

Arbeiten mit Funktionsgraphen – Zur Diagnose von Fehlern und Fehlvorstellungen beim Funktionalen Denken

RITA HOFMANN & JÜRGEN ROTH, LANDAU

Zusammenfassung: Funktionales Denken und speziell das Interpretieren und Konstruieren von Funktionsgraphen birgt eine Vielzahl potenzieller Schwierigkeiten. Wenn Lernende mit Funktionsgraphen arbeiten, lassen sich immer wieder Fehler und Fehlvorstellungen identifizieren. Um funktionales Denken fördern zu können, benötigen Lehrpersonen die Fähigkeit, individuelle Voraussetzungen und Unterstützungsbedarfe der Lernenden zu diagnostizieren. Die vorliegende Studie zeigt, dass Mathematiklehramtsstudierende zu Beginn ihres Studiums nur wenige dieser Fehler und Fehlvorstellungen von Lernenden in Videos diagnostizieren können, obwohl vorher die dafür notwendigen theoretischen Inhalte in einer Vorlesung thematisiert wurden. Zudem sind ihre Diagnosen zunächst meist oberflächlich. Mittels einer Intervention mit authentischen Videos konnte eine kleine Verbesserung der Diagnoseleistung der Studierenden erzielt werden.

Abstract: Functional thinking and in particular the interpretation and construction of graphs of functions holds a variety of potential difficulties. When learners work with graphs, errors and misconceptions can often be identified. In order to foster functional thinking teachers need the ability to diagnose individual preconditions and needs of learners. The present study reveals that pre-service mathematics teachers can diagnose only a few of these errors and misconceptions at the beginning of their studies, despite the previous discussion of the underlying theoretical content during a lecture. Moreover, their diagnoses are usually superficial at first. By means of an intervention with authentic videos, a small improvement in the pre-service teachers' diagnostic performance could be achieved.

1. Einleitung

Im Zuge der Entwicklung funktionalen Denkens bei den Schülerinnen und Schülern ist es notwendig, fehlerbehaftete oder nicht vollständig ausgebildete Vorstellungen der Lernenden aufzudecken sowie an diesen zu arbeiten, bevor sie sich verfestigen. Demnach kommt der Lehrperson im Lernprozess eine zentrale Rolle zu. In allen Fächern – nicht nur im Mathematikunterricht – hängt es entscheidend von der Lehrperson ab, ob der Bildungsauftrag erfüllt wird, der der Schule und dem jeweiligen Fach zukommt. Um Schülerinnen und Schüler dort abholen zu können, wo sie stehen und sie bei ihrer Entwicklung begleiten

zu können, müssen Lehrpersonen diagnostisch tätig werden. Diese diagnostische Kompetenz ist wesentlich für eine gezielte Förderung der Lernenden. In diesem Sinne ist es ein zentrales Anliegen, Aufgaben im Unterricht einzusetzen, die es ermöglichen, die verschiedenen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu identifizieren und die Lehrperson in die Lage versetzen, ggf. noch vorhandene Defizite aufzudecken. Eine solche Diagnose von Schülerschwierigkeiten und -fehlern ist notwendig, um eine adäquate Weiterentwicklung bzw. Planung des eigenen Unterrichtshandelns vollziehen zu können. Hierdurch soll schließlich durch eine gezielte Förderung das funktionale Denken bei den Lernenden (weiter-)entwickelt werden.

In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, welche Vorstellungen, Denkweisen und Fehler der Schülerinnen und Schülern zum funktionalen Denken von zukünftigen Mathematiklehrkräften diagnostiziert werden. Weiterhin stellte sich die Frage, ob eine Förderung der Fähigkeiten zur Diagnose, bezogen auf das funktionale Denken der Schülerinnen und Schüler, mittels Videos möglich ist. Nur wenn die Lehrperson fähig ist, die individuellen Vorstellungen und Bedürfnisse der Lernenden zu diagnostizieren, kann sie diese adäquat unterstützen und ihnen helfen, Fehlvorstellungen abzubauen und funktional Denken zu lernen.

Die Förderung einer solchen diagnostischen Kompetenz (vgl. Kapitel 2.2) fand mittels einer Intervention an der Universität Koblenz-Landau statt (näheres hierzu in Kapitel 5). Für diesen Rahmen wurden zunächst Aufgaben für Schülerinnen und Schüler erstellt, die funktionales Denken erfordern. Im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ kamen Schulklassen an die Universität in Landau, um die Aufgaben zu bearbeiten. Einzelne Schülergruppen wurden bei der Bearbeitung dieser Aufgaben gefilmt. Die aus diesem Filmmaterial entstandenen authentischen Videos wurden schließlich für die vorliegende Studie mit Lehramtsstudierenden eingesetzt, um deren diagnostische Fähigkeiten zu testen und zu fördern.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1. Funktionales Denken

Unter funktionalem Denken kann eine Denkweise verstanden werden, die „typisch für den Umgang mit

Funktionen ist“ (Vollrath, 1989, S. 6). Vollrath nennt drei Aspekte, die das Arbeiten mit Funktionen charakterisieren: *Zuordnung*, *Änderungsverhalten* (*Kovariation*, Malle, 2000) und *Sicht auf Funktion als Ganzes*. Kennzeichnend für funktionales Denken ist darüber hinaus die Verwendung verschiedener Repräsentationen für Funktionen (Tabelle, Graph, algebraische Darstellung, verbale Beschreibung) sowie die Fähigkeit zum zieladäquaten Wechsel zwischen diesen Repräsentationen (Barzel, Hußmann & Leuders, 2005, S. 20). Nach Bossé, Adu-Gyamfi und Cheetham (2011) sind besonders solche Darstellungswechsel schwierig, bei denen gedanklich zwischen Alltagssituationen und mathematischer Perspektive gewechselt werden muss. Die Konstruktion bzw. Interpretation eines Funktionsgraphen in Bezug auf eine konkrete Situation stellt einen solchen schwierigen Repräsentationswechsel dar, bei dem Alltagsvorstellungen die mathematischen Grundlagen überlagern können. Rolfes (2018) konnte zeigen, dass sich gerade dieser schwierige Repräsentationswechsel zwischen Graph und Situation gut zum Lernen des funktionalen Denkens eignet. Hierbei müssen verschiedene Aspekte berücksichtigt werden, welche eine tiefe Auseinandersetzung mit dem dargestellten funktionalen Zusammenhang erfordern. Zudem können dabei noch nicht ausgebildete Vorstellungen aber auch Fehlvorstellungen sichtbar werden. Aus diesem Grund soll in dieser Studie die Repräsentationsform „Graph“ in den Blick genommen werden sowie typische Fehler, die beim Arbeiten mit Graphen auftreten. Um die Schülerinnen und Schüler in ihrem funktionalen Denken zu unterstützen, ist es wichtig, dass der Lehrperson Fehler und Fehlvorstellungen bekannt sind und diese auch in konkreten Situationen diagnostiziert werden können.

Fehler, die typischerweise bei Darstellungswechseln zwischen Graph und Situation auftreten, wurden bereits vielfach zusammengestellt (vgl. etwa Bell & Janvier, 1981; Clement, 1985; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; McDermott, Rosenquist & Van Zee, 1987; Nitsch, 2015). Im Folgenden werden die Fehlertypen aus diesen Zusammenstellungen dargestellt, die für das Verständnis der hier beschriebenen Studie und deren Ergebnisse wesentlich sind. Es handelt sich um die Fehler und Schwierigkeiten, die bei den Schülern² im Testvideo auftraten und von den Studierenden diagnostiziert werden sollten:

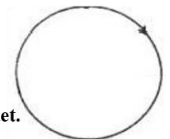
- Ein häufig zu beobachtender Fehlertyp ist der *Graph-als-Bild-Fehler*. Hierbei wird der Graph wie ein ikonisches Abbild der Problemsituation wahrgenommen und behandelt (vgl. z.B. Clement, 1985, S. 372). Dieser Fehler darf allerdings nicht einfach als Unkenntnis über Graphen abgetan werden. Vielmehr erweist sich dieser als komplexeres Gedankenkonstrukt. So zeigte sich

in einer Untersuchung von Janvier (1981, S. 118), dass der Graph zum einen korrekt gelesen und interpretiert werden konnte, im nächsten Schritt aber von denselben Personen als reales Abbild der Problemsituation verwendet wurde.

Clement (1985, S. 373 f.) unterscheidet zudem zwei Arten des Graph-als-Bild-Fehlers. Einerseits den „global correspondence error“ (ebd.), bei welchem der Graph und die bildliche Vorstellung über die gegebene Situation jeweils als Ganzes gleichgesetzt werden. Andererseits kann im Rahmen des „feature correspondence errors“ (ebd.) die Verwechslung des Graphen mit dem Abbild der Situation auch nur an einzelnen Stellen des Graphen erfolgen bzw. nur einzelne Eigenschaften, die dem Bild entsprechen würden, werden auf den Graphen übertragen (ebd., S. 374).

Diese Fehlinterpretation kann hierbei nicht nur bei einem gegebenen Graphen erfolgen, sondern auch bei der eigenen Erstellung eines Graphen aus einer Problemsituation heraus. Ein Beispiel hierzu aus der eigenen Untersuchung ist in der Schülerlösung in nachfolgender Abbildung (Abb. 1) zu erkennen.

Nebenstehende Abbildung zeigt eine andere Rennstrecke. Auch hier wird ein Rennen gefahren. Überlegt gemeinsam, wie der Geschwindigkeits-Graph eines Rennwagens aussieht, der sich in der zweiten Runde befindet.



Zeichnet den Graphen in das vorgegebene Koordinatensystem.

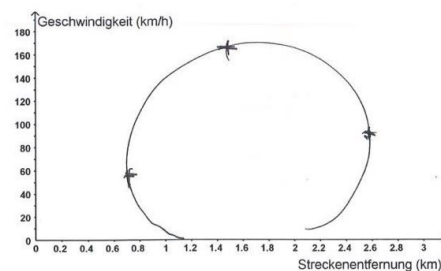


Abb. 1: Beispielaufgabe mit Schülerlösung zum Graph-als-Bild-Fehler

- Weitere Fehler entstehen im *Wechselspiel von Definition und individuellen Vorstellungen* von Funktionen. Diese Fehler beruhen häufig darauf, dass zwar die Definition von Funktionen bekannt ist und durch Erfahrung auch verschiedene Vorstellungen zu Funktionen bei den Lernenden vorhanden sind, die Verknüpfung beider Bereiche aber häufig schwer fällt (vgl. Tall & Vinner, 1981).

In Bezug auf die Eigenschaften von Funktionen soll an dieser Stelle die Verletzung der Eindeutigkeit erwähnt werden, welche häufig auftritt. Bei jedem funktionalen Zusammenhang handelt es sich um eine Zuordnung, die jedem Wert der

unabhängigen Variable (x -Wert) einen eindeutigen Wert der abhängigen Variable (y -Wert) zuordnet. Bei Verletzung der Eindeutigkeit ist ein besonderes Augenmerk der Lehrperson von Nöten, ob es sich hierbei um eine Ungenauigkeit von Seiten der Lernenden handelt, oder ob diese zentrale Eigenschaft von Funktionen nicht verinnerlicht wurde. Im letzteren Fall wären Maßnahmen zum Umgang mit diesem Fehler notwendig.

