Max Bill: Geometrische Komposition

Flächeninhalte geometrischer Figuren an einem Kunstwerk erforschen und vergleichen

Jürgen Roth Im Geometrieunterricht sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit geometrischen Figuren und deren Flächeninhalten auseinandersetzen. Dazu gehören die Flächeninhaltsmessung über das Auslegen mit einer Einheitsfläche und insbesondere ein flexibler Umgang mit Flächeninhaltsvergleichen. Hier wird ein Einstieg in diese Thematik über eine Analyse des Kunstwerks „Geometrische Komposition“ von Max Bill vorgestellt. Als bedeutender Vertreter der konkreten Kunst ist es ihm wichtig, seine Kunstwerke auf der Grundlage mathematischer Ideen zu entwickeln. Dies lässt sich für den Mathematikunterricht in fruchtbarer Weise nutzen.

Max Bill, ein Vertreter der Konkreten Kunst

Eine bedeutende Kunstrichtung des 20. Jahrhunderts ist die Konkrete Kunst. Max Bill, einer ihrer bekanntesten Vertreter ist der „auffassung, es sei möglich, eine kunst weitgehend aufgrund einer mathematischen denkweise zu entwickeln.“ (Bill, 1977) Konkrete Künstler wollen in der Regel, dass die Betrachter ihrer Kunstwerke die bei der Konstruktion zugrunde gelegten mathematischen Überlegungen wieder entdecken und herausarbeiten können. Aus diesem Grund lassen sich Kunstwerke der Konkreten Kunst sehr gut als Grundlage für Lernumgebungen im Mathematikunterricht nutzen. In diesem Artikel wird eine Unterrichtseinheit vorgestellt, in der das Kunstwerk „Geometrische Komposition“ von Max Bill aus dem Jahr 1992 (vgl. Abb. 1) analysiert und dabei Flächeninhalte einfacher geometrischer Figuren (hier sind es Quadrate, Rechtecke und Dreiecke miteinander verglichen werden.

Flächeninhalte vergleichen

Der Vergleich von Flächeninhalten kann auf vielfältige Art und Weise geschehen. Man kann Flächen im einfachsten Fall *direkt vergleichen*, indem man sie aufeinander legt. Häufig lässt sich dann sofort erkennen, welche Fläche den größeren Inhalt hat. Manchmal werden aber auch von beiden Flächen Teile jeweils über die andere Fläche hinausstehen. Wie soll man damit umgehen? Man kann überstehende Stücke etwa abschneiden und wieder auf die andere Fläche legen. Das führt im Idealfall zur Erkenntnis, dass die Figuren *zerlegungsgleich* sind. Daneben kann man auch versuchen, unterschiedliche Figuren so um jeweils deckungsgleiche Figuren zu ergänzen, dass zueinander deckungsgleiche neue Figuren entstehen. Dies ist die Idee der *Ergänzungsgleichheit*. Schließlich ist es zum Flächeninhaltsvergleich auch möglich eine der Flächen mit mehreren identischen Repräsentanten der anderen Fläche auszulegen und abzuzählen, wie oft die eine Fläche in die andere hineinpasst. Dies ist die Idee des *Messens* als Auslegen mit einer Einheit.

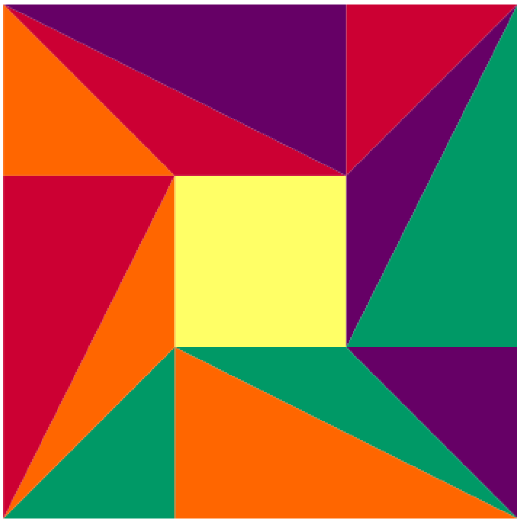


Abb. 1: Max Bill: Geometrische Komposition, 1992 (Nachkonstruktion des Autors)

Das Kunstwerk „Geometrische Komposition“ analysieren

In der hier vorgestellten Unterrichtseinheit geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler die genannten Möglichkeiten des Vergleichs von Flächeninhalten weitgehend selbständig intuitiv erarbeiten.

Einstieg

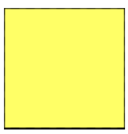
Als Einstieg wird das Kunstwerk der Klasse direkt auf einer Folie präsentiert. Die Lehrkraft erzählt kurz von Max Bill, der seine Bilder nach mathematischen Ideen konstruiert. Sie fordert die Schülerinnen und Schüler auf, das Bild genau zu betrachten und gibt ihnen folgenden Arbeitsauftrag:

> Welche geometrischen Figuren, die ihr schon kennt, könnt ihr auf dem Kunstwerk erkennen? Versucht sie zu beschreiben.

