

# Funktionales Denken fördern

## Computer-Simulationen oder gegenständliche Materialien nutzen?

Michaela Lichti, Jürgen Roth

Funktionales Denken ist grundlegend dafür, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht erfolgreich mit jeder Art von funktionalen Zusammenhängen arbeiten können. Die hier beschriebene Untersuchung setzt sich daher mit der Frage auseinander, wie eine umfassende Förderung des Funktionalen Denkens gestaltet sein sollte und ob bzw. auf welche Weise die Verwendung von Computer-Simulationen und gegenständlichen Materialien hierzu beitragen kann.

Funktionale Zusammenhänge sind ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Bereits in Jahrgangsstufe 5 werden sie implizit thematisiert. So müssen sich Schülerinnen und Schüler z. B. mit der Frage befassen, wie sich der Flächeninhalt eines Quadrats verändert, wenn man eine Seite verlängert. Explizit sind funktionale Zusammenhänge ab spätestens Jahrgangsstufe 8 nicht mehr aus dem Unterricht wegzudenken. Nach der Beschäftigung mit linearen Zusammenhängen folgen in Klasse 9 bereits die quadratischen, in Klasse 10 werden Exponential- und Logarithmusfunktionen zum Thema. Obwohl funktionale Zusammenhänge im Unterricht allgegenwärtig sind und trotz ihrer Bedeutung auch für den Alltag – man denke nur an die Tasse Kaffee, die abkühlt, und den Zusammenhang von Zeit und Temperatur beinhaltet – zeigen Studien immer wieder, dass Schülerinnen und Schüler nicht adäquat mit ihnen arbeiten können. Fehlvorstellungen wie zum Beispiel der Graphals-Bild-Fehler, der die Schülerinnen und Schüler dazu verleitet, einen Graphen als Bild statt als Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs zu interpretieren, stehen ihnen im Weg. Ihr Funktionales Denken, das für ein erfolgreiches Arbeiten mit funktionalen Zusammenhängen unum-

gänglich ist, scheint nicht entsprechend ausgebildet zu sein. Daher war es das Ziel der hier beschriebenen Studie, eine möglichst umfassende und effektive Förderung des Funktionalen Denkens zu gestalten und auf ihren Erfolg hin zu überprüfen. Die Förderung sollte möglichst früh zu Beginn der expliziten Thematisierung funktionaler Zusammenhänge im Mathematikunterricht einsetzen. So soll eine Grundlage für das weitere Arbeiten mit Funktionen geschaffen werden.

### Funktionales Denken

Funktionales Denken umfasst drei wesentliche Grundvorstellungen, die Lernende benötigen, um adäquat mit funktionalen Zusammenhängen arbeiten zu können (vgl. hierzu Hans-Jürgen Vollrath „Funktionales Denken“ in Journal für Mathematikdidaktik, Heft 10, 1989). Es handelt sich um die

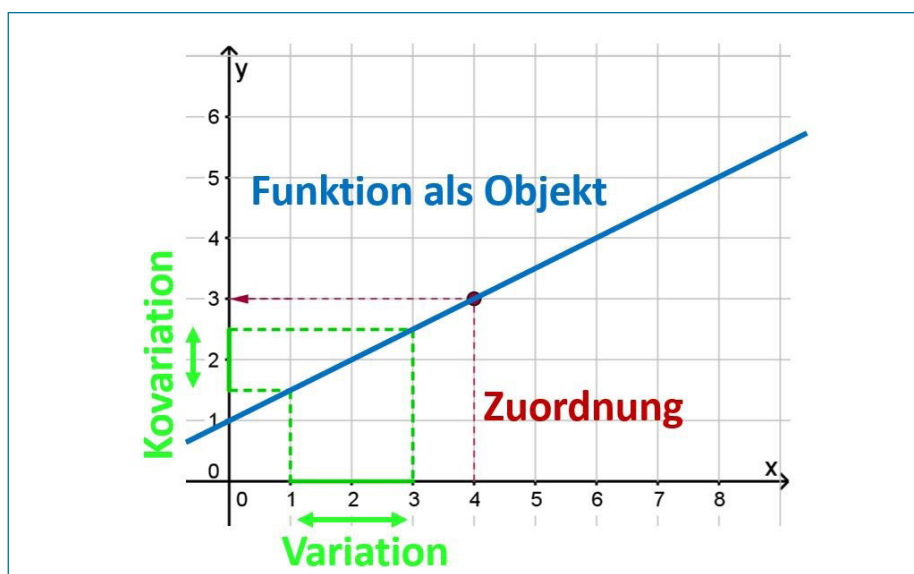
Grundvorstellungen Zuordnung, Kovariation und Funktion als Objekt (Abb. 1).