Im Hinblick auf die Vorstellungen, die die Schülerinnen und Schüler von Graphen haben, zeigt sich, dass häufig zu linearen Graphen tendiert wird (Leinhardt et al., 1990, S. 45). Weiterhin wird häufig davon ausgegangen, dass alle Graphen durch den Koordinatenursprung gehen müssen (Hadjidemetriou & Williams, 2002, S. 4).

- Daneben können auch *kontextspezifische Verständnisprobleme und Fehler* auftreten. Diese betreffen die konkrete Problemsituation der jeweiligen Aufgabe und deren Verständnis. Hierbei ist unter Umständen auch Wissen aus anderen Fächern wie z. B. Geographie und Physik erforderlich.

Fehler und Fehlvorstellungen, die das Arbeiten mit Funktionsgraphen betreffen, können das Weiterlernen behindern oder sich zu systematischen Fehlern entwickeln, sofern diese unbemerkt bleiben (Nitsch, 2015, S. 44). Aus diesem Grund kann es hilfreich sein, gezielte Aufgaben zu stellen, um diese Fehler frühzeitig aufzudecken (Hußmann et al., 2007; Sjuts, 2007). Mit ihnen kann die Lehrperson gleich zu Beginn der unterrichtlichen Auseinandersetzung mit Funktionen, aber auch fortwährend in den folgenden Lern- und Arbeitsprozessen die unterschiedlichen Voraussetzungen und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler ermitteln, um auf die individuellen Bedarfe der Lernenden eingehen zu können.

2.2 Diagnostische Kompetenz

Für ein gewinnbringendes Unterrichten der Schülerinnen und Schüler – und somit auch für das Vermitteln funktionaler Zusammenhänge – benötigen die Lehrkräfte verschiedene Kompetenzen. Die diagnostische Kompetenz stellt eine solche wesentliche Komponente des professionellen Wissens und Könnens von Lehrkräften dar (vgl. etwa Baumert & Kunter, 2006; Weinert, 2000). Diese ermöglicht es Lehrpersonen zwischen den einzelnen Lernenden zu differenzieren und auf individuelle Bedürfnisse einzugehen. Der Unterricht kann nicht vollständig mit allen möglichen Problemen und Vorkommnissen im Voraus geplant werden. Vielmehr müssen die Lehrpersonen häufig innerhalb des Unterrichtsgeschehens Entscheidungen treffen, wie das weitere Vorgehen

aussehen soll (vgl. z. B. van Es & Sherin, 2002, S. 574). Ein guter Unterricht benötigt somit Entscheidungen und Handlungen der Lehrperson, die den Bedürfnissen der Schülerinnen und Schüler gerecht werden und auf Diagnosen beruhen (Klug, Bruder, Kelava, Spiel & Schmitz, 2013; Schrader & Helmke, 2001).

An dieser Stelle muss beachtet werden, dass der Begriff der diagnostischen Kompetenz zwar häufig genutzt wird, diesem jedoch keine einheitlichen Definitionen zugrunde liegen. Eine sehr allgemeine und weit gefasste Definition umfasst alle Fähigkeiten, die es Personen ermöglicht, andere Personen zutreffend zu beurteilen (Schrader, 2006, S. 95, 2010). Etwas differenzierter, mit Blick auf die Schule, definieren Artelt und Gräsel die diagnostische Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern als „die Kompetenz von Lehrkräften [...], Merkmale ihrer Schülerinnen und Schüler angemessen zu beurteilen und Lern- und Aufgabenanforderungen adäquat einzuschätzen“ (2009, S. 157). Diese und viele weitere Definitionen können auch als Urteilsgenauigkeit bezeichnet werden, welche oftmals in Verbindung mit standardisierten Tests und dem Abschneiden der Schülerinnen und Schülern in Tests auftritt (Klug et al., 2013).

Eine Definition, die den Zweck der Diagnose innerhalb des Unterrichts – auch losgelöst von Testsituationen – im Blick hat, liefert Weinert:

Bei der Diagnostischen Kompetenz „handelt es sich um ein Bündel von Fähigkeiten, um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann.“ (Weinert, 2000, S. 16)

Zur Anpassung des Lehrerhandelns an die Bedürfnisse der Lernenden werden Informationen benötigt, die im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler gewonnen werden müssen. In diesem Sinne postulieren auch Praetorius und Kollegen:

„Eine Lehrperson sollte im Unterricht in der Lage sein zu erkennen, wo sich der einzelne Lernende in einem Lernprozess befindet und welche Hilfe und Rückmeldung dieser benötigt.“ (Praetorius, Lipowsky & Karst, 2012, S. 137)

Auskünfte über die Fähigkeiten und Schwierigkeiten der Lernenden ausschließlich in Tests und Klassenarbeiten zu beziehen, stellt somit einen starken Informationsverlust dar. Außerdem können sich Fehler bis zu einer solchen Statusdiagnose bereits verfestigt haben. Für spontane Abstimmungsmaßnahmen während des Unterrichtsgeschehens (sog. „Mikroadaptationen“, Schrader, 2013, S. 155) müssen diagnostische Einschätzungen allerdings nebenbei erfolgen,

sodass die Lehrperson unter einem gewissen Handlungsdruck agiert (Praetorius et al., 2012, S. 137). Um dieser zusätzlichen kognitiven Belastung entgegenzuwirken, ist es von großer Bedeutung, die Fähigkeiten zur Diagnose innerhalb der Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler so früh wie möglich zu entwickeln und zu fördern. Hierbei kann das Kennen themenspezifischer Schülervorstellungen und -fehler die Diagnose erleichtern. In Kapitel 2.1 wurden Schülervorstellungen und -fehler aufgezeigt, die wesentliche Hindernisse im Umgang mit funktionalen Zusammenhängen darstellen. Diese müssen von der Lehrperson identifiziert werden können, damit, durch darauf aufbauendes Handeln, eine Unterstützung der Lernenden stattfinden kann. Nur so kann gewährleistet werden, dass die Schülerinnen und Schüler wirklich funktional Denken lernen.

3. Forschungsfragen

Wie im vorangegangenen Kapitel bereits aufgezeigt wurde, wird die diagnostische Kompetenz als wesentliche Kompetenz von Lehrkräften angesehen (vgl. Kapitel 2.2). Ziel des Projektes ist es deshalb, Lehramtsstudierende der Mathematik in ihrer Fähigkeit zur Lernprozessdiagnose bereits im Studium zu fördern. Da eine Förderung nicht losgelöst von einem mathematischen Inhaltsgebiet vollzogen werden kann und eine fokussierte Förderung empfohlen wird (Praetorius et al., 2012), wurde an dieser Stelle gezielt der Inhalt *Funktionale Zusammenhänge* und hierbei der Repräsentationswechsel von verbaler Situationsbeschreibung zu Funktionsgraphen – und umgekehrt – ausgewählt (vgl. Kapitel 1). Dieser konkrete Bereich des Funktionalen Denkens ist somit der Inhalt, mit dem sich sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehramtsstudierenden – in der Rolle als diagnostizierende Lehrperson – beschäftigen (Abb. 2).

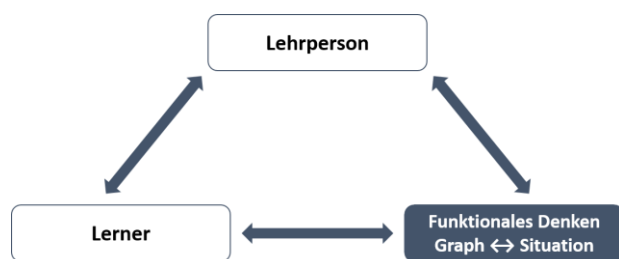


Abb. 2: Zusammenhang und Interaktion zwischen den drei wesentlichen Aspekten Lerner – Lehrperson – Funktionales Denken

Der Einsatz von Videos in der Lehrerbildung ist hierbei nichts Neues (vgl. Janik, Minarikova & Najvar, 2013). In unserer Arbeitsgruppe wurde diesbezüglich das Tool „ViviAn“ (**V**ideovignetten zur **A**nalyse von

Unterrichtsprozessen, Bartel & Roth, 2015) entwickelt, um mittels Videos und weiterer Materialien die diagnostischen Kompetenzen von Lehramtsstudierenden zu fördern. Offen bleibt die Frage, ob mit Hilfe dieses Videotools die Lernprozessdiagnose der Studierenden mit Blick auf das funktionale Denken geschult werden können. Im Falle einer möglichen Förderung, spräche dies für den Einsatz dieses Tools in der Lehramtsausbildung.

Im Rahmen der durchgeführten Studie wurde dabei folgenden Forschungsfragen nachgegangen:

- 1) Welche Vorstellungen der Lernenden werden von angehenden Mathematiklehrkräften bei der Diagnose identifiziert?
- 2) Kann die Diagnose von Lernschwierigkeiten und Schülervorstellungen im Bereich des funktionalen Denkens mittels der Analyse von Videovignetten gefördert werden?

Die Beantwortung der Forschungsfragen erfolgte quantitativ, nachdem die Antworten der Studierenden auf die weitestgehend offenen Fragen zunächst qualitativ ausgewertet wurden (näheres folgt in Kapitel 5.1). Bevor jedoch auf die Auswertung und die Ergebnisse eingegangen wird, soll ein Blick auf die Erstellung der eingesetzten Materialien erfolgen. Dies soll dazu beitragen, das Vorgehen und den Gesamtzusammenhang besser zu verstehen.

4. Materialerstellung

In einem ersten Schritt soll nun ein Überblick gegeben werden, wie die Studie zur Beantwortung der Forschungsfragen sowie die Situationen, in deren Rahmen die Materialien für die Studie entstanden sind, zusammenhängen. Anschließend wird die Entwicklung der Materialien in den jeweiligen Bereichen dargestellt. Zunächst wird auf die Erstellung der Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler eingegangen. Danach wird die Generierung der Videos dargestellt. In diesen Videos sind jeweils Schülergruppen bei der Bearbeitung der hierfür erstellten Aufgaben zu sehen.

Nachdem die Auswahl der Videosequenzen erläutert wurde, werden die hierzu erstellten Diagnoseaufträge für die Studierenden beschrieben. Schließlich soll die Lernumgebung ViviAn (**V**ideovignetten zur **A**nalyse von Unterrichtsprozessen, Bartel & Roth, 2015; Roth, 2019) vorgestellt werden, in die die Videos und Materialien zur Bearbeitung von den Studierenden eingebunden sind.