Nachdem sie eine angemessene Zeit hatten, das Bild auf sich wirken zu lassen und die Figuren zu erkennen, werden einzelne Schülerinnen und Schüler gebeten jeweils eine Form auf den Bildern zu beschreiben und falls möglich auch zu benennen. Die anderen Kinder der Klasse unterstützen und ergänzen die Darstellung gegebenenfalls. Dabei wird herausgearbeitet, dass es von den Dreieckstypen jeweils vier deckungsgleiche in verschiedenen Farben gibt. Es handelt sich um folgende Dreieckstypen:

gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck	
stumpfwinkliges Dreieck	
rechtwinkliges Dreieck	

Je nach Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler kann es sinnvoll sein, bereits zur Bearbeitung dieses Arbeitsauftrags das unten beschriebene Puzzle des Kunstwerks zur Verfügung zu stellen. Gegebenenfalls kann es dann reichen, die verschiedenen Dreieckstypen anhand der Puzzleteile nur nach Typ sortieren zu lassen. Eine Benennung der Dreieckstypen wie in der obigen Tabelle ist in der Regel nicht erforderlich, kann aber zur Differenzierung nach oben genutzt werden.

Rechteck	
Quadrat	

Manche Schülerinnen bzw. Schüler erkennen auch, dass jeweils drei verschiedene Dreiecke zusammen ein Rechteck bilden, von denen es wieder vier deckungsgleiche im Kunstwerk gibt. Daneben wird deutlich, dass sich in der Mitte des Kunstwerks ein kleines gelbes Quadrat befindet und dass das ganze Kunstwerk (vgl. Abb. 1) ein Quadrat ist. Einzelne entdecken evtl. auch rechtwinklige Trapeze. Aus dem Rechteck in obiger Tabelle kann man etwa durch Abschneiden des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ein rechtwinkliges Trapez herstellen.

Es ist wichtig, dass alle Schülerinnen und Schüler die von einzelnen vorgebrachten Entdeckungen in den Plenumsphasen nachvollziehen können. Dazu sollte das Kunstwerk entweder als Puzzle in einem großen Format für die Tafel vorliegen, oder die Simulation unter www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/kunst07.html mit Hilfe eines Beamers oder eines Interaktiven Whiteboards präsentiert werden. In beiden Fällen beginnt man mit dem aus den einzelnen Puzzleteilen zusammengesetzten Kunstwerk und lässt die jeweiligen Schülerinnen und Schüler die entdeckten Figuren aus dem Kunstwerk herausnehmen. Als Strukturierungshilfe ist es sinnvoll in den Hintergrund die Begrenzungslinien der einzelnen Teilflächen des Kunstwerks zu legen (vgl. Abb. 2).

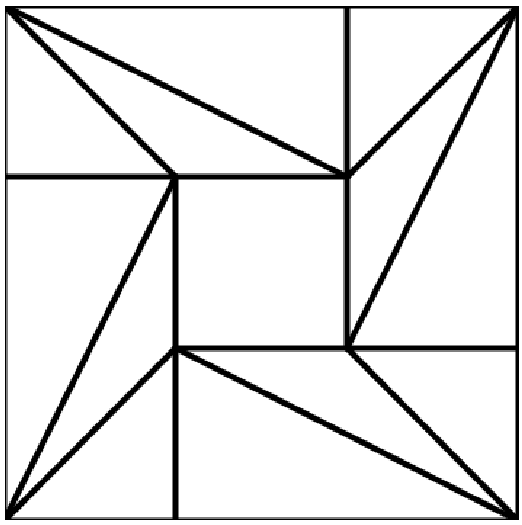


Abb. 2: Max Bill: Geometrische Komposition, 1992 – Struktur des Kunstwerks

Erarbeitung 1: Vergleichen durch Auslegen

Die Erarbeitungsphase beginnt damit, dass alle Kinder in Vierergruppen eingeteilt werden. Jede Schülerin und jeder Schüler erhält gedruckt auf einen in der Breite halbierten Papierstreifen aus möglichst schwerem Papier (mindestens 160 g/m²) jeweils zweimal das Kunstwerk und einmal neun kleine gelbe Quadrate. Jedes Kind zerschneidet eines seiner Kunstwerke in die farbigen Einzelteile und trennt auch die neun Quadrate voneinander. Nach dieser Vorbereitung erhalten alle folgenden Arbeitsauftrag:

> Das ganze Kunstwerk von Max Bill ist ein Quadrat. Vergleicht zusammen mit eurem Banknachbarn die Größe des kleinen gelben Quadrats mit der Größe des Kunstwerks. Ihr könnt dazu gerne die Puzzleteile verwenden.

Es ist spannend zu beobachten, wie die Schülerinnen und Schüler mit diesem Arbeitsauftrag umgehen. Bei manchen Partnern wird die Seitenlänge des gelben Quadrats mit der Seitenlänge des Kunstwerks durch mehrfaches Anlegen verglichen. Dabei stellen Sie fest, dass jede Seite des Kunstwerks genau dreimal so lang ist wie eine Seite des gelben Quadrats. Andere legen ähnlich wie in Abbildung 3 das Kunstwerk mit den gelben Quadraten aus und stellen dabei durch vollständiges Auszählen fest, dass dazu genau neun gelbe Quadrate benötigt werden.

