

Computer-Simulationen oder gegenständliche Materialien – Was fördert funktionales Denken besser?

Funktionale Zusammenhänge sind grundlegend für den Mathematikunterricht in jeder Jahrgangsstufe, sie sind relevant für viele andere Fächer und natürlich sind sie auch Teil unseres Alltags. Trotzdem zeigen Untersuchungen immer wieder, dass Schülerinnen und Schülern (im Folgenden: SuS) das Denken in funktionalen Zusammenhängen (funktionales Denken) äußerst schwer fällt. Es kommt zu Fehlvorstellungen und Fehlinterpretationen (Leinhardt et al., 1990), die Fixierung auf syntaktische Aspekte fällt immer wieder auf und nicht zuletzt gelingt es SuS oft nicht, Vorstellungen (vgl. *concept image*, Tall & Vinner, 1981) zum Begriff Funktion zu entwickeln, die mit der allgemein akzeptierten Definition (*concept definition*, ebd.) kompatibel sind. Eine Förderung des funktionalen Denkens von Anfang an (Klasse 6) scheint unabdingbar und unsere multimediale Welt bietet verschiedene Möglichkeiten, dies zu tun. So lassen sich zum einen gegenständliche Materialien verwenden, um im Experiment Erfahrungen zu funktionalen Zusammenhängen zu sammeln und zu reflektieren. Zum anderen kann man aber auch Computer-Simulationen nutzen, die das Experimentieren auf den Bildschirm verlagern. Hier stellt sich die Frage, ob der Umgang mit diesen beiden Medien einen unterschiedlichen Effekt auf die Entwicklung des funktionalen Denkens von SuS hat. Gerade mit Blick auf die immer mehr voranschreitende Digitalisierung unserer Gesellschaft sollte man dieser Fragestellung besonders sorgfältig nachgehen, um zu verhindern, dass ein solch grundlegendes mathematisches Thema wie funktionale Zusammenhänge nur deshalb mittels neuer Medien unterrichtet wird, weil deren Verwendung gerade „in“ ist.

Theoretischer Hintergrund

Funktionales Denken setzt sich aus drei wesentlichen Aspekten zusammen: Zuordnung, Änderungsverhalten und Funktion als Objekt (Vollrath, 1989). Der Zuordnungsaspekt umfasst, dass jedem Element aus der Definitionsmenge genau ein Element aus der Wertemenge zugeordnet wird. Änderungsverhalten beschreibt die Variation der unabhängigen Variablen und die davon abhängige Kovariation (Malle, 2000) der abhängigen Variablen. Der Objektaspekt nimmt die Funktion als Ganzes in den Blick. Es fällt darunter z.B. das Wissen, dass auf Funktionen Aktionen wie beispielsweise die Addition angewendet werden können.

Sowohl die Arbeit mit gegenständlichen Materialien als auch die Verwendung von Simulationen weisen ganz eigene Vorteile für die Förderung funktionalen Denkens auf. Gegenständliche Materialien ermöglichen es den SuS,

funktionale Zusammenhänge zu erleben (Ludwig & Oldenburg, 2007). Man kann den Zusammenhang im wörtlichen Sinne begreifen und schafft so eine ganz besondere Verknüpfung zwischen Realität und mathematischer Darstellung. Das Lernen wird nachhaltig (vom Hofe, 2003), SuS verinnerlichen Ergebnisse und Arbeitsmethoden besser (Vollrath, 1987). Des Weiteren kommt es zu einer vielfältigen Deutung graphisch und tabellarisch dargestellter Zusammenhänge (Barzel & Ganter, 2010). Computer-Simulationen bzw. die Verwendung von dynamischer mathematischer Software macht es möglich, funktionale Zusammenhänge auf unterschiedliche Art und Weise kennenzulernen. Durch systematische Variation (Roth, 2008) von Variablen lassen sich Veränderungen in Graphen, Tabellen und Funktionsvorschriften direkt sichtbar machen. Die Verwendung des Multi-Repräsentationssystems (Roth, 2008) erleichtert den Wechsel und die Verknüpfung von unterschiedlichen Darstellungsformen. Die Simulation kann so Mittler zwischen SuS und mathematischen Phänomenen werden (Dankwerts et al., 2000).

