Jürgen Roth

Ähnlichkeit verstehen – Den Jakobsstab nutzen

Lerngruppe:	9. Klasse
Idee:	Mit Hilfe des Begriffs Ähnlichkeit erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler die Höhenmessung mit dem Jakobsstab und leiten dabei selbstständig die Strahlensätze her.
Material:	Alle Materialien stehen unter www.mathe-labor.de/simulation/strahlensaetze/ zur Verfügung.
Zeitbedarf:	6 Unterrichtsstunden

Begriffe verstehen

Wann haben Schüler einen Begriff verstanden? Diese Frage ist entscheidend beim Unterrichten von Begriffen und muss immer wieder neu gestellt werden. Bei Vollrath und Roth (2011, S. 82) findet sich folgende Antwort darauf: „Begriffe verstehen, heißt Eigenschaften zu kennen, Beziehungen zu sehen und mit Begriffen arbeiten zu können.“ Nach Weigand et al. (2009, S. 110) gehören zum Verstehen eines Begriffs auch Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff, wie z. B. „Fähigkeiten zum *Problemlösen*“. Wesentliche Voraussetzungen für das Verständnis eines Begriffs sind sicher grundlegende Kenntnisse zu seinen Eigenschaften und dessen Beziehungen zu anderen Begriffen. Dies allein reicht aber noch nicht aus, um von einem sicheren Verständnis sprechen zu können. Im Folgenden wird das Verstehen eines Begriffs mit der Fähigkeit verknüpft diesen Begriff in neuen Zusammenhängen als relevant erfassen und für Problemlösungen sowie neue Erkenntnisse nutzen zu können. Im Artikel geht es um den Begriff der Ähnlichkeit und seine Nutzung für Vermessungsaufgaben mit dem Jakobsstab. Eine Strategie für eine Vertiefung des Verständnisses des Ähnlichkeitsbegriffs ist die Vernetzung von Medien (Simulationen auf der Basis von GeoGebra, ein gegenständliches Modell eines Jakobsstabs sowie eine Videosequenz) und von Inhalten des Themenkomplexes der Ähnlichkeit (ähnliche Figuren, zentrische Streckung, Strahlensätze). Auf diese Weise erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler im Rahmen einer Unterrichtssequenz in arbeitsgleicher Gruppenarbeit selbstständig die Strahlensätze. Dazu gibt es Arbeitshefte, in denen Arbeitsaufträge formuliert sind und Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern protokolliert werden. Zur Unterstützung der selbständigen Arbeit werden schriftliche, gestufte Hilfen bereitgestellt, die teilweise in Form eines gedruckten Hilfehefts und teilweise innerhalb der Simulationen von den Schülerinnen und Schülern nach Bedarf abgerufen werden können. Alle Materialien zu dieser Unterrichtssequenz finden sich unter www.mathe-labor.de/simulation/strahlensaetze/. Das Konzept wurde zunächst für eine Laborstation des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ der Universität Landau entwickelt und kann dort, nach Anmeldung, mit Schulklassen auch durchgeführt werden. Die Materialien können aber auch unabhängig vom Mathematik-Labor online genutzt, heruntergeladen und für den eigenen Unterricht angepasst werden. Als Ersatz für die Jakobsstäbe aus Holz die im Mathematik-Labor Verwendung finden, wird deshalb auch eine Bastelanleitung für Jakobsstäbe aus Pappe zur Verfügung gestellt.

Der Jakobsstab – ein Messgerät des Mittelalters

Die Unterrichtssequenz ist in eine Problemstellung eingebunden. In einem Film beobachten die Schülerinnen und Schüler zum Einstieg einen mittelalterlichen Lehrer und seinen Schüler, die die Höhe eines Turms mit Hilfe eines Jakobsstabs bestimmen wollen (vgl. Abb. 1 bis Abb. 3).


Abb. 1: Turm mit dem Jakobsstab anvisieren


Abb. 2: Abstand Auge-Querstab bestimmen


Abb. 3: Abstand zum Turm messen

Im Film ist zu sehen, wie der Jakobsstab benutzt wird und welche Längen gemessen werden oder bekannt sind (Querstablänge, Abstand Auge-Querstab, Abstand messende Person-Turm). Der Film endet damit, dass der Schüler fragt, wie daraus die Höhe des Turms bestimmt werden kann.

