ZMFP, Vol.1 (2020)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Michaela Lichti & Jürgen Roth

Wie Experimente mit gegenständlichen Materialien und Simulationen das funktionale Denken fördern

Zusammenfassung

Der Einstieg in das Thema funktionale Zusammenhänge ist von hoher Bedeutung für ein erfolgreiches Arbeiten mit Funktionen, die Schülerinnen und Schüler ihre ganze Schullaufbahn über begleiten. Dieser Beitrag befasst sich mit der Frage, ob Lernumgebungen unter Verwendung von Simulationen oder gegenständlichen Materialien geeignet sind, diesen Einstieg ausgerichtet auf die Förderung des funktionalen Denkens unter Berücksichtigung der Aspekte Zuordnung, Änderungsverhalten und Objekt zu gestalten. Nach einem theoretischen Überblick über funktionales Denken, Experimente mit gegenständlichen Materialien bzw. Simulationen sowie Aufgaben wird die Gestaltung der entwickelten Lernumgebungen detailliert beschrieben, wobei der Schwerpunkt auf der Aufgabengestaltung liegt. Im Anschluss daran wird die zur Beantwortung der Forschungsfrage durchgeführte Studie vorgestellt. Es folgt die Darstellung der Auswertungsmethoden, die sowohl quantitativer (Rasch-Modell) als auch qualitativer Art (qualitative Inhaltsanalyse) sind. Abschließend werden die Ergebnisse, die darauf hindeuten, dass Simulationen einen größeren Einfluss auf das Verständnis des Änderungsverhaltens, gegenständliche Materialien hingegen auf das Verständnis der Zuordnung haben, präsentiert und interpretiert sowie kritisch hinterfragt. Die Ergebnisse werden für den Einsatz im Unterricht aufgearbeitet.

Dr. Michaela Lichti, Institut für Mathematik, Universität Koblenz-Landau, Fortstraße 7, 76829 Landau, Deutschland,
E-mail: lichti@uni-landau.de

Prof. Dr. Jürgen Roth, Institut für Mathematik, Universität Koblenz-Landau, Fortstraße 7, 76829 Landau, Deutschland,
E-mail: roth@uni-landau.de

Schlagworte

Funktionales Denken, digitale Werkzeuge, Experimente, Lernumgebung, Aufgabengestaltung

1. Vom Klassenzimmer zur fachdidaktischen Forschung

Funktionale Zusammenhänge sind Teil unseres Alltags. Bereits ein einfacher Tankvorgang beinhaltet einen funktionalen Zusammenhang: In Abhängigkeit von der getankten Kraftstoffmenge ergibt sich der zu zahlende Preis. Genauso sind funktionale Zusammenhänge wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Bereits in der Grundschule setzen sich Schülerinnen und Schüler mit Mustern auseinander, müssen darin Regelmäßigkeiten erkennen und die Muster entsprechend fortsetzen. Implizit befassen sie sich so mit Zuordnung und Veränderung und auf diese Weise mit grundlegenden Aspekten funktionaler Zusammenhänge. Bereits in Jahrgangsstufe 5 stellen Schülerinnen und Schüler fest, dass der Flächeninhalt eines Quadrats von dessen Seitenlänge abhängt, in der Mittelstufe werden sie nach proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen in Jahrgangsstufe 7 explizit mit Funktionen in Jahrgangsstufe 8 konfrontiert. Sobald lineare Zusammenhänge bekannt sind, ist der Funktionsbegriff aus dem Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken. Ohne ein grundlegendes Verständnis funktionaler Zusammenhänge ist schlussendlich die Behandlung der Analysis in der Oberstufe nicht vorstellbar. Gleichzeitig kann jedoch eine Vielzahl von Fehlvorstellungen im Lernprozess beim Thema funktionale Zusammenhänge auftreten. Beispielhaft sei auf zwei verwiesen: Der *Graph-als-Bild-Fehler* verleitet die Schülerinnen und Schüler dazu, einen Funktionsgraphen nicht als Repräsentationsform eines funktionalen Zusammenhangs, sondern als Bild einer Situation zu interpretieren (Janvier, 1978). Die Fehlvorstellung *illusion of linearity* umfasst, dass Schülerinnen und Schüler fälschlicherweise auch nicht-lineare funktionale Zusammenhänge als linear betrachten. (vgl. De Bock et al., 2007). Die Thematik scheint damit sowohl implizit als auch explizit relevant, allgegenwärtig und bei Weitem nicht trivial zu sein. Betrachtet man des Weiteren, wie funktionale Zusammenhänge basierend auf gängigen Lehrwerken im Unterricht behandelt werden, stellt man fest, dass hier ein eher eingeschränktes Repertoire an Möglichkeiten zum Einsatz kommt. So beginnen vier im Lehrmittelkatalog für Rheinland-Pfalz 2020/21 für das Gymnasium aufgeführte Lehrwerke *Elemente der Mathematik*, *Fundamente*, *Lambacher Schweizer* und *Neue Wege* (vgl. https://secure3.bildung-rp.de/LMF_Verlagsportal/SchulbuchkatalogAnzeigen.aspx) die Einheit zu Funktionen in Jahrgangsstufe 8 mit einem textbasierten Beispiel, das den Zuordnungsaspekt von Funktionen in den Mittelpunkt rückt.

Miro hat einige Quadratzahlen an die Tafel geschrieben. Jetzt sucht er zu einer Quadratzahl die Zahl, die quadriert wurde. Hilf Miro und gib passende Zahlen an.	Zahl → Quadratzahl		Quadratzahl → Zahl
	$2 \to 4$	$-2 \to 4$	$16 \to ?$
	$3 \to 9$	$-3 \to 9$	
	$4 \to 16$	$-4 \to 16$	

Abbildung 1: Einstiegsaufgabe in das Thema Funktionen (vgl. Fundamente der Mathematik, RLP, Gymnasium Klasse 8, S. 180)

Dies ist möglicherweise der in Schulbüchern verwendeten Definition von Funktion als *eindeutige Zuordnung* (ebd.) geschuldet, wirft aber dennoch die Frage auf, ob auf diese Weise nicht das Änderungsverhalten, das ebenso wie die Zuordnung wesentlicher Bestandteil funktionalen Denkens ist, zu kurz kommt. In den Lehrbüchern schließt sich nun dem Lehrplan entsprechend an den Einstieg in Funktionen nahtlos das Thema lineare Funktionen an. Damit findet direkt zu Beginn des Themas eine Einschränkung auf den einfachen Fall statt. Nimmt man nun den häufig auftretenden Schülerfehler der *illusion of linearity* in den Blick, ist diese Reihenfolge möglicherweise nicht ideal. Es ist zu überlegen, ob ein Einstieg in funktionale Zusammenhänge geeigneter wäre, der den Blick der Schülerinnen und Schüler auf Zuordnung *und* Änderungsverhalten sowie die „viele[n] Gesichter" einer Funktion lenkt (Leuders & Prediger, 2005, S. 4) und über das Medium Lehrbuch hinausgeht. Mit Blick auf das Voranschreiten der Digitalisierung sollte des Weiteren nach Möglichkeiten gesucht werden, einen digitalen Zugang zu funktionalen Zusammenhängen zu ermöglichen. Dieser Beitrag befasst sich daher mit der Frage, wie sich der Einstieg in das Thema funktionale Zusammenhänge so gestalten lässt, dass sowohl die Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler aufgegriffen als auch die aus mathematikdidaktischer Perspektive für einen adäquaten und erfolgreichen Umgang mit funktionalen Zusammenhängen notwendigen Fähigkeiten gezielt angesprochen und entwickelt werden können. Dabei sollten alternative und auch digitale Zugangsweisen mit in die Überlegungen einbezogen werden.

Hierzu wird diese Einstiegsfrage zunächst hin zu einer Forschungsfrage konkretisiert. Es folgt die Beschreibung der sich anschließenden Studie,

die es ermöglichen sollte, die Forschungsfrage zu beantworten. Am Anfang steht daher eine theoretische Betrachtung des funktionalen Denkens, das Schülerinnen und Schüler zum Umgang mit funktionalen Zusammenhängen befähigt, sowie eine Zusammenstellung verschiedener möglicher Ansätze zum Einstieg in funktionale Zusammenhänge. Basierend darauf wird das Forschungsziel formuliert, das darin besteht, Lernumgebungen für den Einstieg in funktionale Zusammenhänge zu entwickeln, *mit denen sich funktionales Denken fördern lässt, und herauszufinden, welche Aspekte des funktionalen Denkens mit welcher Lernumgebung gezielt gefördert werden können.* Die dabei verwendeten Lernumgebungen sollen sich auf das Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder mit Simulationen stützen. Es folgt die Beschreibung der Konzeption der zu diesem Zweck erstellten Lernumgebungen, um daran anschließend darzustellen, wie die Erhebung durchgeführt und mit welchen Auswertungsschwerpunkten die Forschungsfrage beantwortet wurde. Die Ergebnisse werden interpretiert, diskutiert und mit Blick auf ihre Übertragbarkeit kritisch hinterfragt, um einen möglichen Nutzen für den Unterricht abzuleiten.

2. Theoretische Grundlagen der Studie

2.1 Funktionales Denken

Funktionales Denken, „eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 1989), umfasst die Fähigkeit, erfolgreich mit funktionalen Zusammenhängen zu arbeiten. Dabei versteht man unter Funktion bzw. unter funktionalen Zusammenhängen eine eindeutige Zuordnung zweier Größen zueinander, die in Abhängigkeit voneinander variieren. Konkret beschreibt funktionales Denken das Verständnis dreier grundlegender Aspekte: Zuordnung, Änderungsverhalten (auch Kovariation, Malle, 2000) und Funktion als Objekt (Vollrath, 1989). Der Aspekt der Zuordnung beinhaltet dabei das Verständnis, dass einem Wert der Ausgangsgröße genau ein Wert der abhängigen Größe zugeordnet wird. Die Eindeutigkeit der Zuordnung ist zentral. Unter Änderungsverhalten fasst man ein Verständnis für den Zusammenhang zwischen der Änderung der Ausgangsgröße und der davon abhängigen Änderung der zugeordneten Größe. Die eine bedingt die andere. Eine Funktion als Objekt zu erfassen, birgt die Aufgabe, zu begreifen, dass eine Funktion zum einen ein eigenständiges Objekt ist, auf das Operationen angewendet werden können. So lassen sich Funktionen beispielsweise addieren. Zum anderen subsumieren Funktionen Situationen in ihrer Gänze. Beispielweise kann man einen Graphen betrachten, um sich einen Eindruck von der durch die Funktion beschriebenen Gesamtsituation zu machen. Im Rahmen des Objekt-Aspekts wird auch zwischen einem manipulierenden und einem reflektierenden Umgang mit einer Funktion unterschieden (vom Hofe, 2004). Manipuliert man eine Funktion bspw. durch Multiplikation mit einem Faktor, lassen sich die Auswirkungen auf den Graphen in Gänze erfassen. Zerlegt man hingegen eine Funktion, die als Term oder Graph vorliegt, in ihre Bestandteile (z.B. Nullstellen/Extremstellen/Änderungsrate), um so zum zugrundeliegenden Zusammenhang vorzudringen, ist auch dies eine Auseinandersetzung mit der Funktion als Objekt. Diese drei Aspekte werden auch als Grundvorstellungen des funktionalen Denkens bezeichnet (vom Hofe & Blum 2016, S. 248). Es handelt sich dabei um normative Grundvorstellungen, die aus Sicht der Fachdidaktik als tragfähig (Roth & Siller, 2016) angesehen werden, um als Basis für ein mathematisches Konzept zu dienen.

