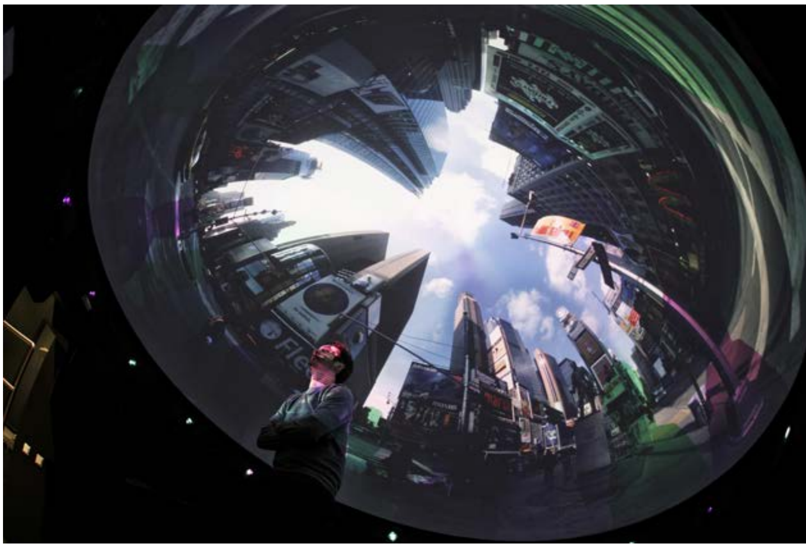


Mathematatik im Raum

Operieren mit 3D-Objekten und ihren Darstellungen

Das Operieren mit geometrischen Objekten im dreidimensionalen Raum stellt eine besondere Herausforderung dar. Wie kann eine Annäherung an die Mathematik im Raum gut gelingen? Welche neuen Möglichkeiten bieten 3D-Programme?

JÜRGEN ROTH, HANS-GEORG WEIGAND

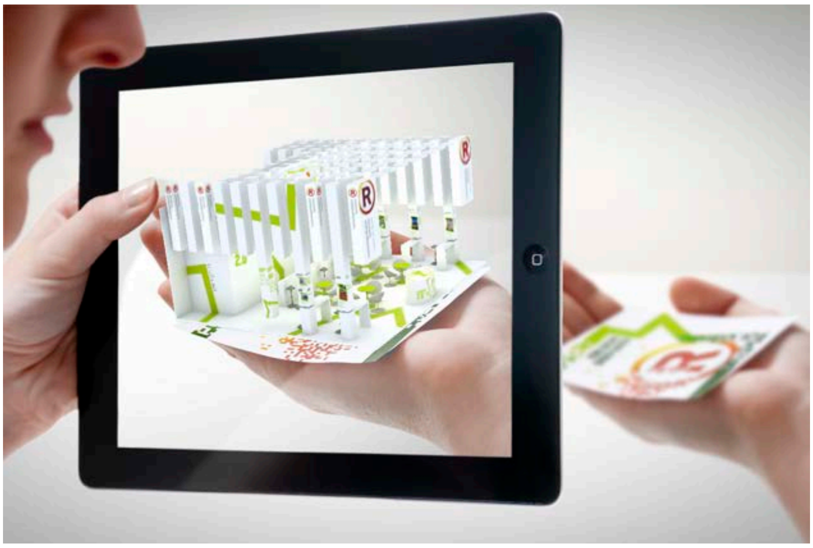
„3D" ist eine gegenwärtig viel verwendete Abkürzung. Beim Kino und Fernsehen wird mit 3D ein authentisches Raumerlebnis verbunden, das ein Sehen ermöglicht, das uns aus der Umwelt vertraut ist. Dieses dreidimensionale Sehen auf digitalen zweidimensionalen Oberflächen eröffnet in zahlreichen privaten und beruflichen Bereichen neue Möglichkeiten **(Abb. 1)**. So kann etwa in der industriellen Fertigung, in der Architektur und im Maschinenbau computergesteuert in 3D besser geplant, konstruiert und produziert werden. Für den Mathematikunterricht ist diese Entwicklung vor allem deshalb interessant, weil sich durch die neuen computergestützten dynamischen 3D-Darstellungen erweiterte Zugänge (Einstiege) und Arbeitsmöglichkeiten (Anwendungskontexte) in der Raumgeometrie eröffnen können. So lassen sich etwa 3D-Modelle für „Google Earth" erstellen oder Objekte durch „Augmented Reality" in den Unterricht integrieren (vgl. Ruppert/Wörler 2012).