Wissen reaktivieren

Um diese Frage beantworten zu können, werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert unter anderem anhand von zwei auf dem dynamischen Mathematiksystem GeoGebra basierenden Simulationen ihr Wissen über wesentliche Eigenschaften ähnlicher Figuren und der zentrischen Streckung aufzufrischen und sich die Eigenschaften gegenseitig zu erklären. In der ersten Simulation (vgl. Abb. 4) müssen Dreiecke nach Ähnlichkeit sortiert und auf dieser Grundlage wesentliche Eigenschaften von ähnlichen Dreiecken zusammengestellt werden. Die zweite Simulation ist eine GeoGebra-Datei in der ein Dreieck zentrisch gestreckt und die entstehende Konfiguration systematisch variiert werden muss (vgl. Abb. 5). Die Ergebnisse werden im Anschluss an die Gruppendiskussion jeweils im Arbeitsheft in Form eines Ergebnisprotokolls festgehalten.

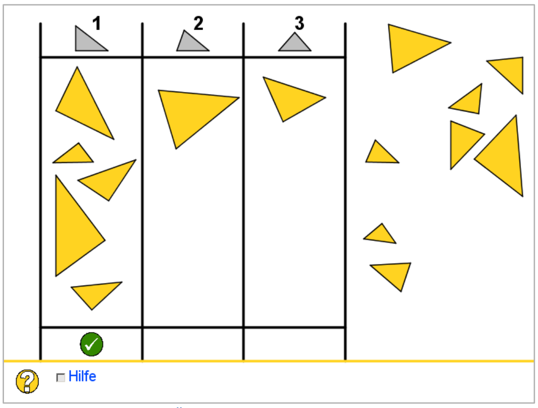

Abb. 4: Dreiecke nach Ähnlichkeit sortieren

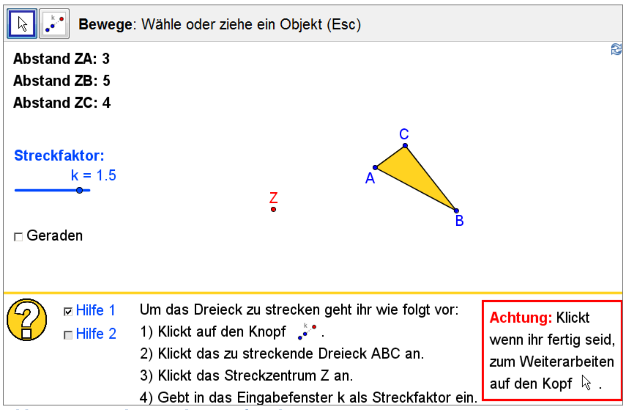

Abb. 5: Zentrische Streckung erforschen

Auf diese Weise werden die Kenntnisse reaktiviert, die benötigt werden um zu klären, wie die Menschen im Mittelalter mit Hilfe des Jakobsstabs Höhen gemessen haben.

Höhenmessung mit dem Jakobsstab inhaltlich erarbeiten

Dazu wird die Messsituation aus dem Film noch einmal in einer Simulation nachgestellt, in der alle dort bestimmten Längen enthalten sind. Die Schülerinnen und Schüler jeder Gruppe entscheiden nun, ob sie sich dem Phänomen über die Eigenschaften zueinander ähnlicher Dreiecke oder der zentrischen Streckung eines geeigneten Dreiecks nähern wollen. Dies erlaubt einen Zugang von zwei verschiedenen, inhaltlich aber analogen Richtungen und ermöglicht es in einem Unterrichtsgespräch, diese Zugänge rückblickend zu vergleichen. In beiden Fällen wird in der Simulation jeweils eine entsprechende Konfiguration zur Verfügung gestellt, die auf die konkrete Situation angepasst werden muss (vgl. Abb. 6 und Abb. 7).

