Jürgen Roth: Systematische Variation – Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. In: Mathematik lehren, Heft 146, Februar 2008

Jürgen Roth

Systematische Variation – Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie & Algebra

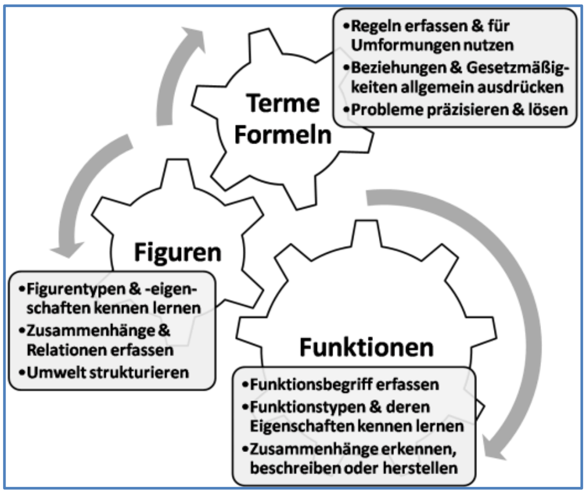

Abb. 1: Ziele des Mathematikunterrichts

Geometrie und Algebra, die beiden Hauptgebiete des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I werden häufig mehr oder weniger getrennt voneinander unterrichtet. Es gibt sogar Klassen bei denen an Stelle von Mathematik an manchen Tagen Geometrie und an anderen Tagen Algebra auf dem Stundenplan steht. Der vorliegende Artikel ist ein Plädoyer dafür, die beiden Aspekte Geometrie und Algebra im Mathematikunterricht wieder stärker miteinander zu vernetzen. Dies kann, wie hier an Beispielen veranschaulicht wird, sowohl für die Geometrie als auch für die Algebra, aber insbesondere für die Verständnisentwicklung unserer Schülerinnen und Schüler und deren Bild der Mathematik gewinnbringend sein.

Variieren – mit Neuen Medien leicht gemacht

Zum Erreichen dieses Ziels wird die grundlegende Idee der systematischen Variation eingesetzt, also das bewusste und zielgerichtete Verändern von „Einflussgrößen“ sowie das Beobachten und Interpretieren der daraus resultierenden Veränderungen der abhängigen Größen. Dies ist ein sehr alter Ansatz der z. B. von Treutlein (1911, S. 202f), Steiner (1967, S. 170f) und Bender & Schreiber (1985, S. 203f) um nur einige zu nennen propagiert wurde. Allerdings liegen erst mit den dynamischen Geometriesystemen (DGS) bzw. in noch stärkerem Maße mit den dynamischen Mathematiksystemen (DMS), wie z. B. GeoGebra von Hohenwarter (2007), Werkzeuge vor, die es erlauben systematische Variationen einfach umzusetzen und damit im naturwissenschaftlichen Sinn zu experimentieren. Der entscheidende Vorteil dieser Werkzeuge besteht darin, dass man mit ihrer Hilfe flexibel entscheiden kann, was und wie man variieren und in welcher Darstellung man die Auswirkungen der Variation untersuchen möchte. Schülerinnen und Schüler sind also völlig frei in ihrer Herangehensweise an die Probleme und können die ihnen jeweils am geeignetsten erscheinende Veranschaulichung wählen. Durch die Möglichkeit der Nebeneinanderstellung verschiedenster Darstellungen wie geometrische Figur, Tabelle, Graph und Term können diese wechselseitig interpretiert und vielfältige Erkenntnisse gewonnen werden. Jeder Schüler kann so den Zugang zu einem Problem wählen, der ihm persönlich vertraut ist und evtl. deshalb am geeignetsten erscheint. Von diesem Startpunkt aus kann man mit dem Werkzeug DMS auch andere möglicherweise für Teilaspekte des Problems geeignetere Zugänge und Darstellungen ausprobieren. Variiert man dabei die Einflussgroßen systematisch, dann können auch die zunächst nicht vertrauten Bereiche bzw. Darstellungsweisen aufgrund der parallel dazu vorhandenen vertrauten Ansicht interpretiert und im Idealfall verstanden werden. Einige der angesprochenen Möglichkeiten werden in diesem Artikel anhand eines auf dem DMS GeoGebra basierenden Applets erläutert. GeoGebra wird aktuell sogar mit dem Computeralgebrasystem Yacas[1] ausgestattet, wodurch weitere insbesondere algebraische Variationen, vor allem aber algebraische Interpretationen der Auswirkungen von gezielten Veränderungen an geometrischen Konfigurationen möglich werden.

