JÜRGEN ROTH

Geometrie im Kopf

Bewegliches Denken nutzen und fördern

LERNGRUPPE:	6.–7. Schuljahr
IDEE:	Eine Vorstellungsübung zu Dreiecksformen schult bewegliches Denken
ONLINE-MAERIAL:	www.juergen-roth.de/dynageo/kopfgeometrie/verdecktes_viereck.html

Kopfgeometrie bezeichnet das Lösen geometrischer Aufgaben im Kopf, also ohne Hilfsmittel. Es kann dabei nur auf eigene Vorstellungen und sprachlich formuliertes Wissen über die vorkommenden Objekte zurückgegriffen werden.

Das Bearbeiten kopfgeometrischer Aufgaben erfordert eine Reihe von Fähigkeiten in Bezug auf (ebene und räumliche) Figuren: Man muss sich Figuren vorstellen, ihre Lage, Größe und Form gedanklich verändern und sie auch in der Vorstellung kombinieren können. Diese Fähigkeiten werden in der Kopfgeometrie trainiert, man muss sie zum Teil aber bereits vorher erarbeiten und bereitstellen.

Bei der Kopfgeometrie geht es nicht allein um die häufig genannte Schulung der Raumvorstellung sondern insbesondere auch um

- das Aufbauen und Anwenden von Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen und Sachverhalten
- die Sicherung und Vertiefung geometrischer Grundbegriffe sowie deren Eigenschaften und Beziehungen,
- das Gewinnen von Sicherheit im Erfassen und im Gebrauch der Fachsprache.

Zum Aufbau sachgerechter und situationsangemessener Vorstellungsbilder ist also insbesondere ein fundiertes Wissen über Eigenschaften und Beziehungen von Figuren notwendig.

Ablauf kopfgeometrischer Aufgaben

Das methodische Vorgehen bei Aufgaben zur Kopfgeometrie umfasst grundsätzlich drei Phasen (vgl. Senftleben 1996), die nacheinander durchlaufen werden:

1. Phase: Die Aufgabe wird gestellt, Vorstellungsbilder entstehen.
2. Phase: Umfasst die eigentliche Kopfgeometrie. Hier wird räumlich gedacht, im Kopf operiert und grundsätzlich ohne Hilfsmittel gearbeitet.
3. Phase: Jetzt werden die Ergebnisse der zweiten Phase präsentiert, diskutiert und ggf. überprüft.

An folgendem Beispiel (vgl. Degner, Kühl 1984, S. 345) wird deutlich, dass man einige Erfahrungen zu den beteiligten Figuren gesammelt haben und deren wesentliche Eigenschaften kennen muss, um eine kopfgeometrische Aufgabe zu bewältigen.

➔ *Würfel und Gerade*
Ein Würfel steht auf einer Ebene, die Vorderfläche zeigt zu dir.
Zeichne die beiden Diagonalen der rechten Fläche. Ihr Schnittpunkt heißt M.
Der Würfeleckpunkt H liegt links, hinten, oben.
Zeichne eine Gerade g durch H und M, sie schneidet die Ebene, auf der der Würfel steht, im Punkt S.
Wie weit ist S vom Würfel entfernt? Kannst du die Lage von S genauer beschreiben?

Idealerweise schaffen es die Schülerinnen und Schüler nach den Angaben der Aufgabenstellung, die notwendigen Vorstellungsbilder ohne Hilfsmittel zu erzeugen. Dies setzt ein Wissen über die Symmetrie eines Würfels, die Form seiner Seitenflächen und die besondere Position des Diagonalenschnittpunkts in einem Quadrat voraus. Gegebenenfalls muss die Aufgabenstellung anhand einer Skizze oder einem Würfelmodell erläutert werden (Phase 1).

Selbst wenn das mentale Bild durch Hilfsmittel gestützt ist bedeutet dies nicht die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabenstellung (Phase 2). Der Punkt S ist nicht Teil des Modells, seine Position muss im Kopf konstruiert werden, wofür Wissen um die wesentlichen geometrischen Eigenschaften der gegebenen Objekte wichtig ist. Der Diagonalenschnittpunkt M befindet sich auf halber Höhe zwischen Deck- und Grundflächenebene des Würfels und auch auf halber Strecke zwischen hinterer und vorderer Würfelflächenebene. Spiegelt man H an M, dann erhält man H' als Durchstoßpunkt der Geraden g durch die Grundflächenebene. H' ist also der gesuchte Punkt S, der sich eine Würfelkantenlänge vom Würfel entfernt befindet, und zwar auf der Verlängerung der vorderen unteren Würfelkante.