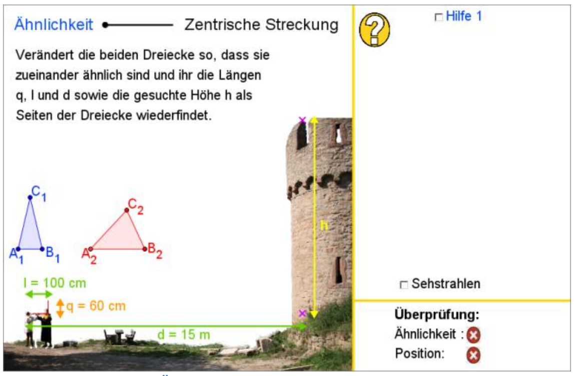

Abb. 6: Ansatz über Ähnlichkeit

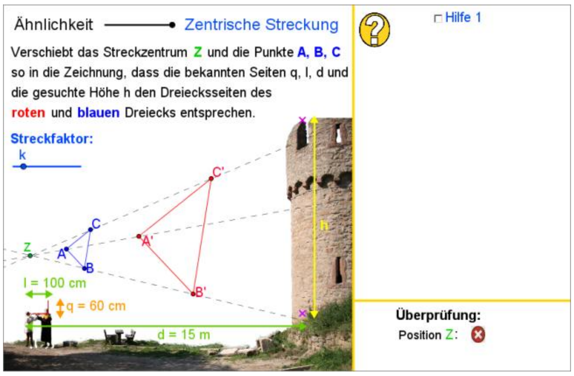

Abb. 7: Ansatz über zentrische Streckung

Zu jeder wählbaren Zugangsweise gibt es innerhalb der Simulation bei Bedarf abrufbare gestufte Hilfen, sowie Rückmeldungen zur korrekten Positionierung der jeweiligen Konfiguration. Im Gegensatz zu vielen Schulbuchaufgaben, die die nötige Konfiguration zum Aufstellen der entsprechenden Verhältnisgleichung bereits vorgeben, müssen die Schülerinnen und Schüler hier zunächst noch einmal an den Verständnisgrundlagen zu den Begriffen Ähnlichkeit bzw. zentrische Streckung arbeiten. Im einen Fall müssen zwei Dreiecke so positioniert bzw. verformt werden, dass sie zueinander ähnlich sind und die bekannten bzw. gesuchten Längen als Streckenlängen ihrer Seiten repräsentieren. Im anderen Fall muss das Streckzentrum für die Situation geeignet positioniert, das zu streckende Dreieck so verformt und ausgerichtet werden, dass bekannte Längen als Streckenlängen seiner Seiten realisiert sind und schließlich ein geeigneter Streckfaktor gewählt werden, so dass das Bilddreieck der zentrischen Streckung richtig liegt. Dabei werden Kenntnisse zu ähnlichen Dreiecken bzw. zur zentrischen Streckung aktiviert und miteinander in Beziehung gesetzt.

Die so gewonnene Konfiguration wird als Zeichnung in das Arbeitsheft übertragen (vgl. Abb. 8). Erst auf dieser Basis entwickeln die Schülerinnen und Schüler aus den bekannten Größen (Querstablänge q, Längsstablänge l, Abstand messende Person-Turm d, Turm(teil)-höhe h) eine Verhältnisgleichung über die Eigenschaften ähnlicher Dreiecke oder der zentrischen Streckung, wie z. B.

