HENRIK OSSADNIK, JÜRGEN ROTH

Pandemien modellieren

Interdisziplinär Wissen vernetzen und Positionen diskutieren

LERNGRUPPE:	12. Schuljahr
MINT-BEREICHE:	Biologie & Mathematik
IDEE:	Fragen der Epidemiologie im fächerübergreifenden Unterricht mathematisch modellieren und beantworten
ARBEITSBLATT 1-3:	Lernumgebung Corona modellieren
WEITERES MATERIAL:	Rollenkarten, Glossar
METHODE:	Gruppenpuzzle, je 4 Personen
ZEITBEDARF:	4 – 6 Unterrichtsstunden

Neue Pandemie – bekanntes Szenario? Selten gab es ein Thema, das die Menschheit so beschäftigt, eingeschränkt und Verhaltensweisen verändert hat wie die Corona-Pandemie. Auch vor neuen Pandemien wird gewarnt (Vogelgrippe ...). Die zentralen Fragen lauten dann:

→ *Wie lassen sich Entwicklungen eines zukünftigen Infektionsgeschehens abbilden? Welches Grundwissen und welche Modellierungsannahmen werden dazu benötigt? Wie lassen sich daraus entstehende Modelle interpretieren?*

Diese Fragen, mit denen sich die Epidemiologie beschäftigt, spielen auch für Schülerinnen und Schüler eine wichtige Rolle und können zu einem interessanten Unterrichtsgegenstand werden. Die hier vorgestellte Lernumgebung „Corona modellieren“ (**Arbeitsblatt 1 – 3**) greift die interdisziplinäre Auseinandersetzung mit diesen Problemen der Epidemiologie in Form einer naturwissenschaftlich-mathematischen Modellierung auf. Das Wechselspiel zwischen Biologie und Mathematik kann insbesondere in einem fächerübergreifenden Unterricht gut thematisiert werden.

Konzept der Lernumgebung

BNE und Epidemiologie

Die Lernumgebung „Corona modellieren“ fördert verschiedene *Gestaltungskompetenzen,* die bei der Bewältigung zukünftiger Herausforderungen gebraucht werden. Vor allem geht es um das Erschließen eines komplexen Themengebiets. Das Konzept einer Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE) wurde bei der Gestaltung der Lernumgebung als übergeordneter Rahmen allen (didaktischen) Entscheidungen (Konzeption, Ausgestaltung der Aufgaben oder Medieneinsatz) zugrunde gelegt.

Kennzeichnend für die Epidemiologie sind die vielfältigen Wechselwirkungen und Wirkungsgefüge innerhalb der betrachteten Systeme. Probleme lassen sich nicht durch das Abarbeiten vorgefertigter Schemata oder Algorithmen lösen. Hier sind *kreatives Denken,* die Fähigkeit zum *Systemdenken* und die *Beschreibung komplexer Zusammenhänge* unter Zuhilfenahme der Mathematik gefordert. Verflochtene Vorgänge werden greifbarer, indem sie in kleine Teile strukturiert werden. So können sie in entsprechenden Modellen manipuliert und analysiert werden (Ableitinger 2010, Grundmann 2017).

Naturwissenschaftlich-mathematisches Modellieren

Inhaltlich geht es um die Modellierung der Corona-Pandemie. Diese Krankheit ist jedoch nur ein Beispiel. Prinzipiell sind die betrachteten Modelle – und darauf beruhende Prognosen der Ausbreitung – auf jede beliebige Infektion mit pandemischem Charakter übertragbar.

Grundlage der hier vorgestellten fächerübergreifenden Lernumgebung ist eine angepasste Form des sogenannten *integrierten Modells der naturwissenschaftlich-mathematischen Modellierung* (**Abb. 1**, nach Meister/Upmeier zu Belzen 2018). Dabei wird die Modellierung naturwissenschaftlicher Phänomene mit mathematischen Repräsentationen kombiniert. Man löst sich von der Modellierung mit Hilfe von Funktionsgraphen und lässt verschiedene mathematische Denkweisen zu – auch über die Aspekte des funktionalen Denkens in den Teilprozessen des Mathematisierens hinaus.

Charakteristisch bei diesem Vorgehen ist die Unterscheidung zwischen Realität/Erfahrungswelt und der Modellwelt, der zyklische Charakter und die Bezeichnung einzelner Teilprozesse (ähnlich zu Blum/Leiß 2007) finden. Der Mehrwert – im Vergleich zu anderen Modellierungskreisläufen – liegt in der strikten Unterscheidung zwischen Realität und Modellwelt und dem, durch neu hinzugefügte Teilprozesse fokussierten Wechselspiel zwischen naturwissenschaftlichen und mathematischen Betrachtungen.