Neben dieser normativen Charakterisierung lässt sich funktionales Denken auch anhand der Repräsentationsformen greifbar machen, die zur Darstellung funktionaler Zusammenhänge genutzt werden. Man unterscheidet hierbei Tabelle, Graph, Funktionsterm und situative Beschreibung (vgl. z.B. Büchter & Henn, 2010). Sind Schülerinnen und Schüler nun in der Lage, mit jeder dieser Formen adäquat umzugehen, d.h. können sie diese lesen und interpretieren, und sind sie des Weiteren fähig, zwischen den Repräsentationsformen eines Zusammenhangs hin und her zu wechseln und verschiedene Formen ineinander zu überführen, dann sind dies Hinweise dafür, dass Schülerinnen und Schüler zu funktionalem Denken fähig sind (vgl. Barzel et al., 2005; Nitsch, 2015).

Offensichtlich besteht ein enger Zusammenhang zwischen beiden Charakterisierungen funktionalen Denkens, denn ein Verständnis der verschiedenen Aspekte ist nur anhand des erfolgreichen Umgangs mit verschiedenen Repräsentationsformen erkennbar. Funktionales Denken wird im Rahmen dieses Beitrags daher verstanden als das Verständnis der Aspekte Zuordnung, Änderungsverhalten und Funktion als Objekt, wobei dieses in der Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler sichtbar wird, adäquat und erfolgreich mit verschiedenen Repräsentationsformen umgehen und diese ineinander überführen zu können.

2.2 Funktionales Denken vor der Einführung des Funktionsbegriffs

Da unsere Zielebene der Einstieg in die Arbeit mit funktionalen Zusammenhängen ist, muss genauer betrachtet werden, welche Art von funktionalem Denken von Schülerinnen und Schülern, die noch nie explizit mit funktionalen Zusammenhängen gearbeitet haben, erwartet werden kann. Insbesondere ist zu klären, ob eine Fokussierung auf die im letzten Abschnitt benannten Aspekte funktionalen Denkens und eine Förderung dieser Aspekte überhaupt möglich ist. Verschiedene Studien liefern diesbezüglich Hinweise (Blanton et al., 2007; Blanton & Kaput, 2011; Mason, 2008; Warren & Cooper, 2005, 2006). So kann der Aspekt Zuordnung bereits von Schülerinnen und Schülern der Grundschule erfasst werden (Warren & Cooper, 2005, 2006; Mason, 2008). Man stelle sich vor, dass Schülerinnen und Schüler ein tabellarisch dargestelltes Muster (vgl. Abbildung 2) analysieren, um herauszufinden, in welcher Weise es sich wiederholt.

3	▲
4	■
5	⬟
6	??

Abbildung 2: Tabellarisches Muster

Hierzu können sie die Tabelle horizontal betrachten. Damit wird der Aspekt der Zuordnung für sie relevant. Genauso sind Schülerinnen und Schüler aber auch in der Lage, die Veränderung der beiden einander zugeordneten Variablen in den Blick zu nehmen und auf diese Weise das fehlende Feld zu erschließen. Sie untersuchen die Tabelle vertikal und befassen sich so mit der Veränderung der gegebenen Größen und implizit mit deren Änderungsverhalten. Auch für ein beginnendes Verständnis des als komplex anzusehenden Objekt-Aspekts gibt es Hinweise (Blanton & Kaput, 2005; Mason, 2008). So zeigte sich, dass Schülerinnen und Schüler bereits früh anfangen, andere Bezeichnungen und Symbole für eine Größe zu wählen (Blanton & Kaput, 2004). Es ließ sich z.B. feststellen, dass Schülerinnen und Schüler in der dritten Klasse bei der Beschreibung des Zusammenhangs der Anzahl der Hunde und der zugordneten Anzahl der Augen verbal erfassen können, dass man die Anzahl der Hunde lediglich verdoppeln muss. In Klasse vier findet sich für die Variable Hunde bereits die Verwendung des Platzhalters □ (ebd.), dessen Verdoppelung im nächsten Schritt angestrebt wird. In gewisser Weise beginnen die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise zu generalisieren und eine Größe mittels der gesetzten Symbole zu manipulieren (Mason, 2008). Hierin kann man eine frühe Vorstellung des manipulierenden Verständnisses von Funktionen sehen und damit erste Ansätze des Objekt-Aspekts.

2.3 Der Einstieg in das Thema funktionale Zusammenhänge

Zum Einstieg in die Thematik funktionale Zusammenhänge werden in der Literatur verschiedene Ansätze diskutiert. Es wird abgewogen, ob man mit dem einfachen Fall (lineare Funktionen) beginnen und sich zum komplexen vorarbeiten sollte, oder ob man komplexe Situationen voranstellen sollte, um den Blick nicht direkt durch und auf die einfachen zu verengen (De Beer, Gravemeijer & van Eijck, 2015). Der Einstieg über lineare Funktionen birgt die Gefahr der Übergeneralisierung, da der Eindruck entstehen kann, dass funktionale Zusammenhänge *immer* linear sind. Zum anderen kann eine Vielzahl an Methoden und an Materialien zum Einsatz kommen, um Schülerinnen und Schülern eine Vorstellung von funktionalen Zusammenhängen zu vermitteln. Hierbei fällt besonders das Experimentieren mit gegenständlichen Materialien ins Auge. Mit Blick auf die immer weiter voranschreitende Digitalisierung (vgl. Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft, https://www.bmbf.de/de/bildung-digital-3406.html) gibt es aber auch gute Gründe, digital mit Simulationen, etwa auf der Basis des dynamischen Mathematik-Systems GeoGebra, zu experimentieren. So können digitale Werkzeuge zum Beispiel zu einer erleichterten Umsetzung im Unterricht führen, sie bringen eine Vielzahl an Variationsmöglichkeiten mit sich. Aber auch die Tatsache, dass digitale Medien inzwischen wesentlicher Bestandteil der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sind, und dass damit neben Motivation und auch die Notwendigkeit entsteht, Schülerinnen und Schülern den adäquaten Umgang durch den bewussten Einsatz entsprechender Medien zu vermitteln, rückt digitale Medien in den Fokus. Sowohl der digitale als auch der reale Ansatz bieten Vor- und Nachteile.

Experimentieren als Zugang zu funktionalen Zusammenhängen

Experimente sind dazu geeignet, den Unterricht an vielen Stellen zu bereichern und „Mathematik handlungsorientiert und lebendig erfahrbar

[zu] machen“ (Ludwig & Oldenburg, 2007, S. 11). Besonders, um sich funktionalen Zusammenhängen zu nähern, bieten sie sich an. Denn im Laufe eines solchen Experiments ist es erforderlich, zunächst zu erfassen, welche Größen sich verändern lassen und welche voneinander abhängen. Basierend auf dieser Erkenntnis können Hypothesen aufgestellt werden. Im Rahmen der Durchführung des Experiments zur Überprüfung der Hypothesen kann dann durch das Beeinflussen der unabhängigen Größe die Veränderung der abhängigen Größe beobachtet werden (vgl. Beckmann, 2007). Durch den Vorgang des Experimentierens übernimmt man quasi die Rolle der Funktion: Man gibt die Ausgangsgröße und damit die unabhängig Variable in die Funktion hinein und erhält als Ergebnis den Wert der abhängigen Variable (vgl. hierzu *action conception of function*, Thompson, 1994, S. 26ff). Auf diese Weise unterstützt das Experiment das Erkennen der funktionalen Abhängigkeit. Dies kann durch das Erstellen systematischer Messreihen und das Rückschließen auf den zugrundeliegenden Funktionstyp noch erweitert werden (Beckmann, 2007, S. 45).

Experimentieren mit gegenständlichen Materialien

Das aus den Naturwissenschaften bekannte Experiment wird mit realen, also gegenständlichen Materialien durchgeführt. Die Wahl dieser Vorgehensweise zur Erarbeitung eines funktionalen Zusammenhangs bringt eine Reihe von Vorteilen für das Verständnis funktionaler Zusammenhänge mit sich. Die untersuchten Zusammenhänge können wortwörtlich *begriffen* werden (Barzel, 2000; Ludwig und Oldenburg, 2007). Durch aktives Handeln übernimmt man die Arbeit der Funktion und erzeugt aus der unabhängigen die abhängige Variable. Die einzelnen Aspekte funktionalen Denkens lassen sich erleben (Barzel, 2010), wenn man beispielsweise die einander zugeordneten Objekte anfassen kann, die Veränderung zum Beispiel des Füllstandes eines Gefäßes durch Variation der Einfüllgeschwindigkeit selbst beeinflusst, oder in einem händisch erstellten Graphen den zuvor untersuchten Zusammenhang in Gänze wiedererkennt. Es ist davon auszugehen, dass durch diese bewusste und aktive Verknüpfung von realer Welt und Mathematik das Lernen nachhaltiger wird (Goldstone & Son, 2005) und dass sich gerade abstrakte Konzepte auf diese Weise gut vermitteln lassen (Moch, 2001). Schülerinnen und Schüler schaffen sich so Ankerbeispiele, auf die sie auch nach längerer Zeit immer wieder Bezug nehmen (Ganter, 2013). Entsprechend konnte Ganter (2013) zeigen, dass durch die Verwendung von gegenständlichen Materialien ein größerer Einfluss auf das funktionale Denken erzeugt werden kann als durch Videos. Der Bezug zu alltäglichen Situationen, der mittels eines Experiments geschaffen wird (Kennedy et al., 2004), betont zudem die Bedeutung der Mathematik generell. Die handlungsorientierte und enaktive Arbeitsweise steigert des Weiteren die Motivation (Goldstone & Son, 2005).