$$\frac{h}{q} = \frac{d}{l} \text{ bzw. } \frac{h}{d} = \frac{q}{l}.$$

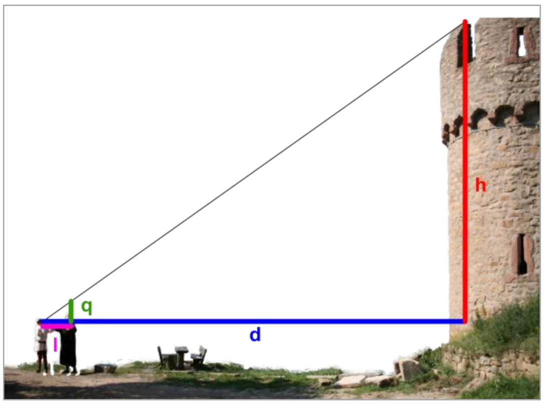

Abb. 8: Skizze zur Ergebnissicherung

Auch hier können in Abhängigkeit von der gewählten Zugangsweise gestufte Hilfen aus dem Hilfeheft abgerufen werden. Die Verfügbarkeit von Hilfestellungen wird im Arbeitsheft und in den Simulationen jeweils mit einem Fragezeichen-Logo gekennzeichnet. Das Hilfeheft ist so gestaltet, dass in der Regel zunächst eine ergänzende Frage gestellt wird. Erst durch weiteres Umblättern erhält man nach und nach konkretere Hinweise. Gibt es weitere Hilfen, dann wird dies durch ein Pfeil-Logo angezeigt. Aus der aufgestellten Verhältnisgleichung und der Augenhöhe des Schülers erarbeiten die Gruppen eine Gleichung für die Gesamthöhe des Turms und berechnen diese schließlich.

Den zweiten Strahlensatz erfassen

Damit ist die ursprüngliche Problemstellung aus dem Film zwar gelöst, die zentrale Erkenntnis, dass hier eine allgemeingültige Aussage entdeckt wurde, aber noch nicht herausgearbeitet. Folglich wird direkt im Anschluss noch einmal die Grundkonfiguration der Problemlösung mit anderen Bezeichnungen präsentiert. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Aufgabe, festzuhalten, welche Streckenlängen zueinander im gleichen Verhältnis stehen. Auf dieser Grundlage werden sie mit der Konfiguration in Abb. 9 konfrontiert (allgemeine Strahlensatzkonfiguration in „V-Figur“) und sollen für die dort farbig gekennzeichneten Strecken begründen (!) warum eine entsprechende Verhältnisgleichung für die zugehörigen Streckenlängen aufgestellt werden kann. Dazu werden sie explizit darauf verwiesen zu überprüfen, ob die Überlegungen beim Lösen des Problems mit dem Jakobsstab hier in analoger Weise angewandt werden können. Es werden also noch einmal alle Überlegungen zu Eigenschaften ähnlicher Dreiecke bzw. der zentrischen Streckung herangezogen und auf ihre Anwendbarkeit auf die vorliegende Konfiguration hin überprüft. Dabei geht es unter anderem darum geeignete Dreiecke zu entdecken, zu hinterfragen, ob diese ähnlich zueinander sind bzw. durch eine (welche?) zentrische Streckung aufeinander abgebildet werden können. Schließlich müssen Eigenschaften dieser Objekte genutzt werden, um zu einer Verhältnisgleichung zu gelangen, die der Aussage der Behauptung des zweiten Strahlensatzes entspricht. Diese Verhältnisgleichung wird von den Schülerinnen und Schülern zur visuellen Unterstützung der Aussage entsprechend der Farbgebung der beteiligten Strecken in der Konfiguration (vgl. Abb. 9) gefärbt. Anschließend variieren sie eine V-Figur in einer Simulation dynamisch und überprüfen den Bestand ihrer Überlegungen für diese Veränderungen noch einmal. Am Ende der ersten Doppelstunde und auf der Grundlage dieser vielfältigen Erfahrungen werden die Gruppen schließlich aufgefordert die Aussage des zweiten Strahlensatzes jeweils in ihren eigenen Worten sprachlich zu formulieren.