Die Teilprozesse und Tätigkeiten des Modellierungskreislaufs in **Abb. 1** werden durch entsprechende Aufgabenstellungen initiiert und leiten die

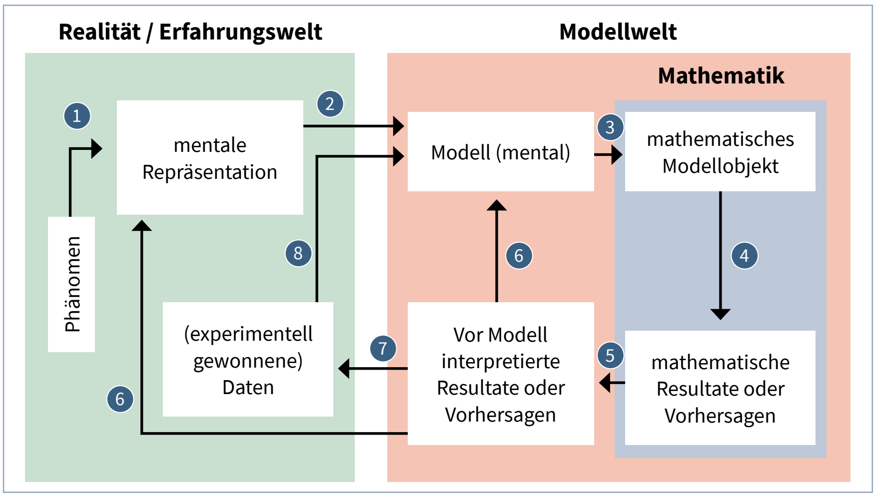


Abb. 1: Naturwissenschaftlich-mathematischer Modellierungskreislauf (vereinfacht nach Meister/Upmeier zu Belzen 2018). Dargestellt sind die Schritte: 1-Wahrnehmung des Phänomens, 2-Aktivierung von Erfahrungen, 3-Mathematisieren, 4-mathematische Kompetenzen nutzen, 5-Interpretieren, 6-Validieren, 7-naturwissenschaftliche Untersuchung durchführen, 8-Modell ändern oder beibehalten.

Lernenden durch eine epidemiologische Modellierung mit ihren biologischen und mathematischen Facetten.

Mathematischer Hintergrund

Dynamische Systeme basieren auf sog. *gewöhnlichen Differentialgleichungen* (GDGL), d. h. Gleichungen, in denen eine Funktion $y(t)$ und ihre Ableitung $y'(t)$ (ggf. auch die zweite Ableitung $y''(t)$) vorkommen (Ableitinger 2010, Vogt 1994). Da GDGL die zeitliche Änderung einer Größe $y(t)$ innerhalb einer Zeiteinheit beschreiben können, bilden sie oft die Grundlage für Modellierungsprozesse (Hütt 2001, Vogt 1994). Oft treten sie dann als System gekoppelter Differentialgleichungen auf, also in Kombination, und in gegenseitiger Abhängigkeit.

Modellierungsannahmen

Grundlegend für alle Überlegungen zur Ausbreitung einer Infektion ist die Unterteilung der Personenzahl der Gesamtbevölkerung N in mehrere Gruppen, die den Gesundheitszuständen entsprechen. Jede Person kann nur zu genau einer Gruppe gehören. Unterschieden wird zwischen den Gruppen S, I und R, wobei zu jedem Zeitpunkt t eindeutig bestimmt werden kann, wie viele Personen der Gesamtbevölkerung zu welcher Gruppe gehört:

- $S(t)$: Teil der Personen aus N, der zum Zeitpunkt t noch infiziert werden kann (*susceptible*).
- $I(t)$: Teil der Personen aus N, der zum Zeitpunkt t infiziert und ansteckend ist (*infected*).
- $R(t)$: Teil der Personen aus N, der zum Zeitpunkt t genesen oder verstorben ist, also diejenigen, die keine Auswirkungen mehr auf das Infektionsgeschehen haben (*recovered*).

Infolge dieser Bezeichnungen werden solche Modelle oft als SIR-Modelle betitelt. Die Übergänge zwischen den einzelnen Personengruppen – als Infektion und Genesung bezeichnet – werden als Flussdiagramm ($S \rightarrow I \rightarrow R$) dargestellt. Die Übergangsraten werden als Infektions- und Genesungsrate bezeichnet. Weitere Modellierungsannahmen sind:

- *Immunität nach Infektion:* Person kann nicht mehr infiziert werden und verbleibt in Gruppe R.
- *homogene Bevölkerung:* Der Kontakt zwischen den einzelnen Personen (Gruppen) ist gleichwahrscheinlich.
- *abgeschlossene Bevölkerung*: Keine Personen kommen zum System dazu oder scheiden aus.
- Infizierte sind sofort ansteckend.
- Infizierte sind nach der Genesung sofort immun.
- Mindestens eine Person initiiert das Infektionsgeschehen.

Die Annahme, Infizierte seien sofort ansteckend, hat den Vorteil, dass man direkt mit t rechnen kann. (Realitätsnahe Modellierungen, die den zeitlichen Versatz berücksichtigen, finden sich bei Winter 1993).