Methodik

Nach der Entwicklung eines Tests zum funktionalen Denken wurden zunächst theoriebasiert Kontexte für die Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen ausgewählt, anhand derer die SuS ihr funktionales Denken üben können. Die Auswahlkriterien waren die Möglichkeit, den Kontext sowohl mit gegenständlichen Materialien als auch mit einer Computer-Simulation darstellen zu können und damit erkundbar zu machen, das Vorhandensein unterschiedlicher funktionaler Zusammenhänge und die Durchführbarkeit – besonders der Umgang mit den gegenständlichen Materialien – in Jahrgangsstufe 6. Es wurden vier Kontexte ausgewählt: Der Zusammenhang von Durchmesser und Umfang eines Kreises, der Zusammenhang von Kantenlänge eines Würfels und seinem Volumen, der Zusammenhang von Füllmenge und Füllhöhe eines Gefäßes und der Zusammenhang von der Anzahl der Umdrehungen beim Spitzen eines Bleistifts und dessen verbleibender Länge. Im Rahmen einer Vorstudie wurde überprüft, ob die erstellten Realexperimente, Simulationen und Aufgaben für Kinder im Alter von 11-12 geeignet sind und ob sich die Bearbeitungszeit abhängig von der Wahl des Mediums unterscheidet. Es stellte sich heraus, dass die SuS unabhängig von der Wahl des Mediums dieselbe Zeit zur Lösung der Aufgaben benötigen. Anknüpfend an die Resultate der Vorstudie wurde kurz vor Ende des Schuljahres 2015/16 eine Interventionsstudie im Pre-Post-Control-Group-Design durchgeführt (N = 282). Die SuS aus 11 Klassen wurden randomisiert auf Klassenebene auf zwei Experimentalgruppen verteilt, zwei weitere Klassen bildeten die Kontrollgruppe.

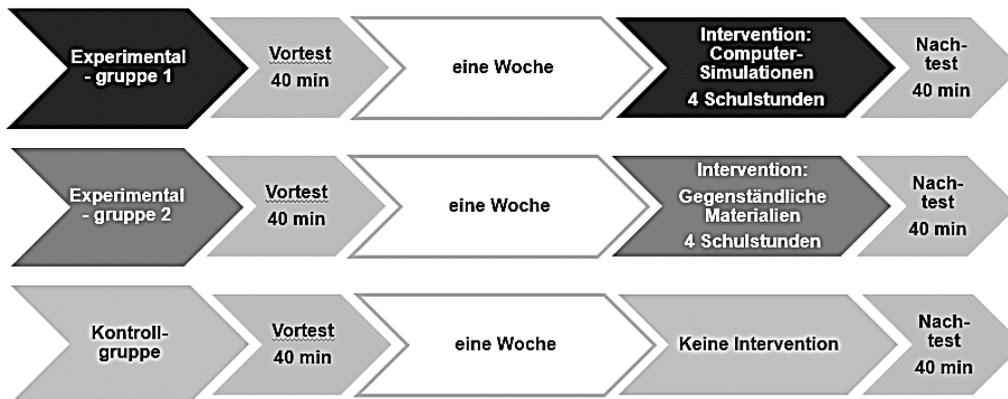


Abb. 1: Design der Interventionsstudie

Die SuS, die an der Intervention teilnahmen, arbeiteten 4 Schulstunden in Einzelarbeit an äquivalenten Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen, lediglich das Medium, das sie verwendeten, unterschied sich. Direkt im Anschluss an die Intervention wurde der Nachtest bearbeitet. Ausgewertet wurden die in Vor- und Nachtest erhobenen Daten mittels Item-Response-Theorie. Mittels virtueller Personen wurden die Itemschwierigkeiten, mittels eines 2-dim. Rasch-Modells und 10 Plausible Values die Personenfähigkeitswerte geschätzt (Rost, 2004). Im Anschluss wurde eine mixed ANOVA (between-Faktor: Intervention, within-Faktor: Zeitpunkt) (Field et al., 2013) zum Vergleich des funktionalen Denkens in Vor- und Nachtest berechnet.