Systematisch erkunden: Trapeze und ihre Flächeninhalte

Die Idee der systematischen Variation unter dem Aspekt der Integration von Geometrie und Algebra soll nun an einem sehr einfachen Beispiel aus der 8. Jahrgangsstufe, nämlich dem Flächeninhalt des Trapezes verdeutlicht werden. Dabei werden die Viereckslehre sowie der Umgang mit Termen und linearen Funktionen in Beziehung zueinander gesetzt und bereichern sich auf diese Weise gegenseitig. Die Methode der systematischen Variation, die sich auch auf die Darstellungen anwenden lässt (man denke etwa an graphische, symbolische und numerische Darstellungen), erleichtert das Erreichen von Zielen in allen drei genannten Inhaltsbereichen (vgl. Abb. 1), wodurch sie wie Zahnräder ineinandergreifen und sich gegenseitig befruchten können.

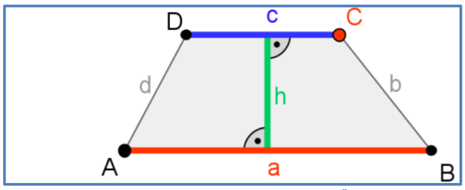

Abb. 2: Allgemeines Trapez, mit *a* ∥ *c*

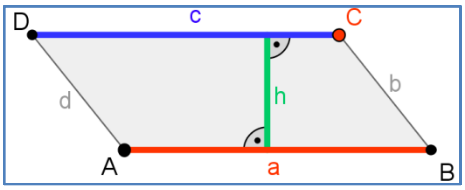

Abb. 3: Parallelogramm

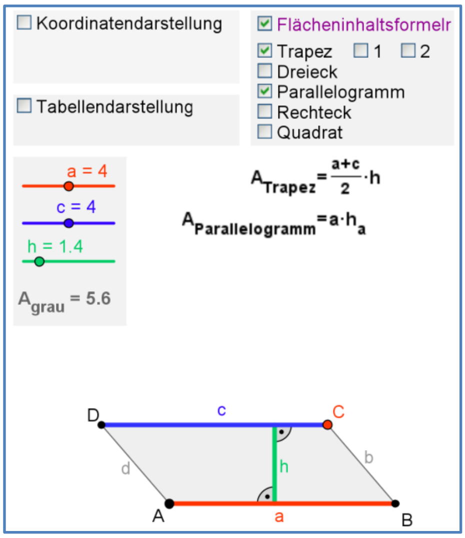

Abb. 4: Auswahlfelder und Schieberegler

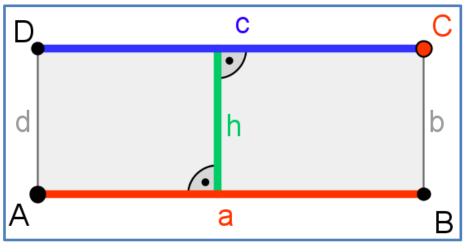

Abb. 5: Rechteck

Aspekt 1: Formen erkunden – Begriffe bilden

Wir betrachten zunächst ein allgemeines Trapez *ABCD* (vgl. Abb. 2) mit zueinander parallelen Seiten *a* und *c*. Variiert man z. B. die Länge der Seite *c*, dann bleiben *c* und *a* parallel zueinander und damit bleibt *ABCD* per Definition ein Trapez. Dies gilt auch dann noch, wenn *c* gerade die Länge von *a* annimmt, wenn *ABCD* also zum Parallelogramm geworden ist. Daraus folgt unmittelbar, dass das Parallelogramm geometrisch betrachtet nichts anderes als ein besonderes Trapez ist. Dies gilt natürlich auch für eine algebraische Betrachtung des Zusammenhangs. So muss sich z. B. der Flächeninhalt eines Parallelogramms (vgl. Abb. 3) mit Hilfe der Formel