Exponentielles Wachstum

Der Beginn einer Pandemie wird oft mit dem exponentiellen Wachstum assoziiert. Dabei wird nur der Übergang der Infektion und ein *SI*-Modell ohne die Gruppe R betrachtet. Dabei approximiert folgende Gleichung den Wert der Infizierten zum nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$ rekursiv: $I(t + \Delta t) = I(t) + k \cdot I(t) \cdot \Delta t$

Der Wert der Infizierten zum neuen Zeitpunkt ergibt sich aus der Summe der Infizierten zum Zeitpunkt t und einem bestimmten prozentualen Zuwachs aus den Infizierten zum Zeitpunkt t. Der Zuwachs berechnet sich aus der Infektionsrate k und der Schrittweite Δt, die den Zuwachs auf einen Zeitschritt bezieht.

Durch die Anwendung des Differenzenquotienten kann die rekursive Darstellung in die GDGL überführt werden: $I'(t) = k \cdot I(t)$ wobei die e-Funktion $I(t) = I^0 \cdot e^{k \cdot t}$ eine Lösung dieser GDGL ist.

Die Betrachtung des Ausbreitungsgeschehens durch exponentielles Wachstum ist jedoch nur für einen kurzen Zeitraum einer Pandemie sinnvoll, weshalb für realistischere Pandemieverläufe detaillierte Modellierungsannahmen berücksichtigt werden müssen (Ableitinger 2010, Vogt 1994) – die zum Beispiel das logistische Wachstum berücksichtigen.

Das SIR-Modell

Unter Beachtung verbesserter und realitätsnäherer Annahmen ergibt sich das für ein SIR-Modell charakteristische System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$S'(t) = -k \cdot I(t) \cdot S(t)$
$I'(t) = k \cdot I(t) \cdot S(t) - w \cdot I(t)$
$R'(t) = w \cdot I(t)$

Hier werden alle zuvor aufgeführten Modellierungsannahmen integriert und im Wechsel von S nach I wird das logistische Wachstum berücksichtigt. Die Richtung wird durch das

Vorzeichen festgelegt (Minuszeichen = Personen, die eine Gruppe verlassen, Pluszeichen = Personen, die einer Gruppe hinzugefügt werden). So wird – anders als beim exponentiellen Wachstum – nicht mehr davon ausgegangen, dass jede Person der Infektionsrate entsprechend ansteckt. Das bedeutet, dass das Infektionsgeschehen abflacht, je weniger potenziell empfängliche Personen (Gruppe S) noch im System vorhanden sind. Durch $k \cdot S(t)$ wird dieser Aussage Rechnung getragen.

Auch die Genesung (beschrieben durch den Term $w \cdot I(t)$ mit der Genesungsrate w) und die Gruppe R haben einen wichtigen Einfluss auf das Infektionsgeschehen, da sie auch zur Abnahme der Wahrscheinlichkeit eines infektiösen Kontakts zwischen Personen der Gruppe S und der Gruppe I beitragen. Tendenziell kommt es so zu einer Verlangsamung des Infektionsgeschehens ab einem bestimmten Punkt (Wolff 2020).

Auch hier wäre die Initiierung eines neuen Modellierungszyklus in Form eines SIR-Modells mit Immunisierungen denkbar. So könnten beispielsweise zu Beginn der Pandemie bzw. einer neuen Welle ein bestimmter Prozentsatz der Bevölkerung immunisiert oder kontinuierlich Personen aus der Gruppe S durch eine entsprechende Impfrate in die Gruppe R überführt werden.

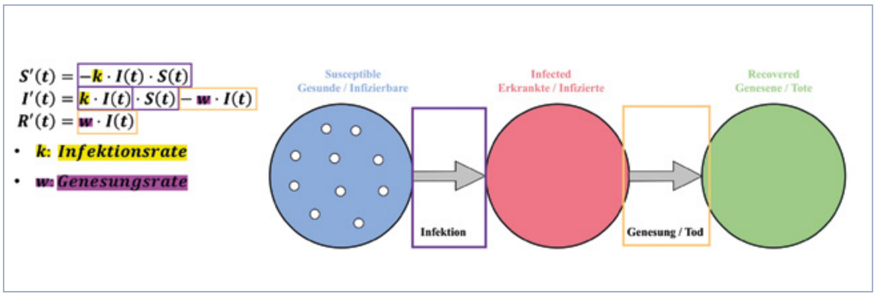


Abb. 2: System von Differentialgleichungen in Verbindung mit der schematischen Darstellung des SIR-Modells

Zum Weiterdenken

Auf den biologischen Hintergrund wird an dieser Stelle verzichtet. Eine detaillierte Betrachtung und eine weiterführende Thematisierung des mathematischen Hintergrunds zur intensiveren Einbindung in den Unterricht finden Sie zum Herunterladen unter https://fr-vlg.de/bio oder als Schülermaterial der Zeitschrift Unterricht Biologie (siehe https://fr-vlg.de/ubvirenaktuell).