Der Zuordnungsaspekt umfasst dabei den Gedanken der Eindeutigkeit. Die Schülerinnen und Schüler sollen verstehen, dass jedem Element  $x$  der Definitionsmenge genau ein Element  $y$  der Wertemenge zugeordnet wird.

Kovariation beschreibt das Verständnis des Änderungsverhaltens: Wie ändert sich die abhängige Variable, wenn die unabhängige Variable verändert wird?

Die Funktion als Ganzes oder als Objekt zu erfassen, geschieht dann, wenn beispielsweise der Funktionsgraph in seiner Gänze interpretiert wird oder aber verschiedene Funktionen in ihrer algebraischen Darstellung addiert oder subtrahiert werden.

Um Funktionales Denken greifbar zu machen, ist es des Weiteren erforderlich, die verschiedenen Darstellungen für funktionale Zusammenhänge zu betrachten. Sind



1 | Die drei Grundvorstellungen Funktionalen Denkens

die Lernenden in der Lage, sowohl mit Graphen, Tabellen, Funktionsvorschriften und situativen Beschreibungen angemessen umzugehen, diese also zu lesen, zu interpretieren und eine Darstellung in eine andere zu übertragen, so kann dies als Hinweis für ein in adäquater Weise ausgebildetes Funktionales Denken gedeutet werden. Fördern – aber wie?

Eine Förderung des Funktionalen Denkens bereits in den unteren Jahrgangsstufen lässt sich mit Experimenten verwirklichen. Denn so, wie bei einem funktionalen Zusammenhang der unabhängigen Variablen durch Anwenden der Funktionsvorschrift eine abhängige Variable zugewiesen wird, wird zu einer Ausgangsgröße durch die Durchführung eines Experiments eine zugeordnete Größe erzeugt. Experimente kann man klassisch mit gegenständlichen Materialien durchführen. Gerade mit Blick auf die hinsichtlich des Bildungssystems gewünschte Digitalisierung muss man aber auch in Erwägung ziehen, Experimente auf den Bildschirm zu verlagern. Simulationen, erstellt mit einem Programm wie GeoGebra, machen dies möglich. Dabei ist der Einsatz beider Medien vielversprechend. Gegenständliche Materialien bieten die Möglichkeit, einen funktionalen Zusammenhang im wörtlichen Sinne zu begreifen. Man kann ganz real die unabhängige Variable verwenden, um die abhängige zu

generieren. Beispielsweise kann nach dem Einfüllen einer bestimmten Menge Wasser in ein Glas durch Messen die erreichte Füllhöhe bestimmt werden (Abb. 2a). Diese Informationen können dann in einer Tabelle gesammelt und in einen Graphen übersetzt werden.

Den Schülerinnen und Schülern sollte so besonders nachhaltig bewusst werden, aus welchen Werten ein Wertepaar bzw. der zugehörige Punkt im Funktionsgraphen sich zusammensetzt und wie ein solches Wertepaar überhaupt entsteht. Nicht zu vergessen ist auch der Spaß, den die Arbeit mit gegenständlichen Materialien mit sich bringt und der entsprechend zu Motivation führt.

Computer-Simulationen haben ebenfalls eine Reihe von Vorteilen für die Vermittlung des Verständnisses funktionaler Zusammenhänge. Eingebettet in ein dynamisches Mathematik-System wie GeoGebra lässt sich eine Simulation beispielsweise mit einem weiteren Graphikfenster vernetzen (Abb. 2b), in dem der zugehörige Graph des simulierten Zusammenhangs abgebildet wird.

Im Beispiel „Gefäße füllen“ erzeugen die Schülerinnen und Schüler den der Wassermenge zugeordneten Wert, die Höhe des Füllstands, nun nicht mehr durch die Vorgänge des tatsächlichen Einfüllens und Messens. Stattdessen wird durch ein Klicken auf den entsprechenden Button

(„+20 ml“, vgl. Abb. 2b) das Gefäß mit Wasser gefüllt. Durch Bewegen des Lineals mit der Maus kann dann auch die Füllhöhe in der Simulation gemessen werden. Es folgt das Erstellen einer Tabelle.