$$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

für den Trapezflächeninhalt bestimmen lassen. Mit dem GeoGebra-Applet, auf das sich dieser Artikel bezieht, lassen sich alle beschriebenen systematischen Variationen durchführen, alle gewünschten Darstellungsweisen wählen und sogar die Formeln mit Hilfe von Auswahlfeldern abrufen (vgl. Abb. 4). Unter der Adresse http://www.juergen-roth.de/dynama/vierecke/trapezflaeche_funktional.html kann das Applet im Internet genutzt sowie auf den eigenen Rechner heruntergeladen und mit dem

[1] Vgl. http://yacas.sourceforge.net/ (Abgerufen am 25. Juli 2007.)

kostenlosen DMS GeoGebra genutzt werden. Da beim Parallelogramm die beiden parallelen Seiten *a* und *c* gleich lang sind, folgt in der Tat sofort:

$$A_{Parallelogramm} = A_{Trapez} = \frac{a+a}{2} \cdot h \ = \frac{2a}{2} \cdot h \ = a \cdot h = a \cdot h_a$$

Ersetzt man, wie im letzten Schritt geschehen, die Variable *h* durch die Variable h_a (für die zur Seite a gehörige Höhe), so erhält man auch für Schüler sofort erkennbar die Flächeninhaltsformel für Parallelogramme $A_{Parallelogramm} = a \cdot h_a$. Mit der Trapezflächeninhaltsformel lässt sich aber noch mehr anfangen. Sie ist, wie Vollrath (1999) betont, eine „Superformel", mit der der Flächeninhalt für alle Sonderfälle des Trapezes bestimmt werden kann. Diese bekannte Tatsache können Schülerinnen und Schüler besonders greifbar erfahren, wenn sie mit einer DGS-Datei bzw. dem vorgestellten Applet an einem Trapez *ABCD*, bei dem die Seiten *a* und *c* parallel zueinander sind, experimentieren. Wichtig ist dabei, dass, wie im obigen Beispiel, nur bestimmte, klar definierte Veränderungen möglich sind. Dies ist hier zentral für die Einsicht, dass die betrachteten Viereckstypen *Ober- bzw. Unterbegriffe* voneinander sind. Nur so lassen sich nämlich Beziehungen zwischen ihnen bewusst erfassen. Ein gangbarer Weg zur Erarbeitung einer solchen Begriffshierarchie besteht darin, Verbindungen zwischen verwandten Begriffen zu untersuchen bzw. herzustellen. Dabei geht man von einer Realisierung[2] des Begriffs aus und überlegt, ob sie unter Beibehaltung ihrer charakteristischen Eigenschaften in eine Realisierung eines verwandten Begriffs verändert werden kann. Ist dies der Fall, so handelt es sich beim verwandten Begriff um einen Unterbegriff. Müssen beim Übergang in den verwandten Begriff dagegen eine oder mehrere der charakteristischen Eigenschaften aufgegeben werden, so handelt es sich bei dem verwandten Begriff um einen Oberbegriff. Bei der Veränderung ist zu beachten, dass sie nicht „irgendwie" erfolgt, sondern gemäß einer Strategie, die festlegt, was auf welche Art und Weise verändert wird. Nur bei einer derart kontrollierten Veränderung ist es möglich, den Überblick zu behalten und Zusammenhänge zu erfassen. Die Bezeichnung „systematische Variation" im Titel dieses Artikels bezieht sich auf dieses bewusste und reflektierte Verändern, bei dem die Variation gezielt durchgeführt wird und man sich jederzeit Rechenschaft darüber geben kann, wie sie erfolgt ist.