Abschließend müssen die Überlegungen, die während des Lösungsprozesses im Kopf noch bildhaft und in sprachlicher Hinsicht diffus waren, in Worte gefasst werden, um sie den Mitschülern präsentieren und begründen zu können (Phase 3). Hier findet also eine Rückübersetzung statt aus der mentalen visuellen Repräsentation in den gegebenen Wort-, Bild- und/oder Modellkontext der Aufgabenstellung.

Mathematisches Potential kopfgeometrischer Aufgaben

Die geometrischen Objekte in der Aufgabenstellung können zudem visu-

Ein verdecktes Viereck wird nach und nach aufgedeckt

Hier ist ein Viereck teilweise verdeckt. Um welche Art von Viereck kann es sich bei den drei Bildern jeweils handeln? Finde möglichst viele (alle) Viereckstypen.
Begründe jeweils deine Antwort.

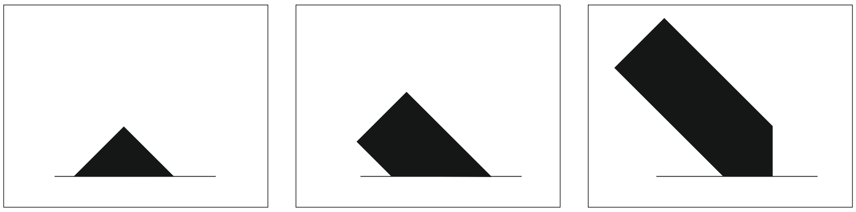

Abb. 1: Visualisierungen in der Aufgabenstellung regen kopfgeometrische Überlegungen und Begründungen an.

Dreiecksgrundformen

Der Eckpunkt *C* des Dreiecks *ABC* wird auf der zur Seite [AB] parallelen Geraden *g* nach ganz rechts bewegt. Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck *ABC* dabei der Reihe nach an?
Extra: Wie ändert sich das Ergebnis, wenn der Abstand der Geraden *g* zur Seite [*AB*] vergrößert wird?

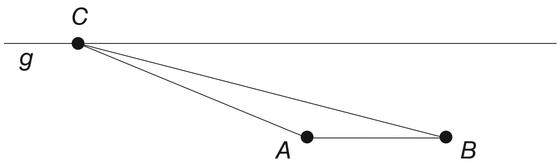

Abb. 2: Eine kopfmathematische Aufgabe, die mit oder ohne Abbildung präsentiert werden kann.

ell präsentiert werden. Auch in diesem Fall ist viel mentale Mathematik notwendig, um eine Aufgabe im Kopf zu lösen. Beim Beispiel in **Abb. 1** (vgl. Maier 1996, S. 283) werden in der Aufgabenstellung Bilder eingesetzt. Die Fortsetzung der Figur nach unten muss jeweils mental erfolgen und die Benennung möglicher Viereckstypen ist umso umfangreicher, je systematischer das Wissen um die vielfältigen Formen der Vierecke ist.

Die Präsentation der Aufgabe kann mit statischen Bildern (nacheinander zeigen) erfolgen oder es kann mit beweglichen Bildern gearbeitet werden (mit Abdeckpapier und einem aus Pappe ausgeschnittenen Viereck oder mit Dynamischer Geometrie-Software, s. www.juergen-roth.de/dynageo/kopfgeometrie/verdecktes_viereck.html).

Das Potential geeigneter kopfgeometrischer Aufgaben für das Lernen von Geometrie ist vielfältig.

- Die Lernenden entwickeln oder nutzen individuelle Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen und Sachverhalten und vertiefen bzw. festigen sie dabei.
- Bereits erworbenes Wissen wird vernetzt, flexibel angewandt und so geübt.
- Bewegliches Denken (Roth 2005) wird trainiert und gefördert. Dieses umfasst: Bewegung hineinsehen und damit argumentieren, Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren, Änderungsverhalten erfassen und beschreiben.
- Aufgaben zur Kopfgeometrie führen in der Regel zu einer natürlichen Differenzierung und erlauben eine individuelle Diagnose des Leistungsstands.