Operieren mit Darstellungen

Die Raumlehre ist ein zentraler Themenbereich im Geometrieunterricht von der Grundschule bis zum Abitur. Im Vergleich zu ebenen Figuren sind bei Körpern die Darstellungen komplexer, die Vielfalt ist größer und die Eigenschaften sind im Allgemeinen zahlreicher (vgl. Führer 2002, S. 62 ff). Beispiele hierfür sind Platonische oder Archimedische Körper, also regelmäßige Körper, die von kongruenten Vielecken – einer Art bzw. zwei oder mehr Arten – begrenzt werden. Darüber hinaus sind Kenntnisse über perspektivische Darstellungen von Körpern auf dem Zeichenblatt hilfreich oder – bei etwas komplexeren Körpern – gar notwendig. Das beginnt beim Schrägbild und kann über isometrische (in Richtung der Achsen werden die Längen im Maßstab 1:1 dargestellt, vgl. juergen-roth.de/dynageo/isometrie/) und dimetrische (in Richtung zweier Achsen werden die Längen im Maßstab 1:1 dargestellt, in die dritte Richtung verkürzt oder gestreckt) bis zu zentralperspektivischen Darstellungen führen.

Gegenständliche Körpermodelle und computergestützte 3D-Darstellungen

Für das Entwickeln des Verständnisses von Objekten im Raum und das mathematische Arbeiten mit ihnen ist das *Operieren* mit entsprechenden Repräsentationen bzw. Darstellungen wesentlich. Wenn es



darum geht, erste Erfahrungen mit Körpern zu sammeln und deren Eigenschaften zu entdecken, können Schülerinnen und Schüler mit *(gegenständlichen) Körpermodellen* arbeiten, diese von allen Seiten betrachten und ihre Beziehungen zueinander erforschen. Dabei sollten sie sich auch *vorstellen*, wie sich etwa einzelne Kanten verlängern oder zu einem Punkt zusammenschrumpfen können (Kopfgeometrie). Auch das Hineinsehen von Teilkörpern in einen komplexen Körper kann durch das Drehen und Betrachten eines konkreten Körpermodells von verschiedenen Seiten unterstützt werden.

Im weiteren Verlauf kann mit den virtuellen Darstellungen in sogenannten *dynamischen Raumgeometriesystemen* (DRGS)[1] gearbeitet werden. Das hier viel flexiblere Operieren hat allerdings den Preis einer komplexen Steuerung der Bewegung in den drei Raumrichtungen auf der zweidimensionalen Bildschirmoberfläche: Es ist nämlich nicht mehr so einfach intuitiv verständlich, was z.B. das Ziehen an einem Punkt in eine bestimmte Richtung der Bildschirmebene für die Bewegung im virtuellen 3-dimensionalen Raum bedeutet. Wer ein DRGS zielorientiert benutzen will, braucht grundlegende Erfahrungen im Umgang mit Objekten im Raum. Es ist davon auszugehen, dass diese Erfahrungen nur durch vielfältiges Operieren mit gegenständlichen Modellen im Sinne eines enaktiven Arbeitens entwickelt werden (vgl. van Randenborgh 2014). Andererseits können Grenzen bzgl. der Veränderungsmöglichkeiten in einem gegenständlichen Modell mit Hilfe eines virtuellen DRGS-Modells überwunden werden. So lassen sich etwa durch das Ansteuern von Grenzfällen neue Erkenntnisse gewinnen.

Die Beziehung zwischen 2D und 3D – eine Geschichte der Raumgeometrie in der Schule

Die Beziehung zwischen 3D und 2D und dem Transfer von einer in die andere Dimension ist in der Raumgeometrie ein zentraler Lerngegenstand (etwa Körper und ihre Netze, s. **Abb. 2**), im Hinblick auf das Verständnis räumlicher Begriffe und als eine Quelle für Problemstellungen (**Dreiecke als Tetraedernetze** ab S. 14 oder **Wie entsteht ein 3D-Bild?** ab S. 36 in diesem Heft).

In den „Elementen" des Euklid (um 300 v. Chr.) werden die ebene Geometrie (in den ersten 6 Büchern) und Raumgeometrie (die Bücher 11 bis 13) noch weitgehend getrennt behandelt. Zu Beginn der Neuzeit beginnt man in der Malerei durch die Entwicklung der Zentralperspektive (etwa durch Giotto, Raphael, Leonardo da Vinci oder Dürer) die Beziehung zwischen Objekten in der Umwelt und deren ebener Darstellung auszuloten. Dabei werden die Beziehungen durch das Operieren mit Modellen und Fadenkonstruktionen konstruktiv erkundet.

