

Verständnisvoll lernen

Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen

Werden mathematische Sachverhalte komplexer, greifen wir auf elementare Grundvorstellungen zurück und vernetzen diese. Passende Kontexte als „Verständnisanker“ helfen bei Aufbau und Rekonstruktion der Grundvorstellungen.

JÜRGEN ROTH, RUDOLF VOM HOFE Elementare Grundvorstellungen bilden die Basis für die Entwicklung von inhaltlichem Verständnis. Da mathematisches Wissen kumulativ aufgebaut ist, reichen diese aber nicht für alle Bereiche der Mathematik aus. Vielmehr greifen Grundvorstellungen zu subjektiv neuen mathematischen Inhalten oft auf elementare Grundvorstellungen zurück und vernetzen sie miteinander. *Vernetzte Grundvorstellungen* entwickeln sich anhand einer prototypischen Situation, in der wechselseitigen Interpretation dieser Situation und den Repräsentationen des ihr innewohnenden mathematischen Sachverhalts. Solche prototypischen Situationen, an denen Grundvorstellungen ausgebildet und rekonstruiert werden können, nennen wir Verständnisanker.

Verständnisanker als Unterrichtselement

Spätestens dann, wenn die notwendigen Vernetzungen von Grundvorstellungen komplexer werden, sollte mit Verständnisankern gearbeitet werden. Verständnisanker können auch schon weit vorher beim Erarbeiten und Aktivieren von Grundvorstellungen und beim Verständnisaufbau eines mathematischen Sachverhalts zielführend sein.

- Eine Situation eignet sich als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Grundvorstellungen vernetzen in der Sek. I am Beispiel Gleichungen

Bei den Grundvorstellungen zu Gleichungen (nach Hischer 2021) handelt es sich um vernetzte Grundvorstellungen. Gleichungen bestehen aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind und in der Regel Variablen enthalten (in **Abb. 1** die Variable x). Zum Ausbilden von Grundvorstellungen zu Gleichungen, und damit zur Verständnisentwicklung zu Gleichungen, muss folglich auf *Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen, zu Variablen und zu Termen* vernetzend zurückgegriffen werden.

Es gibt zwei *Grundvorstellungen zu Gleichungen*, die grundlegend verschiedene Verwendungsweisen von Gleichungen adressieren (Hischer 2021): „Gleich-Sein“ und „Gleich-Werden“ (vgl. **Abb. 2**).

GV1 zu Gleichungen: Feststellen einer Gleichheit

Die erste Grundvorstellung zu Gleichungen ist das *Feststellen einer Gleichheit* („Gleich-Sein“). So wird mit

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellung und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint: Alle wesentlichen Strukturelemente zum mathematischen Verständnis kommen in dieser Situation vor und können daranedeutet werden.

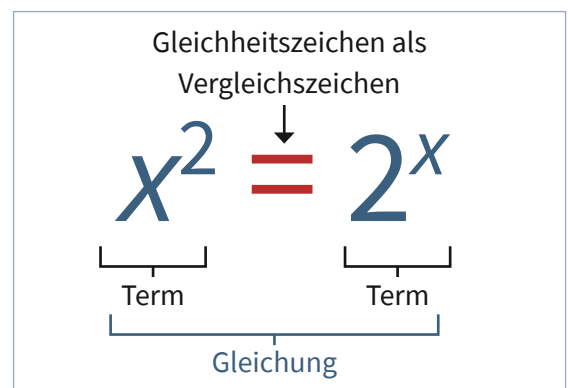


Abb. 1: Bestandteile einer Gleichung

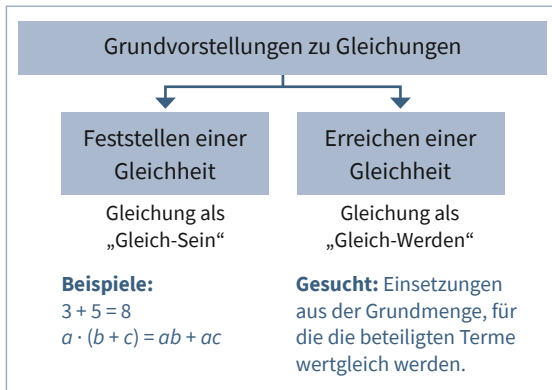


Abb. 2: Grundvorstellungen zu Gleichungen (nach Hischer 2021)