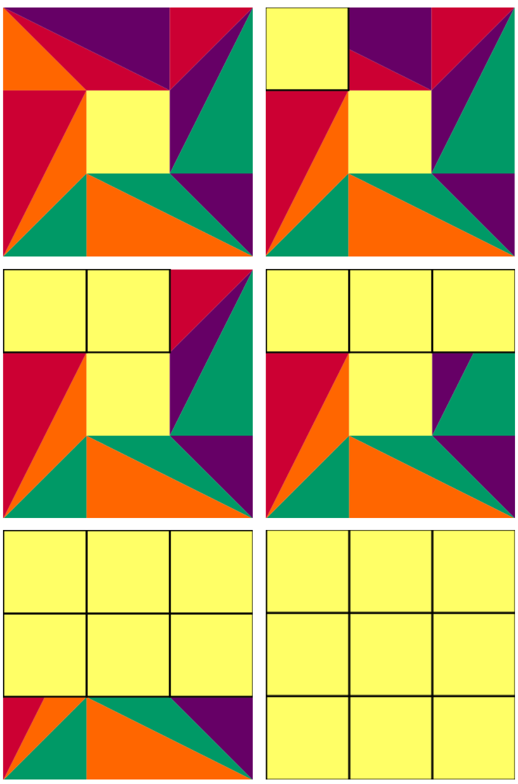


Abb. 3: Auslegen des Kunstwerks mit einer selbstgewählten Einheit

Vereinzelt wird sogar schon geschickt gezählt, indem nur die Anzahl der Quadrate in einer Reihe und anschließend die Anzahl dieser Reihen bestimmt werden. Es gibt also drei Reihen mit je drei Quadraten, es werden also $3 \cdot 3 = 9$ gelbe Quadrate zum Auslegen des Kunstwerks benötigt.

Die Schüler haben so die Idee des Messens für sich erfasst und entweder eine Länge oder einen Flächeninhalt in Abhängigkeit von einer selbst gewählten Einheit (hier die Kantenlänge bzw. der Flächeninhalt des kleinen Quadrats) bestimmt. Im Plenum werden die gewonnenen Ergebnisse vorgestellt und der Unterschied bei Kantenlänge und Flächeninhalt gemeinsam herausgearbeitet: Die Kantenlänge des großen Quadrats ist dreimal so groß wie die Kantenlänge des gelben Quadrats. Der Flächeninhalt des Kunstwerks ist sogar neunmal so groß wie der des gelben Quadrats.

Erarbeitung 2: Flächeninhalte der Teilfiguren mit dem des Einheitsquadrats vergleichen

Auf der Grundlage dieser Erkenntnisse aufbauend, wird der Flächeninhalt des gelben Quadrats gemeinsam als Einheit für die weiteren Flächeninhaltsvergleiche festgelegt. Die Vierergruppen nähern sich der Lösung folgenden Arbeitsauftrags problemlösend an.

> Vergleicht die Flächeninhalte der verschiedenen Teilfiguren des Kunstwerks mit dem Flächeninhalt des gelben Quadrats.

Um diese Arbeit zu erhalten erhalten die Schülergruppen jeweils zwei Arbeitsvorlagen (s. u.) im DIN A4-Format. Auf ihnen ist ein Quadratraster in der Größe des gelben Einheitsquadrats, eine entsprechend dimensionierte Abbildung des Kunstwerks und eine Strukturskizze abgedruckt, die nur die Begrenzungslinien der Teilflächen des Kunstwerks enthält. Dadurch steht den Schülerinnen und Schülern eine Strukturierungshilfe zur Verfügung, auf der sie mit Hilfe ihrer Puzzleteile arbeiten können. Es gibt vielfältige Möglichkeiten diese Vergleiche vorzunehmen. Der Kreativität der Schülerinnen und Schüler sollte hier nicht durch gutgemeinte Hilfen vorgegriffen werden. Wenn es Schwierigkeiten gibt, kann aber z. B. angeregt werden zunächst die kleinen gleichschenkligrechtwinkliges Dreiecke mit dem gelben Einheitsquadrat zu vergleichen. Anschließend bieten sich die größeren rechtwinkligen Dreiecke zum Vergleich an. Sollte es in einzelnen Gruppen größere Schwierigkeiten mit dem Vergleich von einzelnen Flächeninhalten geben, liegen am Lehrerpult (am besten laminierte) Hilfekärtchen aus (Vorlagen s. u.), die die Gruppen dort einsehen können. Anschließend gehen sie zu ihrem Gruppentisch zurück und versuchen die gesehenen Ideen selbst mit den Puzzleteilen umzusetzen, zu verstehen und daraus die jeweilige Vergleichsgröße abzuleiten.

Sicherung: Vorstellung der Ergebnisse
Im Anschluss an diese Gruppenarbeitsphase stellen die Gruppen im Plenum nacheinander jeweils eine von ihnen gefundene Vergleichsmethode vor. Dabei wird zur Visualisierung wieder ein großes Exemplar des Puzzles oder die oben erwähnte Simulation genutzt. Die Ergebnisse nehmen die Schülerinnen und Schüler als Arbeitsblatt (vgl. unten) mit nach Hause, auf dem die Ideen in Bilderfolgen dargestellt sind.

Hausaufgabe: Inhaltsgleiche Flächen finden
Als Hausaufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler einige Ideen des Flächeninhaltsvergleichs durch folgenden Arbeitsauftrag vertiefen:

Male alle Teilflächen der (großen) Quadrate, die denselben Flächeninhalt haben, jeweils mit derselben Farbe aus.