Diese Vielfalt wird im Folgenden anhand des Beispiels in **Abb. 2** (vgl. Roth 2006) näher erläutert.

Grundvorstellungen nutzen

Ein Dreieck wird gedanklich verändert (**Abb. 2**). Um diese Aufgabe zu den Dreiecksgrundformen (gleichschenklig, gleichseitig, stumpfwinklig, rechtwinklig, spitzwinklig) lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler mindestens Grundvorstellungen zu gleichschenkligen sowie rechtwinkligen Dreiecken aufgebaut haben. Diese Grundvorstellungen sind dann in Beziehung zu den Nachbarbegriffen stumpfwinkliges, spitzwinkliges und ggf. gleichseitiges Dreieck zu setzen.

Welche Grundvorstellungen sollten zu gleichschenkligen Dreiecken aufgebaut sein? In einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang – diese Kenntnis sollte prototypisch verankert sein (vgl. Roth/Wittmann, 2009, S. 129 ff). Gibt man etwa die Seite [*AB*] eines Dreiecks *ABC* fest vor, muss zum Beispiel klar sein, auf welchen Ortslinien der dritte Eckpunkt *C* bewegt werden kann, damit das Dreieck immer gleichschenklig bleibt.

Die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ von [*AB*] ist die Ortslinie aller Punkte, die von *A* und *B* denselben Abstand haben. Wird *C* also auf $m_{[AB]}$ bewegt, dann gilt: $|AC| = |BC|$. Kreislinien sind die Ortslinien aller Punkte, die vom Kreismittelpunkt gleich weit entfernt sind. Wird *C* also auf dem Kreis um *A* mit Radius [*AB*] bewegt, dann gilt: $|AB| = |AC|$. Entsprechend gilt $|AB| = |BC|$, wenn *C* auf dem Kreis $k(B; |AB|)$ bewegt wird. Diese Verständnisgrundlage lässt sich am einfachsten visuell dargestellt verinnerlichen (etwa wie in **Abb. 3a**).

Analog lässt sich für rechtwinklige Dreiecke eine Verständnisgrundlage erarbeiten und verinnerlichen. Bei vorgegebener Seite [*AB*] ergeben sich die Ortslinien, auf denen der Eckpunkt *C* bewegt werden kann, sodass das Drei-

