

Susanne DIGEL, Landau & Jürgen ROTH, Landau

## **Ein qualitativ-experimenteller Zugang zum funktionalen Denken mit dem Fokus auf Kovariation**

Obwohl funktionale Zusammenhänge im Mathematikunterricht fast jeder Klassenstufe thematisiert werden, zeigen Schülerinnen und Schüler immer wieder Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten im Umgang mit Funktionen (Ganter, 2013). Nimmt man die dem Funktionsbegriff zugrunde liegenden Aspekte funktionalen Denkens nach Vollrath (1989) – Zuordnung, Kovariation, Sicht als Ganzes – in den Blick, lässt sich im Unterricht eine unterschiedliche Gewichtung der Aspekte feststellen, die zu den o.a. Problemen beiträgt. Durch die numerischen Zugänge zum Funktionsbegriff dominiert der Zuordnungsaspekt in der Schulpraxis, obwohl dieser am wenigsten Schwierigkeiten bereitet (Hoffkamp, 2012). Methodisch haben sich experimentelle Zugänge als förderlich für funktionales Denken erwiesen (Lichti, 2019; Ganter, 2013). Dabei können Schülerinnen und Schüler in konkreten Situationen die Abhängigkeit zwischen Größen erleben und erkunden. Bei Lichti (2019) erzeugen Experimente mit Simulationen einen größeren Lerneffekt als Realexperimente, wobei die beiden Zugänge unterschiedliche Aspekte funktionalen Denkens fördern. Aus diesem Grund empfiehlt die Autorin eine Kombination aus beiden Zugängen für den Einstieg in das Arbeiten mit funktionalen Zusammenhängen. In der hier vorgestellten Studie wird der Frage nachgegangen, wie beide Methoden geeignet kombiniert werden können. Dazu werden zwei unterschiedliche Ansätze gegenübergestellt.

### **Experimentieren mit Realexperimenten UND Simulationen**

Nach Vollrath (1989) beruht funktionales Denken auf drei Aspekten: *Zuordnung* eines Elements der Definitionsmenge zu genau einem Element der Wertemenge; *Kovariation* der abhängigen Variable bei Variation der unabhängigen Variable und *Sicht als Ganzes*, wobei die Funktion als eigenständiges Objekt erfasst wird. Diese Aspekte lassen sich insbesondere mit Experimenten fördern (Ganter, 2013). So hat Experimentieren eine inhaltliche Nähe zum funktionalen Denken durch ähnliche kognitive Aktivitäten (ebd.), etwa der Identifikation der abhängigen und unabhängigen Größen. Roth (2014) leitet aus naturwissenschaftlichen Experimentierprozessen drei Phasen des Experimentierens ab, die Lichti (2019) auf ihre Experimentier-setting zum Funktionalen Denken überträgt: Zur *Vorbereitung der Experimente* werden Vermutungen zu Zusammenhängen aufgestellt und auf deren Basis Werte geschätzt. Beim *Experimentieren* werden Messreihen aufgenommen und in Tabellen und Graphen festgehalten. *Nachbereitung der Experimente*

dient dazu, den jeweiligen Zusammenhang durch Interpretation und Interpolation des Graphen zu begreifen und auf das Experiment anzuwenden und den Zusammenhang durch Transfer auf andere Situationen zu abstrahieren.

In einer Vergleichsstudie, in der obige Struktur ausschließlich mithilfe von Realexperimenten bzw. ausschließlich mit Simulationen umgesetzt wird, weist Lichti (2019) für beide Experimentiermedien einen Lerneffekt beim funktionalen Denken nach, der sich im Detail aber deutlich unterscheidet: Während Realexperimente sich vorteilhaft auf den Zuordnungsaspekt und die Verknüpfung mit der Realsituation auswirken, fördern Simulationen den Kovariationsaspekt besser und führen insgesamt zu signifikant höheren Zuwächsen beim funktionalen Denken (ebd.). Um die Vorteile beider Medien zu nutzen, untersucht die hier vorgestellte Studie eine geeignete Kombination von Realexperiment und Simulation: Die *Vorbereitung der Experimente* und das Aufnehmen der Messreihen beim *Experimentieren* geschehen mithilfe von Realexperimenten. Dies fördert die Fähigkeit zur Übersetzung von Realsituationen in die Mathematik und macht funktionale Zusammenhänge erlebbar. Erfasst und interpretiert werden die Daten in einer dem jeweiligen Realexperiment entsprechenden Simulation. An dieser Stelle wird der zeitaufwändige, aber für Schülerinnen und Schüler nicht besonders schwierige Repräsentationswechsel von Tabelle zu Graph (Bossé et al., 2011) entlastet. Ferner bietet die Simulation als Multi-Repräsentationssystem für die *Nachbereitung der Experimente* die Möglichkeit zur systematischen Variation und zur parallelen Beobachtung der Änderung der Messgrößen. Abschließend werden die Erkenntnisse rückbezogen auf das Realexperiment und durch Transfer weiter abstrahiert.

