JÜRGEN ROTH

Zum y-Wert den x-Wert finden

Trigonometrische Funktionen umkehren

LERNGRUPPE: 10. – 12. Klasse

IDEE: Wie bekomme ich zu einem Sinuswert den zugehörigen Winkel? Ist der erste gefundene Wert immer die erwartete Winkelgröße? Die Idee der Umkehrung funktionaler Zusammenhänge hilft bei der Lösung.

MATERIAL: GeoGebra-Book im Download und unter geogebra.org/m/zDX4NKR2

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen (die Arcusfunktionen) kommen in den Lehrplänen Mathematik nicht vor. Trotzdem werden mit dem Taschenrechner zu Werten der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktionen mit Hilfe der ominösen Tasten $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ und $\boxed{\tan^{-1}}$ „zugehörige" Winkelgrößen berechnet. Wie kann man diese zugeordneten Winkelgrößen auch selbst finden? Wird so wirklich immer die Größe des interessierenden Winkels ausgegeben? (Man beachte die Periodizität der trigonometrischen Funktionen, die besonders gut am Einheitskreis deutlich wird.)

Antworten zu diesen und weiteren Fragen liefert das in allen Lehrplänen verankerte Konzept der Umkehrfunktion. Es ist aus der 9. Jahrgangsstufe bekannt. Dort wird die Wurzelfunktion als Umkehrung des rechten Asts der Quadratfunktion erarbeitet. Das Konzept trägt sehr viel weiter und kann, wenn es hier noch einmal aufgefrischt wird, u.a. Grundlage der Erarbeitung der Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunkton sein.

Idee der Unterrichtsstunde

Die kurze Einführung zeigt: Grundvorstellungen dazu, was etwa $\boxed{\sin^{-1}}$ eigentlich bedeutet, auch im aktuellen Unterricht unumgänglich sind. Die hier vorgestellten dynamischen Visualisierungen liefern alles, was benötigt wird, um die notwendigen Grundvorstellungen in einem Unterrichtsgespräch anzubahnen bzw. zu reaktivieren.

Grundvorstellungen zur Umkehrfunktion reaktivieren

Bei einer Funktion wird jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet. Am Graphen der entsprechenden Funktion kann man das erkenne, indem man von einer beliebigen Stelle (x-Wert) der x-Achse parallel zur y-Achse bis zum Graphen läuft. Wenn man den Graphen auf diese Weise für jeden x-Wert genau einmal trifft, handelt es sich um eine Funktion. Wenn man nun vom getroffenen Punkt auf dem Funktionsgraph parallel zur x-Achse bis zur y-Achse läuft, so erreicht man den, dem x-Wert zugeordneten, y-Wert der Funktion. In **Abb. 1** ist das exemplarisch für die Quadratfunktion dargestellt.

Interessiert man sich andererseits für die Umgekehrte Zuordnung, also dafür, welcher *x*-Wert einem bestimmten *y*-Wert zugeordnet wird, dann läuft man im Graph vom auf der *y*-Achse gewählten *y*-Wert parallel zur *x*-Achse bis zum Graph und anschließend parallel zur *y*-Achse bis zur *x*-Achse. Dort trifft man auf den zugehörigen *x*-Wert. Bei der Quadratfunktion stellt man dabei, wie in **Abb. 2** dargestellt, schnell fest, dass für die meisten *y*-Werte gleich zwei zugehörige *x*-Werte existieren. Um auch für diese Zuordnung die Eindeutigkeit zu gewährleisten, muss man sich für einen der beiden Äste der Normalparabel entscheiden. In der Mathematik hat man sich hier normativ auf den rechten Ast, der im I. Quadranten verläuft, festgelegt.