Lernumgebung „Corona modellieren“

Im Rahmen der Lernumgebung werden die Lernenden zu Modellierenden und setzen sich mit verschiedenen Modellen der mathematischen Epidemiologie auseinander. Als Sozialform wird hier die Arbeit in Gruppen (bestehend aus vier Personen) gewählt. Der Austausch über die erarbeiteten Inhalte führt zu einer vertieften Betrachtung, Diskussion und Verknüpfung der Inhalte, weshalb Lösungen zu lebensweltlichen Problemen besser erschlossen werden können (Gerholz 2014).

Inhalte der Lernumgebung

Die vollständige Lernumgebung (vgl. https://fr-vlg.de/laborcorona) untergliedert sich in drei Teile und ist als Gruppenpuzzle konzipiert. Dies lässt die Bearbeitung eines spezifischen Teils einer komplexen und umfangreichen, jedoch schlüssig unterteilten Thematik besser zu. Im ersten Teil erarbeiten sich die Lernenden die molekularbiologischen Grundlagen von SARS-CoV-2 und steigen über ein reales Phänomen in den biologischen Hintergrund ein. Der zweite Teil untersucht das exponentielle Wachstum zu Beginn einer Pandemie. Dieses wird zum SIR-Modell erweitert und von den Lernenden *qualitativ* untersucht (vgl. **Arbeitsblatt 1 bis 3**). Dabei entwickeln Sie ein „Gefühl“ für die Abläufe und begriffliches Verständnis. Im letzten Teil werden die Ergebnisse aus den verschiedenen Teilen in einer Diskussion zum Thema Impfen vereint (vgl. Rollenkarten im **Online-Material**).

Die Modellierung beginnt ausgehend von der Wahrnehmung des Phänomens – in diesem Fall einer Einführung in das Thema Corona in Form eines Videos. Dabei werden Erfahrungen reaktiviert und unter Beachtung molekularbiologischer Grundlagen von SARS-CoV-2 in einem mentalen Modell integriert. Anschließend erfolgt die Überleitung zur mathematischen Epidemiologie über die Gesundheitszustände und die daraus resultierenden Personengruppen (S, I und R). Diese Gruppen und der Wechsel zwischen ihnen werden hier mehrfach thematisiert und bilden die Grundlage für das mathematische Modell (vgl. dazu die Modellierungsannahmen).

Durch die durchgängige wechselseitige Betrachtung von Realsituation und mathematischem Modell wird das exponentielle Wachstum zum Untersuchungsgegenstand. Ziel ist es, dass die Lernenden die Darstellung des exponentiellen Wachstums in Form einer Differentialgleichung inhaltlich verstehen, ohne eine vollständige analytische Herleitung anzustreben (diese kann bei Interesse im Zusatzmaterial nachgelesen werden – dennoch sollten die Lernenden die Lösung einmal in die Differentialgleichung einsetzen).

Die Lernenden nähern sich mit Hilfe mehrerer Simulationen dem Sachverhalt von zwei Seiten an, die sich in der Art der Darstellung unterscheiden. Während in der ausführlichen Lernumgebung Gruppe 1 die rekursive Darstellung betrachtet, deren Resultat eine numerische Lösung ist, setzt sich Gruppe 2 mit dem Differenzenquotienten

D **Differenzierung auf den Punkt gebracht**

Aspekte der Heterogenität:
- Fähigkeiten im Umgang mit Komplexität

Methode:
- Gruppenpuzzle (4-er Teams)

