antwort auf die Frage: „Wie viele sind es?“ oder „Der wievielte ist es?“ Stattdessen geht es nun um Anteile eines Ganzen oder Beziehungen zwischen einem Teil und einem Ganzen. Daher müssen neue Grundvorstellungen zu Bruchzahlen aufgebaut werden; die wichtigsten sind *Anteil eines Ganzen* ($\frac{3}{4}$ einer Pizza), *Anteil mehrerer Ganzen* (3 Freunde teilen sich 4 Pizzen) und *Bruch als Operator* ($\frac{3}{4}$ von 2000 €) sowie das Verhältnis.

Die Ausbildung dieser neuen Grundvorstellungen ist nicht einfach und erfordert neue Handlungserfahrungen, vor allem im Herstellen von Brüchen. Geht man zu früh zu den Rechenverfahren über, kommt es häufig zu Fehlern (gelbe Blitze in **Abb. 8**). Ihre Ursachen liegen in einer unreflektierten Übertragung von Grundvorstellungen und

intuitiven Annahmen aus den natürlichen Zahlen (zum Beispiel Multiplizieren vergrößert) auf die Bruchrechnung (hier kann Multiplizieren auch verkleinern). Umso wichtiger ist es, die neuen elementaren Grundvorstellungen von Brüchen auszubilden und sich die Unterschiede zum vertrauten Rechnen mit natürlichen Zahlen klarzumachen (vgl. Ulovec 2007). Gleiches gilt für die Zahlbereichserweiterung auf negative Zahlen, auch hier ist die Ausbildung neuer Grundvorstellungen erforderlich (siehe zu Einzelheiten mathematik lehren 138). Grundsätzlich gilt: Wenn neue Felder der Mathematik betreten werden, ist der Aufbau neuer Grundvorstellungen erforderlich.

Abb. 8: Grundvorstellungen bei der Bruchrechnung

Literatur

- Blum, W./Leiss, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der Tanken-Aufgabe. – In: mathematik lehren 128, S. 18–21.
- Schack, T. (2020): Mental Representation in Action. – In: Tenenbaum G./Eklund R. (Hrsg.): Handbook of Sport Psychology Vol.2; S. 513–534.
- Schulz, A./Wartha, S. (2021): Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe. Springer, Spektrum
- Ulovec, A. (2007): Wenn sich Vorstellungen wandeln. Ebenen der Zahlbereichserweiterungen – In: mathematik lehren 142, S. 14–16.
- vom Hofe, R./Blum, W. (2016): „Grundvorstellungen“ as a Category of Subject-Matter Didactics. – In: JMD 37, S. 225–254.
- vom Hofe, R. (2002): Grundbildung durch Grundvorstellungen – In: mathematik lehren 118, Friedrich Verlag, S. 4–8.