In der unter http://www.juergen-roth.de/dynama/vierecke/trapezflaeche_funktional.html abrufbaren DGS-Datei (vgl. Abb. 2 bis Abb. 6) lassen sich folgende Aspekte eines Trapezes *ABCD*, bei dem die Seiten *a* und *c* parallel zueinander sind, einzeln verändern:

- Länge der Seite *c* (Schieberegler *c*)
- Länge der Seite *a* (Schieberegler *a*)
- Länge der Höhe *h* (Schieberegler *h*)
- Lage der Seite *c*, unter Beibehaltung der Parallelität und des Abstands zur Seite *a* (Länge der Höhe *h*) sowie der Länge von *c* selbst (Zugpunkt: *C*).

So lässt sich durch geeignete Variationen feststellen, dass das Rechteck ein besonderes Parallelogramm (Durch Ziehen am Punkt *C* gelangt man von Abb. 3 nach .) und das Quadrat ein besonderes Rechteck ist (Durch Ziehen am Schieberegler *h* kommt man von nach Abb. 6.). Erfasst man die bei diesen systematischen Variationen eines

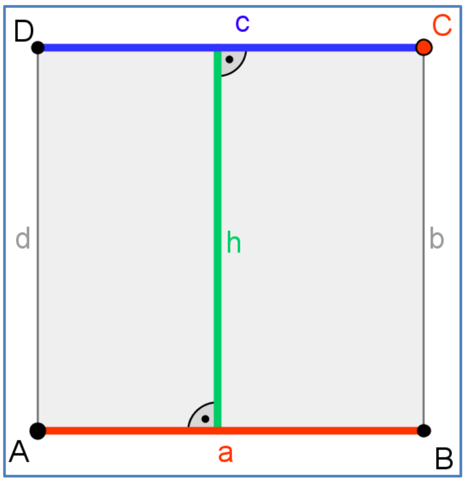

Abb. 6: Quadrat

[2] Eine Realisierung eines Begriffs ist ein konkretes Element der durch den Begriffsumfang festgelegten Menge.

Vierecks auftretenden Veränderlichen und Invarianten, dann lassen sich damit Zusammenhänge zwischen verschiedenen Viereckstypen erschließen und verstehen. Für die genannten Viereckstypen ergibt sich damit die Begriffshierarchie Trapez → Parallelogramm → Rechteck → Quadrat, wobei die Pfeile jeweils als „ist Oberbegriff von“ zu lesen sind.

Aspekt 2: Sinnvolle Termumformungen

Diese Erkenntnis bzgl. geometrischer Begriffe lassen sich nutzen, um Aspekte von Termumformungen und das Einsetzen von Variablen in Terme sinnhaltig zu üben. Betrachtet man die Trapezflächeninhaltsformel nämlich als „Superformel“, so lassen sich neben der Flächeninhaltsformel für Parallelogramme auch die für Rechtecke ($h = b$ und $a = c$)

$$A_{Rechteck} = A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{a+a}{2} \cdot b = \frac{2a}{2} \cdot b = a \cdot b$$

(vgl. Abb. 5) und Quadrate ($a = b = c = h$)

$$A_{Quadrat} = A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{2a}{2} \cdot a = a \cdot a = a^2$$

(vgl. Abb. 6) analog herleiten. Hier werden wichtige Erfahrungen mit Formeln gesammelt, Umformungen geübt und Flexibilität in der Verwendung und im Ersetzen von Variablen gewonnen. Die Schülerinnen haben bei Umformungsübungen, die in geometrische Zusammenhänge eingebettet sind auch die Möglichkeit, die für sie teilweise abstrakten Termumformungen anschaulich zu interpretieren und können sich so eine Verständnisgrundlage aufbauen.