Experimentieren mit Simulationen

Die voranschreitende Digitalisierung ist ein die Schule in sämtlichen Bereichen beschäftigendes Thema und auch Mathematik-Lehrpläne fordern den Einsatz digitaler Medien (vgl. etwa MBWJK, 2007). Vor diesem Hintergrund sollte entsprechend überlegt werden, ob ein Verlagern des Experiments „auf den Bildschirm" für das Verständnis funktionaler Zusammenhänge nicht ganz eigene Vorteile mit sich bringt. Möglich macht dies ein dynamisches Mathematik-System (DMS) wie z.B. GeoGebra, das als Multirepräsentationssystem die Darstellungsformen Tabelle, Graph, Funktionsterm und Situation, gegeben in Form einer Simulation, vernetzen kann (vgl. Abb. 3).

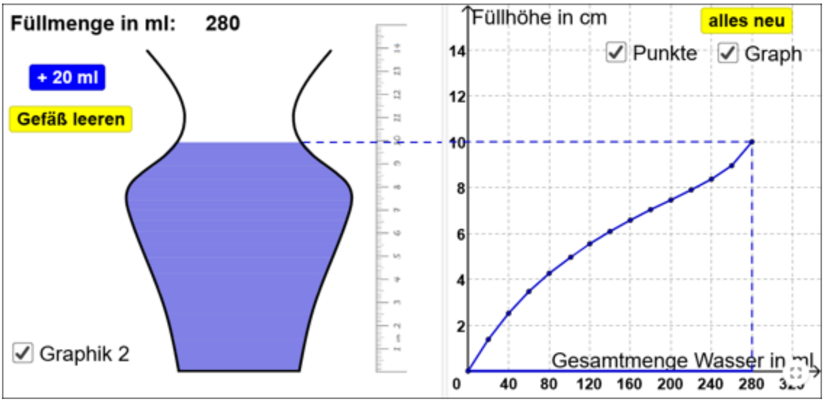


Abbildung 3: Beispiel-Oberfläche (GeoGebra), die in einer Simulation die Situation mit der graphischen Repräsentationsform verknüpft (vgl. Lichti, 2019).

Hierin liegt ein wesentlicher Vorteil dieser Art des Experimentierens: Schülerinnen und Schüler können den Zusammenhang zwischen der Veränderung der Situation und beispielsweise dem zugehörigen Funktionsgraphen direkt beobachten, der Zwischenschritt, den Graphen zu erstellen, entfällt. Veränderungen, die durch Manipulation der Situation oder „systematische Variation" (Roth, 2008, S. 17) hervorgerufen werden, können unmittelbar beobachtet werden (Roth, 2008). Die Simulation wird „Mittler“ zwischen der Mathematik und den Schülerinnen und Schülern (Danckwerts et al., 2000, S. 345). Des Weiteren bietet das System den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, mit Funktionen zu experimentieren (Greefrath, 2010) und funktionale Zusammenhänge zu erkunden (Elschenbroich, 2011). Z. B. der Einfluss verschiedener Parameter kann in vielfältiger Weise untersucht werden. Auch die dynamische Komponente, die ein solches DMS bereitstellt, muss als Vorteil für die Behandlung funktionaler Zusammenhänge gesehen werden (Hoffkamp, 2012). So machen Schieberegler und Animationen es möglich, Veränderungen und Abhängigkeiten direkt bzw. simultan wahrzunehmen. Eine Studie zu Stromkreisen belegt entsprechend der benannten Vorteile, dass durch in dieser Form eingesetzte Simulationen ein signifikanter Einfluss auf das Verständnis der Inhalte erzeugt werden kann (Jaakkola et al., 2011).

Aufgabenstellungen im Rahmen von Lernumgebungen

Experimente, gegenständliche Materialien und Simulationen reichen nicht aus, um einen Effekt auf das funktionale Denken von Schülerinnen und Schülern auszuüben. Die Lernumgebung muss zusätzlich geeignete Aufgabenstellungen enthalten, die die Schülerinnen und Schüler dazu veranlassen, auf adäquate Art und Weise mit den gegenständlichen Materialien bzw. Simulationen zu arbeiten, mit ihnen zu experimentieren und darüber zu reflektieren. Die Aufgabenstellungen dienen dazu, die Schülerinnen und Schüler auf für funktionales Denken bzw. das Verständnis funktionaler Zusammenhänge relevante Aspekte der Experimente zu fokussieren. Erst auf dieser Grundlage ergibt sich die Möglichkeit, eine bewusste Förderung funktionalen Denkens zu erzielen.

Generell sollen Aufgabenstellungen, die das Lernen zum Ziel haben, im Unterschied zu Prüfungsaufgaben eine nachhaltige Wirkung erzielen (Ralle et al, 2014). Sie sollen ein hohes Aktivierungspotenzial mitbringen und sowohl schwächere als auch stärkere Schülerinnen und Schüler ansprechen. Ziel solle es sein, dass sie Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, Strategien zu entwickeln und anzuwenden. Des Weiteren müssen entsprechende Aufgabenstellungen verschiedene Wege zulassen, um zur Lösung einer Aufgabe zu kommen (Bruder et al., 2016). Speziell Aufgabenstellungen, die zum *Erkunden und Entdecken* anhalten, sollen dabei sowohl zugänglich als auch herausfordernd sein (Büchter & Leuders, 2014, S. 119). Als weitere Anforderungen, die an Aufgabenstellungen gestellt werden, benennen Büchter und Leuders (2014) *Bedeutsamkeit* und

Authentizität (S. 119) und beschreiben damit, dass Aufgaben zur „Konkretisierung eines allgemeinen mathematischen Konzepts“ (S. 119) beitragen müssen und so die „Entwicklung oder die Anwendung von Mathematik wider[spiegeln]“ (S. 119).

Neben diesen übergeordneten Anforderungen, die an Aufgabenstellungen gestellt werden, lassen sich auch formale Aufgabenkriterien basierend auf einer nachträglichen Analyse von PISA-Items (vgl. Prenzel et. al., 2002, S. 126) nennen. Hierzu zählen z.B. die Länge des Aufgabentextes, welches Antwortformat erwünscht ist, ob zusätzliche graphische oder bildliche Informationen vorliegen und welche Art Output generiert werden muss.

Da die im Rahmen dieser Studie zum Einsatz kommenden Lernaufgaben dazu dienen sollen, Schülerinnen und Schüler zielgerichtet durch Experimente zu leiten, und dabei zur adäquaten Verwendung verschiedener Medien führen sollen, werden die zu erstellenden Aufgabenstellungen als „Aufforderungen zum Ausführen von Lernhandlungen“ (Bruder, Leuders & Büchter, 2016, S. 18) verstanden. Diese umfassten beispielsweise die Aufforderung, mathematische Zusammenhänge zu beschreiben und zu identifizieren sowie Sachverhalte zu beschreiben, zu verknüpfen, und zu interpretieren. Auch die Aufforderung zu begründen oder zu planen wird miteingeschlossen (ebd., S. 19).

3. Forschungsfrage

Basierend auf den theoretischen Grundlagen und dem Ziel, den Einstieg in das Thema funktionale Zusammenhänge auf die Förderung des funktionalen Denkens hin auszurichten, ergibt sich daher die folgende Forschungsfrage:

> *Mit welcher Lernumgebung – basierend auf Aufgabenstellungen in Verbindung mit gegenständlichen Materialien oder Simulationen – lassen sich welche Aspekte des funktionalen Denkens beim Einstieg in funktionale Zusammenhänge gezielt fördern?*

4. Erstellen der Lernumgebung

Um differenzierte Aussagen treffen zu können, was die beiden gegenübergestellten Vorgehensweisem gegenständliche Materialien vs. Simulationen mit Blick auf das funktionale Denken beim Einstieg in die Thematik funktionale Zusammenhänge leisten können, musste eine Lernumgebung gestaltet werden, die sowohl mit gegenständlichen Materialien als auch mit Simulationen verwendbar ist. Die durch die Veränderung der Einstiegsweise bedingten Unterschiede mussten möglichst geringgehalten werden, um den Einfluss gegenständlicher Materialien und Simulationen vergleichen zu können. Hierzu war zunächst die Wahl von Kontexten notwendig, zu denen die Schülerinnen und Schüler experimentieren und funktionale Zusammenhänge erfahren sollten. Die Kontexte mussten die Verwendung beider Vorgehensweisen erlauben. Des Weiteren mussten Aufgaben erstellt werden, die auf die Förderung der verschiedenen Aspekte nach Vollrath bzw. die Fähigkeit des Umgangs mit Repräsentationsformen abzielten. Um sicherzustellen, dass die Schülerinnen und Schüler, die die Lernumgebung testen würden, bis dahin nur implizite Erfahrungen mit Zuordnungen bzw. Funktionen gemacht hatten, sollte die Lernumgebung des Weiteren am Ende der Jahrgangsstufe 6 einsetzbar sein.

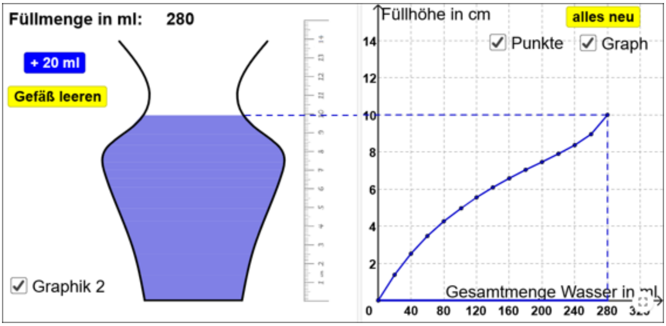
4.1 Wahl der Kontexte

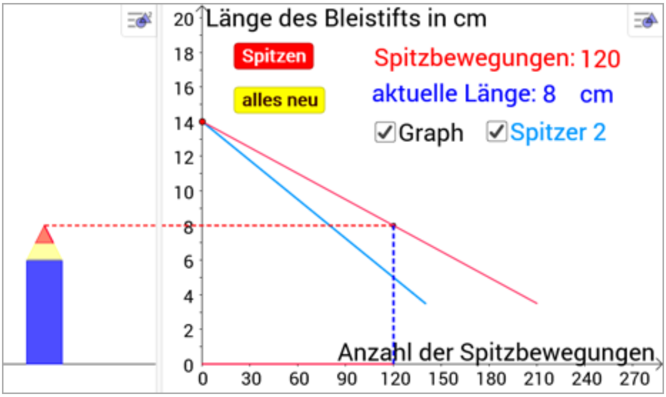
Die Experimentierkontexte mussten verschiedenen Anforderungen genügen. Zum einen sollten verschiedene Typen von Zusammenhängen abgebildet werden. Ein Einstieg über z. B. nur lineare Funktionen würde den Blick der Schülerinnen und Schüler auf den einfachen Fall verengen und schien damit nicht geeignet, umfassend in die Thematik einzuführen. Des Weiteren musste es möglich sein, die Experimente aus der Realität so auf den Bildschirm zu verlagern, dass der fokussierte Zusammenhang und die durchzuführenden Handlungen vergleichbar blieben. Ausgewählt wurden daher vier Inhaltsbereiche:

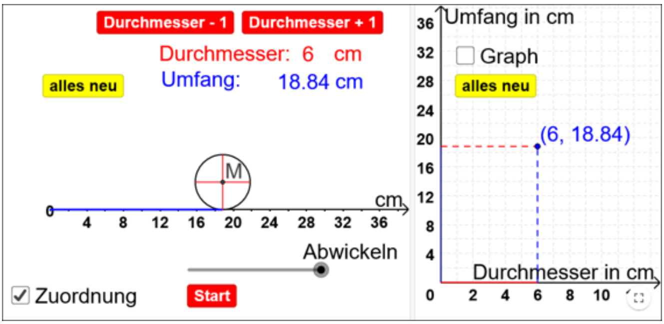
a) Kreise abrollen: Der Zusammenhang von Durchmesser und Umfang eines Kreises (linear, stetig)
b) Würfel bauen: Der Zusammenhang der Anzahl kleiner Würfel, die die Kante eines großen Würfels bilden, mit der Gesamtanzahl kleiner Würfel, die zum Bau des großen Würfels notwendig sind (kubisch, diskret)
c) Gefäße füllen: Der Zusammenhang von Füllvolumen und Füllstand beim Gefäße füllen (beliebig, stetig)
d) Bleistifte spitzen: Der Zusammenhang von Spitzumdrehungen beim Spitzen eines Stiftes und seiner verbleibenden Länge (linear, stetig)

Passend zu diesen Kontexten wurden gegenständliche Materialien und Simulationen erstellt, die den Schülerinnen und Schülern die Durchführung sich entsprechender Experimente ermöglichen sollten (vgl. Abb. 4a und 4b). Die Gestaltung der Simulationen wurde dabei maßgeblich durch die Verwendung von Fokussierungshilfen (z. B. Verbindungslinien, Buttons zum Ein- und Ausblenden, bewusste Farbgebung, vgl. Roth, 2005) beeinflusst. Durch Fokussierungshilfen wird der Fokus der Schülerinnen und Schülern auf das für den jeweils behandelten funktionalen Zusammenhang Wesentliche gelenkt. Beispielsweise erleichtern Verbindungslinien zwischen Graph und simulierter Situation das Verständnis des Zustandekommens einzelner Wertepaare und ihrer Darstellung als Punkte (vgl. hierzu Lichti & Roth, 2018).

Abbildung 4a: Materialien zu den verwendeten Kontexten (vgl. Lichti, 2019)


Füllmenge in ml: 280
+ 20 ml
Gefäß leeren
Graphik 2
Füllhöhe in cm
alles neu
Punkte
Graph
Gesamtmenge Wasser in ml
0 40 80 120 160 200 240 280
2 4 6 8 10 12 14


Länge des Bleistifts in cm
Spitzen
alles neu
Spitzbewegungen: 120
aktuelle Länge: 8 cm
Graph
Spitzer 2
Anzahl der Spitzbewegungen
0 30 60 90 120 150 180 210 240 270
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20


Durchmesser - 1
Durchmesser + 1
Durchmesser: 6 cm
Umfang: 18.84 cm
alles neu
M
cm
0 4 8 12 16 20 24 28 32 36
Abwickeln
Zuordnung
Start
Umfang in cm
Graph
alles neu
(6, 18.84)
Durchmesser in cm
0 2 4 6 8 10
4 8 12 16 20 24 28 32 36

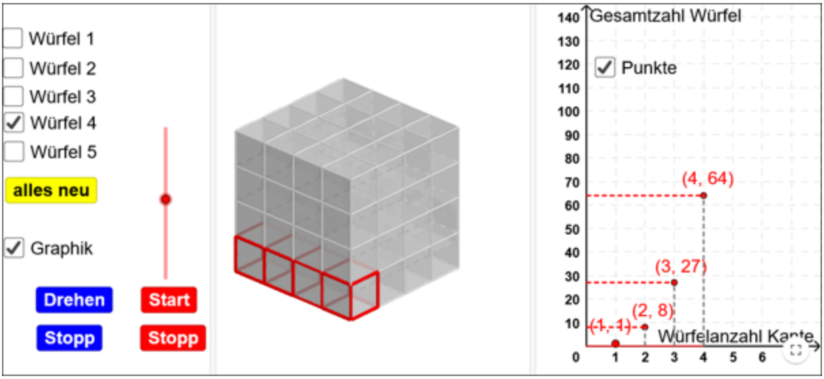


Abbildung 4b: Simulationen zu den verwendeten Kontexten (vgl. Lichti, 2019)

4.2 Konkrete Gestaltung der Aufgabenstellungen

Nach der Wahl der Kontexte lag der Schwerpunkt der Gestaltung der Lernumgebung auf der Erstellung der Arbeitsaufträge, mittels derer die Schülerinnen und Schüler durch die Experimente geleitet werden sollten (Arbeitsaufträge und Hilfehefte sind zu finden unter https://dms.uni-landau.de/m/lichti/material). Die Aufgabenstellungen mussten zunächst den allgemeinen Kriterien (vgl. 2.3.4) genügen. So war es zum Beispiel notwendig, die Aufgabenstellungen möglichst kurz zu formulieren (vgl. Prenzel et al., 2002) und den Aufforderungscharakter der Lernaufgaben durch die Verwendung entsprechender Operatoren (begründe, entscheide, vgl. Beispielaufgabe zum Nachbereiten) zu schärfen. Aus dem gewählten Setting und dem mathematischen Fokus der Aufgabenstellungen ergaben sich weitere Ansprüche an diese. Zum einen mussten die Aufgabenstellungen so formuliert werden, dass sie Schülerinnen und Schülern am Ende der Jahrgangsstufe 6 eine Bearbeitung der Experimente über 4 Schulstunden hinweg ermöglichten, ohne dass eine Lehrperson eingreifen musste. Des Weiteren sollten sie den von der KMK (2004) benannten Anforderungsbereichen (I) *Reproduzieren*, (II) *Zusammenhänge herstellen* und (III) *Verallgemeinern und Reflektieren* zuzuordnen sein. Sie mussten außerdem auf die drei Aspekte nach Vollrath abzielen, um eine Förderung des funktionalen Denkens hinsichtlich dieser Vorstellungen zu gewährleisten. Gleichzeitig sollten sie das Experimentieren als zentrales Element beinhalten und mussten so gestaltet sein, dass sie sowohl bei der Arbeit mit Material als auch mit Simulationen möglichst vergleichbar, im Idealfall sogar identisch formuliert waren. Eine Gegenüberstellung der Einstiegsweisen wäre sonst schwerlich möglich gewesen. Es wurden daher zunächst folgende Aufgabenbereiche (Tabelle 1) festgelegt, die sich aus den für das funktionale Denken relevanten Schritten des Experimentierens (i) *Vorbereiten*, (ii) *Experimentieren*, (iii) *Nachbereiten* ableiten (Roth, 2014, S. 37). Die Unterpunkte ergaben sich auf Grundlage der Arbeitsschritte, die Beckmann (2007, S.45) für das Experimentieren mit funktionalen Zusammenhängen benennt. Einzelne Aufgabenstellungen wurden diesen Aufgabenbereichen zugeordnet.

Tabelle 1 Aufgabentypen der Lernumgebungen (vgl. Lichti, 2019)

Aufgabenbereiche		
Vorbereiten	a)	Schätzen und Vermuten
Experimentieren	a)	Messreihen erstellen und in einer Tabelle festhalten
	b)	Den zugehörigen Graphen erstellen / in seiner Entstehung beobachten
Nachbereiten	a)	Die Bedeutung von Punkten und Graphen erkennen
	b)	Die Art des Zusammenhangs begreifen
	c)	Anwenden der Ergebnisse konkret auf das Experiment
	d)	Transfer der Ergebnisse auf andere Situationen zu vergleichbarem Kontext

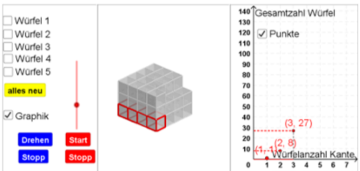
Zu jedem der ausgewählten Kontexte wurden diese Schritte durchlaufen. Die Kontexte mussten in der oben aufgeführten Reihenfolge bearbeitet werden, sodass mit Hilfe der Arbeitsaufträge zusätzlich Schwerpunkte gesetzt werden konnten, die dem Erfahrungsstand der Schülerinnen und Schüler mit funktionalen Zusammenhängen zum jeweiligen Zeitpunkt Rechnung tragen sollten. Die ersten beiden Kontexte *Kreise abrollen* und *Würfel bauen* legten den Schwerpunkt auf Vorbereiten, Experimentieren und Nachbereiten a) und b), wohingegen *Gefäße füllen* und *Bleistifte spitzen* ein größeres Gewicht auf Nachbereiten c) und d) hatten. Um explizit machen zu können, inwiefern die Aufgaben jeweils die Aspekte des funktionalen Denkens aufgriffen und inwieweit sie sich in Abhängigkeit von gegenständlichen Materialien oder Simulationen unterschieden (im Folgenden wird zur besseren Unterscheidung von der Materialgruppe und der Simulationsgruppe gesprochen), wird nun zu jedem Überpunkt ein Beispiel vorgestellt und entsprechend analysiert. Zuvor muss angemerkt werden, dass ein entscheidender Unterschied zwischen beiden Gruppen in der Arbeit mit Graphen lag: Die Simulationsgruppe nutzte GeoGebra, um zu beobachten, wie passend zu einer Simulation der jeweilige Funktionsgraph entsteht. Die Materialgruppe hingegen musste diesen Graphen auf Grundlage ihrer Messungen selbstständig erstellen. Beide Vorgehensweisen bieten Vorteile. Ein selbstständiges Erzeugen des Graphen lässt auf ein stärkeres Verständnis der einander zugeordneten Werte hoffen und einen besseren Einblick in die Entstehung eines Graphen erwarten. Das Beobachten der Entstehung des Graphen macht eventuell den Zusammenhang mit der Situation deutlicher und lässt die Änderung des Graphen in den Vordergrund treten.