Der Pädagoge Johann Pestalozzi stellt dann in seinem „ABC der Anschauung" (1803) die Bedeutung der Raumanschauung für die Entwicklung des Kindes und die Erkenntnis unserer Umwelt überhaupt heraus. Dabei sollen Kinder durch das unmittelbare – möglichst mit allen Sinnen – Erleben und Operieren mit den Dingen Vorstellungen über damit verbundene Begriffe aufbauen. In den Lehrbüchern zur Elementargeometrie von Julius Henrici und Peter Treutlein wird – um die Wende zum 20. Jahrhun-

Abb. 1: Die Anfänge des 3D-Kinos: Zuschauer während eines Kino-Festivals 1951 in London und ein Kuppelkino 3D heute: Mit augmented Realtiy werden dreidimensionale Modelle visualisiert und unter anderem für die industrielle Produktion genutzt

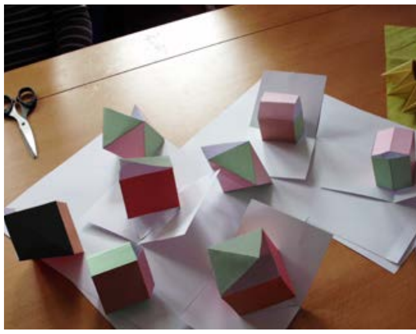


Abb. 2: Das Bauen von Körpern aus Netzen stellt eine Verbindung zwischen den Dimensionen her

Fotos: K. Richter

Bild 1: Wikipedia/The National Archives UK WORK 25-208.jpg Bild 2: www.wold.fokus.fraunhofer.de/en/fokus/_fokusnews/_news_2013/_2013_05_17_grundlagen-werk_360_grad_welten.html Bild 3: karlsruhe presseportal Bild 4: © www.ifm.de

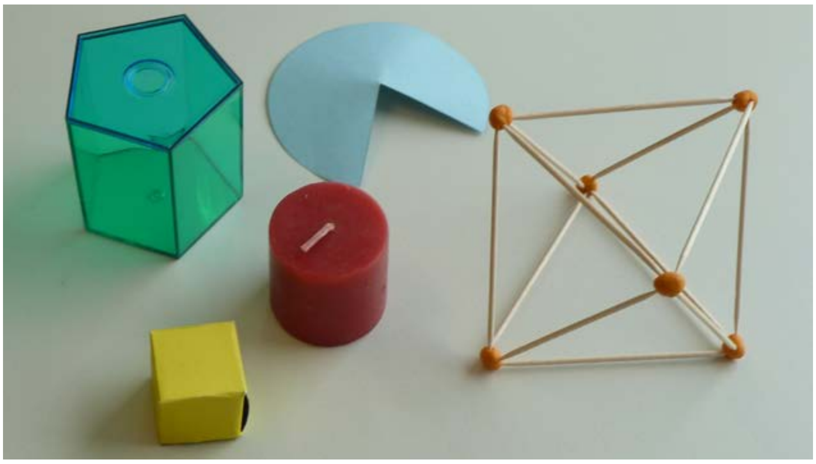


Abb. 3: Die Vielfalt an Modellen ist groß: Es gibt Kanten-, Flächen- und Vollmodelle, wobei zusammengeklebte Netze die Funktion von Vollmodellen haben

dert – das *Prinzip der Bewegung, also das enaktive und mentale Operieren* mit Repräsentationen als Leitlinie herausgestellt, bei dem die Autoren stets die Wechselbeziehung zwischen Raum und Ebene, zwischen Körpern und Figuren hervorheben.

In den Meraner Beschlüsse von 1905 wird die „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ – neben der „Erziehung zum funktionalen Denken“ – schließlich als eine der beiden zentralen Forderungen für den Mathematikunterricht herausgestellt. Diese Leitlinien werden in den Schulen aber nur zurückhaltend umgesetzt (vgl. Krüger 1999). Mit der „Strengewelle“ im Mathematikunterricht in der Mitte des letzten Jahrhunderts tritt die Geometrie der Ebene unter axiomatischen Gesichtspunkten in den Vordergrund (vgl. etwa Kratz, 1993).

Betrachtet man aktuelle Lehrpläne und Bildungsstandards, so erscheint die Raumgeometrie weitgehend nur noch als ein Übungsfeld für Längen-, Flächen-, Volumen- und gelegentlich noch trigonometrische Berechnungen. Als eigenständiges Gebiet wird sie nur noch in der Analytischen Geometrie behandelt. Ursprünglich zählten Kegelschnitte zu obligatorischen Lerninhalten dieses Gebietes. Spätestens mit der Einführung der Stochastik in die Lehrpläne, wurde allerdings auch die analytische Geometrie stark reduziert.

Eine Rückbesinnung auf das Arbeiten mit (gegenständlichen) Körpermodellen sowie das Einbeziehen computergestützter Darstellungen kann zu einer Belebung der Raumgeometrie im Geometrieunterricht führen und damit zum Erreichen wichtiger Ziele des Mathematikunterrichts beitragen.