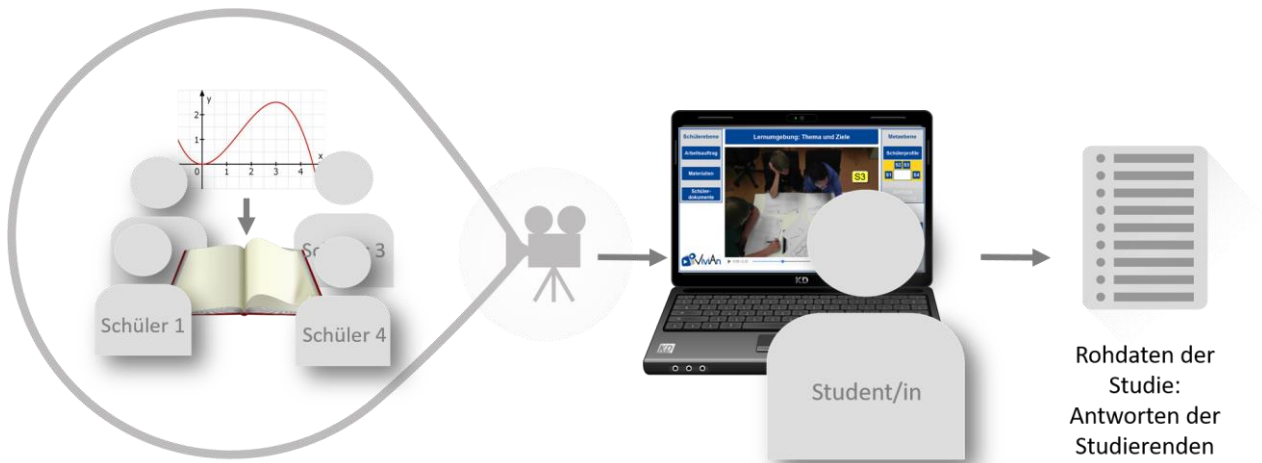


Abb. 3: Zusammenhang zwischen den verschiedenen Teilen der Untersuchung

4.1 Überblick über die verschiedenen Settings

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine Studie mit Studierenden der Mathematik durchgeführt. Da es hierbei um die Erfassung und Förderung der diagnostischen Kompetenz ging, musste ein Rahmen gefunden werden, in welchem die von den Studierenden durchzuführenden Diagnosen getätigt werden konnten. Um für alle Studierenden dieselbe Diagnosebasis nutzen zu können und um möglichst nahe an der realen Unterrichtssituation zu sein, fiel die Entscheidung zugunsten von Videos (Vorteile des Videoeinsatzes für Diagnosen vgl. z. B. Riegel, 2013). Bei den Videos sollte es sich um authentische Videos – im Gegensatz zu gestellten Videos – handeln, die echte Schülervorstellungen und Fehler beinhalten.

Solche Videos mussten allerdings erst generiert werden, wofür zum einen Schülerinnen und Schüler benötigt wurden, zum anderen aber auch Aufgaben, deren Bearbeitung durch die Lernenden gefilmt werden sollte. Somit wurden zunächst Aufgaben zum funktionalen Denken zusammengestellt (näheres hierzu im nachfolgenden Kapitel), die die Grundlage für die Videos darstellen sollte. Um Schulklassen zu gewinnen wurden die Aufgaben an das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ der Universität Landau (vgl. Kapitel 4.3) angegliedert. In diesem Rahmen fand daraufhin die Bearbeitung der Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler in Gruppen statt. Diese Situation der Gruppenarbeit wurde bei einigen Schülergruppen gefilmt (vgl. linke Hälfte von Abb. 3). Die im Mathematik-Labor entstandenen Videos wurden, zusammen mit Diagnoseaufgaben zu den Videos, in die Lernumgebung ViviAn (Kapitel 4.5) eingebunden. Die Bearbeitung der Diagnoseaufgaben durch die Studierenden erfolgte in Einzelarbeit angegliedert an eine fachdidaktische Veranstaltung der Mathematik

Lehramtsausbildung (vgl. Abb. 3 Mitte, näheres zum Ablauf der Studie folgt in Kapitel 5). Die aus der Bearbeitung der Diagnoseaufgaben zu den Videos entstandenen Antworten der Studierenden stellen schließlich das Datenmaterial für die Untersuchung dar (Abb. 3 rechts).

4.2 Auswahl der Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler

Die Auswahl der Aufgaben zur Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler erfolgte aus der Literatur. Unter anderem wurden hierzu die größeren Leistungsstudien wie TIMSS und PISA herangezogen. Ziel der Aufgaben war es nicht, das Gelernte aus dem Regelunterricht abzufragen, sondern die (Fehl-)Vorstellungen der Lernenden zum funktionalen Denken – speziell im Hinblick auf die Arbeit mit Funktionsgraphen – sichtbar zu machen. Die Auswahl erfolgte dabei nach folgenden Kriterien:

- *Thematische Passung*

Die ausgewählten Aufgaben sollten alle auf das Funktionale Denken abzielen und einen Repräsentationswechsel von einer Situationsbeschreibung zum eigenen Erstellen eines Graphen bzw. umgekehrt den Wechsel von einem gegebenen Funktionsgraphen hin zu einer passenden Situation beinhalten.

- *Vorwissen*

Die Aufgaben sollten sowohl für Schülerinnen und Schüler der 7. als auch der 8. Jahrgangsstufe lösbar sein.

- *Offenheit der Aufgabe*

Ein weiteres Kriterium war die Offenheit der Aufgabe in dem Sinne, dass Spielraum bezüglich des Lösungsweges bzw. sogar der Lösung selbst gegeben ist (vgl. Büchter & Leuders, 2011). Dies

soll zu einer tieferen Diskussion in der Gruppe führen, die eine Diagnose von sonst verborgenen Schülervorstellungen möglich macht. Die offenen Aufgaben wurden teilweise durch geschlossenen Teilaufgaben ergänzt, um das Verständnis des dargestellten Zusammenhangs sowie das Beherrschen von Grundfertigkeiten schnell überprüfen zu können.

- *Für Diagnose bedeutsame Bestandteile*

Die Aufgaben sollten schließlich so gestaltet sein, dass sie die Möglichkeit bieten, bekannte typische Fehler und Fehlvorstellungen, die bei der Arbeit mit Funktionsgraphen auftreten können (vgl. Kapitel 2.1.1), erkennbar und somit diagnostizierbar zu machen (vgl. Sjuts, 2007).

Mit Hilfe dieser Kriterien wurden elf Aufgaben ausgewählt, die für Lernende der Klassenstufe 7 und 8 eingesetzt wurden. Die Entscheidung für diese Klassenstufen wurde getroffen, weil der Schwerpunkt der Aufgabenbearbeitung die inhaltliche Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit funktionalen Zusammenhängen und nicht das kalkülhafte Anwenden von Regeln und Formeln sein sollte. Entsprechend ging es in den Diagnoseaufträgen darum, inhaltliche (Fehl-)Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu diagnostizieren. Dies ist insbesondere in den Klassenstufen gut möglich, in denen Kalküle im Regelunterricht noch keine große Rolle spielen. Da davon ausgegangen werden kann, dass die Schülerinnen und Schüler der 8. Jahrgangsstufe bereits mehr können – und somit auch schneller – im Umgang mit Funktionen sind, wurden für diese Klassenstufe acht weitere Aufgaben hinzugefügt.

Exemplarisch für die ausgewählten Aufgaben wird im Folgenden die Aufgabe dargestellt, die für die Analyse im Rahmen dieses Artikels relevant ist:

Achterbahn-Aufgabe

Bei einer Achterbahnfahrt kommen neben dem Aufstieg, eine „Schlucht“ (d.h. hier geht es erst steil herunter und dann gleich wieder hoch), ein „Looping“ und eine „Spirale abwärts“ vor.

Denkt euch aus, wie eine solche Fahrt verlaufen könnte und zeichnet einen Graphen, welcher der gefahrenen Strecke jeweils die Höhe der Achterbahn bzw. des Wagens auf der Achterbahn zuordnet. (in Anlehnung an Marxer, 2008, S. 146)

Die Aufgabe nach Marxer (2008, S. 146) wurde dahingehend adaptiert, dass der existierende Wortlaut um zusätzliche Informationen ergänzt und die Aufgabenstellung dadurch expliziter und verständlicher wurde.



Abb. 4: Den Lernenden vorliegendes Koordinatensystem zur Achterbahnaufgabe

Diese Aufgabe umfasst alle drei Aspekte des Funktionalen Denkens von Vollrath. Der *Zuordnungsaspekt* wird darin deutlich, dass theoretisch an jeder einzelnen Stelle (des zurückgelegten Weges) überlegt werden muss, in welcher Höhe sich nun der Wagen befindet. Dabei kommt auch der *Kovariationsaspekt* ins Spiel, wenn beachtet werden muss, um wie viel sich die Höhe ändert, wenn sich die gefahrene Strecke verändert (vor allem im Hinblick auf Looping und Spirale und die dabei auftretenden Steigungen). Der Aspekt der *Sicht auf die Funktion als Ganzes* wird genutzt, da die einzelnen Achterbahnelemente weder unabhängig voneinander sind noch unverbunden nebeneinander stehen, sondern in sich stimmig zusammen den situativen Kontext repräsentieren müssen.

Die Aufgabe erfüllt die Kriterien in dem Sinne, dass ein Repräsentationswechsel von einer gegebenen Situation hin zu einem Funktionsgraphen erforderlich ist, der auch ohne die Kenntnis spezieller Funktionstypen und vor allem ohne Funktionsgleichung vollzogen werden kann. Die Aufgabe ist insofern offen gehalten, dass die Schülerinnen und Schüler selbst wählen können, wie „ihre“ Achterbahn verlaufen soll, d.h. wie groß die Abstände zwischen den einzelnen Achterbahnfiguren sein sollen oder wie hoch bzw. tief die einzelnen Elemente verlaufen sollen. Eine weitere „Offenheit“, die die Lehrperson im Blick haben muss, ergibt sich über den Begriff „Höhe“. Hier können Lernende die Zuordnung so aufstellen, dass sie den Koordinatenursprung als den Punkt auffassen, an dem die Achterbahn startet und der Wagen noch keinen Weg zurückgelegt sowie noch keine Höhe gewonnen hat. Eine andere Möglichkeit wäre, den Ursprung als Beginn der Achterbahn, jedoch als 0 Meter über dem Meeresspiegel zu interpretieren. In diesem Fall ist es möglich, die Achterbahn auch in gewisser Höhe starten zu lassen. Beide Ansätze können somit als richtig interpretiert werden.

Aus diagnostischer Sicht ist diese Aufgabe hilfreich, um zu erkennen, ob der Graph-als-Bild-Fehler vorliegt, der in dieser Situation sehr naheliegend ist. Da sich die Schülerinnen und Schüler zunächst eine Achterbahn vorstellen sollen, können sie dazu verleitet werden, eine solche – so wie sie sie sich bildlich vorstellen – einzuzichnen. Zudem können anhand der Schülerdiskussionen im Video weitere Verständnishaften aufgedeckt werden. Beispielsweise kann hierdurch ersichtlich werden, ob die Aufgabenstellung nicht eindeutig formuliert ist. Auch die Frage nach dem Beginn des Graphen kann zu Diskussionen der Schülerinnen und Schüler führen und dabei aufzeigen, wie flexibel die einzelnen Lernenden in ihrem funktionalen Denken sind.

In einem nächsten Schritt soll nun der Blick zunächst auf die Schülerinnen und Schüler gerichtet werden, bevor – aufbauend auf den hieraus entstandenen Videos – die Lehramtsstudierenden der Mathematik betrachtet und deren Wahrnehmung der zuvor aufgedeckten Aspekte untersucht werden können.