1) Vorbereiten: Schätzen und Vermuten

Arbeitsauftrag für die Material- und Simulationsgruppe:	
Schätze:	*Wie viele Würfel benötigt man, um einen Würfel mit einer Kantenlänge von 3 kleinen Würfeln zu bauen?*

In Anlehnung an das Hypothesenbilden, das für das Experimentieren von großer Bedeutung ist, wird von den Schülerinnen und Schülern hier zunächst eine Schätzung verlangt. Diese Aufgabe ist für beide Gruppen identisch und zielt auf den Zuordnungsaspekt ab, da die Schülerinnen und Schüler den kubischen Zusammenhang erfassen und die richtige Anzahl an Würfeln ermitteln müssen. Je nach Wissensstand der Schülerinnen und Schüler wird diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I oder II (KMK, 2004) zugeordnet. Im Verlauf der Studie wurde an dieser Aufgabe sehr deutlich, welche Klassen vertraut mit dem Volumen eines Quaders waren und welche hier noch große Lücken aufwiesen. Insgesamt verdeutlichte diese Aufgabe, wie groß die Heterogenität am Ende von Jahrgangsstufe 6 ausfällt.

2) Experimentieren: Messreihen erstellen und in einer Tabelle festhalten

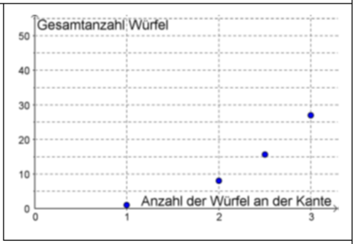
Arbeitsauftrag für die Materialgruppe:
Nimm die Tüte mit den Holzwürfeln aus der Kiste. *Material: viele kleine Würfel* *Baue aus den kleinen Würfeln nacheinander einen großen Würfel mit einer Kantenlänge von 1, 2, 3, 4 und 5 kleinen Würfeln. Notiere in der Tabelle „Würfel" auf deinem Datenblatt, wie viele Würfel man insgesamt bei einer bestimmten Kantenlänge benötigt.*
Arbeitsauftrag für die Simulationsgruppe mit Screenshot der zugehörigen Oberfläche:
Öffne Simulation 2. *Wähle im linken Fenster aus, welchen Würfel du „bauen" willst. Würfel 3 hat z.B. eine Kantenlänge von 3 kleinen Würfeln.* *Wenn du jetzt auf „Start" klickst, füllt sich der große Würfel mit kleinen Würfeln.* *Mit „alles neu" kannst du die Zahl der Würfel wieder auf „Null" setzen. Durch Ziehen am Schieberegler kannst du den Würfel selbst zusammen-„bauen". Wenn du auf „Drehen" klickst, dreht sich der Würfel. Probiere es einfach aus!* *„Baue" auf diese Weise aus den kleinen Würfeln alle möglichen großen Würfel und trage die Werte auf deinem Datenblatt in die Tabelle „Würfel" ein (Würfel pro Kante – Gesamtwürfelanzahl). Beginne mit 1 kleinen Würfel als Kantenlänge.* 

Die Arbeitsaufträge, die das Experiment jeweils beschreiben, unterscheiden sich. Die Materialgruppe baut die Würfel selbstständig, die Simulationsgruppe betrachtet das Entstehen des Würfels auf dem Bildschirm. Um die Funktionen der Simulation alle erfassen zu können, ist eine deutlich längere Beschreibung notwendig. Beide Gruppen können beliebig stoppen, um die Anzahl der bisher verbauten Würfel zu ermitteln. Während die Materialgruppe dabei aktiv mitwirkt, kann die Simulationsgruppe sämtliche Ressourcen darauf verwenden, die Ergebnisse adäquat in einer Tabelle festzuhalten. Auch bei dieser Aufgabe steht der Zuordnungsaspekt im Zentrum. Die Zusammenstellung der Werte in Gänze in einer Tabelle bahnt des Weiteren den Blick auf die Funktion als Objekt an. Die Aufgabe wird dem Anforderungsbereich II (KMK, 2004) zugeordnet, da die Schülerinnen und Schüler ihr methodisches Wissen über die Verwendung von Simulationen, das sie im vorangegangen Experiment erlernt haben, zur Anwendung bringen. Auf diese Weise erarbeiten sie sich den inhaltlich neuen kubischen Zusammenhang

3) Nachbereiten a): Die Bedeutung von Punkten und Graphen erkennen

Arbeitsauftrag für die Material- und Simulationsgruppe:

Hier siehst du einen Ausschnitt aus der graphischen Darstellung. Es gibt hier einen Punkt,
... den du in deinem Graphen nicht eingezeichnet hast (Material)
... der nicht in dem Koordinatensystem auf deinem Bildschirm erscheint (Simulation).
Markiere ihn farbig!



Der Punkt ist (2,5 | 15,63). Welche Informationen in Bezug auf den großen bzw. die kleinen Würfel stecken darin? Warum ist dieser Punkt inhaltlich nicht sinnvoll?

Entscheide und begründe nun, ob es sinnvoll ist, die Punkte mit einander zu verbinden.

Diese Aufgabe ist sowohl für die Arbeit mit Material als auch mit Simulationen bis auf eine Formulierung identisch. Die Materialgruppe nutzt ihre händisch erstellten Graphen zur Analyse, die Simulationsgruppe den Graphen, dessen Entstehung sie in GeoGebra beobachtet. Ziel der Aufgabe ist es zum einen, die Schülerinnen und Schüler erneut über den Zuordnungsaspekt nachdenken zu lassen und sie im Zuge dessen mit diskreten Zuordnungen vertraut zu machen. Sobald nach der Möglichkeit gefragt wird, die Punkte miteinander zu verbinden, spielt auch der Aspekt des Änderungsverhaltens eine entscheidende Rolle. Ist jede Änderung möglich? Auch der Aspekt Funktion als Objekt klingt erneut an, da der Graph die Situation als Ganzes repräsentiert und hier in dieser Rolle wahrgenommen werden muss. Denn eine Verbindung der Punkte würde die Situation entscheidend beeinflussen. Diese Aufgabe wird Anforderungsbereich II (KMK, 2004) zugeordnet.

4.3 Durchführung der Studie

Die Studie wurde im Sommer 2016 mit 234 Schülerinnen und Schülern Ende Jahrgangsstufe 6 in der Zeit nach Notenschluss durchgeführt (M_{Alter} = 11.85 (SD = 0.84), 88 Mädchen, 146 Jungen). Die Schülerinnen und Schüler stammten von vier Gymnasien und wurden in jeder Klasse einzeln jeweils zufällig einer der beiden Experimentalbedingungen Experimentieren mit gegenständlichen Materialien ($N = 111$, $M_{Alter} = 11.79$ ($SD = 0.47$); 64 Jungen, 47 Mädchen) bzw. Experimentieren mit Simulationen ($N = 123$, $M_{Alter} = 11.89$ ($SD = 1.06$); 82 Jungen, 41 Mädchen) zugeordnet. Zunächst bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler eine Woche vor der eigentlichen Intervention einen eigens zu diesem Zweck entwickelten Test zum funktionalen Denken (vgl. Lichti & Roth, 2019, https://dms.uni-landau.de/m/lichti/test). Dieser in einem Multimatrix-Design gestaltete Test (insgesamt 43 Items, nach in der Vorstudie ermittelter Schwierigkeit verteilt auf 2 Sets, mit 10 Ankeritems verbunden) wurde in einer Vorstudie pilotiert. Mit ihm wurde außerdem der Frage nachgegangen, ob sich funktionales Denken psychometrisch als ein- oder dreidimensionales Konstrukt beschreiben lässt. Die Ergebnisse der Vorstudie deuten darauf hin, dass der Test als reliabel beschrieben werden kann (EAP-Reliabilität 0.77) und sich funktionales Denken eindimensional darstellt (vgl. hierzu Lichti, 2019 sowie Lichti & Roth, 2019). Dieser Test wurde zunächst als Vortest eingesetzt, um so feststellen zu können, was die Schülerinnen und Schüler bereits intuitiv wussten, beziehungsweise implizit über funktionale Zusammenhänge erfahren und gelernt hatten. Im nächsten Schritt bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler an einem Vormittag über 4 Schulstunden hinweg in Einzelarbeit die zu diesem Zweck erarbeitete Lernumgebung entweder mit Simulationen oder mit gegenständlichen Materialien. Jedem Kind stand der Gruppe entsprechend entweder ein Laptop oder eine Materialkiste zur Verfügung. Die Arbeitsaufträge wurden in schriftlicher Form in einem Arbeitsheft vorgelegt, die Schülerinnen und Schüler wurden angehalten, sie der Reihe nach zu bearbeiten und ihre Antworten zu notieren. Es gab keine inhaltliche Betreuung durch eine Lehrkraft. Von jedem Kind lag nach Durchführung der Studie damit eine große Zahl an schriftlichen Antworten vor, die analysiert werden konnten. Direkt nach der Bearbeitung der Lernumgebung füllten die Schülerinnen und Schüler den Nachtest zum funktionalen Denken aus. Schülerinnen und Schüler, die im Vortest Set A bzw. B erhalten hatten, bekamen nun Set B bzw. A. Vor- und Nachtest waren mittels zehn Ankeritems verbunden, die übrigen Items unterschieden sich (vgl. hierzu Lichti, 2019). Ziel war es, einen möglichen Zuwachs im funktionalen Denken sichtbar zu machen.

5. Auswertung der Daten – quantitativ trifft qualitativ

Empirisches Arbeiten lässt es zu, dass Daten quantitativ oder qualitativ ausgewertet werden. Beide Methoden haben ihre Vorteile und werden entsprechend der jeweiligen Datenform und Zielsetzung eines Projekts angewendet. Quantitativen Auswertungsmethoden liegen statistische Verfahren zugrunde, die auf numerische Daten zurückgreifen und objektive Messinstrumente verwenden, um deduktiv Hypothesen zu überprüfen (Hussy et al., 2013). Qualitative Methoden arbeiten interpretativ und sind meist textbasiert, die Forschenden übernehmen durch ihre Arbeit als Codierer die Aufgabe eines Messinstruments (Röbken & Wetzel, 2016), sie versuchen induktiv durch Beobachtungen neue Theorien zu generieren. Beide Ansätze bemühen sich um Reliabilität und Validität. Während man quantitativen Methoden vorwirft, das Individuum aus den Augen zu verlieren und zu weit weg von der Wirklichkeit zu sein, stellt man bei qualitativen Auswertungen die Objektivität infrage (Röbken & Wetzel, 2016).

Die in diesem Fall vorliegenden Daten ermöglichten es, beide Auswertungsmethoden miteinander zu kombinieren (Mixed Methods, vgl. z.B. Kuckartz, 2012). Mittels einer quantitativen Analyse der Daten sollte überprüft werden, ob die beiden entwickelten Lernumgebungen überhaupt einen positiven Einfluss auf das funktionale Denken der Schülerinnen und Schüler ausüben. Mittels einer qualitativen Anschlussanalyse sollte untersucht werden, ob die Lernumgebungen in Abhängigkeit der Verwendung von gegenständlichen Materialien bzw. Simulationen unterschiedliche Aspekte des funktionalen Denkens in unterschiedlicher Art und Weise unterstützen.