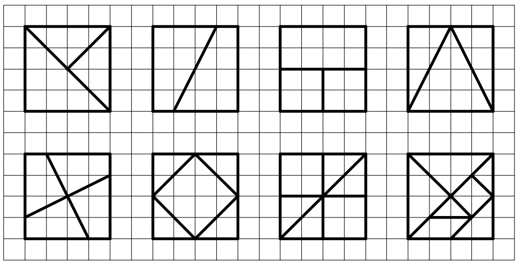


Abb. 4: Hausaufgabenvorlage

Flächeninhaltsvergleich: Methoden

Im Folgenden werden verschiedene Möglichkeiten des Flächeninhaltsvergleichs anhand der oben erwähnten Hilfekärtchen vorgestellt und erläutert.

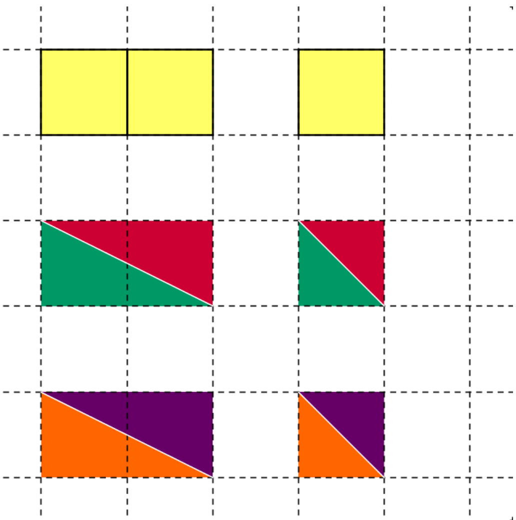


Abb. 5: Hilfekärtchen 1

Direktes Vergleichen und Auslegen
Wie in Abbildung 5 auf der rechten Seite erkennbar, lässt sich das gelbe Einheitsquadrat mit zwei der gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke auslegen. Also besitzt ein solches Dreieck die Hälfte des Flächeninhalts des gelben Quadrats.
Ganz analog funktioniert das mit den großen rechtwinkligen Dreiecken. Legt man eines davon in das Quadratraster, so stellt man fest, dass man ein zweites so ergänzen kann, dass genau zwei Einheitsquadrate bedeckt sind. Damit muss eines der großen rechtwinkligen Dreiecke denselben Flächeninhalt wie ein Einheitsquadrat besitzen.

Mit derselben Idee kann man auch den Flächeninhalt der stumpfwinkligen Dreiecke bestimmen. Zwei Einheitsquadrate lassen sich nämlich mit allen Dreiecken des Kunstwerks in derselben Farbe auslegen. Dazu gehört ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt ein Halb, einem großen rechtwinkligen Dreieck mit dem Flächeninhalt eins und einem stumpfwinkligen Dreieck (vgl. Abbildung 6). Durch Subtraktion erkennt man, dass der Flächeninhalt des stumpfwinkligen Dreiecks auch dem eines halben Einheitsquadrats entspricht.

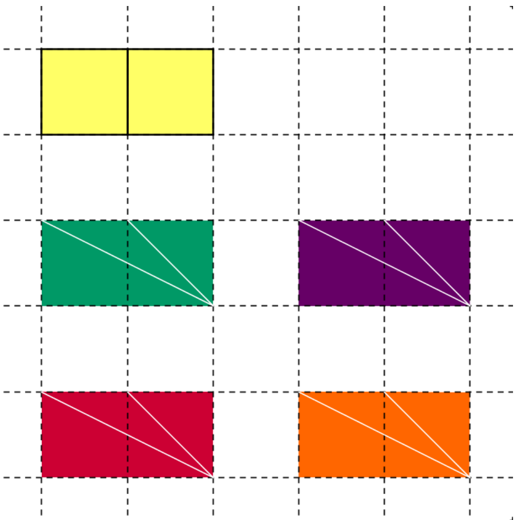


Abb. 6: Hilfekärtchen 2

Zerlegungsgleichheit: Abschneiden und Umlegen
Wenn man mutig ist und nicht davor zurückschreckt einzelne Puzzleteile zu zerschneiden, dann gibt es noch eine ganz andere Möglichkeit um die Flächeninhalte zu vergleichen. Legt man das große rechtwinklige Dreieck auf das gelbe Quadrat, dann steht ein Teil des Dreiecks über das Quadrat hinaus. Schneidet man diesen Teil

ab und legt ihn zusätzlich auf das Quadrat, dann wird es von den beiden Teilen des ursprünglichen rechtwinkligen Dreiecks genau bedeckt (vgl. Abbildung 7). Mit diesen beiden Teilen kann man also sowohl das das gelbe Quadrat als auch das rechtwinklige Dreieck puzzeln. Also haben beide Figuren denselben Flächeninhalt. Man sagt auch sie sind zerlegungsgleich.

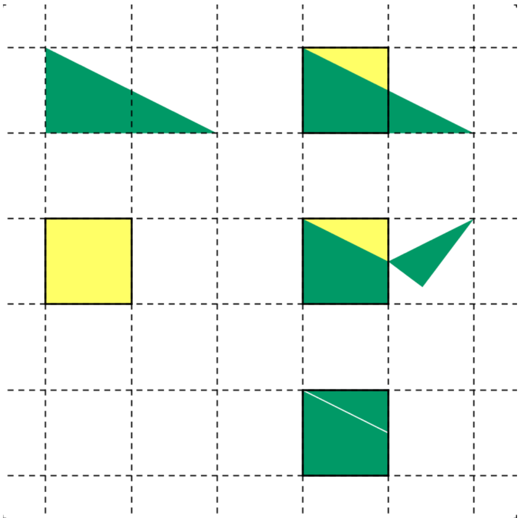


Abb. 7: Hilfekärtchen 3

Dieselbe Methode funktioniert auch für den Vergleich der Flächeninhalte des gleichschenklig-rechtwinkligen und des stumpfwinkligen Dreiecks. Wie Abbildung 8 zeigt, sind auch diese beiden Dreiecke zerlegungsgleich. Sie haben also beide den Flächeninhalt des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, das genau den halben Flächeninhalt des Einheitsquadrats besitzt.