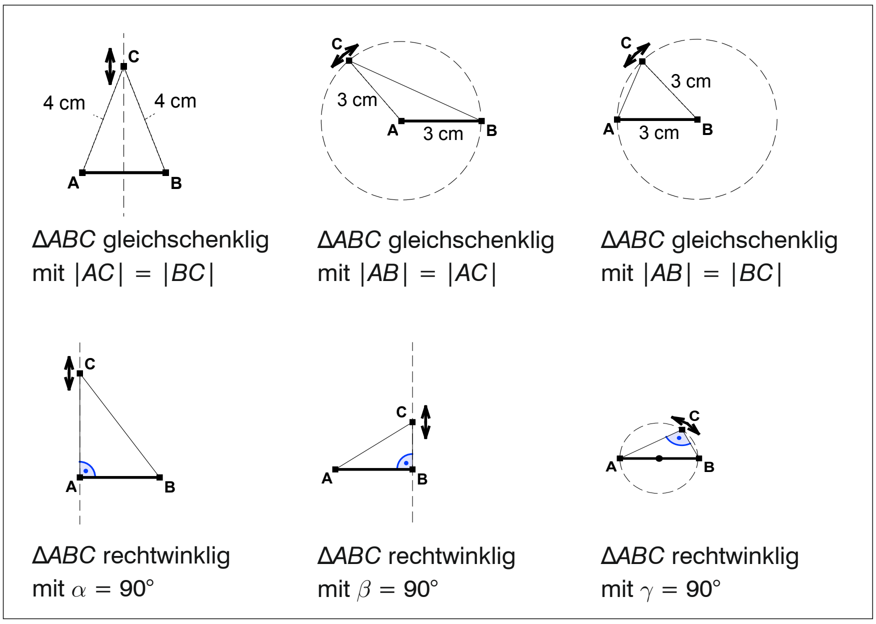

Abb. 3: Die der Aufgabe in Abb.2 zugrundeliegenden Grundvorstellungen

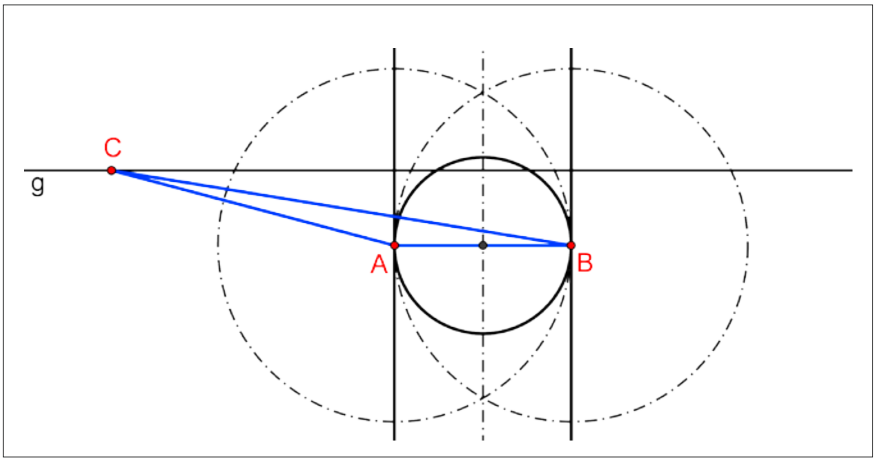

Abb. 4: Ortslinien für C markieren besondere Dreiecke: (gleichschenklig: gepunktet/rechtwinklig: gestrichelt)

eck ABC immer rechtwinklig bleibt, wie folgt: Ortslinien sind die Lote in A und B auf die Gerade AB, weil dann der Winkel α bzw. β ein rechter Winkel ist und für den Thaleskreis $k_{[AB]}$ über $[AB]$, weil γ genau dann ein rechter Winkel ist, wenn C auf $k_{[AB]}$ liegt (vgl. **Abb. 3b**). Nur auf der Grundlage derartiger Grundvorstellungen lässt sich die Aufgabe lösen.[1]

Bewegliches Denken fördern

Das bewegliche Denken wird bei der Aufgabe zu den Dreiecksgrundformen in allen drei genannten Komponenten genutzt und trainiert, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

Bewegung hineinsehen und damit argumentieren

Die Aufgabenstellung in Abb. 2 (beim Dreieck ABC wandert der Punkt C entlang einer Geraden) legt bereits nahe, eine *Bewegung in die statische Abbildung hineinzusehen und damit zu argumentieren*. Dazu ist es erforderlich, die Ausgangskonfiguration im Bild zu erfassen. Das Dreieck ABC ist zunächst stumpfwinklig. Bewegt man C auf g nach rechts, dann wird der Winkel α immer kleiner, bleibt aber stumpf, bis C sich oberhalb von A befindet. In dieser Situation ist α ein rechter Winkel und das Dreieck folglich nicht mehr stumpfwinklig, sondern rechtwinklig. Wird C weiter nach rechts bewegt, so wird α noch kleiner, also spitzwinklig und bleibt das auch für die gesamte restliche Bewegung.

Um festzustellen wo das Dreieck bei der Bewegung von C stumpfwinklig ist, muss die Gesamtkonfiguration erfasst und analysiert werden. Auch β, der Innenwinkel bei B, kann stumpf werden (wenn C sich jenseits von B befindet). Wenn C sich also links von A bzw. rechts von B befindet, ist das Dreieck ABC stumpfwinklig.

Wie sieht es aus, wenn C sich zwischen A und B befindet? In dieser Situation sind sowohl α als auch β spitze Winkel. Zur weiteren Analyse muss hier noch einmal umfokussiert und der Innenwinkel bei C, also γ, in den Blick genommen werden. Er ist genau dann ein rechter Winkel, wenn er sich auf dem Thaleskreis über $[AB]$ befindet. Wird C in den Thaleskreis hineinbewegt, so wird γ größer als 90°, also stumpf. Bewegt man C vom Thaleskreis nach außen, dann wird γ kleiner als 90°, also spitz (**Abb. 4**).