4.3 Videogenerierung im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“

Die Bearbeitung der Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler fand im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ (vgl. mathe-labor.de; Roth, 2013) der Universität Koblenz-Landau am Campus Landau statt. Hierbei handelt es sich um ein Schülerlabor für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufen. Dieses soll den Lernenden ermöglichen, die Mathematik authentisch zu erleben sowie forschend zu lernen und zu arbeiten (Roth, 2013, S. 12). Im Zeitraum von drei Sitzungen zu je 90 Minuten bearbeiten die Lernenden in Kleingruppen von je drei bis vier Schülerinnen und Schülern selbstständig die ihnen vorliegenden Aufgaben anhand von Materialien sowie Computersimulationen. Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern, von denen schriftliche Einverständniserklärungen der Lernenden selbst sowie deren Erziehungsberechtigten vorliegen müssen, wird dabei in einem separaten Raum bei der Bearbeitung gefilmt. Diese Schülergruppe wird vorher aufgefordert sich intensiv über die Aufgaben und ihre Lösungsideen auszutauschen. Dies ist besonders wichtig, damit anhand der so entstehenden Videos eine Diagnose durch die Lehramtsstudierenden vorgenommen werden kann.

Sowohl die Lösungen der gefilmten als auch der anderen Schülerinnen und Schüler der Klasse werden am Ende eingescannt und stehen für eine Auswertung zur Verfügung. Um die Anonymität der Schülerinnen und Schüler zu wahren, beschriften diese ihr jeweiliges Aufgabenheft mit einem Code.

Für diese Untersuchung handelte es sich um Aufgaben zum Repräsentationswechsel zwischen Situation und Graphen. Hierfür konnten 66 Schülerinnen und Schüler zweier Gymnasien gewonnen werden, darunter 26 der 7. Jahrgangsstufe und 40 der 8. Jahrgangsstufe. Die Schülergruppen setzten sich aus einer 7. Klasse, sowie zwei 8. Klassen zusammen. Zum derzeitigen Wissensstand der Teilnehmerinnen und Teilnehmer kann über deren Aufgabebearbeitung hinaus, nichts berichtet werden, da weder ein Eingangstest noch eine Abfrage der Mathematiknote erhoben wurde. Gründe für die Entscheidung gegen einen Eingangstest waren einerseits die begrenzte Kontaktzeit, welche dem Mathematik-Labor Setting geschuldet war. Andererseits sollte das Interesse der Schülerinnen und Schüler an der Bearbeitung nicht durch einen ggf. demotivierenden Eingangstest negativ beeinflusst werden.

Die Schülergruppen hatten bei der Bearbeitung der Aufgaben freie Wahl bezüglich des Vorgehens und des Tempos bei der Lösungsfindung. Da es sich nicht um eine Testsituation handelte, waren die Lernenden nicht gezwungen alle Aufgaben zu bearbeiten und konnten sich mit für sie schwierigen Aufgaben länger beschäftigen. Dies führte allerdings dazu, dass nicht alle Aufgaben von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet wurden.

Insgesamt sechs Schülergruppen (bestehend aus jeweils 4 Lernenden) konnten bei der Bearbeitung der Aufgaben gefilmt werden. Hierzu wurden den Schülerinnen und Schülern der Videogruppen die Materialien – vorgegebene Funktionsgraphen bzw. Koordinatensysteme zum eigenständigen Einzeichnen – in entsprechender Größe vorgelegt, sodass diese und die mit dem Material veranschaulichten Argumentationen im Video erkennbar werden.

Die Analyse der Lernprozesse in den Videos zeigte einige der zuvor aufgeführten Fehler. Hierbei wurde aber auch deutlich, dass manche Fehler von den wortführenden Schülerinnen und Schülern gemacht und von den anderen Gruppenmitgliedern übernommen wurden, was dem Setting der Gruppenarbeit geschuldet war. Dies stellte allerdings keinen Nachteil dar, sondern vielmehr eine Chance für eine tiefgründige Diagnose an Hand der daraus gewonnenen Videos.

Ferner konnte eruiert werden, dass beispielsweise die Verletzung der Eindeutigkeit teilweise aus Versehen geschah und zuweilen auch verbessert wurde.

Klassenstufe 8, Aufgabe Achterbahn: *Schüler 4¹ korrigiert im Video den zunächst fast senkrecht abfallenden Graphenabschnitt und reduziert die Steigung und somit die Verletzung der Eindeutigkeit.*

An den meisten Stellen wurde dies allerdings gar nicht erst infrage gestellt.

Gleiches Video, Schüler 1: „Die Spirale geht doch auch so runter [zeigt mit dem Finger eine Senkrechte zur x-Achse].“

Häufig kam es vor, dass den Lernenden bekannt war, dass einem x -Wert nicht mehr als ein y -Wert zugeordnet werden darf, allerdings die Begründung oder der Rückbezug auf die Definition einer Funktion nicht abgerufen werden konnte (auch im ersten obigen Beispiel erfolgte die Verbesserung ohne Begründung, wodurch auch an dieser Stelle nicht gesagt werden kann, ob diese dem Schüler bewusst war).

Im Hinblick auf den Graph-als-Bild-Fehler zeigten die Videos, dass Lernenden der 8. Klasse teilweise bewusst war, dass sie zum Beispiel keinen Looping in das Koordinatensystem einzeichnen können (Schüler 1: „Du kannst doch nicht einen Looping hier drauf malen!“). Gründe hierfür, welche über die Definition einer Funktion (Jedem x wird genau ein y zugeordnet.) oder über den konkreten Zusammenhang (Zu einer bestimmten zurückgelegten Strecke, befindet sich der Achterbahnwagen in einer bestimmten Höhe und nicht in zwei verschiedenen Höhen gleichzeitig.) werden allerdings auch an dieser Stelle nicht artikuliert.

Weiterhin ist zu sehen, dass die Schülerinnen und Schüler ganz unterschiedliche Vorstellungen bezüglich eines Graphen haben (vgl. Abb. 5). So zeigen sich neben gewöhnlichen Graphen auch solche, die zusätzlich beschriftet sind sowie ein Säulendiagramm. Die Vorstellung, die an dieser Stelle zum Tragen kommt, ist dabei keineswegs falsch und bietet

gute Anhaltspunkte zur Weiterentwicklung. Die Eigenschaft der Eindeutigkeit einer Funktion wird durch die Repräsentationsform des Säulendiagramms besonders unterstützt, da an keiner Stelle zwei Funktionswerte gleichzeitig auftreten können.

4.4 Wahl der Videos und Diagnoseaufträge für die Studierenden

Um Fähigkeiten zur Diagnose innerhalb von Lernprozessen zu schulen, wurde aus dem oben beschriebenen Videomaterial von Schülerarbeitsphasen solche Sequenzen ermittelt und zusammengeschnitten, welche eine gewinnbringende Analyse von Vorstellungen der Lernenden zu funktionalen Zusammenhängen zulassen. Die Auswahl der Sequenzen erfolgte nach folgenden Kriterien:

- *Aktivität*

Innerhalb der Videosequenz arbeiten die Schülerinnen und Schüler aktiv, d. h. sie diskutieren zur Aufgabenstellung und/ oder zeigen eine mit dem Lösungsprozess verbundenen Tätigkeit, – wie beispielsweise sichtbares Zeichnen eines Graphen oder Zeigen am gegebenen Material. Sequenzen, in denen viel nachgedacht und nicht gesprochen oder gehandelt wird, werden entsprechend nicht berücksichtigt.

- *Gute bzw. falsche Schülervorstellung*

In der betreffenden Sequenz wird durch sprachliche Äußerungen und wenn möglich verbunden mit einer Handlung am Material, eine besonders gut ausgeprägte Vorstellung des dargestellten funktionalen Zu-

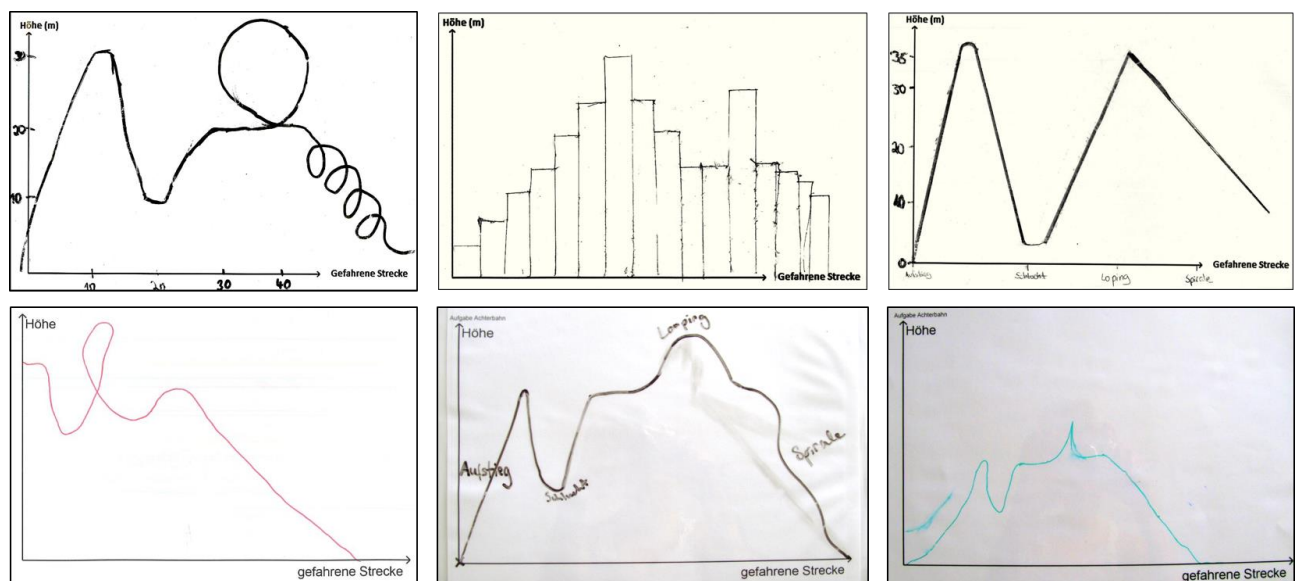


Abb. 5: Schülerlösungen zur Achterbahn-Aufgabe (obere Reihe: Lösungen von Lernenden der 7. Klasse, untere Reihe: Lösungen von Schülerinnen und Schülern der 8. Klasse).

sammenhangs oder eine Fehlvorstellung deutlich. Alternativ können auch solche Sequenzen von Interesse sein, bei denen zwei verschiedene Interpretationen eines Sachverhaltes vorliegen bzw. aufeinandertreffen.

- *Dauer*

Die Länge der Sequenz sollte fünf Minuten nicht übersteigen. Um eine ausführliche Analyse zu ermöglichen wurden zudem Videostellen bevorzugt, in der die gezeigte Handlung/ Diskussion mindestens eine Minute dauert.

Auf Basis dieser Kriterien wurde das gesamte Videomaterial ausgewertet und eine Vorauswahl an Sequenzen, welche später eingesetzt werden sollten, getroffen. In einer Diskussion mit elf Beteiligten, wobei es sich hierbei um Lehrerinnen und Lehrer sowie Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker handelte, wurden schließlich zehn Videosequenzen ausgewählt.