Aspekt 3: Grenzfälle untersuchen

Systematische Variation beinhaltet immer auch das bewusste Aufsuchen von Grenzfällen um die Möglichkeiten auszuloten und evtl. neue Erkenntnisse zu gewinnen. Die Variablen a, c und h in der Flächeninhaltsformel $A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h$ für Trapeze bezeichnen jeweils Strecken und können folglich keine negativen Werte annehmen. Was passiert aber im Grenzfall, wenn a, c oder h gleich Null wird? Nun, wenn die Höhe h immer kleiner wird, dann wird das Trapez auch immer „niedriger“, bis es für $h = 0$ zu einer Strecke entartet (vgl. Abb. 7), deren Flächeninhalt gleich Null ist. Dies korrespondiert mit der Tatsache, dass der Wert eines Produkts gleich Null ist, wenn ein Faktor Null ist. Verkürzt man die Seite c immer weiter, dann entartet das Trapez im Grenzfall für $c = 0$ zu einem Dreieck (vgl. Abb. 8). Entsprechend erhält man beim Einsetzen von $c = 0$ in die Trapezflächeninhaltsformel $\frac{a+0}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = A_{Dreieck}$ die Flächeninhaltsformel für Dreiecke. Analoges ergibt sich, wenn $a = 0$ wird. Damit ist auch die Flächeninhaltsformel für Dreiecke in der für Trapeze als Grenzfall enthalten.

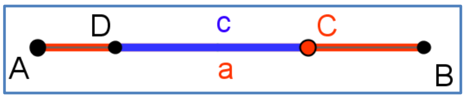

Abb. 7: Zu einer Strecke entartetes Trapez mit *h* = 0

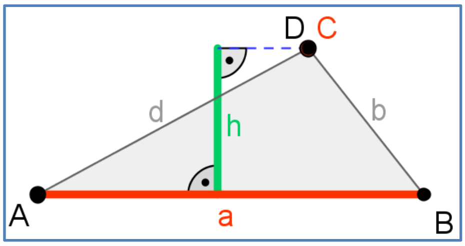

Abb. 8: Zu einem Dreieck entartetes Trapez mit *c* = 0

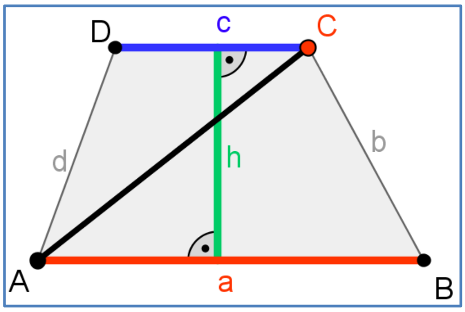

Abb. 9: Trianguliertes Trapez

Aspekt 4: Formeln interpretieren

Die Flächeninhaltsformel für Trapeze ermöglicht aber noch weitere Erkenntnisse. Wenn man den Term z. B. ausmultipliziert, dann ergibt sich (vgl. Auswahlfeld „Trapez 1“ in Abb. 4):

$$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

Dies lässt sich als Summe aus zwei Dreiecksflächeninhalten interpretieren, und zwar ein Dreieck mit der Grundlinie *a* und der Höhe *h* sowie eines mit der Grundlinie *c* und derselben Höhe. Zwei derartige Dreiecke findet man geometrisch problemlos, indem man das Trapez *ABCD* trianguliert (vgl. Abb. 9). Allerdings müssen Schülerinnen und Schüler, um auf diese Sichtweise zu kommen in der Lage sein, flexibel mit geometrischen Figuren umzugehen, d. h. hier gedanklich die Position bezüglich der Figur variieren zu können und im Dreieck *ACD* die Seite *c* als Grundlinie wahrzunehmen.

Hier können also Prozesskompetenzen für die Geometrie und für die Algebra angebahnt bzw. geübt werden, wobei das Verständnis für beide Bereiche vertieft werden kann, sie also wechselseitig voneinander profitieren.