Praxistipp:
Hilfen unter https://fr-vlg.de/sirhilfen

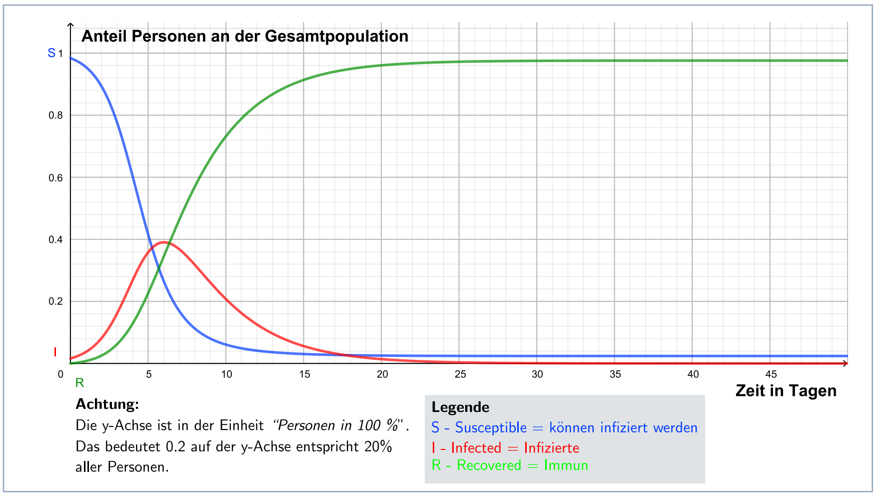


Abb. 3: Simulation zur Unterstützung der qualitativen Auswertung des SIR-Modells

sowie der e-Funktion und ihren Eigenschaften auseinander. Im anschließenden Austausch in der Stammgruppe wird das Prinzip des exponentiellen Wachstums als prozentualer Zuwachs pro fest definiertem Zeitschritt erfasst und so ein Zusammenhang zwischen numerischer und exakter Darstellung hergestellt. Die Lernenden beziehen sie auf die unterschiedlichen graphischen Darstellungen und schlussfolgern, dass die e-Funktion die hergeleitete Differentialgleichung erfüllt und dementsprechend als deren Lösung angesehen werden kann.

Der Rückbezug auf die reale Situation außerhalb der Mathematik und die Interpretation der gewonnenen Ergebnisse validieren das Modell, bilden die Grundlage für den Aufbau eines neuen mentalen Modells oder führen zur Änderung oder Verbesserung des bestehenden mathematischen Modells. Solch eine Optimierung erfolgt auch in der Lernumgebung innerhalb der Modellwelt (vgl. **Abb. 1**). In mehreren Schritten wird es zum SIR-Modell erweitert. Der Fokus liegt jedoch nicht auf dem System von Differentialgleichungen – vielmehr sind es die neuen Modellierungsannahmen und die Wechselwirkungen zwischen den Gruppen *S*, *I* und *R*.

Die Überleitung wird durch ein Video initiiert (vgl. **Arbeitsblatt 1**, Aufgabe 3), welches in zwei Versionen produziert wurde. Während in der Langfassung des Videos interessierte Schülerinnen und Schüler noch mehr Details über den mathematischen Hintergrund des SIR-Modells erfahren können (vgl. **Abb. 2**), wird es sonst als Black-Box betrachtet. Vielmehr geht es um die qualitative Auswertung und Interpretation der Kurvenverläufe in Abhängigkeit von den Parametern anhand einer Simulation (vgl. **Abb. 3**). Sie veranschaulicht die numerische Lösung des Differentialgleichungssystems in Form eines Zeitdiagramms. Die drei Personengruppen *S*, *I* und *R* werden durch die drei verschiedenfarbigen Kurven repräsentiert. Die Simulation unterstützt die systematische Variation der verschiedenen Parameter und durch die implementierte Speicher-Funktion auch den Vergleich ausgewählter Werte.

So können die Grenzen des Modells erforscht und ein Gefühl für durchführbare Manipulationen erreicht werden. Die Interpretationen und die Tiefe der Betrachtung liegen dabei ganz bei den Lernenden. Auch hier werden stets der konkrete Realitätsbezug und die Interpretation auf Entwicklung des Infektionsgeschehens eingefordert.

Die auftretenden Grenzen des Modells sind es auch, die im letzten Teil der Lernumgebung einen weiteren Modellierungszyklus initiieren. In den Fokus rückt nun das SIR-Modell mit anfänglicher Immunisierung. Das Vorgehen zur Untersuchung dieser Optimierung unterscheidet sich hier nur minimal von den vorangegangenen Betrachtungen im Falle des klassischen SIR-Modells.

Den Abschluss der Lernumgebung bildet eine Diskussion zum Thema Impfen, die den biologischen Hintergrund, die Aussagekraft von Modellen und die mathematischen Ergebnisse miteinander vereint.

Literatur

Ableitinger, C. (2010): Biomathematische Modelle im Unterricht: Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien - Vieweg + Teubner , Wiesbaden.

Blum, W./Leiß, D. (2007): How do students and teachers deal with modelling problems? – In: Haines, C. u.a. (Hrsg.): Mathematical modelling (ICTMA 12): education, engineering and economics – Woodhead Publishing, Chichester, S. 222 – 231.

Gerholz, K.-H. (2014): Gruppenpuzzle – Didaktische Gestaltung und Illustration aus der Lehrerbildung. – In: Zeitschrift für Didaktik der Rechtswissenschaft, 1(3), S. 261 – 265.

Grundmann, D. (2017): Bildung für nachhaltige Entwicklung in Schulen verankern - Springer Fachmedien, Wiesbaden.

Hütt, M.-T. (2001): Datenanalyse in der Biologie: Eine Einführung in Methoden der nichtlinearen Dynamik, fraktalen Geometrie und Informationstheorie – Springer, Berlin.

Meister, J./Upmeier zu Belzen, A. (2018): Naturwissenschaftliche Phänomene mit Liniendiagrammen naturwissenschaftlich-mathematisch modellieren. – In: Hammann, M./ Lindner M. (Hrsg.): Lehr- und Lernforschung in der Biologiedidaktik: Band 8. 2017. Studien Verlag, Halle-Wittenberg, S. 87 – 106.