Die Auswertung stellte sich wie folgt dar. Zuerst wurde rein quantitativ auf Basis des Vor- und Nachttests ermittelt, welche Lernumgebung und damit welches Medium den größeren Zuwachs im funktionalen Denken erzeugt hatte (vgl. Lichti, 2019). Hierzu wurden die Daten auf ihre Rasch-Skalierbarkeit hin überprüft und mittels mixed-ANOVA verglichen. Durch Überprüfung der Rasch-Skalierbarkeit wurde sichergestellt, dass alle Items, die zur Messung des funktionalen Denkens verwendet wurden, dieses auch wirklich erfassen. Des Weiteren lieferte diese Art der Auswertung für jede Schülerin und jeden Schüler einen Fähigkeitswert „funktionales Denken“ (angegeben in Logit), der für die weiteren Analysen des funktionalen Denkens der Material- und der Simulationsgruppe verwendet wurde. Hierzu wurde mittels mixed-ANOVA die Leistung der beiden Gruppen im Vortest und im Nachtest verglichen. Zunächst wurde untersucht, ob sich von Vor- zu Nachtest eine signifikante Verbesserung eingestellt hat, im zweiten Schritt wurde die Stärke des Zuwachses verglichen. Da diese quantitative Analyse zunächst nur Aufschluss darüber gab, *ob* sich das funktionale Denken von Schülerinnen und Schülern am Ende der Jahrgangsstufe 6 mit Hilfe von gegenständlichen Materialien bzw. Simulationen fördern lässt, schloss sich eine qualitative Untersuchung der Daten an.

Hierzu wurden schriftlich vorliegende Schülerantworten aus dem ausgefüllten Arbeitsheft zur Aufgabe *Gefäße* (vgl. Abb. 5) und aus dem Nachtest zur Aufgabe *Rennwagen* in Anlehnung an die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) analysiert (für Einzelheiten zur Analyse vgl. Lichti, 2019). Beide Aufgaben erforderten die Zuordnung einer realen Situation zur entsprechenden graphischen Repräsentation des jeweiligen Zusammenhangs: Die Aufgabe *Gefäße* verlangte die Zuordnung eines Gefäßes zum passenden Füllgraphen samt Begründung, die Aufgabe *Rennwagen* die Zuordnung der passenden Rennstrecke zu einem Weg-Geschwindigkeits-Graphen mit Begründung.

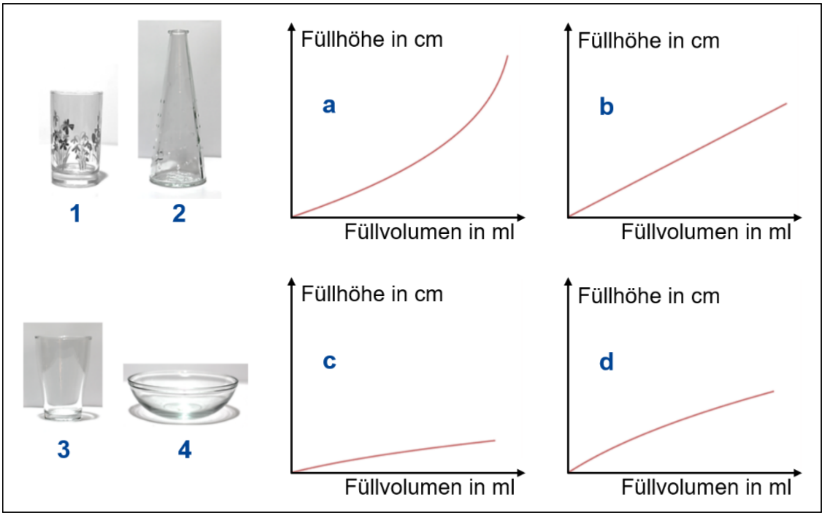


Abbildung 5: Transferaufgabe, deren Schülerantworten inhaltlich analysiert wurden (in Anlehnung an Lichti, 2019)

Ziel war es, herauszufinden, ob sich ein gegebenenfalls unterschiedlicher Einfluss der verwendeten Vorgehensweisen auf das Verständnis einzelner Aspekte des funktionalen Denkens zeigen lässt. Hierzu wurde in den Antworten der Schülerinnen und Schüler nach Formulierungen gesucht, die darauf hinweisen, dass die entsprechenden Schülerinnen und Schüler ihren Fokus zum Beispiel auf Änderung legten. Formulierungen wie: *das Wasser steigt schneller / langsamer* wurden als Indiz dafür gewertet. Hingegen schien ein Satz wie: *Das Wasser steht hoch* einen Zustand zu beschreiben und damit eher den Aspekt der Zuordnung zu fokussieren. Auf diese Weise ergaben sich unterschiedliche Kategorien, die den Schülerantworten zugeordnet werden konnten. Da die durchgeführte Analyse induktiv verlief, ergaben sich sämtliche Kategorien nur auf Grundlage der Schülerantworten. Hierzu wurden alle Schülerantworten einzeln immer weiter zusammengefasst und auf ihre wesentlichsten Bestandteile reduziert. Basierend auf diesen Bestandteilen wurden einzelne Antworten zunächst in einer Kategorie zusammengefasst. Die so entstandenen Kategorien konnten dann inhaltlich zu den Aspekten des funktionalen Denkens in Bezug gesetzt werden. Um zu überprüfen, ob die Kategorien objektiv in den Antworten zu finden sind, wurden die Schülerantworten mittels des erstellten Kategoriensystem von einer weiteren Person untersucht. Bei übereinstimmenden Ergebnissen können diese weiterverwendet und interpretiert werden. Die Interrater-Reliabilität liegt für alle Kategorien im Intervall [0.869; 0.986], was als gut zu bewerten ist. Als letztes wurden die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Kategorien zwischen der Material- und der Simulationsgruppe mittels χ^2-Test verglichen.

6. Ergebnisse – interpretiert und diskutiert

Die Ergebnisse der quantitativen Analyse zeigen, dass beide Lernumgebungen das funktionale Denken der Schülerinnen und Schüler signifikant mit einem großen Effekt fördern können (vgl. Abb. 6). Im Vergleich wirkt sich die Verwendung von Simulationen noch positiver aus als die von gegenständlichen Materialien.

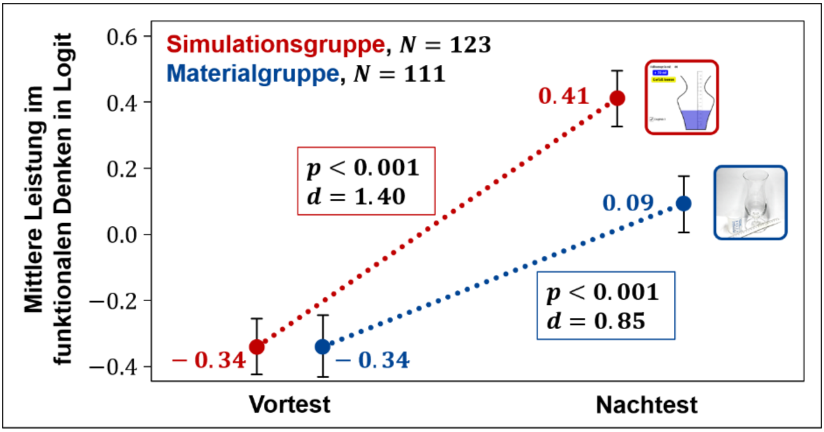


Abbildung 6: Ergebnisse der quantitativen Auswertung (vgl. Lichti, 2019)

Abbildung 6 verdeutlicht, dass beide Gruppen einen starken Zuwachs im funktionalen Denken verzeichnen können, der mit einem jeweils großen Effekt (Cohens $d_{Sim} = 1.40$ und Cohens $d_{Mat} = 0.85$) beziffert werden kann. Die Simulationsgruppe hat dabei einen signifikant stärkeren Zuwachs des funktionalen Denkens erreicht als die Materialgruppe (0.75 vs. 0.43 Logit, Interaktionseffekt hinsichtlich des Zeitpunkts mit $p = 0.006$, $\eta_{p^2} = 0.090$). Damit lässt sich festhalten, dass in diesem ganz konkreten und bewusst gewählten Setting beide Lernumgebungen unabhängig von der Vorgehensweise dazu genutzt werden können, um das funktionale Denken von Schülerinnen und Schülern am Ende von Jahrgangsstufe 6 an Gymnasien zu fördern. Sie scheinen damit beide eine Möglichkeit darzustellen, in die Thematik funktionale Zusammenhänge einzusteigen.

Bezieht man die qualitative Analyse mit ein, finden sich Hinweise darauf, dass der Einsatz der beiden Vorgehensweisen in sich entsprechenden Lernumgebungen den Fokus der Schülerinnen und Schüler auf unterschiedliche Aspekte des funktionalen Denkens lenkt bzw. das Verständnis der Schülerinnen und Schüler für den Umgang mit Repräsentationsformen anders unterstützt. Beispielhaft sind die Kategorien zur Aufgabe *Gefäße*, die sich als relevant herausstellten, in Tabelle 2 zusammengefasst:

Tabelle 2 Kategorien zur Aufgabe Gefäße

Kategorie	**Beschreibung**	**signifikant häufiger verwendet von**
Form	Die Schülerinnen und Schüler nutzen für ihre Argumentation die Form der verschiedenen Gefäße.	Materialgruppe ($\chi^2 = 4.16^*$, $p = 0.04$, *Cramers* $V = 0.08$)
Graph	Die Schülerinnen und Schüler nutzen für ihre Argumentation den Verlauf der vorgegebenen Graphen.	Simulationsgruppe ($\chi^2 = 15.08$, $p < 0.001$, *Cramers* $V = 0.16$)
Veränderung	Die Schülerinnen und Schüler verwenden Formulierungen, die eine Veränderung ausdrücken.	Simulationsgruppe ($\chi^2 = 6.955^{**}$, $p = 0.008$, *Cramers* $V = 0.11$)
Zustand	Die Schülerinnen und Schüler verwenden Formulierungen, die einen Zustand ausdrücken.	Materialgruppe ($\chi^2 = 4.361^*$, $p = 0.037$, *Cramers* $V = 0.08$)