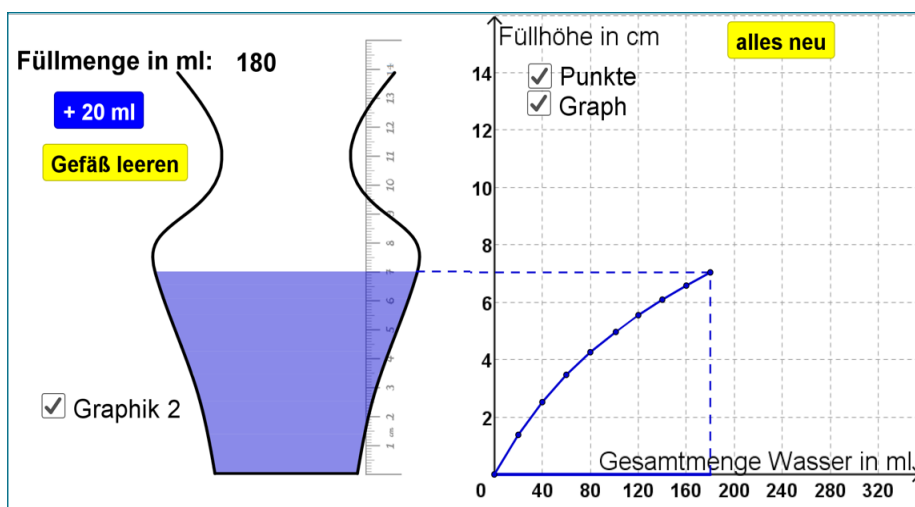
Die Vorgänge sind also vergleichbar, obwohl sie auf den Bildschirm verlagert wurden. Um die Vernetzung des Graphen mit der Simulation besonders deutlich zu machen und so den Fokus der Schülerinnen und Schüler direkt auf das Wesentliche zu lenken, können des Weiteren Fokussierungshilfen verwendet werden. Durch Verbindungslinien zwischen den zwei Fenstern und eine entsprechende Farbgebung wird kenntlich gemacht, wie die einzelnen Punkte zustande kommen, aus welchen Werten sie sich zusammensetzen bzw. wie die Werte entstanden sind. Auch hier ist zu hoffen, dass ein nachhaltiger Zusammenhang zwischen dem Ursprung der Wertepaare und ihrer Darstellung als Punkte entsteht.

Beide Medien scheinen daher geeignet, zur Förderung des Funktionalen Denkens eingesetzt zu werden.

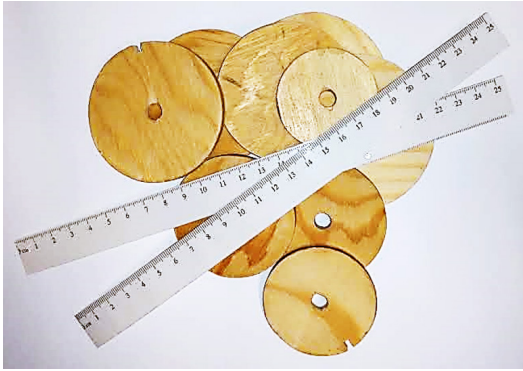
Ob aber Lernumgebungen, die Experimente mit gegenständliche Materialien oder Computer-Simulationen beinhalten, einen unterschiedlichen Lernerfolg im Funktionalen Denken erzielen, bleibt bis hierher offen. Dieser Frage wurde in einer entsprechend gestalteten Interventionsstudie in Jahrgangsstufe 6 nachgegangen.



2a | gegenständliches Material zum Erkunden des Zusammenhangs von Füllmenge und Füllhöhe



2b | Oberfläche der Simulation „Gefäße füllen“ mit zwei Graphikfenstern zur Vernetzung des Graphen mit der Simulation