Vogt, H. (1994): Grundkurs Mathematik für Biologen: Mit Aufgaben mit Lösungen und Beispielen (2. Aufl.) – Teubner, Stuttgart.

Winter, H. (1993): Mathematisches Grundwissen für Biologen. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Wolff, M. (2020): Mathematische Bemerkungen zu einem epidemiologischen Modell im Zusammenhang mit der Corona-Pandemie. https://fr-vlg.de/wolffpandemie

Weiteres Material

Die vollständige Lernumgebung des Mathe-Labors „Corona modellieren?“ findet sich unter: https://mathe-labor.de/stationen/corona-2022/

Ein längeres Video zur Einführung in das SIR-Modell und die Differentialgleichungen (9:30 min) findet sich unter folgendem Link: https://fr-vlg.de/sirvideolang

Name: Datum:

PANDEMIEN MODELLIEREN

Mathematisches Modellieren in der Epidemiologie

Die Begriffe Corona und Pandemie sind Ihnen sicherlich bekannt, schließlich beschäftigt uns dieses Thema nun seit langer Zeit. Sie werden nun selbst in die Rolle von Epidemiologen schlüpfen und mathematische Modelle, die das Infektionsgeschehen modellieren können, kennenlernen und qualitativ erforschen.
Ihre Erkenntnisse werden Sie dann in einer gemeinsamen Diskussion zusammenführen.

Optionale Vorbereitung:

Zum biologischen Hintergrund informiert **Video 0**.

https://fr-vlg.de/sirvideo0

Ein erstes Modell

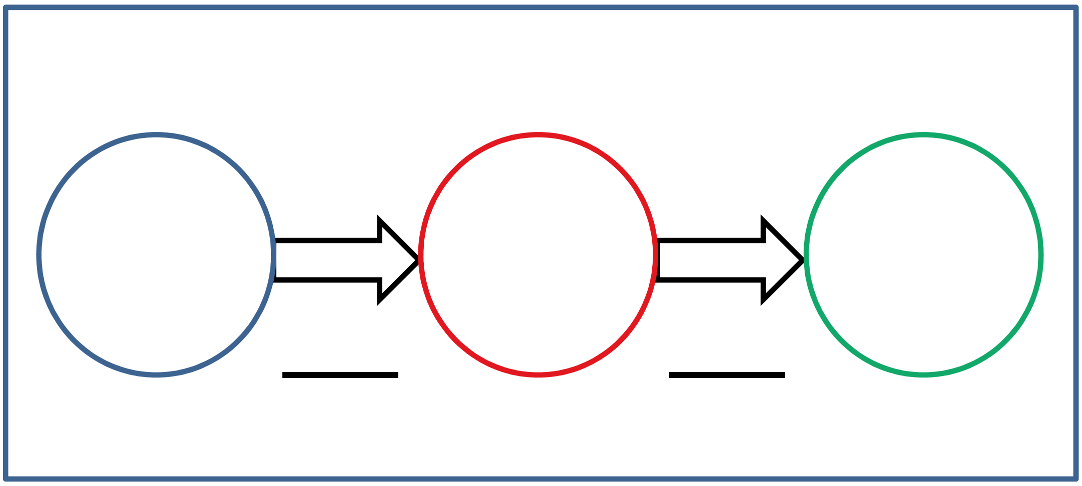
Im ersten Schritt beschäftigen Sie sich damit, wie die Grundstruktur eines Modells, welches das Infektionsgeschehen abbildet, aussehen kann und welche Modellierungsannahmen notwendig sind.

Hinweis: Halten Sie Ihre Ergebnisse stets in einem (Protokoll-)Heft schriftlich fest.

1. **Erste Diskussion**
   In welche unterschiedlichen Gruppen könnte die Bevölkerung anhand ihres Gesundheitszustandes während einer Pandemie unterteilt werden? Welche Eigenschaften müssen außerdem berücksichtigt werden, um eine möglichst realitätsnahe Modellierung anzustreben?

2. **Betrachten Sie das Video 1 und bearbeiten Sie anschließend folgende Arbeitsaufträge.**
   Das folgende Bild zeigt ein sogenanntes „Flussdiagramm“. Hier wird zur besseren Übersicht das SIR-Modell anschaulich dargestellt. Vervollständigen Sie die Grafik mit den Informationen aus **Video 1** und notieren Sie in den Kreisen die Namen der vorgestellten Gruppen.

   https://fr-vlg.de/sirvideo1



Schematische Darstellung des SIR-Modells

   Was könnten die im Diagramm eingezeichneten Pfeile bedeuten? Notieren Sie Ihre Überlegungen. Sehen Sie danach **Video 2** an und tragen Sie eine Bezeichnung für diese Pfeile auf den Strichen ein. Formulieren Sie anschließend in eigenen Worten, was hier genau passiert.