Zentrale Ziele der schulischen Raumgeometrie

In den KMK-Bildungsstandards betrifft die Leitidee *Raum und Form* das Erkennen und Beschreiben geometrischer Objekte und deren Eigenschaften, das Darstellen von und Operieren mit Figuren und Körpern und deren Anwendung in inner- und außermathematischen Situationen. Vor allem geht es um die Wechselbeziehung zwischen Umwelt und Schulgeometrie sowie zwischen der Geometrie in der Ebene und im Raum (vgl. Weigand u. a. 2014). Mit Hilfe eines DRGS lassen sich grundlegenden Ideen aus dem Operieren mit zweidimensionalen dynamischen Geometriesystemen, etwa das Arbeiten mit dem „Zugmodus“, auf die Raumgeometrie übertragen (vgl. Schumann 2007). Damit wird der Umgang mit Körpern in der zweidimensionalen Darstellung technisch einfacher. Es ist allerdings eine empirisch noch offene Frage, ob das Operieren mit perspektivischen Darstellungen auf dem Bildschirm tatsächlich zu einem besseren Verständnis raumgeometrischer Inhalte führt.

Körpermodellen und -netze operativ erarbeiten

Bei der Behandlung von Körpern spielen Modelle verschiedene Rollen (s. Schmidt-Thieme/Weigand 2015):

- Modelle sind *Anschauungshilfen*, sowohl im Hinblick auf die Begriffsbildung (Anzahl und Art der Ecken, Kanten, Flächen, …) als auch bei Berechnungen, und
- Modelle unterstützen als *Arbeitsmittel* den *Aufbau der Raumvorstellung*, wenn dem mentalen Operieren die Arbeit mit konkreten Objekten vorausgeht.

Dabei gibt es verschiedene Arten von Modellen, die eine eigene didaktische Bedeutung besitzen (**Abb. 3**).

Erster Zugang: Kompaktmodelle oder Vollmodelle

Diese liefern Prototypen der Körper und vermitteln eine visuelle Vorstellung. Sie ermöglichen häufig einen ersten Zugang zur Begriffsbildung. Passende Aktivitäten sind das *Beschreiben der Eigenschaften, insbesondere das Zählen von Ecken und Kanten und die Einordnung der Begrenzungsflächen*. Viele Alltagsgegenstände sind gute Vollmodelle.

Der Blick ins Innere: Kantenmodelle

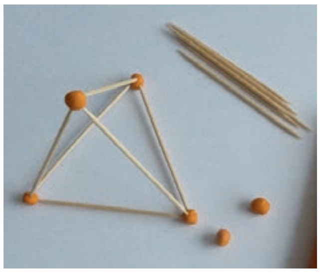
Bei Kantenmodellen spielt aufgrund der fehlenden Flächen der ganzheitlich-visuelle Eindruck eine geringere Rolle; der Fokus richtet sich stärker auf die „Ränder“ des Körpers. Darüber hinaus erlauben sie einen „Einblick“ in das Körperinnere, was insbesondere bei Berechnungen relevant ist. Das Beispiel in **Arbeitsblatt 1** (nach Roth/Wittmann 2014, S. 146f) zeigt, wie *Querverbindungen zum Aufstellen von Termen in der Algebra* geschlagen werden können.

Von 2D zu 3D: Flächenmodelle und Netze

Flächenmodelle erlauben die Abwicklung zum Netz des Körpers und stellen damit den Zusammenhang zwischen 3D und 2D besonders deutlich heraus. Ein

Name: ____________ Datum: ____________ Thema: ____________

Kantenmodelle

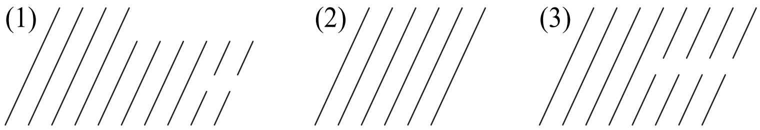


Aus Stäben und Knete kannst du Modelle geometrischer Körper bauen.

1. **Wie viele Stäbe benötigst du, um folgende Körper zu bauen:**
   a) einen Quader, b) ein Dreiecksprisma,
   c) eine vierseitige Pyramide
   Was kannst du über die Länge der Stäbe aussagen?

2. **Gib für jeden der Körper einen Term an, um die gesamte Kantenlänge zu berechnen.**

3. Die Abbildung zeigt verschiedene Kantensätze.
   Welche Körper kannst du jeweils daraus bauen?



4. Du hast *n* gleich lange Stäbe.
   Für welche *n* kannst du jeweils einen Körper daraus bauen?
   Wie heißt dieser Körper? Wann gibt es mehr als eine Möglichkeit?