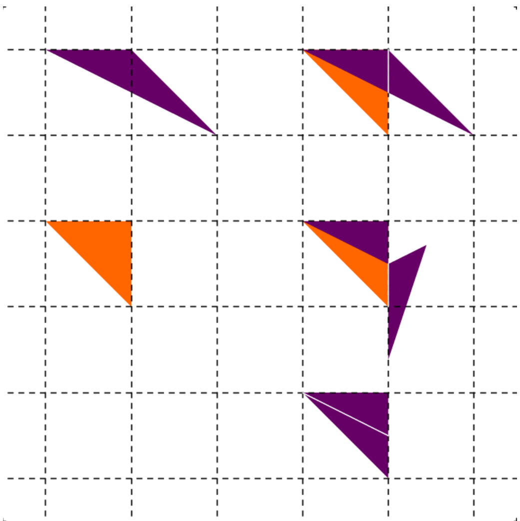


Abb. 8: Hilfekärtchen 4

Ergänzungsgleichheit

Eine weitere Methode des Flächeninhaltsvergleichs, ist die Idee der Ergänzungsgleichheit. Man kann z. B. wie in Abbildung 9 zwei der stumpfwinkligen Dreiecke zusammenlegen und deren gemeinsamen Flächeninhalt mit dem des gelben Quadrats vergleichen.

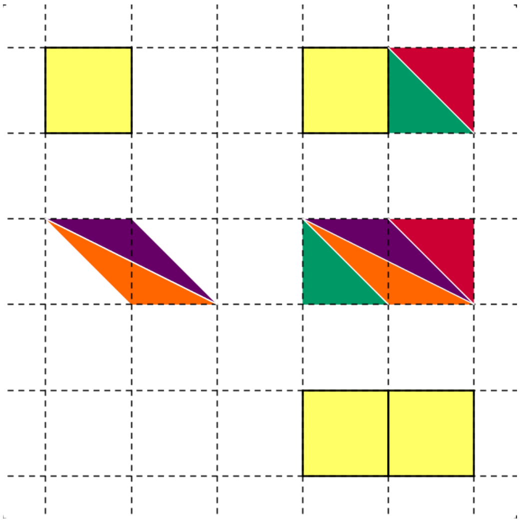


Abb. 9: Hilfekärtchen 5

Es fällt zunächst auf, dass man die aus den beiden stumpfwinkligen Dreiecken gebildete Figur durch Hinzufügen von zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zu einem Rechteck mit dem doppelten Flächeninhalt eines gelben Dreiecks ergänzen kann. Auch ein gelbes Quadrat lässt sich durch dieselben beiden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke zu demselben Rechteck ergänzen. Also sind die Figur aus den beiden stumpfwinkligen Dreiecken und das gelbe Quadrat ergänzungs- und damit flächeninhaltsgleich. Folglich besitzt eines der stumpfwinkligen Dreiecke den halben Flächeninhalt des gelben Quadrats.

Zusammenfassung

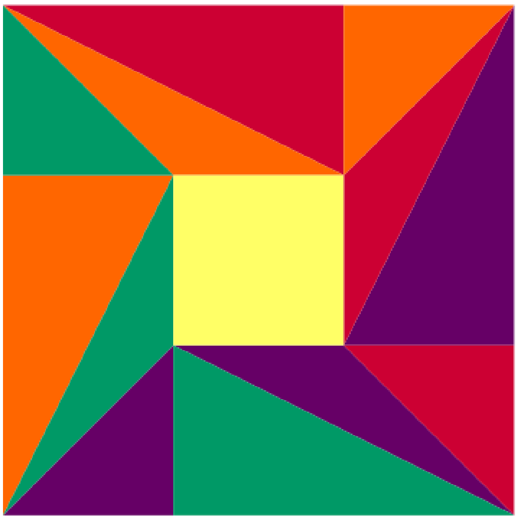
Die hier vorgestellte Unterrichtseinheit soll den Schülerinnen und Schüler im Rahmen einer Lernumgebung (vgl. Vollrath und Roth, 2012, S. 150ff) einen Überblick über Möglichkeiten des Vergleichs von Flächeninhalten ermöglichen.