Als Testvignette wurde ein 3 $\frac{3}{4}$ minütiges Video ausgewählt, welches vier Schüler² der 8. Klasse bei der Bearbeitung der Achterbahn-Aufgabe zeigt (vgl. auch das Bild im Zentrum von Abb. 6).

Werden die diagnostischen Fähigkeiten betrachtet, so sind die Wahrnehmung und die Beschreibung des Wahrgenommenen stets nur ein Teil derselben. Beispielsweise führen Bartel und Roth (2019) daneben auch das Erklären des Gesehenen sowie die Entscheidung über mögliche Handlungen, die daraus folgen, an. Auch Busch, Barzel und Leuders (2015) betonen die Wahrnehmung und Beschreibung von Defiziten sowie deren Erklärung.

Da die diagnostischen Fähigkeiten mehr beinhalten als die konkrete Diagnose in einer Situation oder der Analyse von Schülerlösungen, wird auch die Aufgabe in den Blick genommen (vgl. Artelt & Gräsel, 2009; Weinert, 2000). Dies entspricht auch dem Aktionsfeld einer Lehrperson, die bei der Unterrichtsplanung ebenfalls die Aufgaben analysiert und bereits mögliche Schwierigkeiten antizipiert, um diesen vorbeugen bzw. auf diese angemessen reagieren zu können. Unter Bezug auf die genannten Aspekte, wurden die Studierenden in der durchgeführten Studie dazu angehalten, eine Aufgabenanalyse durchzuführen. Im direkten Anschluss daran wurde eine Situation mittels Videos zur Diagnose dargeboten, in welcher Schülerinnen und Schüler zu sehen waren, die an der vorher analysierten Aufgabe arbeiten. Zudem wurde am Ende – im Hinblick auf die Förderabsicht – erfragt, ob und wenn ja, wie die Studierenden intervenieren würden.

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf die von den Studierenden diagnostizierten Schülervorstellungen

und -fehler sowie auf die damit einhergehenden Interpretationen. Die Frage nach den Stärken der Lernenden, welche ebenfalls erhoben wurde, wird an dieser Stelle daher nicht diskutiert. Hinsichtlich der Videodiagnose sollen somit die Antworten der Studierenden auf die beiden folgenden zur Testvignette gestellten Diagnoseaufträge untersucht werden:

Beschreiben Sie die Schwierigkeiten der Schüler, die in der betrachteten Videosequenz auftreten.

Tritt der Graph-als-Bild-Fehler auf? Nehmen Sie diesbezüglich Stellung zu jedem der vier Schüler.

4.5 Videotool ViviAn

Da eine Lehrperson im Unterrichtsgeschehen über weitaus mehr Informationen verfügt, als durch ein Video alleine übermittelt werden kann, wurde das Video und die dazugehörigen Fragen in die Lernumgebung ViviAn (**V**ideo**v**ignetten zur **A**nalyse von Unterrichtsprozessen, Bartel & Roth, 2015; Roth, 2019) eingebunden.



Abb. 6: Ausschnitt einer in ViviAn eingebetteten Videovignette

Dieses Tool (vgl. Abb. 6) bietet unter anderem die Möglichkeit, unter *Schülerprofile* etwas über die Lernenden zu erfahren, etwa die Schulart und die Klassenstufe. Darüber hinaus werden (unter dem Button *Lernumgebung: Thema und Ziele*) auch Informationen über die konkreten Inhalte und Ziele geliefert, welche mit den Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler in der aktuellen Sitzung bearbeiten, vermittelt werden sollen. Zudem kann der *Arbeitsauftrag* aufgerufen werden, den die Schülerinnen und Schüler in dem jeweiligen Video bearbeiten. Schließlich finden sich hier auch die *Materialien* (z. B. Folien mit Funktionsgraphen), welche den Lernenden zur Verfügung standen, aber auch die *Schülerprodukte*, also ihre eigenen sowie gemeinsamen Lösungen.

Diese zusätzlichen Informationen können jederzeit aufgerufen (und auch wieder geschlossen) werden und öffnen sich in einem eigenen Fenster, welches zudem verschoben und auch gleichzeitig mit anderen Fenstern geöffnet werden kann. Somit soll den Studierenden die Möglichkeit gegeben werden, sich vor

Beginn des Videos, mit den Schülerinnen und Schülern und der konkreten Situation vertraut zu machen.

Weiterhin ist schematisch ein Tisch mit der Benennung der vier Schülerinnen und Schüler von S1 bis S4 (Schüler/in 1 bis Schüler/in 4) gegeben. Diese Benennung erfolgt nach der Position der Schülerinnen und Schüler am Tisch und wird im Uhrzeigersinn von links nach rechts vollzogen. Diese Abbildung ermöglicht die eindeutige Kommunikation über die Schülerinnen und Schüler. Um das Zuordnen von Äußerungen zu erleichtern, erscheint zu jeder Aussage im Video bei der sprechenden Schülerin bzw. dem sprechenden Schüler sein Kürzel (vgl. Abb. 6).

Mit einem Klick auf den Button „Diagnoseaufträge“ öffnet sich unterhalb des Videos ein Fenster, in welchem die zuvor beschriebenen Diagnoseaufträge, sowie Antwortfelder zum Notieren der Erkenntnisse erscheinen. Auch hier wird bei der Frage nach konkreten Schülerinnen und Schülern, die zuvor dargestellte Benennung verwendet.

5. Studie zur Diagnosefähigkeit von Studierenden

Nachdem zuvor die Schülerinnen und Schüler und die mit ihnen verbundene Materialerstellung genauer in den Blick genommen wurden, wird der Fokus nun auf die Lehramtsstudierenden der Mathematik gesetzt. Im Folgenden soll deshalb auf die Frage eingegangen werden, inwiefern zukünftige Lehrerinnen und Lehrer fähig sind, die zuvor genannten Aspekte – welche bei den Lernenden aufgetreten sind – in Videosituationen zu diagnostizieren.

5.1 Methodisches Vorgehen

5.1.1 Datenerhebung der Studierenden

Zur Untersuchung der Forschungsfragen zu diagnostischen Fähigkeiten zukünftiger Mathematiklehrkräfte wurde eine Interventionsstudie mit Vor- und Nachtest mit Lehramtsstudierenden der Mathematik an der Universität Koblenz-Landau am Campus Landau durchgeführt. Die Studie fand im Rahmen der Bachelorvorlesung „Fachdidaktische Grundlagen“ statt, einer Vorlesung, die für das erste und zweite Semester aller Lehramtsstudiengänge mit dem Fach Mathematik vorgesehen ist, und fachdidaktische Fragen grundsätzlicher Art quer zu den Inhalten des Mathematikunterrichts und jahrgangsstufenübergreifend thematisiert. Bei den 112 Probanden (darunter 24 männliche) handelte es sich somit vor allem um Erst- und Zweitsemesterstudierende des Faches Mathematik (Alter: $M = 20,7$ Jahre, $SD = 2,1$; Lehramt: 57 % Grundschule, 30 % Förderschule, 13 % Realschule plus & Gymnasium). Da funktionale Zusammenhänge mit einem Vorläufer in Mustern und

Strukturen in der Grundschule in den deutschen Bildungsstandards für alle Schulformen und -stufen als inhaltsbezogene mathematischen Kompetenz ausgewiesen wird (Grundschule: KMK, 2005, S. 11; Mittlerer Schulabschluss: KMK, 2004; Abitur: KMK, 2012), können hieran gut vernetzende Aspekte mathematischen Arbeitens entlang der Bildungskette dargestellt und exemplarisch erarbeitet werden. Dies gilt umso mehr, als es hier nicht um syntaktisches bzw. kalkülhaftes Arbeiten sondern inhaltliches Verständnis von funktionalen Zusammenhängen auf der Basis von Funktionsgraphen und Situationsbeschreibung geht. Ein so verstandenes Arbeit mit Diagrammen, ist bereits in der Grundschulbildung verankert (Bos, Bonsen, Baumert et al., 2008, S. 14, 22; Klime & Baumert, 2001, S. 14; KMK, 2005, S. 11; Stecken, 2013). Darüber hinaus sollten auch die Grundschullehrpersonen im Blick haben, was von den Schülerinnen und Schülern auf weiterführenden Schulen erwartet wird. Schließlich bleibt zu sagen, dass grafische Funktionsdarstellungen vielfach in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler auftauchen und interessierte Lernende in jeder Schulstufe hierauf Bezug nehmen wollen.

Vor Beginn der Studie wurden zunächst die theoretischen Grundlagen in der Vorlesung besprochen, sodass alle Studierenden mit denselben Mitteln in die Untersuchung starten konnten. Hierzu zählten neben dem Verständnis des Funktionalen Denkens und der Aspekte der Zuordnung, Kovariation und Sicht auf Funktion als Ganzes auch die typischen Schülerfehler. Die Durchführung startete dann mit einem Vor-test, in welchem zunächst eine Aufgabe hinsichtlich benötigter Fähigkeiten und möglicher Schwierigkeiten analysiert werden sollte. Der zweite Teil des Testes bestand nun darin, mit Hilfe konkreter Diagnoseaufgaben, den Lernprozess von vier Schülern mittels eines Videos zu analysieren. Im Sinne einer möglichst realitätsnahen Situation, konnte dieses Video nur einmal betrachtet werden. In der sechswöchigen Intervention zwischen Prä- und Posttest hatten die Studierenden die Möglichkeit, zwischen vier und acht Videovignetten zu bearbeiten, in welcher wiederum jeweils drei bis vier Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung einer Aufgabe zum funktionalen Denken gezeigt wurden. Im Gegensatz zum Testvideo, konnten die Videos in dieser Trainingsphase beliebig oft angesehen und zwischendurch bei Bedarf pausiert werden. Zudem erhielten die Studierenden zu jedem Video am Ende einer Bearbeitung eine standardisierte Rückmeldung, in welcher sie ihre Lösung mit der von Experten vergleichen konnten.

5.1.2 Qualitative Auswertung der Studierendenantworten

Die Auswertung der Studierendenantworten erfolgte mithilfe eines Kodierleitfadens, welcher mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) erstellt wurde. Hierbei wurde zunächst in einem induktiven Vorgehen aus der Beantwortung der Fragen durch Experten (sowohl Lehrerinnen und Lehrer als auch Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern) Kategorien abgeleitet, welche zudem deduktiv mit Hilfe von Literatur überprüft und schließlich festgelegt wurden. Eine weitere Überarbeitung der Kategorien erfolgte nach Sichtung der Studierendenantworten.

Hinsichtlich der betrachteten Frage nach den Schwierigkeiten und Fehlern der Schülerinnen und Schüler wurde das Video bezüglich der Achterbahn-Aufgabe (vgl. Kapitel 4.2) ausgewählt. Für dieses Testvideo ergaben sich folgende Kategorien:

- Die Eindeutigkeit von Funktionen wird verletzt.
- Physikalische Aspekte werden nicht berücksichtigt.
- Der Begriff „gefährte Strecke“ wird, neben der eigentlichen Bedeutung, als Entfernung zum Start interpretiert.
- Es gibt Schwierigkeiten in der Umsetzung der Spirale.
- Der Begriff „Spirale“ ist nicht bei allen Schülern mit einer Vorstellung verbunden.
- Der Hochpunkt im „Looping“ ist fehlerbehaftet.
- Der Graph-als-Bild-Fehler tritt auf. Hierbei ist es nicht notwendig den Namen des Fehlers anzugeben. Auch Aussagen wie „Der Graph wird im Sinne eines Abbildes der Realität gezeichnet/interpretiert.“ werden dieser Kategorie zugeordnet.
- Es gibt Schwierigkeiten in der Umsetzung des „Loopings“ im Graph.
- Es gibt eine unterschiedliche Interpretation des Koordinatenursprungs: Höhe zu Beginn der Achterbahn vs. gleiche Höhe wie der Meeresspiegel.