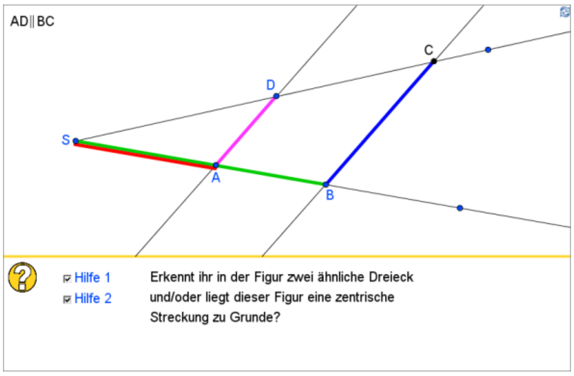

Abb. 9: Grundverständnis zum zweiten Strahlensatz sichern

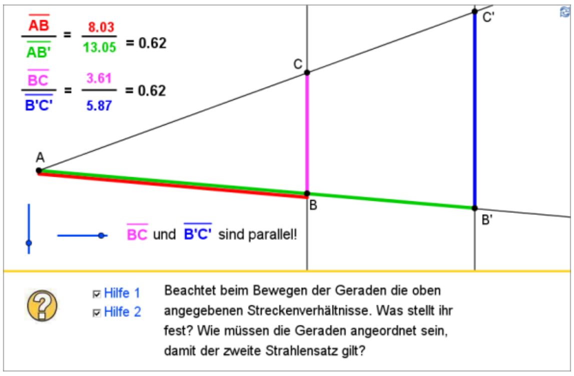

Abb. 10: Grundverständnis zum zweiten Strahlensatz vertiefen

Zu Beginn der folgenden Doppelstunde werden die Ergebnisse zum zweiten Strahlensatz anhand einer dynamischen Konfiguration wiederholt, bei der auch die in der Strahlensatzfigur zueinander parallelen Geraden in ihrer gegenseitigen Ausrichtung variiert werden können (vgl. Abb. 10). Auf diese Weise wird die Voraussetzung der Parallelität der Geraden für den zweiten Strahlensatz noch einmal bewusst gemacht und der Bezug zur Ähnlichkeit bzw. zur zentrischen Streckung herausgearbeitet. Leistungsfähigere Gruppen können hier auch entdecken, dass der zweite Strahlensatz nicht umkehrbar ist. In der Simulation gibt es Einstellungen, bei denen entsprechende Streckenverhältnisse gleich groß, aber die beiden Geraden BC und B’C‘ (vgl. Abb. 10) nicht parallel zueinander sind.

Höhen mit dem Jakobsstab messen

Die Schülerinnen und Schüler haben sich damit alle Voraussetzungen erarbeitet, um selbst mit einem Jakobsstab unbekannte Höhen zu messen. Da beim Umgang mit dem Jakobsstab mehrere Variationsmöglichkeiten bestehen, die alle zu Messfehlern führen können, erarbeiten sich die Schüler die Handhabung zunächst an Hand einer Simulation, bevor sie tatsächlich etwa die Höhe eines Baums damit bestimmen. Abb. 11 zeigt eine korrekte Haltung des Jakobsstabs. Er muss zum einen so ausgerichtet werden, dass der Querstab senkrechten zum Boden steht. Andernfalls ist die „Höhe“ des zu messende Objekts nicht parallel zum Querstab und damit die Voraussetzung für die Anwendung des Strahlensatzes nicht erfüllt. Darüber hinaus muss der Querstab so verschoben werden, dass seine Oberkante beim Visieren (vgl. Abb. 11 und Abb. 12) gerade die Oberkante des zu messenden Objekts abdeckt. Sollte das nicht möglich sein, muss die Entfernung der messenden Person zum Messobjekt verändert (vergrößert oder verkleinert?) werden. Durch die Auseinandersetzung mit der Simulation wird den Schülerinnen und Schülern auch deutlich, dass die Augenhöhe der messenden Person zur mit dem Jakobsstab bestimmten Höhe des Baumes addiert werden muss.