Die Ergebnisse liefern aufgrund der lediglich kleinen Effektstärken (vgl. Tabelle 2) erste Hinweise darauf, dass die Verwendung von Simulationen die Schülerinnen und Schüler eher im Verständnis des Änderungsverhaltens zu unterstützen scheint und gegebenenfalls dazu anregt, mit der graphischen Repräsentationsform zu arbeiten. Dagegen scheinen die Schülerinnen und Schüler der Materialgruppe eher dazu zu tendieren, den Zustand und die reale Situation im Auge zu behalten. Dies lässt darauf schließen, dass durch die Arbeit mit Material möglicherweise der Zuordnungsaspekt eher in den Fokus rückt. Denn durch die Arbeit mit Material werden im Rahmen des Messens einander zugeordnete Werte ermittelt, sodass die entstehenden Wertepaare einen konkreten Zustand der betrachteten Situation darstellen. Die Ergebnisse der Rennwagen-Aufgabe zeigen Vergleichbares: Der Simulationsgruppe gelingt es besser, ihr Wissen um Geschwindigkeit und Kurven aus der Realität mit der Situation in der Aufgabe zu verknüpfen ($\chi^2 = 4.669^*$, $p = 0.031$, *Cramers* $V = 0.18$). Es kann daher vermutet werden, dass dies eventuell in ihrer Fähigkeit, den Graphen besser zu interpretieren, begründet ist. Dies zeigt sich unter anderem auch darin, dass die Schülerinnen und Schüler der Simulationsgruppe deutlich häufiger in der Lage sind, aus dem Graphen abzuleiten, dass es verschiedene Typen von Kurven auf der Rennstrecke geben muss (14 SuS der Simulationsgruppe gegenüber 7 SuS der Materialgruppe, es liegt jedoch keine Signifikanz vor $\chi^2 = 1.306$, $p = 0.253$, *Cramers* $V = 0.076$). Diese Erkenntnis ist entscheidend für das Lösen der Aufgabe.

Es ergeben sich damit erste Indizien dafür, dass sich durch die Verwendung von Simulationen und Materialien das Verständnis unterschiedlicher Aspekte des funktionalen Denkens beeinflussen und fördern lässt. Simulationen scheinen das Verständnis von Änderung und die Fähigkeit, mit Graphen zu arbeiten, verstärkt zu stützen. Materialien hingegen scheinen den Fokus der Schülerinnen und Schüler auf den Zuordnungsaspekt zu lenken. Ein Blick in die Ergebnisse des Tests zum funktionalen Denken zeigt des Weiteren, dass die Schülerinnen und Schüler auch im Nachtest entsprechend dieser Vermutung besser in Aufgaben abschnitten, die das Änderungsverhalten abprüfen, wenn sie aus der Simulationsgruppe stammten, jedoch besser in Aufgaben zum Zuordnungsaspekt, wenn sie zuvor mit Material gearbeitet hatten (vgl. hierzu Lichti, 2019). Zum Objekt-Aspekt lassen sich basierend auf diesen Ergebnissen keine Aussagen treffen. Allerdings wäre es sicher gewinnbringend, die Nutzung besonders von Simulationen mit Blick auf den manipulierenden und reflektierenden Umgang mit Funktionen hin zu untersuchen.

Sämtliche Ergebnisse müssen kritisch betrachtet werden. Zum einen lag uns nur eine bestimmte Stichprobe vor, es nahmen nur Schülerinnen und Schüler der Schulform Gymnasium teil und auch hier ist die Zahl von lediglich vier Schulen keine große. Unsere Ergebnisse sind also allein auf Grund der Stichprobe nur als Indizien zu werten. Des Weiteren hängen sie von der von uns verwendeten Operationalisierung von Zuordnung, Änderungsverhalten und Funktion als Objekt ab (vgl. hierzu Lichti, 2019), welche maßgeblich in die Aufgabengestaltung und auch in die Konzeption des hier entwickelten Tests (vgl. Lichti & Roth, 2019, https://dms.uni-landau.de/m/lichti/test) Eingang gefunden hat, mit dem funktionales Denken gemessen wurde. Da dieser Test aufgrund der Vielfältigkeit, mit der das Änderungsverhalten in funktionalen Zusammenhängen auftreten kann, in erhöhtem Maße Items zum Änderungsverhalten aufwies, könnte sich der größere Effekt, den die Simulationsgruppe von Vor- zu Nachtest erreicht hat, eventuell in Teilen auch darin begründen. Generell muss man kritisch hinterfragen, inwiefern ein Paper-Pencil-Test dazu in der Lage ist, Veränderungen, die auf die Verwendung eines Mediums zurückzuführen sein sollen, zu messen. Bezüglich unserer qualitativen Auswertung ist festzuhalten, dass die Effektstärken klein bis vernachlässigbar waren (vgl. Tabelle 2), was den Indizien-Charakter der Ergebnisse verstärkt. Auch die Art der Durchführung der Studie ist von Relevanz. Die Schülerinnen und Schüler nahmen in Einzelarbeit an der Intervention teil. Unsere Ergebnisse liefern damit keinen Aufschluss darüber, wie eine Partnerarbeit, die in der Regel an Schulen praktiziert wird, Einfluss auf unsere Ergebnisse nehmen würde. Dies muss besonders beim Transfer in die Schule berücksichtigt werden. Des Weiteren darf die Schlussfolgerung, dass Simulationen und Materialien per se geeignet sind, funktionales Denken zu fördern, auf keinen Fall gezogen werden, auch wenn die quantitativen Ergebnisse der Studie dies zunächst nahezulegen scheinen. Diese Ergebnisse basieren auf einem ganz konkreten Setting mit eigens zu diesem Zweck entwickelten Lernumgebungen und inhärenten Bedingungen. Auch auf andere Teilgebiete der Mathematik lassen sich die Ergebnisse wegen des inhaltlichen Fokus auf funktionale Zusammenhänge nicht ohne Weiteres übertragen.

7. Von der fachdidaktischen Forschung zurück ins Klassenzimmer

Was nehmen wir jetzt mit ins Klassenzimmer? Sowohl gegenständliche Materialien als auch Simulationen können den Einstieg in funktionale Zusammenhänge gewinnbringend gestalten, wenn sie adäquat und bewusst eingesetzt werden.

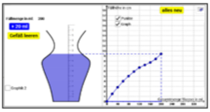
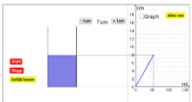
Der Einsatz von gegenständlichen Materialien im Rahmen von Experimenten zu funktionalen Zusammenhängen scheint den Schülerinnen und Schülern durch das enaktive Generieren der einander zugeordneten Werte ein besseres Verständnis des Zuordnungsaspekts zu vermitteln, als es mit Simulationen gelingt. Möchte man klassisch über die Zuordnung von Größen und über Wertepaare in das Thema Funktionen einsteigen, bietet es sich daher an, diese Einheit durch Experimente mit Materialien zu unterfüttern. Das eigenständige Durchführen von Experimenten unter Anleitung, wobei ein bewusstes Aufschreiben der Wertepaare und das anschließende Einzeichnen der zugehörigen Punkte in ein Koordinatensystem verlangt werden, unterstützt das Verständnis des Zuordnungsaspekts.

Die Verwendung von Simulationen im Rahmen der beschriebenen Umgebung hingegen scheint dazu beizutragen, dass sowohl der Änderungsaspekt als auch die Repräsentationsform Graph besser verstanden werden, als es mit gegenständlichen Materialien gelingt. Wählt man im Einstieg in funktionale Zusammenhänge den Zugang über die Änderung, scheint daher der Einsatz von entsprechenden Simulationen (https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB) eingebunden in die entsprechend zielgerichteten Fragen geeigneter zu sein (die Arbeitshefte zu beiden Lernumgebungen finden sich unter https://dms.uni-landau.de/m/lichti/material). Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Repräsentationsform Graph sich zudem als besonders geeignet darstellt, um den Transfer zu anderen Repräsentationsformen zu leisten (vgl. hier zu Rolfes, 2018). Eine Verknüpfung von Graph und Situation mittels einer Simulation, wie sie in unserem Setting Verwendung findet, bringt entsprechend neben der Förderung des Aspekts der Änderung auch die Möglichkeit mit sich, vom Graph ausgehend die anderen Repräsentationsformen zu erschließen. Da sich auch das Verständnis des Graphen mittels Simulationen anscheinend unterstützen lässt, besteht des Weiteren die Chance, dass durch die Verwendung der entsprechenden Simulation auch der immer wieder auftretende *Graph-als-Bild-Fehler* (vgl. Abschnitt 1, bzw. Nitsch, 2015) in seiner Häufigkeit reduziert werden kann.

Sowohl für Materialien als auch für Simulationen gilt damit, dass sie in unserem ganz konkreten Setting einen positiven Einfluss auf das funktionale Denken erreichen konnten. Um funktionales Denken im Hinblick auf den Zuordnungs- als auch den Änderungsaspekt zu fördern, sollte daher, nachdem die eine Vorgehensweise für den Einstieg gewählt wurde, die zweite in einem weiteren Schritt im Unterricht eingesetzt werden, um das Verständnis des jeweils anderen Aspekts zu unterstützen. Möchte man dieses Ergebnis nun im Unterricht nutzen, ist es entscheidend, nicht nur je nach gewünschtem Einstieg in die Thematik mit Materialien oder Simulationen zu arbeiten. Zum einen müssen auch die Arbeitsaufträge den beschriebenen Anforderungen genügen (vgl. Abschnitte 2.3.4 und 4.2). Zum anderen muss die Gestaltung der Simulationen als wesentlich erkannt werden. Es ist erforderlich, mittels Fokussierungshilfen (Verbindungslinien, Farbgebung, Buttons zur Vereinfachung und Lenkung der Aufmerksamkeit, bewusstes Ein- und Ausblenden, vgl. Roth, 2015) eine deutliche Vernetzung von simulierter Situation und zugehörigem Graphen zu schaffen (unter https://www.geogebra.org/m/rqgzqrm4 steht zu Übungszwecken eine Anleitung zur Erstellung einer Simulation mit GeoGebra zum Thema lineare Funktionen zur Verfügung). Da im Unterrichtsalltag allerdings oft die Zeit fehlt, solche Simulationen selbst zu erstellen, ist eine Suche und geeignete Auswahl von Simulationen unter https://www.geogebra.org/materials lohnend. Bei der Auswahl verwendbarer Simulationen sollte unter anderem die Frage leitend sein, ob geeignete Fokussierungshilfen verwendet werden.