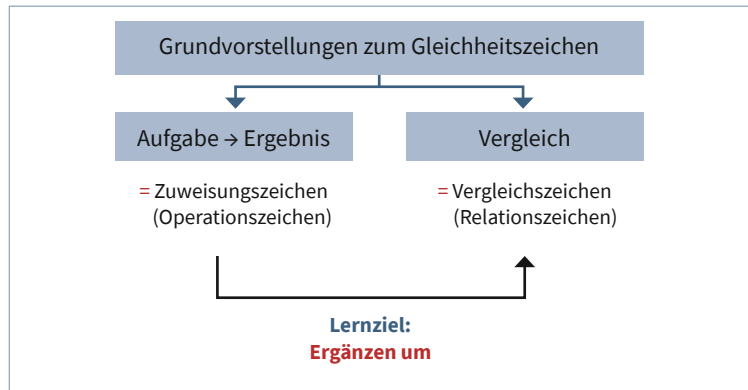


Abb. 3: Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen

Gleichungen ohne Variable festgestellt, dass etwa die Terme $3 + 5$ und 8 wertgleich sind. Oder mit Gleichungen, wie sie in Rechengesetzen (Assoziativgesetz, Distributivgesetz usw.) vorkommen, wird ausgedrückt, dass die beiden Terme auf der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens für alle möglichen Einsetzungen aus der Grundmenge für die vorkommenden Variablen wertgleich sind.

GV2 zu Gleichungen: Erreichen einer Gleichheit

Bei der zweiten Grundvorstellung zu Gleichungen, dem *Erreichen einer Gleichheit* („Gleich-Werden“), werden alle Einsetzungen für die Variablen der Gleichung aus der Grundmenge gesucht, für die die Terme auf der linken und der rechten Seite der Gleichung wertgleich werden (z. B. $x + 3 = 6$). Als Verständnisanker hierfür eignet sich: *Suche zu den Funktionstermen x^2 und 2^x die x -Werte, für die die Werte beider Funktionsterme gleich sind!* (vgl. Abb. 1).

Grundvorstellungen zu Variablen

Die Grundvorstellung *Gleich-Werden* zu Gleichungen nutzt die Grundvorstellung *Unbekannte* zu Variablen, während die Grundvorstellung *Gleich-Sein* zu Gleichungen die Grundvorstellung *Unbestimmte* bzw. *allgemeine Zahl* zu Variablen benötigt (vgl. Tab. 1).

Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen

Eine weitere elementare Grundvorstellung wird hier implizit mit aufgegriffen, nämlich die vom *Gleichheitszeichen* als *Vergleichszeichen* (bzw. *Relationszeichen* bei Barzel u. a. 2021, s. Abb. 3), das auf den Vergleich der Werte der beiden Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen fokussiert. Dies ist bedeutsam, da Lernende aus der Grundschule häufig ausschließlich die andere Grundvorstellung, nämlich *Gleichheitszeichen* als *Zuweisungszeichen* (bzw. *Operationszeichen* bei Barzel u. a. 2021), verinnerlicht haben und es in diesem Sinn nur als Aufforderung zum „Ausrechnen“ interpretieren. Diese Grundvorstellung ist nur begrenzt tragfähig und muss sehr früh, idealerweise schon in der Grundschule, spätestens

Grundvorstellung	Erläuterung der Grundvorstellung zu Variablen
Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl	Die Variable ist eine allgemeine Zahl, deren Wert nicht gegeben bzw. zunächst nicht von Interesse ist. (Beispiel: $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b aus)
Unbekannte	Die Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl (oder einen Term), deren Wert nicht bekannt ist, aber prinzipiell bestimmt werden kann, etwa durch regelgeleitete Umformungen. (Beispiel: $2x + 1 = 7$ kann zu $x = 3$ bestimmt werden.)
Veränderliche	Die Variable ist eine Zahl oder Größe, die verschiedene Werte aus einem festgelegten Bereich annehmen kann, also veränderlich ist. (Beispiel: x $2x + 1$)

Tab. 1: Grundvorstellungen zu Variablen (vgl. Weigand u. a. 2022)

aber vor dem expliziten Arbeiten mit Gleichungen, ergänzt werden um die Grundvorstellung *Gleichheitszeichen* als *Vergleichszeichen*. Woran ist erkennbar, dass die Grundvorstellung *Gleichheitszeichen* als *Vergleichszeichen* individuell noch nicht ausgebildet wurde? Als ein Indiz kann gewertet werden, wenn Lernende beim Gleichungsumformen nicht nur zwischen die beiden umgeformten Terme ein Gleichheitszeichen setzen, sondern bei jeder Umformung auch an den Anfang der Zeile ein weiteres Gleichheitszeichen platzieren.