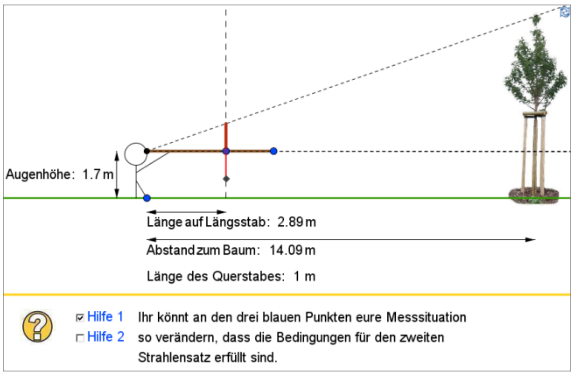

Abb. 11: Messen mit dem Jakobsstab vorbereiten


Abb. 12: Hilfen zu drei verschiedenen Zugängen werden angeboten

Nach diesen Vorbereitungen geht jede Gruppe vor das Gebäude und sucht sich ein geeignetes Objekt (z. B. einen Baum oder ein Gebäude) dessen Höhe es bestimmen will. Die benötigte Entfernung zum Messobjekt wird mit einem Maßband gemessen, das in der Sportfachschaft ausgeliehen werden kann. Die Frage, ob der Querstab des Jakobsstabs (bildet einen rechten Winkel mit dem Längsstab) senkrecht steht, lässt sich etwa mit Hilfe eines Senklots (im Baumarkt in verschiedenen Massen erhältlich) klären. Dazu wird eine Markierungslinie auf dem Querstab angebracht und die Schnur des Senklots an einem Punkt der Linie befestigt. Der Jakobsstab des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ besitzt einen Querstab mit zwei verschiedenen Längen (vgl. Abb. 13). Er kann gedreht werden (kurzes Stück nach oben), um kleinere bzw. weit entfernte Objekte messen zu können. Wenn ein Messobjekt (etwa ein Turm) allerdings weit entfernt ist (z. B. auf der anderen Seite eines Flusses), dann kann der Abstand bis dahin nicht mehr mit einem Maßband bestimmt werden. Wie lässt sich die Höhe trotzdem ermitteln? Man wähle zwei Messpositionen die sich zusammen mit dem zu messenden Turm in einer Flucht befinden, messe mit einem Maßband den Abstand der Messpositionen und visiere von dort aus jeweils den Turm mit dem Jakobsstab an. Eine Skizze hilft dabei, die Höhe des Turms anschließend aus den gemessenen Größen zu bestimmen …

Es bietet sich an, dass alle Gruppenmitglieder dasselbe Objekt unabhängig voneinander messen, so dass die Ergebnisse verglichen werden können. Die gemessenen Längen werden am besten in Form einer Tabelle festgehalten und erst später wird im Klassenzimmer daraus jeweils die gesuchte Höhe ermittelt. Das arithmetische Mittel der so bestimmten Höhen verbessert den gewonnenen Wert für die Höhe in der Regel noch.

Wer sich intensiver mit dem Jakobsstab befassen möchte, dem seien Schmidt (1968) und Krüger (2010) als Lektüre empfohlen. Beide beschäftigen sich mit möglichen Fehlerquellen beim Messen mit dem Jakobsstab. Krüger führt insbesondere aus, wie groß der Fehler ist, wenn man den Querstab nicht parallel zum zu messenden Objekt hält.

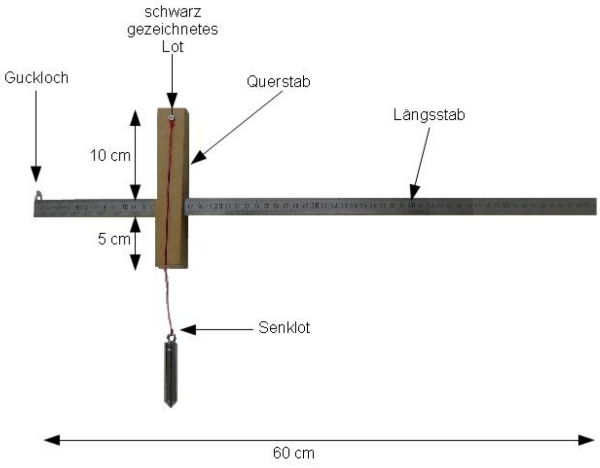

Abb. 13: Jakobsstab des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“

Abb. 14: Zollstock als Jakobsstabersatz

Alternativen zum Jakobsstab

Wie kann man sich behelfen, wenn man keinen Jakobsstab besitzt? Ein einfacher und leicht verfügbarer Ersatz ist etwa ein Zollstock. Wird er wie in Abb. 14 gehalten dann lässt sich die Höhe eines Objekts wie mit dem Jakobsstab bestimmen. Es ergeben sich nur wenige Unterschiede: Der Abstand des „Querstabs“, also des Zollstocks, zum Auge kann nicht mehr variiert werden (Armlänge), dafür aber die „Querstablänge“ (Zollstocklänge). Außerdem ist der Abstand zwischen dem ausgestreckten Arm und der Augenhöhe zu berücksichtigen. Zur genaueren Messung kann auch ein Senklot mit Klebeband am Zollstock befestigt werden.