Die sich anschließende direkte Frage, bei welchen Schülern² der Graph-als-Bild-Fehler aufgetreten ist, ergab folgende Bewertungsgrundlage:

- Schüler 1: kein Graph-als-Bild-Fehler
- Schüler 2: (wahrscheinlich) kein Graph-als-Bild-Fehler
- Schüler 3: Graph-als-Bild-Fehler
- Schüler 4: kein Graph-als-Bild-Fehler

Die Studierendenantworten wurden daraufhin mit Hilfe dieses Kodierleitfadens von zwei unabhängigen Ratern analysiert. Über alle Kategorien hinweg wurde im Mittel eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den beiden Ratern erzielt. Um die Übereinstimmung zu prüfen, wurde jeweils das Cohens Kappa (κ) gebildet, welches im Idealfall, im Sinne einer perfekten Übereinstimmung der Rater, den Wert 1 annimmt, bei sehr schlechter Übereinstimmung den Wert 0. Das jeweilige κ lag bei den einzelnen Kategorien der ersten Frage, welche sich auf die Fehler der Lernenden bezog, jeweils im Bereich von $0.666 \leq \kappa \leq 1$. Bei der zweiten Frage, welche eine Zuordnung des Graph-als-Bild-Fehlers zu den vier Schülern verlangte, war die Übereinstimmung noch größer, der Wert des Cohens Kappa lag hier zwischen $\kappa = 0.886$ und $\kappa = 0.935$. Im Anschluss wurden durch eine kommunikative Validierung durch die Rater (Kvale, 2007, S. 124 f.) alle Unstimmigkeiten ausgeräumt und eine einstimmige Bewertung der Studierendenaussagen erzielt.

5.2 Ergebnisse

Im Folgenden sollen die qualitativ analysierten Studierendenantworten quantitativ betrachtet und verglichen werden.

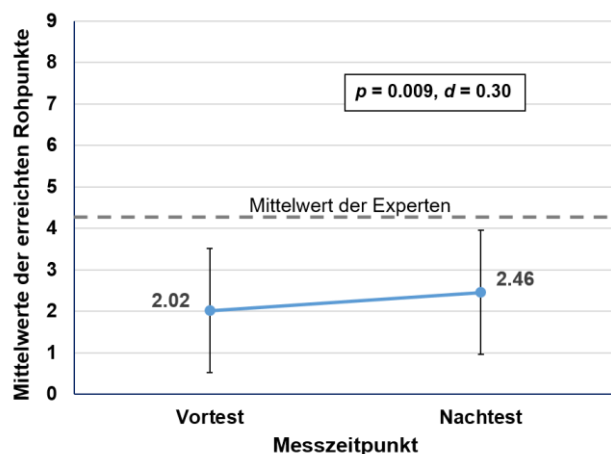


Abb. 7: Mittelwerte der absoluten Häufigkeiten der von den Studierenden erkannten Schwierigkeiten im Vortest und Nachtest (N = 112) (Im Vergleich hierzu: Durchschnittswert der Experten = 4.25)

Zunächst ist festzuhalten, dass von den 112 Studierenden im Mittel 2.02 ($SD = 1.495$) von den zuvor beschriebenen möglichen neun Aspekten im Vortest wahrgenommen bzw. beschrieben wurden. Damit haben die Studierenden im Mittel weniger als ein Drittel der möglichen Fehler und Schwierigkeiten identifiziert. Im Nachtest wurde ein Mittelwert von 2.46 ($SD = 1.506$) erreicht. Mittels eines t-Testes konnte ein signifikanter ($p = 0.009$) Zuwachs mit einem kleinen Effekt (Cohens $d = 0.30$) ermittelt werden (Abb. 7). Trotz dieser Verbesserung, welche sich

nach dem sechswöchigen Training zeigt, erscheint noch Potential nach oben. Um dieses Ergebnis besser einschätzen zu können soll zudem das Expertenergebnis aufgeführt werden (siehe gestrichelte Linie in Abb. 7). Diese ($N = 12$) erreichten im Mittel 4.25 Punkte ($SD = 1.785$). Das Minimum an erzielten Punkten der Experten lag bei zwei Punkten, das Maximum bei sieben Punkten.

Im Folgenden soll nun ein Blick auf die Antworten der Studierenden geworfen werden.

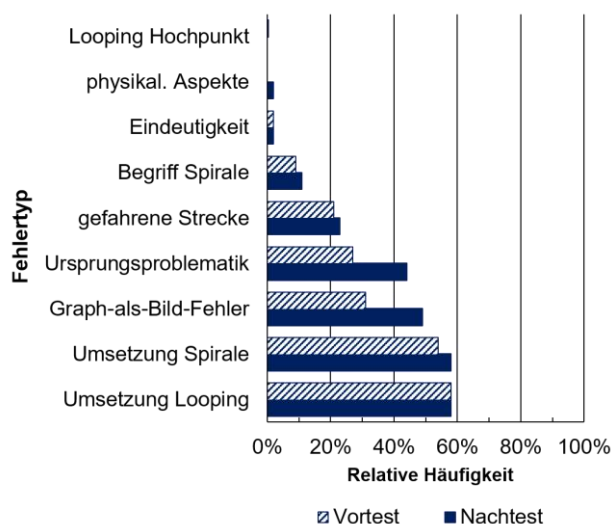


Abb. 8: Relative Häufigkeiten der von den Studierenden gefundenen Fehler bezogen auf das Testvideo ($N = 112$)

Ein Blick auf die einzelnen Kategorien zeigt (Abb. 8), dass die sehr allgemein formulierten Kategorien der Schwierigkeiten bei der Umsetzung des Loopings und der Spirale im Vortest, als auch im Nachtest, von über der Hälfte der Studierenden, allerdings nicht von mehr als 60 %, erkannt wurde. Eine Steigerung nach der Intervention findet demnach kaum statt. Einen Einfluss durch das Training zeigt sich im Erkennen des Graph-als-Bild-Fehlers sowie der verschiedenen Vorstellungen bezüglich des Ursprungs. Ersteres wurde zunächst von fast einem Drittel der Teilnehmerinnen und Teilnehmer erkannt, nach der Intervention von knapp der Hälfte. Dass in dem Video von Seiten der Schüler² unterschiedliche Vorstellungen bezüglich des Ursprungs aufgrund verschiedener Interpretationen der Höhe vorlagen, erkannten zunächst 27 % der Studierenden, im Nachtest waren es 44 % der Studierenden.

Dass der Begriff „Spirale“ zu unterschiedlichen Vorstellungen und Umsetzungen im Graphen führen kann (je nachdem ob es sich um eine senkrecht nach unten oder schräg verlaufende Spirale handelt) und auch von einem der Schüler explizit danach gefragt wird, was hier unter der Spirale gemeint ist, wird nur von 10 % der Studierenden erfasst.

Auch die Eindeutigkeit von Funktionen, welche im Zuge des Graph-als-Bild-Fehlers sowie an mehreren weiteren Stellen im Video von den Schülern verletzt wurde, wird sowohl im Vor- als auch im Nachtest nur von je zwei Studierenden erkannt (vgl. Abb. 8).

Von lediglich zwei Studierenden wird im Nachtest erwähnt, dass auch physikalische Aspekte missachtet wurden. So erreicht eine Achterbahn ihren höchsten Punkt nach dem ersten Anstieg. Alle weiteren Hochpunkte werden (unter normalen Gegebenheiten) diese Höhe nicht überschreiten.

Trotz vorhandener Schülerlösung, welche über einem Button jederzeit geöffnet und analysiert werden konnte, fiel keinem der Studierenden auf, dass der Hochpunkt des Loopings zu spitz erfolgte.

Nachdem zunächst das Auftreten des Graph-als-Bild-Fehlers nur global in der Schülergruppe erfragt wurde, wird in einer folgenden Aufgabe die Zuordnung dieses Fehlers zu den einzelnen Schülern gefordert (vgl. Abb. 9).

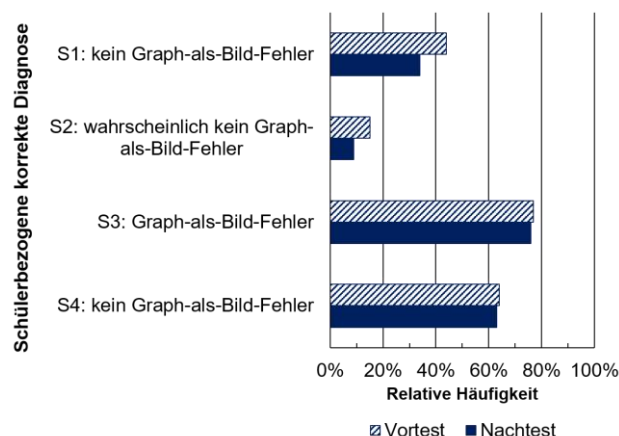


Abb. 9: Relative Häufigkeiten der schülerbezogenen korrekten Diagnosen bezüglich des Graph-als-Bild-Fehlers ($N = 112$)

Es zeigte sich, dass der Großteil der Studierenden (fast 80 %) richtig erkannte, dass Schüler 3 das Abbild des Loopings oder der Spirale in das Koordinatensystem zeichnen wollte. Eine Mehrheit von über 60 % konnte zudem richtig angeben, dass bei Schüler 4 kein Graph-als-Bild-Fehler auftritt. Bei diesen beiden Schülern zeigt sich über die Intervention hinweg kaum eine Veränderung der Studierendenantworten.

Problematisch sieht es hingegen bei Schüler 1 und Schüler 2 aus: Zum einen aufgrund der geringeren Anzahl richtiger Einschätzungen dieser beiden Schüler, zum anderen aber auch durch die Verschlechterung der Studierenden vom Vor- zum Nachtest. Während im Vortest 44 % der Studierenden richtig erkannte, dass Schüler 1 keinen Graph-als-Bild-Fehler begeht, sind dies im Nachtest nur noch 34 %. Hinsichtlich Schüler 3 trafen im Vortest lediglich 15 %

der Teilnehmerinnen und Teilnehmer eine richtige Aussage, im Nachtest nur noch fast jede/jeder Zehnte. Auch wenn in beiden Fällen keine signifikante Verschlechterung vorliegt (bzgl. S1: $p = 0.094$, S2: $p = 0.109$), sollte diese Entwicklung nicht vernachlässigt werden.

5.3 Diskussion

Wie in der Darstellung der Auswertung der Studienantworten deutlich wurde, fiel es den Studierenden schwer, Schwierigkeiten, Fehler, oder verschiedene Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler wahrzunehmen und zu beschreiben. Auch die durchgeführte Intervention, in welcher die Teilnehmerinnen und Teilnehmer weitere Videos analysieren konnten, führte lediglich zu einer geringen Verbesserung.