Wichtige Grundvorstellungen zu Umkehrfunktionen sind also, dass (1) zu einer vorgegebenen Funktion die umgekehrte Zuordnung, also

- am Graph, der Weg von der *y*-Achse zur *x*-Achse,
- in der Tabelle, die zeilenweise Zuordnung vom *y*-Wert zum *x*-Wert,
- in der Funktionsgleichung, „der" aus einem *y*-Wert berechenbare *x*-Wert

interessiert und (2) man den Definitionsbereich der Ursprungsfunktion häufig einschränken muss, damit es sich bei der umgekehrten Zuordnung wieder um eine Funktion handelt, die Zuordnung also eindeutig ist. Diese beiden Grundvorstellungen müssen bei jedem Versuch, zu einer „neuen" Funktion eine Umkehrfunktion zu finden, reaktiviert werden. Dies kann durch das Dynamische Arbeitsblatt „Umkehrfunktion" **(vgl. das GeoGebra-Book)** unterstützt werden.

Keine Grundvorstellung ist das anschließend nur wegen Darstellungskonventionen (die unabhängige Variable wird an der *x*-Achse angetragen; Tabellen werden von links nach rechts bzw. von oben nach unten gelesen; die abhängige Variable in einer Funktionsgleichung ist üblicherweise x) übliche Vertauschen der Variablen *x* und *y*.

Dynamische Visualisierung „TRIGUM"

Zur Erarbeitung der Umkehrfunktion der Sinusfunktion wird das dynamische Arbeitsblatt „Trigonometrische Funktionen umkehren (TRIGUM)" genutzt. In TRIGUM wird zunächst soweit am Schieberegler „*sin*" gezogen, bis der Graph der Sinusfunktion
$x \mapsto \sin(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$
angezeigt wird.

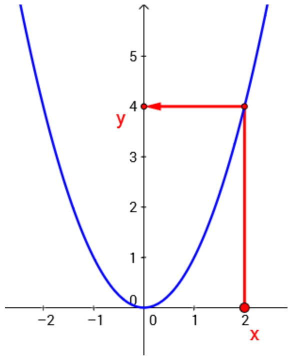


Abb. 1: Zu einem *x*-Wert den zugeordneten *y*-Wert im Graph der Quadratfunktion finden.

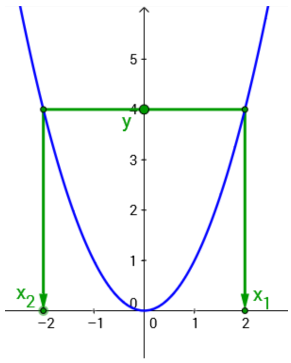


Abb. 2: Zu einem *y*-Wert den bzw. die zugeordneten *x*-Wert(e) im Graph der Quadratfunktion finden.

Eindeutige Zuordnung

Ausgangspunkt ist die Wiederholung der Tatsache, dass die Sinusfunktion als Funktion eine eindeutige Zuordnung ist, dass also jeder Winkelgröße (im Bogenmaß) genau ein Sinuswert zugeordnet wird. Dies können Schüler/innen anhand von TRIGUM über das Kontrollkästchen „Funktionstest" in Partnerarbeit überprüfen und diskutieren. Dadurch wird im Koordinatensystem eine Parallele zur *y*-Achse eingeblendet, die auf jeden beliebigen *x*-Wert gezogen werden kann (**Abb. 3**). Da für jeden *x*-Wert genau ein Schnittpunkt mit dem Graphen der Sinusfunktion existiert, handelt es sich um eine eindeutige Zuordnung, eine Funktion.

Umkehrbar?

Ausgehend von der Suche nach Winkelgrößen, die zu einem bekannten Sinuswert gehören, stellt sich die Frage, ob die Sinusfunktion umkehrbar ist, d.h. ob jedem Sinuswert genau eine Winkelgröße zugeordnet wird. Dies können Schüler/innen in TRIGUM anhand des Kontrollkästchens „Umkehrbarkeitstest" in Partnerarbeit überprüfen und diskutieren. Die damit im Koordinatensystem eingeblendete Parallele zur *x*-Achse, die auf jeden beliebigen *y*-Wert gezogen werden kann, schneidet den Funktionsgraphen für jeden *y*-Wert im Intervall [-1;1] unendlich oft (**Abb. 3**). Damit wird deutlich, dass die Sinusfunktion als Ganzes nicht umgekehrt werden kann, sondern für diesen Zweck auf ein Intervall eingeschränkt werden muss.