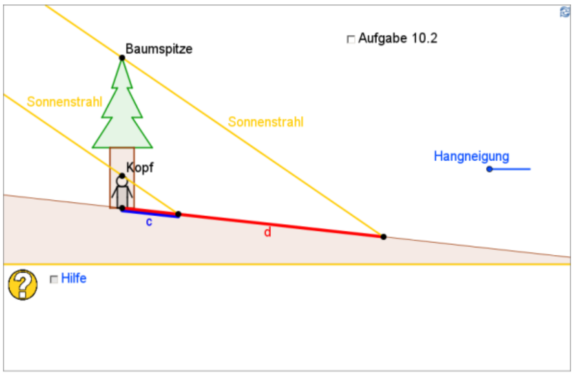

Abb. 15: Konfiguration zur Erarbeitung des ersten Strahlensatzes

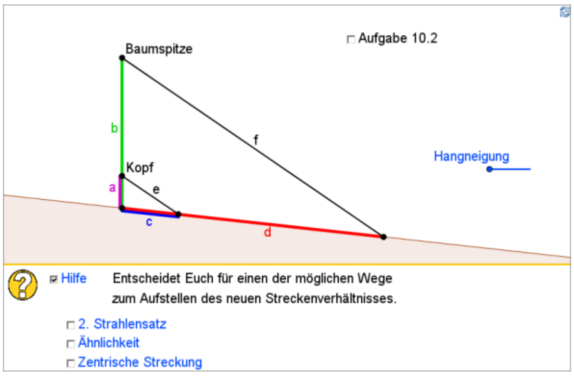

Abb. 16: Hilfen zu drei verschiedenen Zugängen werden angeboten

Als weitere Alternative zum Jakobsstab bietet sich bei Sonnenschein eine Methode an, bei der man nur die eigene Körpergröße und Schrittlänge kennen (bzw. für eine etwas genauere Messung ein Maßband benutzen) muss. Soll z. B. die Höhe eines Baums bestimmt werden, muss man sich nur neben den Baum stellen und die Länge des eigenen Schattens sowie die des Baumschattens bestimmen. Die gesuchte Höhe des Baums lässt sich daraus bei bekannter eigener Körpergröße bestimmen, wenn man weiß, dass die Sonnenstrahlen (nahezu) parallel auf die Erde einfallen (vgl. Abb. 15). Das Ganze ist sogar unabhängig von einer etwa vorhandenen Hangneigung, wie man sich anhand einer Simulation klarmachen kann. Das Problem der Höhenbestimmung des Baums aus den gegebenen Daten führt zur Herleitung des ersten Strahlensatzes. Dabei können die Schüler entweder auf die Eigenschaften ähnlicher Dreiecke, die zentrische Streckung oder die zweimalige Anwendung des eben erst erarbeiteten ersten Strahlensatzes zurückgreifen. In der zugehörigen Simulation werden gestufte Hilfen zu allen drei Zugangswegen angeboten (vgl. Abb. 16). Auf diese Weise ist es nach der Gruppenarbeit möglich anhand der verschiedenen Erarbeitungswege noch einmal die Beziehungen zwischen der Ähnlichkeit von Dreiecken, der zentrischen Streckung und den

Strahlensätzen herauszuarbeiten und diese Begriffe und Sätze so auf der Grundlage eigener Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler miteinander zu vernetzen. Wenn die Schülerinnen und Schüler diese Unterrichtssequenz eigenverantwortlich und erfolgreich durchlaufen haben, ist davon auszugehen, dass die meisten nicht nur den Jakobsstab zum Messen benutzen können, sondern den Begriff der Ähnlichkeit verstanden haben und für Problemlösungen nutzen können.

Literatur

Krüger, Katja (2010): Höhenmessung mit dem Jakobsstab. In: Katja Krüger, Philipp Ullmann (Hrsg.): Von Geometrie und Geschichte in der Mathematikdidaktik. Festschrift zum 65. Geburtstag von Lutz Führer. Eichstätt: Polygon, S. 183–194.

Schmidt, Fritz (1988): Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter. Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer.

Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Weigand, Hans-Georg et al. (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.