   https://fr-vlg.de/sirvideo2

3. **Das SIR-Modell wird nun genauer betrachtet und die Einflüsse der einzelnen Parameter werden untersucht.**
   Schauen Sie dazu **Video 3**: oder mit mehr Informationen:

   https://fr-vlg.de/sirvideo3 https://fr-vlg.de/sirvideo3i

Name: ____________________ Datum: ____________________

Arbeitsblatt

MATHEMATISCHES MODELLIEREN IN DER EPIDEMIOLOGIE - SIMULATION

Das SIR-Modell

*Nutzen Sie für alle folgenden Aufgaben die **Simulation 1** zum SIR-Modell.*

https://fr-vlg.de/sirsimulation1

1. **Beschreiben Sie anhand der Simulation 1, wie sich eine Veränderung des Prozentsatzes der Infizierten zu Beginn der Pandemie auf das Modell auswirkt. Was passiert mit den Kurven? Was bedeutet das in der Realität?**
   Nutzen Sie die Speichern-Funktion in der Simulation 1, um Vergleiche herstellen zu können.

2. **Welchen Einfluss haben die Parameter „Infektionsrate" und „Genesungsrate" auf das SIR-Modell?**
   Beziehen Sie sich in Ihrer Argumentation auf die Basisreproduktionszahl R_0 und auf die Kurvenverläufe.
   „Eine Veränderung der Infektionsrate bei gleichbleibender Genesungsrate führt zu …";
   a) Erläutern Sie den Einfluss der Infektionsrate.
   b) Erläutern Sie den Einfluss der Genesungsrate.
   c) Erklären Sie auf Basis der vorangegangenen Überlegungen, was das in der Realität bedeutet.

3. **Oft wird im Zusammenhang mit der Coronapandemie von sogenannten Wellen gesprochen. Erklären Sie, was damit gemeint ist.**

4. **Die Basisreproduktionszahl R_0 von SARS-CoV-2 wurde zu Beginn der Pandemie oft mit 3,5 beziffert. Wie müssten die Infektions- und Genesungsrate gewählt werden? Wie viele Lösungen gibt es?**

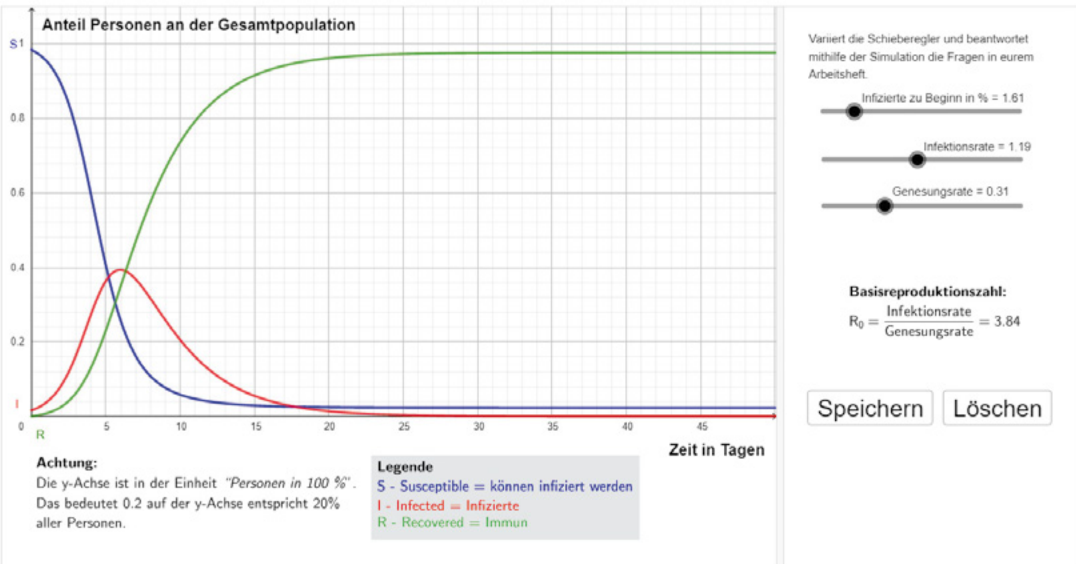
5. **Beschreiben Sie (mathematisch) das Langzeitverhalten des SIR-Modells.**

6. **Die Genesungsrate von Covid-19 beträgt etwa $\frac{1}{14} \approx 0{,}07$, da eine infizierte Person im Durchschnitt nach zwei Wochen vollständig genesen ist.**
   a) Wie sieht die zugehörige Infektionsrate aus, wenn weiterhin von einer Basisreproduktionszahl R_0 von ca. 3,5 ausgegangen wird und zu Beginn 2 % der Bevölkerung infiziert sind?
   b) Wie viel Prozent der Bevölkerung sind in diesem Fall maximal zeitgleich infiziert?
   Was bedeutet das in der Realität? Wie viele Personen wären in Deutschland betroffen?