Auf Basis unserer Ergebnisse sowie der Vorteile, die ein adäquates Verständnis der Repräsentationsform Graph mit sich bringt, stellt sich daher der Einstieg in die Thematik mittels Simulationen unter dem Schwerpunkt des Änderungsverhaltens aus unserer Sicht als Methode der Wahl dar (vgl. Tabelle 4). Da der Fokus auf Änderung liegen soll, erscheint es aufgrund der lediglich konstanten Änderung eines linearen Zusammenhangs außerdem ratsam, nicht mit einem solchen zu beginnen, da hier keine Variation der Änderung vorliegt. In Anlehnung an De Beer et al. (2015) sollte ein komplexerer Zusammenhang für den Einstieg gewählt werden, wie er z. B. im Kontext *Gefäße füllen* vorliegt (vgl. Abschnitt 4.1). Durch die Verknüpfung einer solchen Situation mit dem zugehörigen Graphen in der Simulation wird das Änderungsverhalten direkt sichtbar, der Begriff sowohl der Steigung als auch der Änderung kann thematisiert werden. Die Kovariation der abhängigen Größe basierend auf der Variation der unabhängigen Größe wird deutlich. Das Verständnis des Aspekts Änderungsverhalten kann so gezielt gefördert werden, ausgehend von der behandelten Repräsentationsform Graph ist die Basis gelegt, auch den Transfer zu den anderen Darstellungsformen zu leisten. In einem zweiten Schritt empfiehlt es sich, auf gegenständliches Material *und* Simulationen zurückzugreifen. An einem Kontext, der sich gut an den ersten anbinden lässt, kann so der Zusammenhang von simulierter und echter Situation verdeutlicht werden. Des Weiteren lässt sich ein erster Zugang zum Zuordnungsaspekt ermöglichen, sobald ein reales Experiment durchgeführt wird, während bereits über das Änderungsverhalten Erlerntes wiederholt bzw. vertieft werden kann. Geeignet wäre hier die Situation des Befüllens zylindrischer Gläser. Eine Verbindung zum ersten Kontext *Gefäße füllen* lässt sich leicht erkennen, es werden neben dem Ermitteln einander zugeordneter Werte auch lineare Zusammenhänge in den Fokus der Schülerinnen und Schüler gerückt und die Kontrastierung zum beliebigen Zusammenhang aus Kontext 1 wird möglich. Des Weiteren lässt sich nach Durchführung des realen Experiments mittels der passenden Simulation verdeutlichen (vgl. Tabelle 3, bzw. https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB), dass Messen immer mit Ungenauigkeiten behaftet ist. In einem dritten Schritt sollte ein rein reales Experiment mit gegenständlichen Materialien durchgeführt werden, um an einem weiteren, völlig neuen Zusammenhang entsprechend den Zuordnungsaspekt endgültig in den Mittelpunkt zu stellen. Es bietet sich zum Beispiel der Kontext Würfel bauen an. Daran können neben dem Zuordnungsaspekt auch diskrete und kubische Zuordnungen thematisiert werden.

Tabelle 3 Vorschlag zur Unterrichtsgestaltung

Medium	Simulation	gegenständl. Materialien *und* Simulation	gegenständl. Materialien
Kontext	Gefäße füllen	zylindrische Gefäße	Würfel bauen
Ziel	• Verständnis des Änderungsverhaltens sowie der Repräsentationsform Graph • unsystematische Zusammenhänge	• Einstieg Zuordnungsaspekt (*gleiche* Füllmenge => *gleicher* Zuwachs an Füllhöhe) • Vernetzung von realer mit simulierter Situation • lineare Zusammenhänge	• Vertiefung Zuordnungsaspekt • kubische Zusammenhänge • diskrete Zusammenhänge
Material		 	
mögl. Vorgehen	SuS erarbeiten sich mittels der Simulation den Begriff des Änderungsverhaltens, indem sie das sich füllende Gefäß sowie den sich zeitgleich aufbauenden Graphen beobachten. Durch gezielte Fragen wie z. B. „In welchem Bereich des Gefäßes steigt das Wasser am schnellsten? Wie zeigt sich dies im Graphen?“ wird konkret auf das Verständnis des Änderungsverhaltens hingearbeitet.	Die SuS vermuten zunächst, wie sich die Füllhöhe eines zylindrischen Glases beim Zugeben konstanter Füllmenge verändert und skizzieren einen möglichen Graphen. Dann erstellen sie durch Messung der Füllhöhe nach Einfüllen einer konstanten Füllmenge eine Wertetabelle und setzen diese händisch in einen Graphen um. Nach Abgleich mit ihren Vermutungen überprüfen sie ihre Ergebnisse mit Hilfe der Simulation und erkennen gegebenenfalls Ungenauigkeiten in ihren Messungen.	Mittels gegenständlicher Materialien erarbeiten sich die SuS die kubische Zuordnung. Sie erkennen, dass gleiche Zunahme der Ausgangsgröße nicht zu gleicher Zunahme der zugeordneten Größe führen muss. Sie erstellen auf Basis ihrer Tabelle den zugehörigen diskreten Graphen und betrachten diesen im Kontrast zu den bisherigen stetigen Graphen. Ausgehend vom Zuordnungsaspekt lässt sich nun die Definition von Funktion einführen.

Abkürzungen. SuS: Schülerinnen und Schüler

Literatur

Barzel, B. (2000). Ich bin eine Funktion. *mathematik lehren*, *98*, 39–40.

Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2005). Der "Funktionenführerschein": Wie Schüler und Schülerinnen das Denken in Funktionen variantenreich wiederholen und festigen können. *Praxis der Mathematik 47*(2), 20-25.

Barzel, B. (2010). Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.*), Mathemagische Momente* (S. 6-17). Berlin: Cornelsen.

Beckmann, A. (2007). Was verändert sich, wenn…: Experimente zum Funktionsbegriff. *mathematik lehren*. (141), 44–51.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics education* (S. 5-23). Springer: Heidelberg.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students‘ capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the international Group for Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, 135-142.

Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F., & Confrey, J. (2007). Early algebra. In V. J. Katz (Ed.), *Algebra. Gateway to a technological future* (S. 7-14). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Bruder, R., Leuders, T., & Büchter, A. (2016). *Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten* (4. Auflage*)*. Berlin: Cornelsen.

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie. Mathematik Primar- und Sekundarstufen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Danckwerts, R., Vogel, D., & Maczey, D. (2000). Ein klassisches Problem - dynamisch visualisiert. *MNU*, *53*(6), 342–346.

De Beer, H., Gravemeijer, K. P. E, & van Eijk, M. W (2015). Discrete and continuous reasoning about change in primary school classrooms. *ZDM, 47*(6), 981-996.

De Bock, D., Van Dooren,W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.

Elschenbroich, H.-J. (2011). Geometrie, Funktionen und dynamische Visualisierung. In T. Krohn (Ed.), *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik – mathematikdidaktische Ansätze. Festschrift für Wilfried Herget* (S. 69–84). Hildesheim: Franzbecker.

Ganter, S. (2013). *Experimentieren - ein Weg zum funktionalen Denken: Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten. Didaktik in Forschung und Praxis:* Vol. 70. Hamburg: Kovač.

Goldstone, R. L., & Son, J. Y. (2005). The transfer of scientific principles using concrete and idealized simulations. *The journal of learning sciences, 14*(1), 69-110.

Hoffkamp, A. (2012). Funktionales Denken mit dem Computer unterstützen - Empirische Untersuchungen im Rahmen des propädeutischen Unterrichts der Analysis. In U. Kortenkamp (Hrsg.), *Zur Zukunft des Analysisunterrichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge)* (S. 51–56). Hildesheim: Franzbecker.

Hussy, W., Schreier, M., Echterhoff, G. (2013). Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften. 2. Aufl., Berlin, Heidelberg: Springer.

Jaakkola, T., Nurmi, S., & Veermans, K. (2011). Comparison of Students' Conceptual Understanding of Electric Circuits in Simulation Only and Simulation-Laboratory Contexts. *Journal of research in science teaching, 48*(1), 71-93.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments* (Dissertation, Nottingham)

of University, Nottingham). Kennedy, L. M., Tipps, S., & Johnson, A. (1994). Guiding children's learning of mathematics (7th ed.). Belmont, CA: Wadsworth.

Konferenz der Kultusminister (KMK) (Hrsg.). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Darmstadt: Luchterhand.

Kuckartz, U. (2012). *Mixed Methods: Methodologie, Forschungsdesigns und Analyseverfahren*. Wiesbaden: VS Verlag

Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Funktioniert's? - Denken in Funktionen. Praxis der Mathematik in der Schule, 47(2), 1–7.

Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen. Landauer Beiträge zur mathematikdidaktischen Forschung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lichti, M. & Roth, J. (2018). How to foster functional thinking in learning environments using computer-based simulations or real materials. *Journal for STEM Education Research*, *1*(1-2), 148-172, DOI: 10.1007/s41979-018-0007-1.

Lichti, M. & Roth, J. (2019). Functional thinking − A three-dimensional construct? *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(2), 169-195, DOI: 10.1007/s13138-019-00141-3.

Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren: Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematik lehren.* (141), 4–11.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren* (103), 8–11.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.) *Algebra in the early grades* (S. 57-94). New York: Taylor and Francis Group.

Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. In G. Mey, & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 601-613). Wiesbaden: Springer.

MBWJK (Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur) Rheinland-Pfalz (Hrsg.) (2007). *Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5-9 / 10)* (Stand: Mai 2007), Mainz.

Moch, P. L. (2001). Manipulatives work! *The Educational Forum, 66*, 81–87.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Pallack, A. (Hrsg.) (2018). *Fundamente der Mathematik 8*. Rheinland-Pfalz, Gymnasium. Berlin: Cornelsen.

Ralle, B., Prediger, S., Hammann, M., Rothgangel, M. (Hrsg.) (2014). *Lernaufgaben entwickeln, bearbeiten und überprüfen: Ergebnisse und Perspektiven fachdidaktischer Forschung.* Münster: Waxmann Verlag.

Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken. Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen. Landauer Beiträge zur mathematikdidaktischen Forschung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre 44. Hildesheim: Franzbecker.

Roth, J. (2008). Systematische Variation: Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. *mathematik lehren*. (146), 17–21.

Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. Der Mathematikunterricht, *60*(6), 37-42.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung. Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren, (199), 2-9.

Röbken, H. & Wetzel, K. (2016). Qualitative und quantitative Forschungsmethoden. Carl von Ossietzky Universität Oldenburg.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* (10), 3-37.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergradduate curriculum. In E. Dubinsky (Ed.), *Issues in Mathematics Education: Vol. 4. Research in Collegiate Mathematics Education* (S. 21–44). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Vom Hofe, R. (2004). "Jetzt müssen wir das Ding noch stauchen!" Über den manipulierenden und reflektierenden Umgang mit Funktionen. *Der Mathematikunterricht 50*(6), 46-56.

Vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik 37*(S1), 225-254.

Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2)*,* 150 – 162.

Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *APMC, 11*(1), 9-14.