Ergebnisse

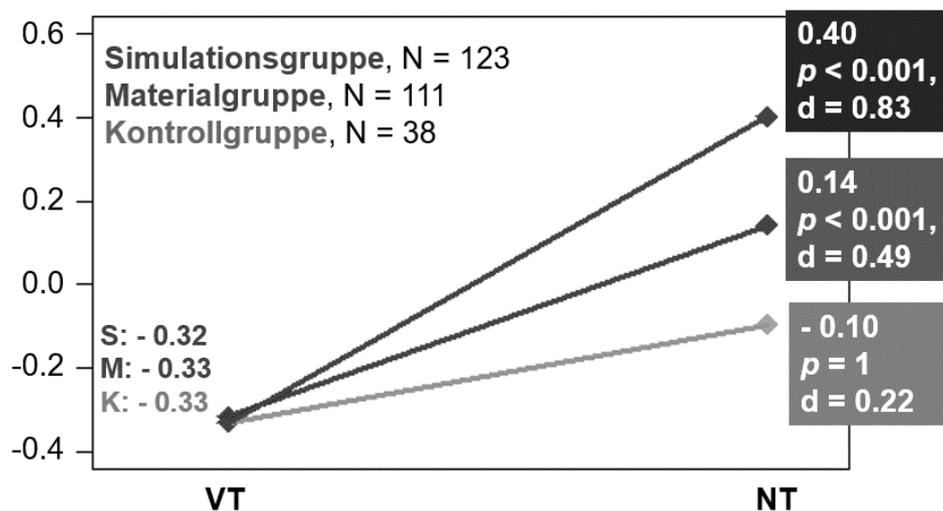


Abb. 2: Veränderung des funktionalen Denkens nach Experimental- bzw. Kontrollgruppe in Logits

Die Auswertung der Daten liefert einen signifikanten Haupteffekt des Zeitpunkts ($F(1, 22.71) = 68.16, p < .001, \eta^2 = .089$) und einen ebenfalls signifikanten Interaktionseffekt von Zeitpunkt und Intervention ($F(1, 23.69) = 7.65, p = .003^{**}, \eta^2 = .044$). Sowohl die Material- als auch die Simulationsgruppe steigert ihre Fähigkeit zum funktionalen Denken signifikant (Material:

$p < 0.001$, Cohens' $d = 0.49$, Simulation: $p < 0.001$, Cohens' $d = 0.83$), die Kontrollgruppe hingegen nicht ($p = 1$, Cohens' $d = 0.22$). Auch der Zuwachs des funktionalen Denkens der Experimentalgruppen unterscheidet sich signifikant zu Gunsten der Simulationsgruppe ($p < 0.0001$, $diff = 0.25$).

Diskussion und Ausblick

In unserem konkreten Setting stellen sich Simulationen als Mittel der Wahl dar. Es handelt sich bei ihrer Verwendung damit keinesfalls um eine Moderscheinung sondern um eine sinnvolle und zielführende Gestaltung des Mathematikunterrichts im Rahmen funktionaler Zusammenhänge. Als nächstes gilt es zu untersuchen, wie sich dieses Ergebnis erklären lässt. Hierzu werden wir die Arbeitsmaterialien der SuS, die uns aus der Intervention vorliegen, mittels qualitativer Inhaltsanalyse untersuchen. Ziel ist es, Unterschiede in den Lernprozessen der SuS zu identifizieren.

Literatur

- Barzel, B., & Ganter, S. (2010). Experimentell zum Funktionsbegriff. *Praxis der Mathematik*, 52(31), 14–19.
- Danckwerts, R., Vogel, D., & Maczey, D. (2000). Ein klassisches Problem – dynamisch visualisiert. *MNU*, 53(6), 342–346.
- Field, A., Miles, J., & Field, Z. (2013). *Discovering statistics using R* (Reprint). Los Angeles, California: Sage.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing. Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematik lehren*. (141), 4-11.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*. (103), 8–11.
- Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion* (Psychologie Lehrbuch). Bern: Huber.
- Roth, J. (2008). Systematische Variation: Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. *mathematik lehren*. (146), 17–21.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Vollrath, H.-J. (1978). Schülerversuche zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, 24(4), 90-101.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *JMD*. (10), 3–37.
- Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *mathematik lehren*. (118), 4–8.