Insgesamt ergibt sich aus der Betrachtung der Innenwinkel des Dreiecks folgender Ablauf für Dreiecksgrundformen: Solange sich C links von A befindet ist das Dreieck stumpfwinklig, wird bei C über A rechtwinklig, anschließend spitzwinklig, bis C den Thaleskreis über $[AB]$ trifft. Dort ist das Dreieck rechtwinklig. Wenn C in den Thaleskreis hineinläuft wird das Dreieck stumpfwinklig usw. Stellt man sich (wie in Abb.4) sämtliche Ortslinien für C vor, für die das Dreieck rechtwinklig ist, so kann die Argumentation gut erfasst und nachvollzogen werden.

Anhand dieser Darstellung wird auch klar, wann das Dreieck ABC spitzwinklig ist (genau dann, wenn alle Innenwinkel spitze Winkel sind). α ist für C rechts von A spitzwinklig, β ist für C links von B spitzwinklig und γ ist für C oberhalb des Thaleskreises spitzwinklig. Das Dreieck ist also genau dann spitzwinklig, wenn sich C auf g zwischen A bzw. B und dem Thaleskreis befindet.

Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren

Im letzten Abschnitt war es für die Erarbeitung notwendig, die Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren. Dies ist auch im Folgenden zwingend notwendig. Bisher wurden nur die Innenwinkel in die Überlegungen einbezogen. Für die Frage, ob das Dreieck in manchen Lagen von C gleichschenklig ist, müssen auch die Längen der Dreiecksseiten in den Blick genommen werden. Untersuchungen (vgl. Roth 2005) haben gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler hier in der Regel nur die beiden von C ausgehenden Seiten in den Blick nehmen und folglich auch nur eine Situation entdecken, für die das Dreieck gleichschenklig ist, nämlich dann, wenn C auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $[AB]$ liegt. Dann sind die Seiten $[AC]$ und $[BC]$ des Dreiecks gleich lang.

Änderungsverhalten erfassen und beschreiben

Man kann auch qualitativ über das Änderungsverhalten der Seitenlängen bei der Bewegung von C argumentieren: Die Seite $[AC]$ wird bei der Bewegung von C nach rechts immer kürzer, bis C über A liegt. Danach wird die Seite $[AC]$ immer länger. Entsprechendes gilt für die Seite $[BC]$. Bei der Bewegung von C zwischen A und B verändern sich die Längen der beide Seiten also zunächst aufeinander zu.

Mit dieser Überlegung zum Änderungsverhalten der Seitenlängen lassen sich weitere Lagen von C finden und begründen, für die das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Man muss wieder umfokussieren und die beiden Seiten $[AB]$ und $[AC]$ in den Blick nehmen. Die Länge von $[AB]$ ändert sich bei der Bewegung von C nicht. $[AC]$ ist in der Ausgangslage von C länger als $[AB]$, wird immer kürzer und ist, wenn C über A liegt am kürzesten und kürzer als $[AB]$. Also muss $[AC]$ irgendwo dazwischen genausolang wie $[AB]$ sein, nämlich dort, wo der Kreis $k(A,[AB])$ um A mit Radius $[AB]$ die Gerade g scheidet. Für diese Lage von C ist ABC also gleichschenklig.

Nachdem $[AC]$ immer länger wird, wenn C von A aus nach rechts bewegt wird, muss es eine weitere Stelle geben, für die $[AB]$ und $[AC]$ gleich lang sind. Es handelt sich um den zweiten Schnittpunkt von $k(A,[AB])$ mit g. Diese Stelle liegt auf g „zwischen A und B".

Analog kann man auch für das letzte verbleibende Paar von Seiten, nämlich $[AB]$ und $[BC]$ argumentieren. Stellt man sich (wie in **Abb. 4b**) sämtliche Ortslinien für C vor, für die das Dreieck gleichschenklig ist, so kann die Argumentation gut erfasst und nachvollzogen werden, dass es fünf Lagen für C auf g gibt, für die das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Ergebnis

Nimmt man alle erarbeiteten Aspekte zusammen, so nimmt das Dreieck ABC bei der Bewegung von C auf g folgende Dreiecksgrundformen nacheinander an: stumpfwinklig, stumpfwinklig-gleichschenklig, stumpfwinklig, rechtwinklig, spitzwinklig, spitzwinklig-gleichschenklig, spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig, stumpfwinklig-gleichschenklig, stumpfwinklig, rechtwinklig, spitzwinklig, spitzwinklig-gleichschenklig, spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig, stumpfwinklig-gleichschenklig, stumpfwinklig.