### **Alternative Kombination der Medien: Fokus auf Kovariation**

Durch die Aufnahme von Messwerten und das Erstellen von Wertetabellen liegt in dem oben vorgestellten Ansatz (Experimentalgruppe 1) der Fokus beim Experimentieren zunächst auf Wertepaaren und damit dem Zuordnungsaspekt. Da der Kovariationsaspekt durch seine Verknüpfung zum Variablenverständnis den Schülerinnen und Schülern deutlich mehr Schwierigkeiten bereitet (Malle, 2000), wird in einem zweiten Ansatz (Experimentalgruppe 2) explizit ein nicht-numerischer Zugang beim Experimentieren gewählt, um so direkt eine Auseinandersetzung mit dem Kovariationsaspekt zu ermöglichen: Beim *Vorbereiten der Experimente* nutzen die Schülerinnen und Schüler Simulationen, um die Änderungen der Größen im Experiment zu beobachten, in Worten zu beschreiben und abhängige sowie unabhängige Größe zu identifizieren. Anschließend lassen sie in der Simulation den Graphen zum Experiment erzeugen und formulieren Hypothesen zum Änderungsverhalten. In der anschließenden Phase des *Experimentierens* erstellen

die Schülerinnen und Schüler zu Realexperimenten Messreihen und stellen Hypothesen zu deren Änderungsverhalten auf. Mithilfe der bisherigen Hypothesen gruppieren sie die Realexperimente und Simulationen nach gleichartigem Änderungsverhalten. Die Messreihen zu den Realexperimenten werden dann in Simulationen in Tabelle und Graph festgehalten. Zur *Nachbereitung der Experimente* nutzen die Schülerinnen und Schüler die erzeugten Graphen und Tabellen, um ihre Hypothesen und Gruppierungen zu prüfen.

### **Studiendesign**

In einer vergleichenden Interventionsstudie (Pre-Post-Design) werden beide Ansätze gegenübergestellt, um folgende Forschungsfrage zu beantworten:

Zeigen sich bei der Bearbeitung der Aufgaben in beiden Experimentalgruppen durch die Fokussierung auf den Zuordnungsaspekt in Experimentalgruppe 1 bzw. den Kovariationsaspekt in Experimentalgruppe 2 Unterschiede bzgl. der Aspekte funktionalen Denkens?

Die Schülerdokumente der Intervention und die Videos von zwei Fokusgruppen werden mit qualitativer Inhaltsanalyse auf Basis des validierten Kategoriensystems von Lichti (2019) ausgewertet.

Zur Diagnose der Lerneffekte zum funktionalen Denken in beiden Ansätzen wurde ein Kurztest auf Basis des Tests zum funktionalen Denken von Lichti (2019) entwickelt. Er besteht aus 18 Items, die sich auf fünf Aufgabenkontexte verteilen. Jeder Aufgabenkontext beinhaltet geschlossene Aufgabenstellungen und eine offene Begründungsaufgabe. Die geschlossenen Aufgaben sind jeweils einem vorrangigen Aspekt funktionalen Denkens und einer Repräsentationsform zugeordnet (3 Zuordnung, 5 Kovariation, 5 Objekt). Der Test wurde mit Mathematik-Lehramtsstudierenden (1. Semester, Primar-/Sekundarstufe, N=234) sowie Schülerinnen und Schülern (Gesamtschule, Klassenstufen 5-11, N=100) im Oktober und November 2019 validiert. Bei gut der Hälfte der Schülerinnen und Schüler (N=52) wurden funktionale Zusammenhänge im Unterricht vorher noch nicht thematisiert.

### **Ergebnisse und Diskussion**

In der Studierendenstichprobe zeigen sich deutliche Deckeneffekte. Auch in der Schülerstichprobe sind die Lösungsraten der Items zum Zuordnungsaspekt hoch (s. Tabelle 1). Dies ist ein Hinweis darauf, dass der Aspekt Zuordnung wenig Schwierigkeiten bereitet. In der Schülerstichprobe zeigt der Test eine gute Reliabilität von  $\alpha = .82$ , die sich auch in der eindimensionalen Rasch-Modellierung bestätigt ( $EAP/PV = .81$ ).

Item	Re1	Re2	Gr1	Gr2	Gr3	Ba1	Ba2	Ba3	Ge1	Ge2	B11	B13	B14
FD	K	O	Z	K	K	Z	K	O	O	O	O	K	Z
Stud	.92	.61	.99	.98	.88	.99	.75	.94	.83	.93	.93	.65	.73
SuS	.62	.23	.76	.81	.46	.97	.36	.64	.39	.42	.65	.26	.41

Tab.: Lösungsraten des Kurztests zum funktionalen Denken

FD: zugeordneter Aspekt funktionalen Denkens (Zuordnung/Kovariation/Objekt)

Stud/SuS: Lösungsrate der Studierenden- (Stud) und der Schülerstichprobe (SuS)

Die dreidimensionale Struktur des Tests (Zuordnung/Kovariation/Objekt) findet sich mit Einschränkungen auch in den Daten wieder. Alle drei Dimensionen lassen sich reliabel mit dem Test erfassen ( $EAP/PV = .75 .81 .81$ ). Die Informationskriterien sprechen für das dreidimensionale Raschmodell, die drei Dimensionen weisen aber hohe Korrelationen untereinander auf ( $r > .90$ ). Der Test ist insgesamt zur Evaluation der beiden Interventionsansätze geeignet, ein für die drei Aspekte differenziertes Bild lässt sich allerdings erst mithilfe der qualitativen Analyse des Schülermaterials und der Videos der Bearbeitungsprozesse gewinnen. Im Rahmen einer Vorstudie (7.Klasse, Pre-Post-Design, März 2019, EG1/2 je N~20) wird nun überprüft, ob die beiden Ansätze bzgl. Zeitbedarf und Schwierigkeit vergleichbar sind.

## Literatur

- Bossé, M., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 6 (3), 113–133.
- Ganter, S. (2013). *Experimentieren – ein Weg zum funktionalen Denken. Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten*. Hamburg: Kovač.
- Hoffkamp, A. (2012). Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse. <http://dx.doi.org/10.14279/depositonce-3118>
- Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren* (103), 8–11.
- Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen. Ein schüler-zentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht* 60(6), 37-42.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* 10(1) 3-37.