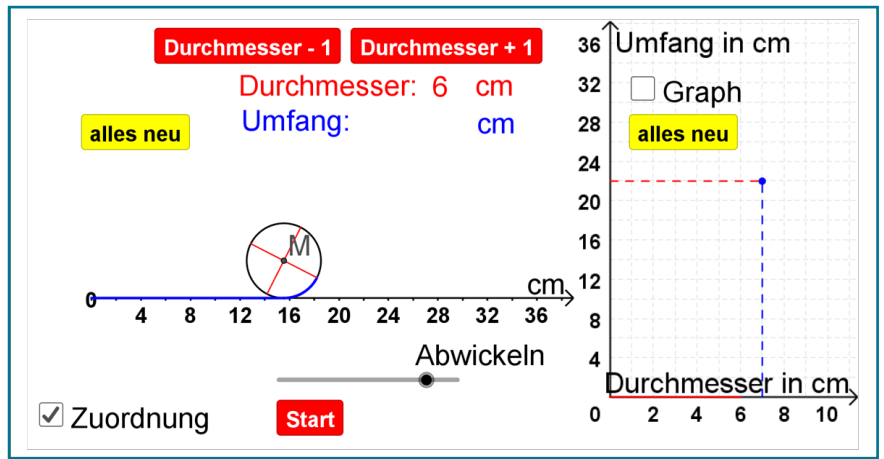
3a | Holzkreisscheiben zur Ermittlung von Durchmesser und Umfang

### Die Lernumgebung

Ziel der Lernumgebung sowohl unter Verwendung von gegenständlichen Materialien als auch von Computer-Simulationen ist es, den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, ihr Funktionales Denken in eigenständiger Arbeit ohne Unterstützung durch eine Lehrkraft zu schulen. Würden Lehrkräfte unterstützend eingreifen, wäre der Vergleich der beiden Lernumgebungen nicht mehr möglich.

Die Umgebung besteht daher aus einer Vielzahl an Arbeitsaufträgen, die die Lernenden durch insgesamt fünf Experimente realer bzw. digitaler Natur hindurchführen. Zu jedem Experiment gibt es eine Reihe von Aufgaben, die in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden müssen. Die Aufgaben unterteilen sich in die Bereiche (i) Vorbereiten, (ii) Experimentieren und (iii) Nacharbeiten. Unter den Bereich „Vorbereiten“ fallen Aufgaben zum Schätzen und Vermuten, der Bereich „Experimentieren“ unterteilt sich in Messreihen erstellen und Graphen zeichnen oder beobachten. „Nacharbeiten“ umfasst vier Unterpunkte: Punkte und Graphen verstehen, Zusammenhang begreifen, Anwenden, Transfer. Das erste Experiment, das den Zusammenhang von Durchmesser und Umfang eines Kreises thematisiert, beginnt entsprechend mit einer Schätzaufgabe.

Anhand von Kreisscheiben aus Holz (Abb. 3a) bzw. einer entsprechenden Abbildung sollen die Schülerinnen und Schüler schätzen, wie groß der Umfang zu einem gegebenen Durchmesser ist. Erfahrungsgemäß schätzen die Lernenden an dieser Stelle den Umfang deutlich zu klein. Durch den



3b | Oberfläche der Simulation „Kreise abwickeln“ mit zwei Graphikfenstern

so bei der Überprüfung durch Messen entstehenden kognitiven Konflikt soll Interesse geweckt und der Faktor 3.14, der den Zusammenhang von Durchmesser und Umfang charakterisiert, besonders eindrücklich vermittelt werden.

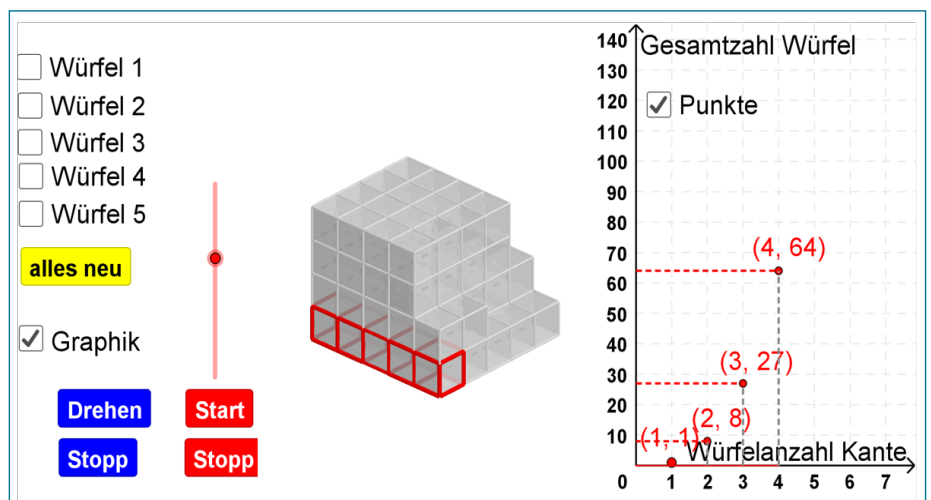
Der Vorgang des Messens ist in der realen und der digitalen Umgebung vergleichbar gestaltet. Die Lernenden sollen den Umfang der Kreise „abwickeln“. Hierzu rollen sie in der materialgestützten Lernumgebung die Holzscheiben tatsächlich an einem Lineal entlang, bis eine Umdrehung vollendet ist. Als Hilfestellung haben die Holzscheiben kleine Einkerbungen (vgl. Abb. 3a).