Ein Grund für die geringe Anzahl an genannten Schwierigkeiten und Fehlern könnte sein, dass es sich bei den Studierenden vorwiegend um solche aus dem ersten oder zweiten Semester handelte, die somit über wenig bis keine Praxiserfahrung verfügten. Ein anderer Grund könnte aber auch sein, dass beim einmaligen Schauen eines Videos zu viele Informationen auf einmal dargeboten werden, die in ihrer Fülle nicht alle aufgenommen werden können. Für diese Annahme spricht auch, dass sogar Experten im Mittel nur 4.25 (von möglichen neun) Fehler und Schwierigkeiten entdeckt haben. Zudem wurde von mehreren Lehrpersonen angemerkt, dass die Analyse eines Lernprozesses im Video mit fremden Schülerinnen und Schülern deutlich schwieriger sei, als in einer realen Unterrichtssituation, in der die Lehrperson die Stimmen der Lernenden kennt und auch verschiedene Blickwinkel einnehmen kann. Weiterhin kann im realen Lernprozess durch Nachfragen auf bestimmte Fehlvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern geschlossen werden, was mittels Video nicht möglich ist. Auch wenn bei den Studierenden nur eine geringe Anzahl an Fehlern und Schwierigkeiten erkannt wurde, darf somit nicht außer Acht gelassen werden, dass sogar die befragten Experten nie alle neun Punkte genannt haben. Diese haben sich ebenfalls jeweils individuell auf bestimmte Aspekte fokussiert. Vor diesem Hintergrund erscheinen auch die Ergebnisse der Studierenden in einem besseren Licht. Dennoch bleibt genügend Luft nach oben. Dies spricht dafür, dass auch im weiteren Studium Gelegenheiten zur Verbesserung der Diagnosefähigkeit der Studierenden geboten werden sollten. Die geschieht am Standort Landau der Universität Koblenz-Landau systematisch (Roth, 2019).

Die Frage, warum nach der Intervention nur eine geringe Verbesserung stattgefunden hat, kann unter an-

derem dadurch begründet werden, dass das Betrachten eines Videos ohne Wiederholung (Testsituation) eine andere Situation darstellt, als es die Studierenden in der Trainingsphase, mit dem beliebig häufigen Anschauen des Videos, geübt hatten. Hierbei haben sich Probanden vielleicht daran gewöhnt, zunächst die Situation als solche für sich wahrzunehmen, bevor eine konkrete Diagnose eventuell auch je für einen Lernenden erfolgte.

Schließlich kann aber auch die vergleichsweise lange Zeitdauer der Untersuchung dazu geführt haben, dass die Studierenden weniger motiviert waren, ein weiteres Video zu analysieren, das zudem dasselbe war, wie zu Beginn der Studie. Da die Studierenden die Videos alleine bearbeiten sollten, könnte diese Tätigkeit am Ende zu eintönig gewesen sein. Eine mögliche Alternative hierzu wäre, die Arbeit an den Videos in Kleingruppen durchzuführen. Hierdurch könnten die Diskussion und den Austausch mit den Kommilitoninnen und Kommilitonen ggf. mehr Motivation und eine noch tiefere Auseinandersetzung hervorruufen. Letztlich muss zudem gesagt werden, dass der Zeitpunkt des Nachtestes schlecht gewählt wurde. Dieser fand kurz vor der Klausurphase statt, wodurch die Studierenden mit ihren Gedanken mit ganz anderen Dingen beschäftigt gewesen sein könnten.

Insgesamt zeigte sich, dass es den angehenden Lehrerinnen und Lehrern leichter fiel, allgemeine, globale Schwierigkeiten – wie die Umsetzung des Loopings – aufzuzeigen. Aber selbst die Verletzung der Eindeutigkeit von Funktionen, welche in dem zur Analyse herangezogenen Video mehrfach vorkam, wurde von den meisten Studierenden nicht wahrgenommen. Ob die Studierenden selbst nicht vertraut mit dieser Eigenschaft sind, oder ob diese Eigenschaft dem Graph-als-Bild-Fehler untergeordnet wurde, in dessen Zusammenhang die Eindeutigkeit unter anderem verletzt wurde, bleibt offen. Vielleicht sollte aber in Zukunft verstärkt auf die eindeutige Zuordnung funktionaler Zusammenhänge hingewiesen werden, um die Studierenden hierfür zu sensibilisieren.

Die von den Studierenden eher selten identifizierte Ungewissheit bezüglich der Spirale kann damit begründet werden, dass dies im Video nur an wenigen Stellen deutlich wurde und eventuell neben dem Graph-als-Bild-Fehler, welcher deutlich überwiegt, untergegangen ist.

Ein besonders Interessantes Phänomen zeigte sich bezüglich des Graph-als-Bild-Fehlers. Die Wahrnehmung dieses Fehlers konnte vom Vor- zum Nachtest um 20 Prozentpunkte gesteigert werden. Eine Nennung des konkreten Begriffes war allerdings nicht notwendig, um eine Zuordnung in dieser Kategorie

zu erzielen. Auch Umschreibungen wie „Der Schüler² zeichnet den Graphen als Abbild der Situation/der Achterbahn“ waren an dieser Stelle zulässig. Aus diesem Grund kann nicht gesagt werden, dass eine fehlende Kenntnis des Bezeichners „Graph-als-Bild-Fehler“, welche durch die Intervention beseitigt wurde, zu diesem Zuwachs geführt hätte. Allerdings kann die Intervention, in welcher der Graph-als-Bild-Fehler auch in weiteren Videos vorkam, eine geschärfte Achtsamkeit gegenüber diesem Fehlertyp erzeugt haben. Bezüglich dieses Fehlers fällt auf, dass dieser im Nachtest zwar eher von den Studierenden erkannt wurde, die Zuordnung des Fehlers zu konkreten Schülern² allerdings schlechter ausfiel als im Vortest. Einem Großteil der Studierenden gelang eine korrekte Einschätzung für zwei der vier Schüler². Die Einschätzung der anderen beiden Schüler² fiel allerdings fast allen Studierenden schwer. Bezüglich Schüler 2 könnte dies daran liegen, dass sich dieser Schüler nur selten äußert. Auch wenn er die Eindeutigkeit der Funktion verletzt, was unter anderem an einer Skizze erkannt werden kann, wird an keiner Stelle deutlich, dass er die Achterbahn oder Teile davon als Graphen in die Abbildung übertragen möchte. Dennoch wird ihm von bis zu 90 % der Studierenden dieser Fehler zugeordnet. Nicht ganz so drastisch verhält es sich bei Schüler 1. Dieser Schüler macht zu Beginn spaßeshalber die Handbewegung eines Loopings, was so aufgefasst werden könnte, als verfalle er dem Graph-als-Bild-Fehler. Im weiteren Verlauf wird jedoch deutlich, dass er den Looping keineswegs als solchen einzeichnen wollte. Bei der Spirale kommt allerdings das nächste Problem auf, denn er sieht die „gefährnte Strecke“ als „Entfernung vom Start“, weswegen sein Lösungsvorschlag dem eines Graph-als-Bild-Fehlers ähnelt. Diese falsche Interpretation der „gefährnten Strecke“ wurde allerdings nur von jedem Fünften Studierenden erkannt. Dies könnten möglich Erklärungen dafür sein, dass es vielen Studierenden schwer gefallen ist, im Hinblick auf den Graph-als-Bild-Fehler eine korrekte Aussage über diesen Schüler zu treffen.

Weiterhin kann es Schwierigkeiten beim einmaligen Schauen des Videos geben, sich bis zum Ende zu merken, welcher Schüler² was gesagt hat, wodurch eine falsche Zuordnung zustande kommen kann. Dies ist unter anderem der Situation geschuldet, dass die Schüler für die Studierenden unbekannt sind, was im Unterrichtsalltag so nicht der Fall ist. Die ökologische Validität ist somit an dieser Stelle nicht ganz gegeben. Zudem konnte nicht überprüft werden, ob sich die Studierenden vor der Betrachtung des Videos mit den Begleitmaterialien auseinandergesetzt haben. Dies ist vor allem im Hinblick auf die Bezeichnung der Schüler² sowie deren Bewertung mittels ihrer Skizzen und Lösungen von großer Bedeutung.

5.4 Zusammenfassung

Im Hinblick auf die erste Forschungsfrage zeigte die Untersuchung mit den Studierenden, dass die Verletzung der Eindeutigkeit fast gar nicht erkannt wurde. Hierfür gilt es die zukünftigen Lehrer zu sensibilisieren, damit diese später in der Lage sind, dies bei ihren Schülerinnen und Schülern zu erkennen und diese individuell zu fördern. Es fiel weiter auf, dass die Studierenden nur wenige Schwierigkeiten und Fehler der Schülerinnen und Schüler wahrgenommen und beschrieben haben. Allerdings darf nicht außer Acht gelassen werden, dass es sich vor allem um Erst- und Zweitsemesterstudierende handelte, welche noch am Anfang ihrer Ausbildung stehen. Weiterhin fiel ins Auge, dass die Studierenden vor allem sehr allgemeine Aspekte nannten.

Im Hinblick auf die 2. Forschungsfrage, ob sich die diagnostischen Fähigkeiten im Bereich des funktionalen Denkens fördern lassen, zeigte sich, dass die Intervention, in welcher die Studierenden den Lernprozess der Lernenden in Videos analysieren sollten, zu einer signifikanten, aber nur kleinen Verbesserung führte. Wie zuvor bereits erläutert, können mögliche Gründe hierfür die Motivation der Studierenden, der ungünstige Zeitpunkt des Nachtests kurz vor der Klausurphase sowie die Diskrepanz zwischen Trainings- und Testsituation sein.

Nach der Intervention konnten zwar auch verstärkt konkretere Probleme aufgezeigt werden, dennoch gibt es hier eine Diskrepanz zwischen dem Erkennen beispielsweise des Auftretens des Graph-als-Bild-Fehlers, was sich verbesserte, zur Zuordnung desselben zu den einzelnen Schülern, was sich leicht verschlechterte. An dieser Stelle kann allerdings nicht gesagt werden, wodurch diese Verschlechterung zustande kam. Es kann dabei nicht ausgeschlossen werden, dass das einmalige Schauen des Videos in der Testsituation eine Ursache hierfür darstellt. Zum einen führt das einmalige Schauen dazu, dass der Betrachter viele Informationen aufnimmt, die er sich bis zum Ende merken muss. Dies stellte somit eine wesentliche kognitive Veränderung zur Trainingssituation dar, in welcher ein Stoppen und mehrfaches Wiederholen des Videos möglich war. Zum anderen ist das Medium Video alleine deswegen schon komplexer als die reale Unterrichtssituation, da die Schülerinnen und Schüler sowie ihre Stimmen dem Betrachter unbekannt sind. Außerdem ist ein Nachfragen nicht möglich, welches Unklarheiten beseitigen würde. Allerdings kann auch nicht ausgeschlossen werden, dass sich Studierende in ihrer Interpretation der getätigten Aussagen oder Gesten der Lernenden im Video verschlechtert haben. So sollte in der Lehrpersonenbildung die Problematik angesprochen werden, dass bei Schülerinnen und Schülern, die sich eher

ruhig verhalten, auch dann nicht zwingend eine Fehlvorstellung vorliegt, wenn sie einer verbal ausgesprochenen Fehlvorstellung von Mitschülerinnen und Mitschülern nicht widersprechen. Weiterhin sollte stets im Blick sein, dass der Graph-als-Bild-Fehler zwar oft naheliegend, aber dennoch nicht zwingend der vorliegende Fehler sein muss. Abschließend ist es wichtig zu betonen, dass im konkreten Unterrichtsgeschehen – im Gegensatz zu der Videosituation – ein Nachfragen und somit ein weiteres Ermitteln von Fehlerursachen möglich und in vielen Fällen ratsam ist.