5. Du hast *n* gleich lange Stäbe und *m* Stäbe, die ebenfalls gleich lang, jedoch kürzer sind.
   In welchen der Fälle kannst du einen Körper daraus bauen? Wie heißt dieser?
   Wann gibt es mehr als eine Möglichkeit?

Netz eines Körpers ist die vollständige Abwicklung seiner Oberfläche in die Ebene. Die Grundformen Prisma, Pyramide, Zylinder und Kegel besitzen Netze, im Unterschied zur Kugel, die sich nicht in die Ebene abwickeln lässt. Über Körpernetze wird eine Brücke zwischen räumlichen Objekten und der ebenen Geometrie geschlagen (vgl. **Den Quader umspannen** ab S. 9 in diesem Heft). Dies kann bei der Lösung von Problemen – etwa der Suche nach einem kürzesten Weg auf der Würfeloberfläche – hilfreich sein und wirkt einer isolierten Betrachtung beider Gebiete entgegen.

> *Beispiel:*
> *Suche den kürzesten Weg auf der Würfeloberfläche von Punkt P nach Q.*

Ein zusammengebautes Flächenmodell besitzt dieselbe didaktische Funktion wie ein Vollmodell. Eine Selbstanfertigung ist u. a. aus Papier möglich, daneben gibt es handelsübliche Bausätze. Über das Bauen von und Arbeiten mit Modellen hinaus soll im Unterricht vor allem das *gedankliche Operieren* mit vorgestellten Körpern angeregt werden (Kopfgeometrie). Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler stets dann auf das Modell zurückgreifen können, wenn sie es benötigen.

Raumgeometrische Begriffe und ihre Eigenschaften operativ erfassen

Die Grundlage der Geometrie sind geometrische Begriffe und deren Eigenschaften. Der Geometrieunterricht muss also das Verständnis dieser Begriffe entwickeln, d. h. *angemessene Vorstellungen und Kenntnisse* über diese Begriffe sowie *Fähigkeiten im Umgang* mit diesen Begriffen und deren Eigenschaften aufbauen. Schülerinnen und Schüler sollen mit diesen Begriffe dann im Unterricht im Rahmen von Problemstellungen operieren können.

Bei der *operativen Begriffsbildung* werden Begriffe *aus einer Handlung* entwickelt, wobei aus der Beschreibung und Reflexion der Handlung wesentliche Beziehungsstrukturen erarbeitet werden. Wesentlich ist dabei nicht (nur), dass diese Handlungen in der Realität auch tatsächlich ausgeführt werden, sondern dass sie vielmehr in flexibler oder beweglicher Art und Weise mental oder in der Vorstellung durchgeführt und in mentalen Strukturen verankert werden. *Denken ist verinnerlichtes oder vorgestelltes Tun* (Aebli 1980, S. 21ff; Piaget 1967, S. 72). Kennzeichnend für diese verinnerlichten Handlungen oder – wie Piaget sie nennt – *Operationen* sind Flexibilität oder Beweglichkeit, d. h., sie sind *umkehrbar* oder *reversibel*, *zusammensetzbar* oder

❶ ZUM AUSPROBIEREN

Kegel als Rotationskörper

Wenn ein gleichschenkliges Dreieck um die Symmetrieachse rotiert, überstreichen seine Schenkel den gesamten Kegelmantel. Spannen Sie ein Holz- oder Metalldreieck entsprechend in einen Experimentiermotor aus der Physiksammlung und lassen Sie es rotieren (alternativ können Sie auch mit einer Bohrmaschine arbeiten). Infolge der Trägheit des Auges entsteht so das Bild eines Kegels.
Über diese ganzheitliche Vorstellung hinaus erlaubt die operative Begriffsbildung auch einen Einblick in strukturelle Aspekte des Körpers. Das erzeugende Dreieck taucht beim Schnitt durch den Kegel durch die Spitze, senkrecht zur Grundfläche wieder auf und eröffnet verschiedene Berechnungsmöglichkeiten.

kompositionsfähig sowie *assoziativ*, d. h., man kann auf verschiedene Weisen zum Ziel kommen. Die Ausbildung dieser Fähigkeiten ist Ziel des *Operativen Prinzips*, bei dem vielfältige systematische Veränderungen der beteiligten Objekte, der Ausgangssituation und der Lösungswege den Wissenserwerb unterstützen sollen (s. **Kasten 1**).

Mentale Operationen: Kopfgeometrie

Weitere Aktivitäten beziehen sich auf Eigenschaften von Körpern, die *nicht mehr auf den ersten Blick sichtbar* sind: Strecken wie Flächen- und Raumdiagonalen oder Mantellinien rücken in den Blick oder Restkörper wie Pyramidenstumpf und Zylinderring werden erkundet. Diese Aktivitäten bereiten die Berechnungen an Körpern vor oder treten umgekehrt im Zuge von Berechnungen auf. Der Übergang vom konkreten Handeln zum mentalen Operieren in der Vorstellung im Sinne der *Kopfgeometrie* bzw. des *Beweglichen Denkens* (vgl. Roth 2011) ist dabei in beide Richtungen fließend.