Grundvorstellungen zu Termen

Gleichungen vergleichen jeweils zwei Terme miteinander – daher spielen auch die elementaren Grundvorstellungen zu Termen, nämlich *Term als Rechengeschema* und *Term als Bauplan* (s. Siller/Roth 2016 und Tab. 2) beim Arbeiten mit Gleichungen eine wichtige Rolle. Insgesamt wird deutlich, dass Grundvorstellungen zu Gleichungen auf mehrere elementare Grundvorstellungen aufbauen und diese vernetzen.

Grundvorstellung	Erläuterung der Grundvorstellung (GV) zu Termen
Bauplan	Terme werden bei Suche nach der mathematischen Struktur eines Phänomens oder eines Problems entwickelt. Ein so entstandener Term kann als mathematischer „Bauplan“ für das Phänomen interpretiert werden. Aus diesem Term ist die Struktur des Phänomens direkt ablesbar. <i>Termumformungen</i> sind in der Betrachtungsweise dieser GV <i>zulässige Veränderungen des „Bauplans“</i>. <i>Gleichheit</i> von Termen meint in der Sichtweise dieser GV eine <i>Strukturgleichheit</i>.
Rechenschema	Hat man mit der Grundvorstellung „Bauplan“ einen Term für ein Phänomen bzw. ein Problem aufgestellt, dann möchte man ihn auch dazu nutzen, wiederholte gleichartige Berechnungen für verschiedene Werte schnell und einfach durchzuführen. Der Term wird als „Rechenschema“ gesehen. <i>Termumformungen</i> dienen in der Betrachtungsweise dieser GV dazu, <i>Berechnungen</i> von Zahlenwerten zu <i>erleichtern</i>. <i>Gleichheit</i> von Termen meint in dieser Sichtweise eine <i>Wertgleichheit</i>.

Tab. 2: Grundvorstellungen zu Termen (vgl. Siller/Roth 2016)

Grundvorstellungen vernetzen in der Sek. II am Beispiel Integralbegriff

In der Oberstufe ist es zur Entwicklung von Grundvorstellungen zu neuen mathematischen Begriffen oft notwendig, bereits vernetzte GV – etwa die des Änderungsverhaltens von Funktionen (vgl. Roth/Lichti 2021) – mit anderen Vorstellungen zu kombinieren. Das Vernetzen von GV ist also auf einer höheren Stufe durchzuführen. Gerade wenn auf diese Weise ein Grundverständnis zu einem Begriff aufgebaut werden soll, sind *Verständnisanker* wichtig.

Grundvorstellungen zum Integral

Am Beispiel der Grundvorstellungen zum Integral, und zwar Integrieren als

- Rekonstruieren des Gesamteffekts,
- Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts,
- Kumulieren (ansammeln) und
- Mitteln (bilanzieren),

(vgl. Roth/Siller 2016 und Greefrath u. a. 2016), wird nun herausgearbeitet, wie ausgehend von einem Verständnisanker solche Grundvorstellungen durch Vernetzen elementarer und schon vernetzter Grundvorstellungen entwickelt werden.

Verständnisanker: Wassermenge im Becken bei bekannter Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit

Ein möglicher Verständnisanker für Grundvorstellungen zum Integral ist die Frage nach der Füllmenge

eines Waschbeckens bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit. An die Waschbeckensituation können die Grundvorstellungen „*Integrieren als Rekonstruieren des Gesamteffekts*“ und „*Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts*“ inhaltlich angebunden werden.

→ Waschbecken:

In ein leeres Waschbecken wird eine Minute lang Wasser mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit von 10 Litern pro Minute eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, aus dem Wasser mit einer Abflussgeschwindigkeit von 5 Liter pro Minute abfließt. Nach weiteren 1,5 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen. Wie lässt sich aus der Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit $V'(t)$ auf die Wassermenge $V(t)$ im Waschbecken zum Zeitpunkt t schließen? (vgl. Dankwerts/Vogel 2006, S. 96)