Gegebenenfalls kann diese, aus der Periodizität der trigonometrischen Funktionen folgende Tatsache zur Vertiefung im Unterrichtsgespräch auch noch einmal am Einheitskreis visualisiert und diskutiert werden. Dazu werden die Schüler/innen aufgefordert zu vorgegebenen Sinuswerten möglichst viele Winkel zu finden, denen dieser Sinuswert zugeordnet wird. Zur Kontrolle ihrer Überlegungen oder ggf. zur Unterstützung bei der Ideenfindung können die Schüler/innen das dynamische Arbeitsblatt „Einheitskreis" (vgl. **Abb. 9**) verwenden.

Umkehrbare Intervalle

Anschließend werden die Schüler/innen aufgefordert in Partnerarbeit nach Intervallen zu suchen, in denen die Sinusfunktion umkehrbar ist. Ihre Ergebnisse können sie mit TRIGUM, nach Ziehen am Schieberegler „sin" bis zur nächsten Rasterung, überprüfen. Dadurch wird ein Intervall der Länge π auf der *x*-Achse ausgegeben (**Abb. 4**). Dieses kann an seiner linken Grenze mit der Maus gefasst und beliebig verschoben werden. Über dem Intervall wird der zugehörige Abschnitt des Graphen der Sinusfunktion fett hervorgehoben. Beim Verschieben des Intervalls können die Schüler/innen beobachten und begründen, in welchen Lagen des Intervalls der entsprechende Abschnitt der Funktion umgekehrt werden kann. Dabei suchen die Schüler/innen nach Abschnitten, bei denen der zugehörige Teilgraph nur einen Schnittpunkt mit jeder Parallelen zur *x*-Achse zwischen –1 und 1 besitzt (**Abb. 4** und **5**).

Festlegung auf das Intervall [-π/2;π/2]

Mit der Klasse wird nun im Unterrichtsgespräch thematisiert, dass die Mathematiker sich für den Abschnitt entschieden haben, der möglichst nah am Koordinatenursprung liegt (vgl. **Abb. 5 und 6**), also das Intervall [-π/2;π/2]. Diese Entscheidung ist analog zu der bei der Quadratfunktion für den rechten Ast der Normalparabel bzgl. der Umkehrung zur Wurzelfunktion. Auch diese Entscheidung wurde normiert.

Betrachtet man diesen Abschnitt genauer (vgl. **Abb. 6**), dann wird deutlich, dass den Werten der Sinusfunktion im Intervall [-1;1] ausschließlich Winkelgrößen aus dem Intervall [-π/2;π/2] (bzw. im Gradmaß zwischen -90° und 90°) zugeordnet werden. Nur Winkel aus diesem Intervall werden folglich von Taschenrechner beim Benutzen der Taste $\boxed{\sin^{-1}}$ ausgegeben. Interessieren Winkelgrößen außerhalb dieses Bereichs, so muss man sich diese aus dem bekannten Verlauf des Graphen der Sinusfunktion und ihrer Periodizität, oder am Einheitskreis herleiten.