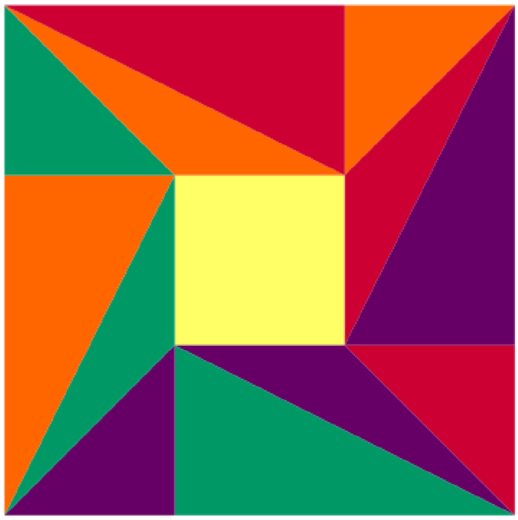
Literatur:

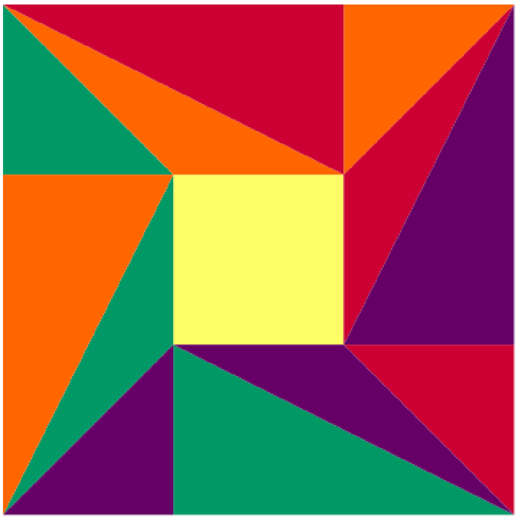
Bill, M. (1977): die mathematische denkweise in der kunst unserer zeit. In: E. Hüttinger, Max Bill. Zürich. S. 105-116

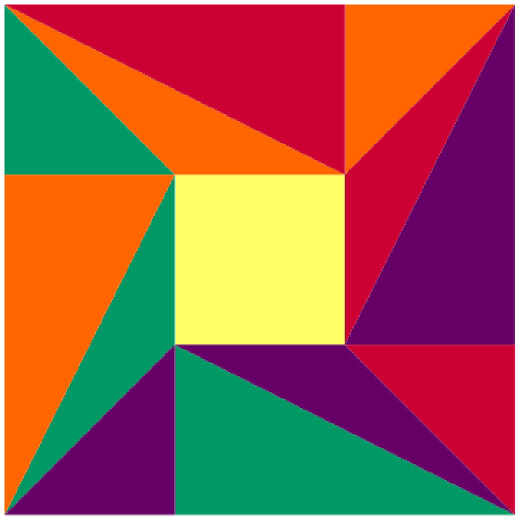
Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen (2011): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, S. 232ff