Um diese Situation inhaltlich zu erfassen, müssen Lernende über die bereits vernetzte Grundvorstellung *Änderungsverhalten* zu Funktionen verfügen. Diese hilft zu überlegen, dass bei einem Zufluss von 10 Litern pro Minute nach einer Minute 10 Liter in das Waschbecken geflossen sind. Das entspricht im Graphen der Zuflussgeschwindigkeit $V'(t)$ – oben in **Abb. 4** – dem Flächeninhalt der Rechteckfläche unter dem Graphen im Intervall $0 \text{ min} \leq t \leq 1 \text{ min}$. Für jeden Zeitpunkt t in diesem Zeitintervall lässt sich die Wassermenge $V(t)$ im Waschbecken durch $V(t) = 10 \text{ Liter/min} \cdot t$ bestimmen. Wegen der konstanten Zuflussgeschwindigkeit nimmt die Wassermenge im Becken gleichmäßig zu. Dies lässt sich im GeoGebra-Applet <https://fr-vlg.de/ml236app1> beim Ziehen am Punkt t durch die gleichmäßig wachsende grüne Rechteckfläche unter dem $V(t)$ -Graphen und das lineare Wachstum des $V(t)$ -Graphen gut nachvollziehen.

Hiermit lässt sich die Grundvorstellung *Integrieren als Rekonstruieren des Gesamteffekts* anbahnen. Analog kann man die Wassermenge des ausfließenden Wassers ebenfalls durch den Flächeninhalt des Rechtecks zwischen dem $V(t)$ -Graphen und der Zeitachse bestimmen. Da es sich um ausfließendes Wasser handelt, muss das negativ gewertet werden. Hieran lässt sich im Zusammenspiel mit der Situation im Verständnisanker und der graphischen Darstellung des funktionalen Zusammenhangs (**Abb. 4**) die Grundvorstellung *Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts* ausbilden. Die Wassermenge im Becken zum Zeitpunkt t im Zeitintervall $1 \text{ min} \leq t \leq 2,5 \text{ min}$ ist damit $V(t) = 10 \text{ Liter} - 5 \text{ Liter/min} \cdot (t - 1 \text{ min})$, also die in der ersten Minute zugeflossenen 10 Liter minus die ab Minute 1 ausfließende Wassermenge bei einer Ausflussgeschwindigkeit von 5 Liter/min.

Die Wassermenge lässt sich auch dann bestimmen, wenn die Zuflussgeschwindigkeit gleichmäßig

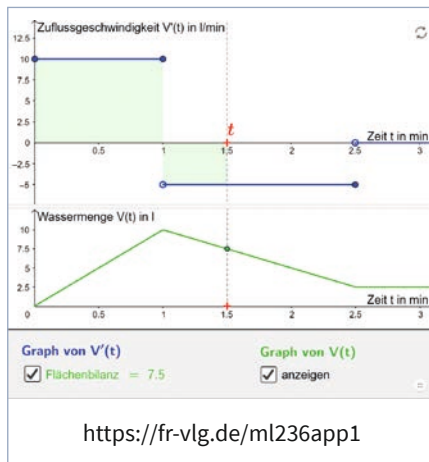


Abb. 4: Das GeoGebra-Applet visualisiert den Vorstellungsanker der Aufgabe „Waschbecken“.

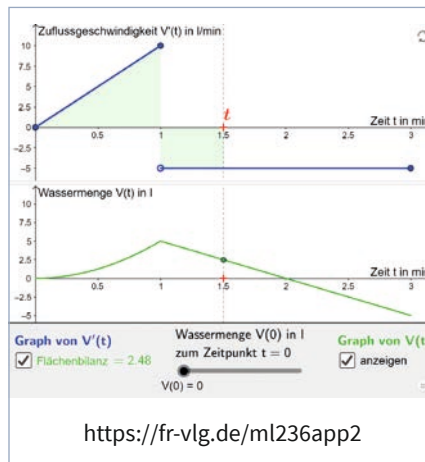


Abb. 5: Hier lässt sich die Wassermenge $V(0)$ mit dem Schieberegler verändern. Bei welchem Wert bleibt die Wassermenge $V(t)$ stets im realistischen Bereich nichtnegativer Werte?

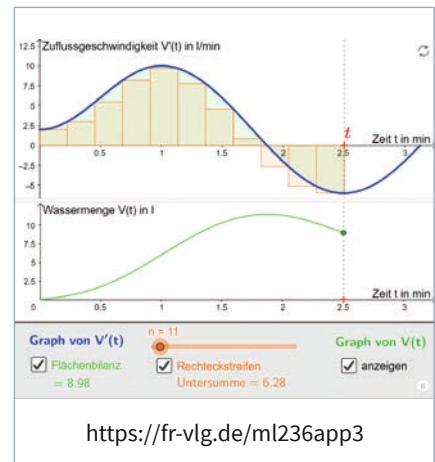


Abb. 6: In diesem Applet kann über den Schieberegler n die Anzahl der Rechteckstreifen für die Untersumme verändert werden.