7. **Erklären Sie, wie sich durch Veränderung der Infektions- und Genesungsrate die Forderung „flatten the curve" darstellen lässt. Welcher Parameter muss hier angepasst werden?**

8. **Sie haben jetzt viele Erfahrungen mit dem SIR-Modell gesammelt.**
   Beziehen Sie sich in den Ausführungen zu folgenden Fragen stets auf die Realität und Ihr Vorwissen.
   a) Nennen und erläutern Sie die Grenzen des SIR-Modells. Welche Aussagen lassen sich unter Zuhilfenahme des Modells treffen und an welchen Stellen versagt das Modell?
   b) Darauf aufbauend: Welche Verbesserungsvorschläge sehen Sie im Rahmen dieses Modells noch?

Simulation 1



Name: ______________________ Datum: ______________________

MATHEMATISCHES MODELLIEREN IN DER EPIDEMIOLOGIE – SIMULATION UND DISKUSSION

Einfluss von Impfungen auf das SIR-Modell

Das SIR-Modell stellt die Infektionslage vereinfacht dar, modelliert diese jedoch an vielen Stellen schon erstaunlich gut. In jedem Fall können bereits an diesem – vergleichsweise einfachen – Modell viele wichtige Erkenntnisse gewonnen werden. Epidemiologen nutzen diese, um komplexere Modelle zu entwerfen, die die Realität noch besser abbilden können. Einen ersten Schritt zu einer möglichen Verbesserung des klassischen SIR-Modells haben Sie sich bereits überlegt. Hier geht es nun um den Einfluss der Impfung auf das Modell.

1. **Nennen Sie Ideen, wie man den Einfluss von Impfungen im Modell darstellen könnte.**

Arbeiten Sie nun mit der **Simulation 2** zum SIR-Modell mit Impfeinfluss. In dieser wird zu Beginn der Pandemie ein bestimmter Prozentsatz der Personen als immun gegenüber der Infektion angenommen. Dieser Anteil (Prozentsatz) wird aus der Gruppe „*Susceptible*" entfernt und der Gruppe „*Recovered*" hinzugefügt. Technisch ist dies in der Simulation durch einen weiteren Schieberegler „Impfquote" umgesetzt.

https://fr-vlg.de/sirsimulation2

2. **Erläutern Sie: Warum ist es ausreichend, die Geimpften der Gruppe *Recovered* hinzuzufügen?**

3. **Untersuchen Sie anhand von Simulation 2, welchen Einfluss eine Veränderung der Impfquote zu Beginn der Pandemie auf den Verlauf des Modells und das Infektionsgeschehen hat: Beschreiben Sie diesen Zusammenhang in eigenen Worten.**

4. **Wir nehmen nun wieder eine Genesungsrate von $\frac{1}{14} \approx 0{,}07$ an. Aus $R_0 = 3{,}5$ ergibt sich die Infektionsrate und zu Beginn der Pandemie sind 1 % aller Menschen infiziert. Wie hoch muss die Impfquote sein, damit der höchste Wert der Infizierten deutlich unter 10 % liegt?**

5. **Erläutern Sie, was diese Werte in Bezug auf eine Bevölkerung von etwa 82 Millionen Menschen bedeuten.**

6. **Erklären Sie in eigenen Worten, welche Auswirkungen eine erhöhte Impfquote auf das Infektionsgeschehen haben kann. Wieso muss die Impfquote beim Auftreten neuer Virusvarianten mit größerer Reproduktionszahl höher sein?** Nutzen Sie die Speichern-Funktion in Simulation 2, um Vergleiche herstellen zu können.

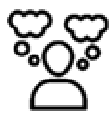
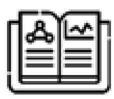
Impfungen – ein vieldiskutiertes Thema

Im letzten Schritt wollen wir alle Erkenntnisse zusammenführen und über das Thema Impfungen diskutieren. WICHTIG: Niemand vertritt seine/ihre persönliche Meinung, sondern es wird eine zufällige Position vertreten. Wählen Sie nun zufällig / verdeckt eine der vier zur Verfügung stehenden Karten (siehe unten).

1. **(ca. 25 Minuten Zeit) Bereiten Sie sich auf die Diskussion vor, indem Sie die Argumente, welche Ihre zufällige Position untermauern, logisch ordnen.**

2. **Nun beginnt die Diskussion, bei der Sie einige Regeln einhalten:**
   - Wer das Wort hat, darf ausreden.
   - Der eigene Standpunkt wird immer begründet (sofern möglich).
   - Niemand verfällt in die persönliche Meinung.
   - Sachlich diskutieren; ruhig bleiben und niemanden persönlich angreifen.

   Tauschen Sie sich nach der Diskussion über Ihre Gefühle und darüber aus, wie Sie sich selbst wahrgenommen haben. Geben Sie sich dazu auch gegenseitig ein Feedback. Wie haben Sie Ihr Gegenüber erlebt? Haben sich alle an die Regeln gehalten? Gab es Probleme, was lief richtig gut?

			
Arzt / Ärztin	**Impfskeptiker/-in**	**Epidemiologe/-in**	**Moderator/-in**