Graph der Umkehrfunktion

An dieser Stelle könnte man aufhören. Will man aber den Graphen der „Umkehrfunktion" der Sinusfunktion thematisieren, dann muss – Analog zur Herleitung des Graphen der Wurzelfunktion – noch darüber gesprochen werden, dass man den Definitionsbereich einer Funktion üblicherweise auf der *x*-Achse und den Wertebereich auf der *y*-Achse eines Koordinatensystems aufträgt. Deswegen spiegelt man das gesamte Koordinatensystem und damit den Graphen an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten, die in TRIGUM über das Kontrollkästchen „Winkelhalbierende (I, III)" ausgegeben werden kann. Bei dieser Spiegelung wird die *y*-Achse auf die *x*-Achse abgebildet und umgekehrt. Durch Ziehen am Schieberegler „sin" bis zur nächsten Rasterung, wird das Spiegelbild des ausgewählten Abschnitts der Sinusfunktion zusätzlich ausgegeben (**Abb. 7**). Wird der Schieberegler „sin" schließlich bis zum rechten Anschlag gezogen, dann wird nur noch der Graph der „Umkehrfunktion" der Sinusfunktion (also der Graph der Arcussinusfunktion) dargestellt (**Abb. 8**).

Die Spiegelung der Sinusfunktion, bzw. deren gewählter umkehrbarer Abschnitt an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten des Ko-

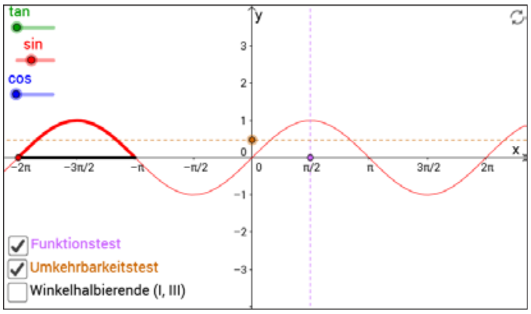
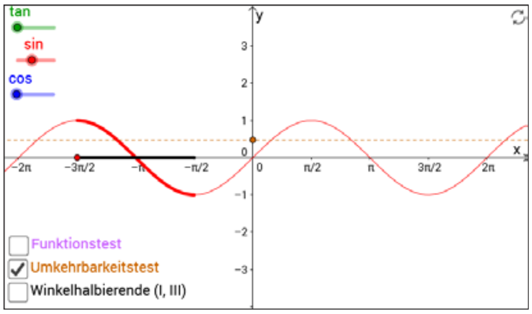


Abb. 3: Funktions- und Umkehrbarkeitstest

Abb. 4: Intervall der Länge π und zugeordneter Teilgraph



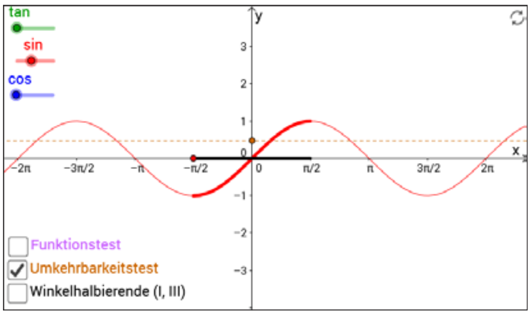
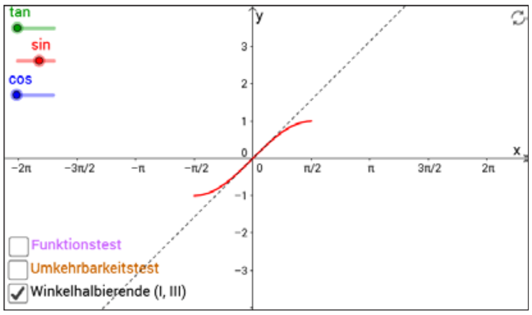