größer (oder kleiner) wird, etwa indem der Wasserhahn gleichmäßig weiter aufgedreht wird, wie in der ersten Minute des Zeitintervalls im $V'(t)$ -Graphen in **Abb. 5**. Nach einer Minute fließt das Wasser mit einer konstanten Rate ab. Der $V(t)$ -Graph im Applet <https://fr-vlg.de/ml236app2> (**Abb. 5**) zeigt dabei ab Minute 2 negative Werte für die Wassermenge im Becken an: Aus der bekannten Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit kann zwar die Zufluss- bzw. Abflussmenge rekonstruiert werden, die Wassermenge im Becken allerdings nur bis auf eine Konstante (die die zu Beginn bereits im Waschbecken befindlichen Wassermenge $V(0)$ repräsentiert). Dies entspricht der Integrationskonstanten beim unbestimmten Integral, die also ebenfalls anhand des Verständnisankers interpretiert und verstanden werden kann.

Variierende Zu- bzw. Abflussgeschwindigkeit

Wie lässt sich aber die Wassermenge im Waschbecken aus der Zu- bzw. Abflussgeschwindigkeit rekonstruieren, wenn jemand am Wasserhahn bzw. am Stöpsel spielt, die Zuflussgeschwindigkeit also ständig variiert, wie das im $V'(t)$ -Graphen in **Abb. 6** der Fall ist (vgl. das Applet <https://fr-vlg.de/ml236app3>)? Die grundlegende Idee besteht darin, dass die Zuflussgeschwindigkeit in einem sehr kleinen Zeitintervall annähernd konstant ist (Annäherungsvorstellung als Grundvorstellung zum Grenzwertbegriff, vgl. Greefrath u. a. 2016). Man bildet also kleine Teilintervalle, nähert in diesen den Zu- bzw. Abfluss als konstant (Grundvorstellung Annäherung zum Grenzwertbegriff) und kann die resultierende Zufluss- (bzw. Abfluss-)Menge wieder über die Grundvorstellung Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts erhalten.

Die Summe dieser Rechteckflächeninhalte ist dann ein Näherungswert für zufließende bzw. abfließende Wassermenge. Verkleinert man die

Teilintervalle, dann wird die Näherung für die zufließende bzw. abfließende Wassermenge immer besser (Annäherungsvorstellung zum Grenzwertbegriff).

Rückblick auf die vernetzte Grundvorstellung Integrieren als Rekonstruieren des Gesamteffekts

Die Grundvorstellung Integrieren als Rekonstruieren des Gesamteffekts setzt einerseits auf die bereits vernetzte Grundvorstellung Änderungsverhalten bzw. Kovariation zu Funktionen auf, nutzt darüber hinaus aber insbesondere auch noch die Grundvorstellung Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts sowie die Annäherungsvorstellung als Grundvorstellung zum Grenzwertbegriff.

Erst in der Gesamtsicht dieser über den Verständnisanker „Waschbecken“ greifbaren vernetzten Grundvorstellungen kann sich ein Grundverständnis zum Integral konstituieren. Die Grundvorstellungen, die dazu notwendig sind, lassen sich in neuen Situationen, in denen ein Integral eine Rolle spielt, durch Analogiebildung zum Verständnisanker wieder abrufen.

Literatur

- Barzel, B. / Glade, M. / Klinger, M. (2021): Algebra und Funktionen. Fachlich und fachdidaktisch. Berlin: Springer Spektrum.
- Danckwerts, R. / Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. München: Spektrum Akademischer Verlag.
- Greefrath, G. / Oldenburg, R. / Siller, H.-S. / Ulm, V. / Weigand, H.-G. (2016): Didaktik der Analysis. Berlin: Springer Spektrum.
- Hischer, H. (2021): Was ist eine Gleichung? GDM-Mitteilungen, 110, S. 65–72.
- Siller, H.-S. / Roth, J. (2016): Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. – In: PM 58(70), S. 2–8.
- Roth, J./Lichti, M. (2021): Funktionales Denken entwickeln und fördern. – In: mathematik lehren 226, S. 2–9.
- Roth, J. / Siller, H.-S. (2016): Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. – In: mathematik lehren 199, Friedrich Verlag, S. 2–9.
- Weigand, H.-G. / Schüler-Meyer, A. / Pinkernell, G. (2022): Didaktik der Algebra. Berlin: Springer Spektrum.