Natürliche Differenzierung

Die Aufgabe „Dreiecksgrundformen" in Abb. 2 ist bewusst sehr offen formuliert. Auf diese Weise kann jeder einen Zugang finden und die Aufgabe seiner Leistungsfähigkeit entsprechend ausgestalten. So können sich einzelne Schüler nur auf die Frage der Gleich~~seitig~~keit konzentrieren und ggf. auch davon nur einen Teil beantworten. Andere nehmen die Innenwinkel in den Blick usw. Es sollte deutlich werden, dass eine intensive Auseinandersetzung, aber keine Vollständigkeit der Lösung gefordert ist. Auf diese Weise ergibt sich eine natürliche Differenzierung, die keinen überfordert, aber jeden fordert.

Die Bearbeitung kopfgeometrischer Aufgaben kann sehr gut mit dem Ich-Du-Wir-Prinzip kombiniert werden. Jeder bearbeitet die Aufgabe zunächst selbständig (Ich-Phase), Diskutiert seine Ergebnisse (ggf. auch unter Nutzung von Zeichnungen, Bewegungen mit den Händen, …) mit seinem Banknachbarn (Du-Phase), bevor anschließend im Plenum die Ergebnisse zusammengetragen und systematisiert werden. In der Du-Phase geht es nicht nur um die Ergebnisse sondern insbesondere auch um den Austausch über die Art und Weise wie sie zustande gekommen sind (Wie hast du dir das überlegt?). Gerade in der Du-Phase hat die Lehrkraft die Chance, individuelle Zugänge und Probleme der Schülerinnen und Schüler zu erleben und damit Hinweise für eine individuelle Diagnose des Leistungsstandes zu erhalten.

Die zweite Frage (Wie ändert sich das Ergebnis, wenn der Abstand von g zur Seite $[AB]$ vergrößert wird?) dient der Vertiefung für leistungsstärkere Schüler und sollte nicht gleich zu Beginn an alle Schülerinnen und Schüler ausgegeben werden. Ein Zugang zur Aufgabe soll hier nicht angegeben werden, weil man sich das Ergebnis anhand der Ortslinien in Abb. 4 gut klarmachen kann. Hieran wird allerdings deutlich, dass die Aufgabe ohne einen Hinweis auf den Abstand von g und $[AB]$ (hier in Form der Abbildung realisiert) nicht sinnvoll ist. Allerdings lässt sich eben dieser Abstand als weitere Differenzierungsmöglichkeit bereits bei der Aufgabenstellung nutzen.

Anmerkung

1 In Roth (2006) wird dargestellt, wie man diese Grundvorstellungen im Rahmen von produktiven Übungen mit einem dynamischen Geometriesystem (DGS) erarbeiten kann.

Literatur

Degner, R.; Kuehl, J. (1984): Kopfgeometrie. – In: MNU 37(6), S. 342–347.

Kerst, B. (1920): Kopfgeometrie. – In: ZmnU (1920) 51, S. 217–223.

Maier, P. H. (1996): Kopfgeometrie – Handlungsorientierte und visuelle Aufgabenstellungen. – In: Mathematik in der Schule 34 (1996) 5, S. 276–284.

Roth, J. (2005): Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Verlag Franzbecker: Hildesheim.

Roth, J. (2006): Dreiecksgrundformen – Horizonterweiterung durch operatives, entdeckendes und produktives Üben. – In: PM 48 (2006) 12, S. 21–25.

Roth, J./Wittmann, G. (2009): Ebene Figuren und Körper. – In: Weigand, H.-G. et al. (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg, S. 123–156.

Royar, T./Streit, Chr. (2006): Kopfgeometrie im Lernzirkel. – In: PM 48 (2006) 12, S. 26–31.

Senftleben, H.-G. (1996): Erkundungen zur Kopfgeometrie (unter besonderer Beachtung der Einbeziehung kopfgeometrischer Aufgaben in den MU der Grundschule). – In: JMD 17 (1996) 1, S. 49–72.