Abb. 5: Auswahl eines umkehrbaren Abschnitts des Graphen

Abb. 6: Normierter umkehrbarer (Teil-) Graph



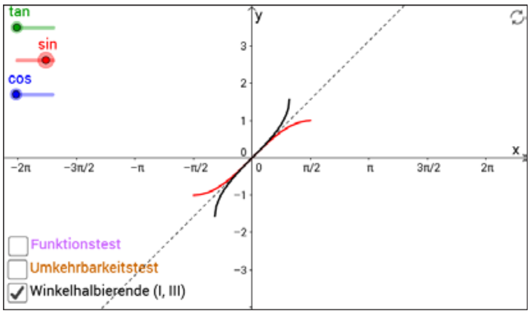
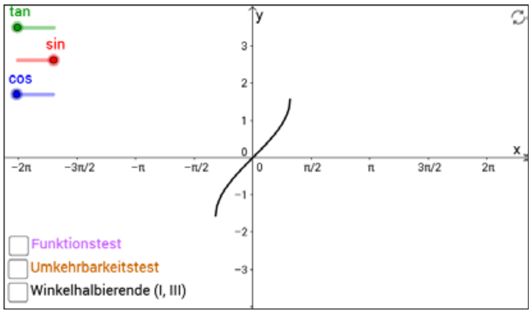


Abb. 7: Spiegelung an Winkelhalbierender (I./III. Quadrant)

Abb. 8: Graph der Umkehrfunktion



ordinatensystems kann im dynamischen Arbeitsblatt „Achsen tauschen (ACHTAU)" als räumliche Drehung des gesamten Koordinatensystems einschließlich des Graphen um diese Winkelhalbierende realisiert werden. Dazu ist zunächst folgender Befehl in die Eingabezeile für den Funktionsterm $f(x)$ zu schreiben:

`Funktion[sin(x),-pi/2,pi/2]`

Dadurch wird der Graph der Funktion $sin(x)$ nur im abgeschlossenen Intervall $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ausgegeben. Durch Ziehen am Schieberegler wird dieser Graph zusammen mit dem gesamten Koordinatensystem um die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten gedreht.

Umkehrfunktion als wesentliches Konzept

Hier wurde die Vorgehensweise zur Auffindung einer Umkehrfunktion zu einem Abschnitt einer vorgegebenen Funktion exemplarisch an der „Umkehrfunktion zur Sinusfunktion" erläutert. Die entsprechenden Schritte zu den „Umkehrfunktionen zur Kosinus- bzw. Tangensfunktion" sind im dynamischen Arbeitsblatt „Trigonometrische Funktionen umkehren (TRIGUM)" ebenfalls über die zugehörigen Schieberegler abrufbar. Das Konzept der Umkehrfunktion ist aber deutlich umfassender. Es ermöglicht das Erschließen und beweisen von Eigenschaften wichtiger Funktionen, wie etwa der Logarithmusfunktion, durch zurückführen auf bekannte Funktionstypen. Man macht sich dabei zu Nutze, dass Funktionen und ihre Umkehrfunktionen jeweils bzgl. der Eigenschaften im Definitions- und Wertebereich gerade vertauscht sind.

Mit den hier vorgestellten dynamischen Arbeitsblättern können Grundvorstellungen zur Umkehrung von Funktionen und speziell zu den Ausgaben der Taschenrechner beim Nutzen der Tasten $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ und $\boxed{\tan^{-1}}$ erarbeitet werden. Sie dient damit als dynamische Verständnisgrundlage, die ihr Potential allerdings nur entfaltet, wenn das, was man beobachten kann, sehr genau analysiert wird. Hier sind wir als Lehrpersonen gefragt, wenn es darum geht geeignete Reflexionsfragen zu stellen und Querbezüge herzustellen.

Hinweis

Alle genannten dynamischen Arbeitsblätter sind Bestandteil des GeoGebra-Books „Umkehrfunktionen". Sie können es im Download-Bereich herunterladen oder ~~unter~~ hier abrufen: https://geogebra.org/m/zDX4NKR2

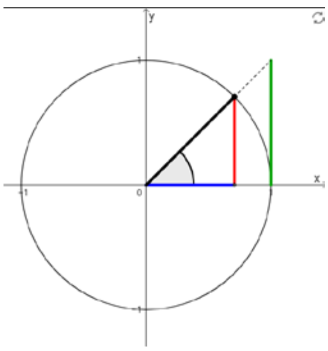


Abb. 9: Einheitskreis