In der Simulation wird der Abrollvorgang durch ein Klicken ausgelöst. Es schließt sich in beiden Lernumgebungen das Erstellen einer Wertetabelle an. In der materialgestützten Lernumgebung werden die Schülerinnen und Schüler dann aufgefordert, basierend auf ihren Werten einen Graphen zu erstellen. In der simulationsgestützten

Umgebung wird der Graph den Schülerinnen und Schülern in Kombination mit der simulierten Situation präsentiert. Kreisscheibe für Kreisscheibe erscheint ein weiterer Punkt des Graphen (Abb. 3b).

Der Ablauf „Schätzen – Experimentieren – Wertetabelle – Graph“ ist auch Teil des Experiments „Gefäße füllen“ (Abb. 2a und b) sowie des Experiments „Würfel bauen“ (Zusammenhang der Anzahl kleiner Würfel an der Kante eines großen Würfels und der Gesamtzahl kleiner Würfel, aus denen der große Würfel besteht) (Abb. 4).

Besonders mit Blick auf das Würfelexperiment wird die Frage nach der Sinnhaftigkeit einer Verbindungslinie zwischen den einzelnen Punkten der Zuordnung thematisiert. Mittels eines weiteren Experiments zum Füllen von Gefäßen wird in einem weiterführenden Schritt der Zusammenhang des Durchmessers eines Glases und der Geschwindigkeit, mit der das gleichmäßig eingefüllte Wasser steigt, behandelt.



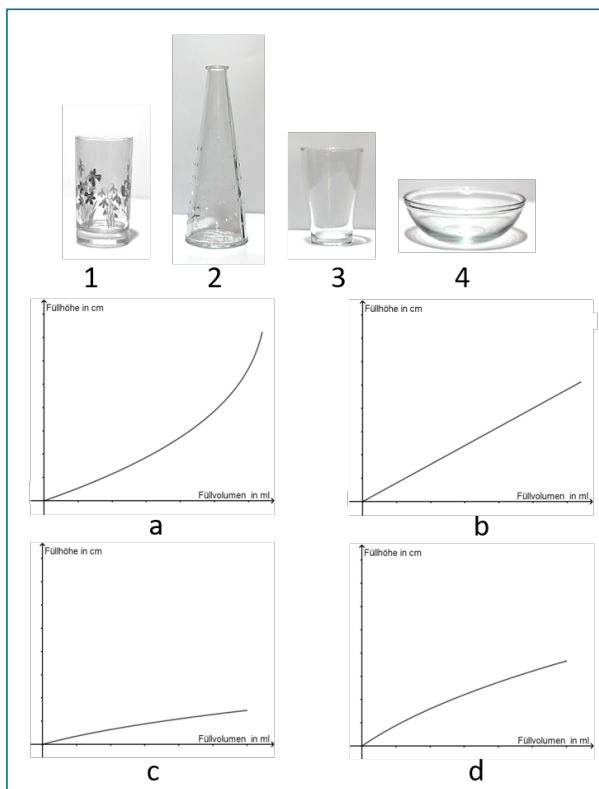
4 | Oberfläche der Simulation „Würfel bauen“

Den Abschluss bildet das Experiment „Bleistifte spitzen“, in dem der Anzahl der Spitzumdrehungen die verbleibende Länge des Stiftes zugeordnet wird (vgl. Artikel „Bleistiftspitzen“ von Holger Klapp in „Mathematik 5-10“, Heft 30). Es greift nochmals bereits gewonnene Erkenntnisse über lineare Zusammenhänge auf und vertieft die Idee der unterschiedlich starken Änderung mittels einer Transferaufgabe.

Zu jedem Kontext gibt es auch Anwendungs- und Transferaufgaben. Sie können ohne das Material oder die Simulation gelöst werden und sind daher in beiden Lernumgebungen völlig identisch. Hinsichtlich des Gefäße-Experiments muss beispielsweise als Transferaufgabe abschließend die Zuordnung verschiedener Füllgraphen zu den Abbildungen der zugehörigen Gefäße vorgenommen und begründet werden (Abb. 5).