Kopfgeometrie bezeichnet das gedankliche Lösen geometrischer Aufgaben ohne Hilfsmittel (vgl. Streit/Pinkernell, 2011). Es kann dabei nur auf Vorstellungen und sprachlich formuliertes Wissen über geometrische Objekte zurückgegriffen werden. Das Bearbeiten kopfgeometrischer Aufgaben erfordert eine Reihe von Fähigkeiten in Bezug auf (ebene und räumliche) geometrische Figuren. Diese werden dabei trainiert, aber zum Teil müssen sie bereits vorher durch das Operieren an und mit realen Modellen erarbeiten werden. Man muss sich Figuren vorstellen, ihre Lage, Größe und Form gedanklich variieren und sie auch in der Vorstellung kombinieren können (**Abb. 4**). Die Verinnerlichung von Bewegungen ist wichtig, denn räumliches Denken beruht zu einem wesentlichen Teil darauf, sich Bewegungen von Körpern vorstellen zu können. Zum Aufbau sachgerechter und situationsangemessener Vorstellungsbilder ist Wissen über Eigenschaften und Beziehungen von Figuren notwendig.Bei der Kopfgeometrie geht es also nicht allein um die häufig genannte Schulung der Raumwahrnehmung und -vorstellung. Vielmehr sollen Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen und Sachverhalten operativ entwickelt und angewendet werden. Es geht aber auch um das Sichern und Vertiefen geometrischer Grundbegriffe, deren Eigenschaften und Beziehungen sowie um mehr Sicherheit im Verstehen und Gebrauchen der Fachsprache.

Begriffsbildung in der Raumgeometrie
Analogien zwischen Begriffen in 2D und 3D

Bei der Begriffsbildung in der Raumgeometrie geht es zum einen um das Erlernen von Begriffen, die in der zweidimensionalen Welt nicht vorhanden sind, also insbesondere um Körper sowie deren Eigenschaften und Beziehungen zueinander. Es geht zum anderen aber auch darum, gleiche oder analoge Begriffe im zwei- und dreidimensionalen Raum und deren Beziehungen zueinander zu verstehen, etwa Winkel zwischen ebenen Figuren im Raum oder Symmetrieeigenschaften. Bei diesen Übergängen zwischen zwei- und dreidimensionaler Betrachtung sind im Allgemeinen Präzisierungen notwendig. Hierbei kann das Operieren mit DRGS unterstützen, da es dadurch gut möglich ist, räumliche Objekte auf geeignete Ebenen zu projizieren, Schnittebenen einzufügen und Objekte zu dynamisieren. So können Gemeinsamkeiten und fließende Übergänge bei analogen Begriffen in der ebenen und der Raumgeometrie hervortreten (vgl. **Reise durch die Dimensionen** ab S. 23 in diesem Heft):

Beispiele:
- *Winkel zwischen zwei Ebenen oder zwischen Gerade und Ebene bestimmen.*
- *Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Tangenten an Kreis und Kugel erkennen.*
- *Oberflächen und Volumina von drehsymmetrischen Körpern berechnen.*

Es treten aber auch Unterschiede bei der Verwendung analoger Begriffe im 2D- und 3D-Raum auf.

Beispiele:
- *Die Punktspiegelung in der Ebene ist orientierungstreu, während dies für die Punktspiegelung im Raum nicht gilt*
- *Bei – räumlichen – Dreiecken (etwa auf einer Kugeloberfläche) kann die Winkelsumme von 180o abweichen.*
- *Im Raum gibt es zu einer Strecke keine eindeutige Mittelsenkrechte.*

Schließlich bedarf es beim Festlegen ebener geometrischer Figuren im Raum Zusatzbedingungen, um die Objekte eindeutig beschreiben zu können.

Beispiele:
- *Das Zeichnen eines Kreises mit einem 3D-Programm erfordert die Festlegung der Ebene, in der sich der Kreis befindet.*
- *Das Antragen eines Winkels an eine Strecke erfordert die Vorgabe einer Ebene, in der sich der Winkel befindet.*

Bewusstes Wahrnehmen der Beziehungen zwischen Geometrie und Umwelt

Geometrie trägt dazu bei, die Welt um uns mit mathematischen Begriffen zu ordnen und zu interpretieren. Indem wir die Umwelt bewusst so wahrnehmen und Phänomene interpretieren, erfahren wir etwas (mehr) über die uns umgebende Welt, wir lernen unsere Umwelt mit anderen Augen zu sehen. Zwischen Umwelt und Mathematik (bzw. Geometrie) bildet sich dabei eine Wechselbeziehung aus (viele Beispiele finden sich in Glaeser ~~2005~~). Die Umwelt hilft uns einerseits, *anschauliche Vorstellungen* über geometrische Begriffe und Verfahren auszubilden, andererseits wird mit Hilfe mathematischer Begriffe die Umwelt analysiert, beurteilt, interpretiert. Bei den folgenden Beispielen lassen sich geometrische Begriffe mit Hilfe unserer Umwelt verdeutlichen.