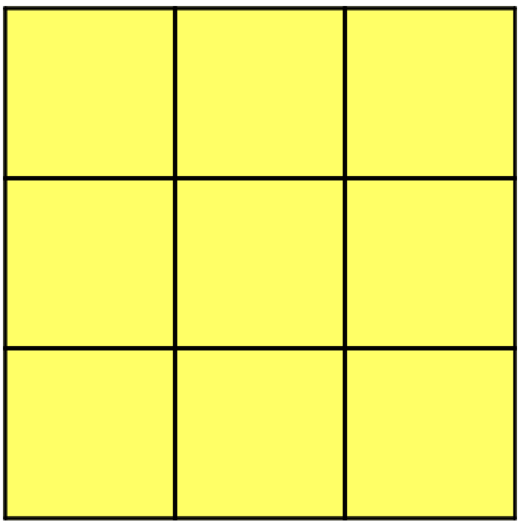
Puzzleteile

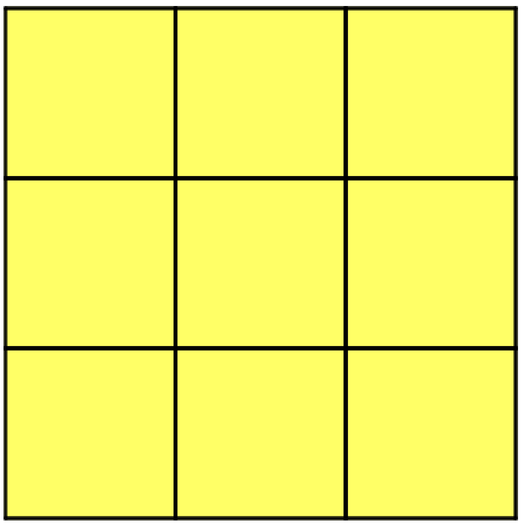




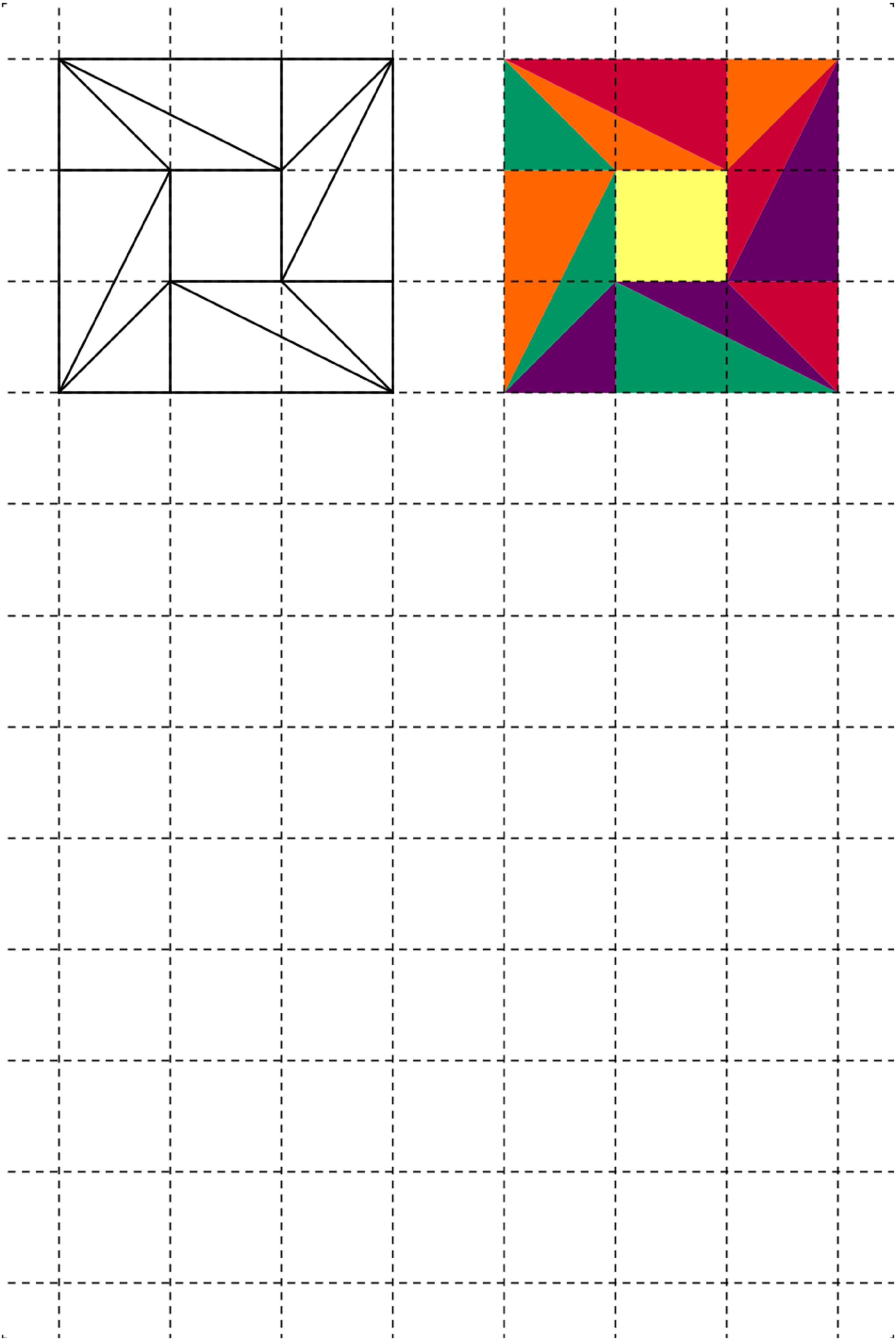




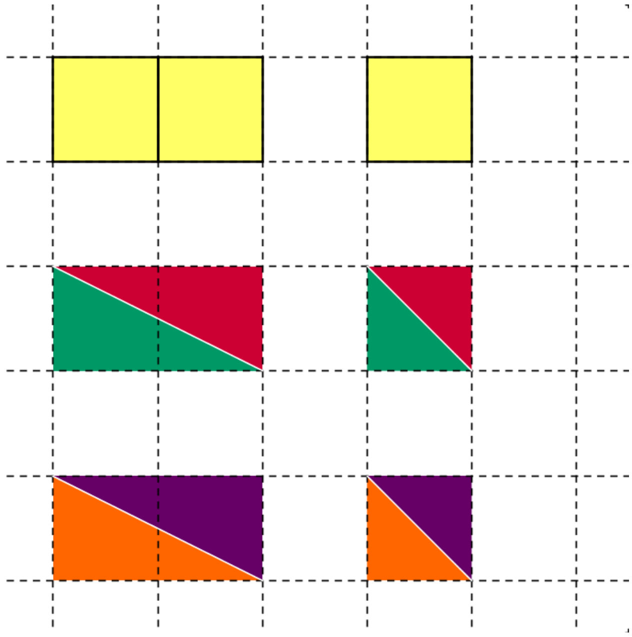


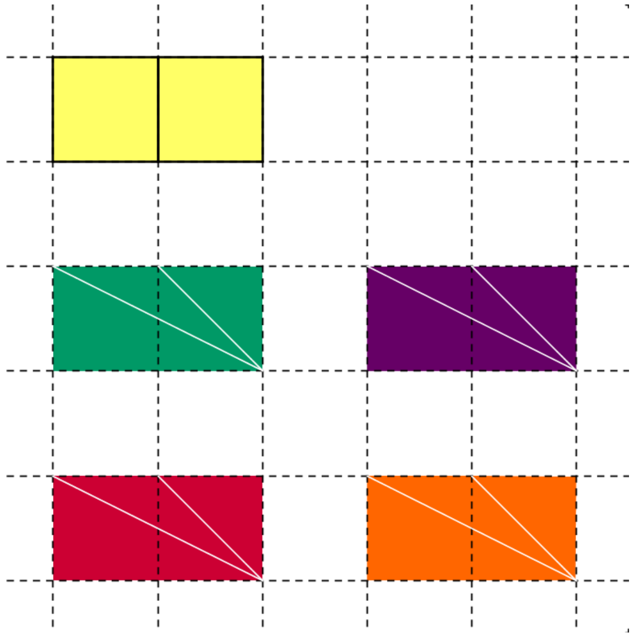


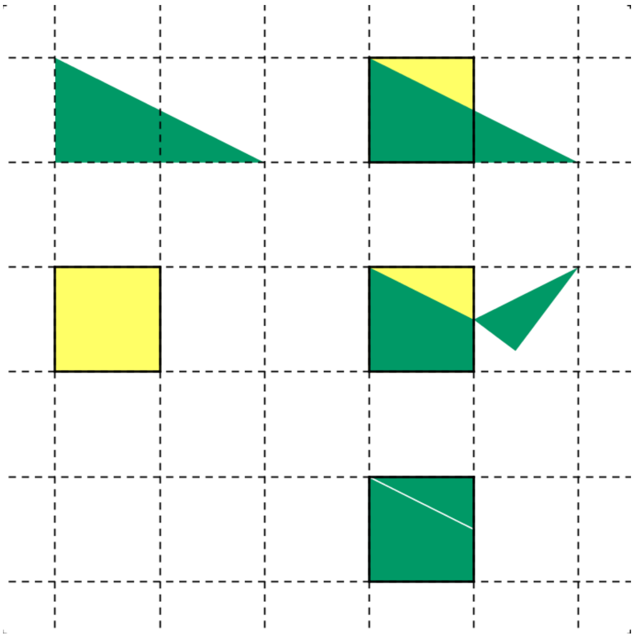