### Die Studie

Um herauszufinden, wie groß der Lernerfolg mit denen von uns gestalteten Lernumgebungen im Funktionalen Denken ist und ob dieser je nach Medium eventuell unterschiedlich ausfällt, haben wir im Sommer 2016 elf 6. Klassen von vier Gymnasien in Rheinland-Pfalz über vier aufeinanderfolgende Schulstunden in Einzelarbeit an unseren Arbeitsaufträgen arbeiten und die Experimente durchführen lassen. Die Hälfte jeder Klasse verwendete gegenständliche Materialien, die andere Hälfte nutzte Computer-Simulationen. Insgesamt handelte es sich um 234 Schülerinnen und Schüler. Der Lernerfolg wurde mit einem speziell für diese Studie entwickelten Test zum Funktionalen Denken ermittelt, den die Lernenden vor und nach der Intervention bearbeiteten. Basierend auf diesem Test konnte jedem Kind ein Wert für Funktionales Denken zugewiesen werden, der den Vergleich des Lernerfolgs durch die beiden Lernumgebungen ermöglichte. Die Auswertung ergab, dass mit beiden Lernumgebungen ein großer und signifikanter Zuwachs des Funktionalen Denkens erzielt werden kann. Der Unterschied im Zuwachs des Funktionalen Denkens zwischen den Lernumgebungen war ebenfalls groß



### 5 | Transferaufgabe zum Experiment „Gefäße füllen“

Hinweis: Sämtliche Aufgaben und Simulationen finden sie in Form eines GeoGebra-Books unter <https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB>.

und signifikant. Simulationen erzeugen einen deutlich stärkeren Zuwachs des Funktionalen Denkens als das Arbeiten mit gegenständlichen Materialien.

### Resümee

Basierend auf unseren Ergebnissen lässt sich schlussfolgern, dass sowohl gegenständliche Materialien als auch Computersimulationen dafür geeignet sind, das Funktionale Denken von Sechstklässlern zu fördern. Jedoch scheint sich der Einfluss von Computer-Simulationen positiver auszuwirken. Eine im Anschluss an die Überprüfung der Wirksamkeit der Lernumgebungen durchgeführte Analyse der schriftlichen Schülerantworten zeigte jedoch, dass Material und Simulationen unterschiedliche Grundvorstellungen des Funktionalen Denkens anzusprechen scheinen. So fanden sich Hinweise darauf, dass der Einsatz von Materialien die Kinder besonders auf die Eindeutigkeit der Zuordnung blicken lässt. Dies lässt sich mit dem bewussten und aktiven Generieren der abhängigen zu den unabhängigen Werten gut erklären. Simulationen scheinen den Schülerinnen und Schülern hingegen die Kovariation besonders vor Augen zu führen und sie stärker dazu zu ermuntern und auch zu befähigen, mit der Repräsentationsform Graph zu arbeiten. Dies lässt sich eventuell durch die animierte Darstellung des Graphen in Zusam-

menhang mit der Simulation begründen. Als Konsequenz unserer Studie muss man daher festhalten, dass für eine umfassende Förderung des Funktionalen Denkens beide Medien in entsprechender Weise kombiniert werden sollten.

Zu empfehlen wäre ein Einstieg mittels eines realen Experiments, das die Motivation und das Interesse der Schülerinnen und Schüler weckt und zunächst verdeutlicht, was Funktionen tun: Sie ordnen einem Wert der unabhängigen Variablen genau einen zugehörigen Wert der abhängigen Variablen zu. Besonders deutlich wird dies am Beispiel des Gefäße Füllens: Durch Einfüllen einer festen Menge Wasser (unabhängige Variable) erzeugt man eine eindeutige Füllhöhe (die abhängige Variable). Aufsetzend auf ein solch reales Experiment kann man eine simulierte Version dieses Experiments verwenden, um den Zusammenhang von Graph und Situation sichtbar zu machen. So kann ein Fokus auf die Kovariation gelegt werden, da die Änderung sowohl im Graphen als auch in der Simulation nachverfolgbar wird. Basierend auf dem dann vorliegenden Graphen lassen sich Fragen zur Funktion als Objekt anschließen. Durch das so ermöglichte Ineinandergreifen beider Medien und damit ihrer Stärken lässt sich eine Grundlage für ein umfassendes Funktionales Denken und damit den adäquaten Umgang mit funktionalen Zusammenhängen legen.