Beispiele:
Umwelt mit „geometrischen Augen“ sehen
- *in Verpackungen geometrische Körper erkennen;*
- *Verdeutlichen von Begriffen wie Kante, Ecke und Fläche an realen Körpern;*
- *Ausbilden des Winkelbegriffs durch Blick- und Winkelfelder beim menschlichen Sehen.*

Die Umwelt ist reich an Phänomenen, Objekten und Vorgängen, die neugierig machen (sollen) und die nach Erläuterungen oder Erklärungen verlangen,

Abb. fehlt

Abb. 4: 2D trifft 3D: Ebene Schnitte durch einen Würfel führen zu verschiedenen Schnittflächen und Restkörpern. Eine Kopfgeometrie-Aufgabe dazu könnte in der Bestimmung der Form der Schnittflächen liegen oder im Zählen der Seitenflächen des neu entstandenen Körpers.

zumindest aber Fragen aufwerfen und die Beschäftigung mit ihnen anregen.

Beispiele:
Umwelt als Quelle für geometrische Fragen
- *Welche Dachformen gibt es und worin liegen deren Vor- und Nachteile?*
- *Welchen „umbauten Raum“ hat ein Einfamilienhaus, eine Kirche?*
- *Wie lassen sich Gegenstände unserer Umwelt mit geometrischen Begriffen beschreiben?*

Das *Herstellen von Umweltbezügen* bedeutet zunächst das *Wiederfinden von Prototypen in der Umwelt* und das Begründen der Zuordnung zu einer Grundform anhand von Eigenschaften. Die Schülerinnen und Schüler müssen in verschiedenen realen Objekten dieselbe Grundform als gemeinsame Eigenschaft erkennen und von anderen, im Alltag möglicherweise dominanten Merkmalen absehen. Dies birgt zwei prinzipielle Schwierigkeiten:
- Prototypen für eine bestimmte Körpergrundform müssen sich auf sehr unterschiedliche Objekte beziehen lassen: Sowohl eine flache Cremedose als auch ~~eine runde Holzleiste~~ weisen die Grundform des Zylinders auf. Sowohl das Klassenzimmer, in dem sich die Schülerinnen und Schüler befinden, als auch der Tafelschwamm sind Beispiele für die Grundform des Quaders.
- Fast alle realen Objekte weichen mehr oder minder von den Körpergrundformen ab: Der Schwamm besitzt Löcher, das Becherglas ist oben offen, beim Spielwürfel sind die Ecken abgerundet. Diese Eigenschaften sind in der Regel wichtig für das konkrete Operieren mit den Objekten.

Messen und Berechnen

Neben der (Weiter-)Entwicklung der Begriffsbildung geht es in der Sekundarstufe I auch um die Entwicklung von Methoden zur *Bestimmung von Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren* sowie der *Oberfläche* und *des Volumens von Körpern*. Dabei wird das Erlernen der Körpergrundformen mit den daran möglichen Berechnungen verknüpft. Die Auseinandersetzung mit ebenen Figuren und Körpern bietet in diesem Zusammenhang *Anlässe* für

- das Definieren, Argumentieren, Begründen, Klassifizieren und Ordnen.
- *Berechnungen* von Längen (Höhen, Diagonalen, …), Oberflächeninhalten und Volumen.
- Schrägbildzeichnungen die beim *Freihandzeichnen* beginnen und bis in die *darstellende Geometrie* führen können (vgl. Müller 2004, S. 26 ff.).
- die *konstruktionsgeometrische (synthetische) Behandlung* von Körpern und Netzen mit Hilfe eines DRGS, welche die Möglichkeiten der dynamischen Darstellung und der Interaktivität der Software gezielt nutzt (Schumann 2007 und **Neue Lösungswege erforschen –Interaktives Konstruieren im Raum** ab S. 41 in diesem Heft).