Arbeitsvorlage

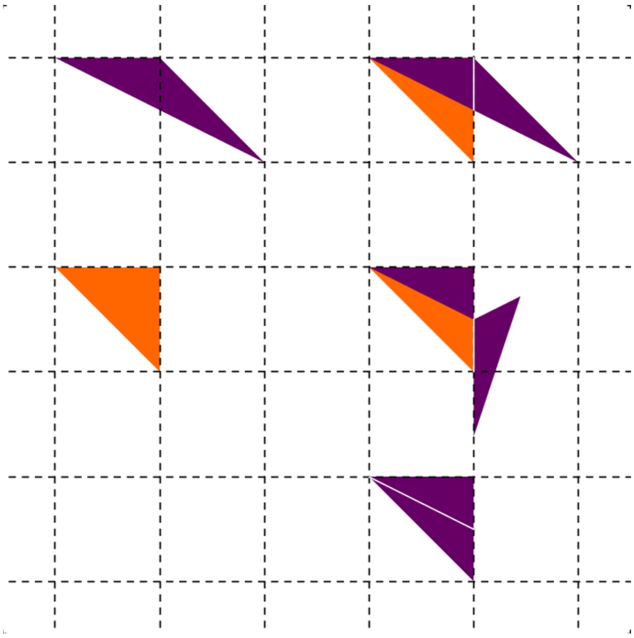


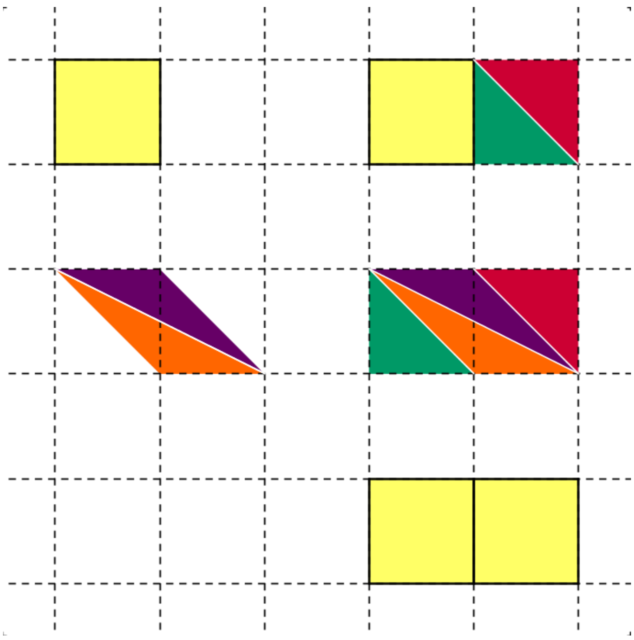
Hilfekärtchen/Arbeitsblatt



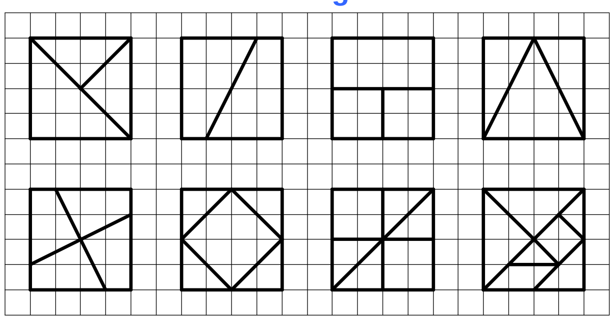


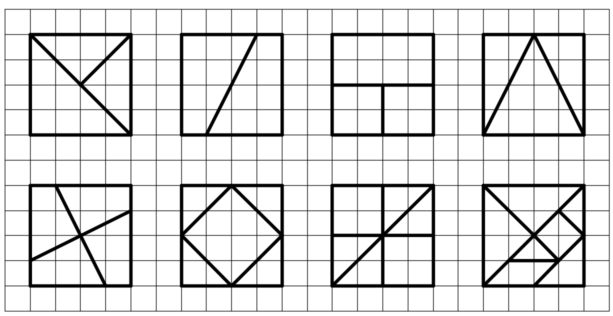






Hausaufgabe





Folie