5.5 Grenzen der dargestellten Studien

Hinsichtlich der Ergebnisse muss beachtet werden, dass hier nur der Teil der Studie dargestellt wurde, der sich auf die Diagnose der Vorstellungen und Fehler der Schüler in der Testvignette bezieht. Die Analyse der Studierendenantworten zu den in der Intervention eingesetzten Vignetten erlauben eventuell weitergehende Erkenntnisse bzgl. der Diagnoseprozesse der Studierenden.

Schließlich zeigen sich Einschränkungen in der ökologischen Validität, da die Diagnose von Lernprozessen innerhalb einer Videosequenz deutlich von Diagnosen im realen Unterricht abweicht. Im Alltag sind die Lernenden der Lehrperson vertraut, es ist mehr Vorwissen über die Charaktere vorhanden und auch die Stimmen können besser zugeordnet werden. Zudem können verschiedene Perspektiven eingenommen werden und auch ein Nachfragen bei einzelnen Schülerinnen und Schülern ist dort möglich, was von großer Bedeutung bezüglich möglicher Unklarheiten in der Diagnose ist. Trotzdem können durch das hier vorgenommene Training anhand von Videovignetten wichtige diagnostische Fähigkeiten grundsätzlich auch begleitend zu fachdidaktischen Großveranstaltungen gefördert werden.

5.6 Ausblick

Neben der Diagnose von *typischen* Fehlern wäre ein zweiter Schritt die Untersuchung der Beständigkeit von Fehlern, also die Suche nach *systematischen* Fehlern (Padberg, 1986). Wie häufig werden diese von den einzelnen Schülerinnen und Schülern getätigt. Auch wenn bei der Lehrperson ein einmaliges Auftreten schon zur Aufmerksamkeit führen sollte, ist es dennoch von Bedeutung, wie gefestigt ein Fehler oder eine Vorstellung bei Lernenden ist.

Es wäre weiterhin von Interesse, eine Studie mit Studierenden durchzuführen, die nicht am Anfang ihres Studiums stehen, sondern kurz vor dessen Abschluss. Dies hätte den Vorteil, dass sie bereits mehr fachliches und praktisches Wissen erworben hätten und eher dem Niveau einer in den Schuldienst eintretenden

Lehrperson entsprächen. Interessant wäre auch eine Längsschnittstudie, welche Lehramtsstudierende zu Beginn, in der Mitte und am Ende ihres universitären Studiums untersucht, um den Verlauf der Diagnosefähigkeiten innerhalb dieser Ausbildungsphase aufzeigen zu können.

Resümee

Auch wenn den Schülerinnen und Schülern der Repräsentationswechsel zwischen Graph und Situation häufig gelang, stellte die eindeutige Zuordnung von funktionalen Zusammenhängen häufig ein Problem dar. Allerdings wurde gerade die Verletzung der Eindeutigkeit von den Studierenden nur selten wahrgenommen, was einer möglichen Förderung der Lernenden zu diesem Aspekt im Wege steht. Insgesamt zeigte sich durch die Intervention mit den Studierenden, ein kleiner signifikanter Zuwachs in der Diagnose von Schülervorstellungen und -fehlern. Jedoch ist bei der Schulung der Diagnosefähigkeiten von Lehramtsstudierenden verstärkt darauf zu achten, dass nicht zu oberflächlich diagnostiziert wird. Ein Blick für weitere mögliche Schlüsse, als nur die offensichtlichen, sollte geschult werden, um zukünftige Lehrpersonen für die Vielfalt an unterschiedlichen Vorstellungen der Lernenden zu sensibilisieren.

Anmerkungen

¹ Die videographierten Schülerinnen und Schüler wurden anonymisiert, lediglich das Geschlecht wird beibehalten. Zur Unterscheidung der einzelnen Gruppenmitglieder wurden diese nach ihrer Sitzordnung von Schüler/in 1 bis Schüler/in 4 benannt.

² Bei der Testvignette handelt es sich um den Bearbeitungsprozess von vier männlichen Schülern, weswegen an dieser Stelle mit Bezug auf dieses Video und die zugehörigen Ergebnisse nur die männliche Bezeichnung „Schüler“ verwendet wird.

Danksagung

Wir danken den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

- Artelt, C. & Gräsel, C. (2009). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift Für Pädagogische Psychologie*, 23, 157–160.
- Bartel, M.-E. & Roth, J. (2015). Diagnostische Kompetenz durch Videovignetten fördern. In F. Caluori, H. Linne-weber-Lammerskitten & C. Streit (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (pp. 1033–1036). Münster: WTM.
- Bartel, M.-E. & Roth, J. (2019). Videos und Transkripte aus dem Lehr-Lern-Labor – die Wahrnehmung von Studierenden. In B. Priemer & J. Roth (Eds.), *Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung* (pp. 299–315). Heidelberg: Springer Spektrum.
- Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). Der "Funktionenführerschein": Wie Schüler und Schülerinnen das Denken in Funktionen variantenreich wiederholen und festigen können. *Praxis der Mathematik*, 47(2), 20–25.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift Für Erziehungswissenschaft*, 9, 469–520.
- Baumert, J., Lehmann, R., Lehrke, M., Clausen, M., Hosenfeld, I., Neubrand, J., . . . Günther, W. (1998). *Testaufgaben Mathematik TIMSS 7./ 8. Klasse (Population 2). Materialien aus der Bildungsforschung: Nr. 60*. Berlin: Max-Planck-Inst. für Bildungsforschung.
- Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2, 34–42.
- Bos, W., Bonsen, M., Baumert, J., Prenzel, M., Selter, C. & Walther, G. (2008). *TIMSS 2007: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich*. Zusammenfassung. Berlin.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. & Cheethan, M. R. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6, 113–133.
- Büchter, A. & Leuders, T. (2011). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen* (5. Aufl.). Berlin: Cornelsen.
- Busch, J., Barzel, B. & Leuders, T. (2015). Die Entwicklung eines Instruments zur kategorialen Beurteilung der Entwicklung diagnostischer Kompetenzen von Lehrkräften im Bereich Funktionen. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 36(2), 315–337.
- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 369–375). Utrecht,
- Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 49, 1–8.
- Janik, T., Minarikova, E. & Najvar, P. (2013). Der Einsatz von Videotechnik in der Lehrer-bildung. Eine Übersicht leitender Ansätze. In U. Riegel (Hrsg.), *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (Fachdidaktische Forschungen, Bd. 4, S. 63–78). Münster: Waxmann.
- Klieme, E. & Baumert, J. (2001). *TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht: Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente*.
- Klug, J., Bruder, S., Kelava, A., Spiel, C. & Schmitz, B. (2013). Diagnostic competence of teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education*, 30, 38–46.
- Konferenz der Kultusminister (KMK) (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschluss vom 4.12.2003. Darmstadt: Luchterhand.
- Konferenz der Kultusminister (KMK) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. Darmstadt: Luchterhand.
- Konferenz der Kultusminister (KMK) (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. Retrieved from https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
- Kvale, S. (2007). *Doing Interviews*. London: SAGE Publications.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1–64.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik Lehren*, 103, 8–11.
- Marxer, M. (2008). Funktionen im Alltag - alltägliche Funktionen. In A. Wagner (Hrsg.), *Didaktische Literatur Mathematik. Offene Lernangebote und Lernarrangements in der Hauptschule: Tagungsband der Tagung vom 26.6.2008* (1st ed., pp. 139–157). Berlin: Cornelsen.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., Neuausgabe, 12., vollständig überarbeitete und aktualisierte Aufl.). Beltz Pädagogik. Weinheim, Bergstr: Beltz, J.
- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L. & van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics. *American Journal of Physics*, 55, 503–513.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Ossimitz, G. (2002). Stock-Flow-Thinking and reading stock-flow-related Graphs: An Empirical Investigation in Dynamic Thinking Abilities. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.379.6653&rep=rep1&type=pdf>
- Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamiken verstehen. *Mathematik Lehren*, 120, 60–63.
- Padberg, F. (1986). Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen. *Der Mathematikunterricht*, 32(3), 58–77.
- Praetorius, A.-K., Lipowsky, F. & Karst, K. (2012). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Aktueller Forschungsstand, unterrichtspraktische Umsetzbarkeit und Bedeutung für den Unterricht. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht: Implikationen für Theorie und Praxis* (pp. 115–146). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Riegel, U. (2013). Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken: Einleitung. In U. Riegel & K. Macha (Eds.), *Fachdidaktische Forschungen: Vol. 4. Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (pp. 9–24). Münster: Waxmann.

- Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken: Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen*. Landauer Beiträge zur mathematikdidaktischen Forschung. Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.
- Roth, J. (2013). Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ – Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen. *Der Mathematikunterricht*, 59(5), 12–20.
- Roth, J. (2019). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), *Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung* (pp. 59–83). Heidelberg: Springer Spektrum.
- Schrader, F.-W. (2010). Diagnostische Kompetenz von Eltern und Lehrern. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (4th ed., pp. 102–108). Weinheim: Beltz.
- Schrader, F.-W. & Helmke, A. (2001). Alltägliche Leistungsbeurteilung durch Lehrer. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Beltz-Pädagogik. Leistungsmessungen in Schulen* (pp. 45–58). Weinheim: Beltz.
- Schrader, J. (2013). Förderung der Kompetenzen von Lehrkräften, Trainern und Beratern durch die Arbeit mit Videofällen: Grundlagen und Strategien eines längerfristig angelegten Forschungs- und Entwicklungsprogramms. In S. Digel & J. Schrader (Hrsg.), *EB Buch. Diagnostizieren und Handeln von Lehrkräften: Lernen aus Videofällen in Hochschule und Erwachsenenbildung* (1st ed., pp. 7–23). s.l.: Bertelsmann W. Verlag.
- Sjuts, J. (2007). Kompetenzdiagnostik im Lernprozess – auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung und -auswertung kommt es an. *Mathematica Didactica*, 30, 33–52.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.
- Van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571–596.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 10, 3–37.
- Weinert, F. E. (2000). *Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule*. Pädagogisches Institut Bad Kreuznach. Retrieved from <http://www2.ibw.uni-heidelberg.de/~gerstner/Weinert-Lehren&Lernen.pdf>

Anschrift der Verfasser

Rita Maria Hofmann
Universität Koblenz-Landau
Institut für Mathematik
Fortstraße 7
76829 Landau
hofmannr@uni-landau.de

Jürgen Roth
Universität Koblenz-Landau
Institut für Mathematik
Fortstraße 7
76829 Landau
roth@uni-landau.de