Die Ideen des „Messens und Berechnens“ von 2D- und 3D-Objekten sind weitgehend analog. Messen ist ein *theoretisches* Konzept, das Strecken, Kurven, Figuren und Körpern Eigenschaften wie Länge, Flächeninhalt und Volumen zuordnet. Das Berechnen geometrischer Größen beruht auf dem Messen. Messen und Berechnen können aber auch als *Tätigkeiten* aufgefasst werden. Ein Ziel des Geometrieunterrichts ist die Entwicklung eines *Verständnisses für die Idee des Messens* und damit der Fähigkeiten und Fertigkeiten, Längen, Flächen- und Rauminhalte berechnen zu können. Die Entwicklung dieser Kompetenzen beginnt in der Grundschule mit dem unmittelbaren Vergleich zweier Gegenstände sowie dem Vergleich eines Gegenstandes mit *Normobjekten* (Meter, Liter, Kilogramm) und zieht sich über den gesamten Mathematiklehrgang bis zur Flächen- und Volumenberechnung mit Hilfe des Integrals hin. Über die Körpergrundformen hinaus spielen dabei vor allem *zusammengesetzte Körper* (etwa der Oktaeder als Doppelpyramide) und *zerlegte Körper* (z. B. die Zerlegung einer Pyramide in eine kleinere ähnliche Pyramide und den Pyramidenstumpf als Restkörper) eine wichtige Rolle. Auch hier gilt: Das „reale“ Operieren mit gegenständlichen Modellen, Skizzen und dynamischen Computermodellen sowie das mentale Operieren kann die Verständnisentwicklung unterstützen.

Ein Blick in die Zukunft

Digitale Technologien wecken Hoffnungen auch für den Mathematikunterricht:

„Bis zum 17. Jahrhunderts war Geometrie die Königin der Wissenschaften, verlor dann jedoch diese Rolle. … Es mag sein, dass auch aufgrund der begrenzten Möglichkeiten des Zeichnens zu dieser Zeit, formale Zugänge bevorzugt wurden. … Mit neuen computergestützten Werkzeugen kann geometrisches Denken aber wieder eine zentrale Quelle der Erkenntnis beim Erforschen neuer Wissensbereiche werden.“

(J. B. Lagrange in Hoyles /Lagrange 2010, S. 436)

Wir können angesichts der rasanten Weiterentwicklung davon ausgehen, dass sich in Zukunft noch weitere, völlige neue Möglichkeiten für das geometrische Denken als zentrale Quelle der Erkenntnis eröffnen, etwa virtuelle Projektionen geometrischer Objekte, um die man herumgehen und die man mit Handbewegungen in Lage und Form variieren kann.

Anmerkung

1 DRGS sind GeoGebra (www.geogebra.org), Archimedes Geo3D (www.raumgeometrie.de) ~~Cabri3D oder,~~ (www.cabri.com). Weitere Raumgeometrieprogramme sind Pov-Ray (www.povray.org) oder Bauwas (www.bics.be.schule.de/son/machmit/sw/bauwas/).

Literatur

Aebli, H. (1980): Denken: Das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. ~~Klett-Cotta, Stuttgart.~~

Glaeser, G. (~~2005~~): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. ~~Spektrum, München~~.

Krüger, K. (1999): Erziehung zum funktionalen Denken. Berlin: Logos.

Hoyles, C. / Lagrange, J.-B. (Hrsg.) (2010): Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study.

Kratz, J. (1993): Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht. ~~Bayerischer Schulbuch Verlag, München~~.

Müller, K.-P. (2004²): Raumgeometrie. Raumphänomene – Konstruieren – Berechnen. Stuttgart: Teubner.

Piaget, J. (1967): Die Genese der Zahl beim Kind. – In: Piaget, J. u.a.: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Braunschweig: Westermann.

Randenborgh van, Chr. (2015): Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht. Heidelberg: Springer ~~Spektrum,~~.

Roth, J. (2011): Geometrie im Kopf – Bewegliches Denken nutzen und fördern. – In: mathematik lehren, Heft 167, Friedrich Verlag, S. 28-31.

Roth, J., Wittmann, G. (2014): Ebene Figuren und Körper. – In Weigand, H.-G. u.a.: Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 123-156

Ruppert, M.; Wörler, J. (2012) Virtuell und trotzdem greifbar - Mit Augmented-Reality-Modellen experimentieren. – In: mathematik lehren, Heft 174, Friedrich Verlag, S. 20-24.

Schmidt-Thieme, B./Weigand, H.-G. (2015): Medien. – In: Bruder, R./ Hefendehl, L./Schmidt-Thieme, B. / Weigand. H.-G. (Hrsg.): Handbuch Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, S. 461-490.

Schumann, H. (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Franzbecker.

Streit, Chr./Pinkernell, G. (Hrsg.) (2011): Kopfmathematik – mathematik lehren, Heft 167. Friedrich Verlag, Seelze.

Weigand, H.-G. u.a. (2014): Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I. Heidelberg: Springer Spektrum