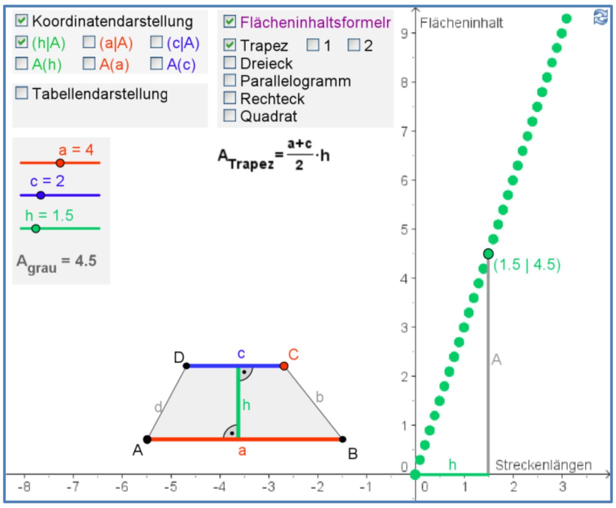

Abb. 10: Entstehung des Graphen der Funktion $A_{a,c}(h)$

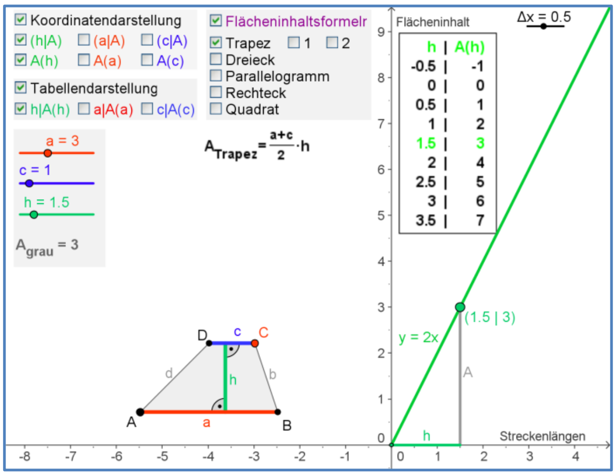

Abb. 11: Funktionsgraph und dynamische Tabelle

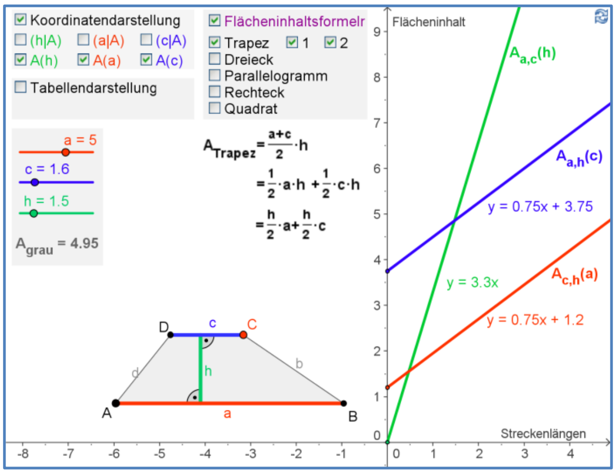

Abb. 12: Graphen für verschiedene Einflussgrößen

Aspekt 5: Funktionale Zusammenhänge entdecken

Dies zeigt sich auch bei der Auseinandersetzung mit folgender Frage: Wie – bzgl. möglicher Variationen – hängt der Flächeninhalt des Trapezes von den Bestimmungsgrößen *a*, *c* und *h* ab? Betrachten wir dazu zunächst die Abhängigkeit von der Höhe h des Trapezes. Zunächst ist klar (vgl. Abb. 7), dass der Flächeninhalt gleich Null ist, wenn die Höhe Null ist. Wie ändert sich aber der Flächeninhalt wenn die Höhe gleichmäßig vergrößert wird? Offensichtlich wird der Flächeninhalt bei wachsender Höhe auch immer größer. Wird er aber, genau wie die Höhe, immer gleichmäßig größer oder ändert er sich manchmal schneller und manchmal langsamer? Geometrisch lässt sich die Frage z. B. dadurch klären, dass man ein Trapez zu einem flächeninhaltsgleichen Rechteck gleicher Höhe umbauen kann. Für ein solches Rechteck ist sofort klar, dass der Flächeninhalt bei gleichmäßig wachsender Höhe (Breite) auch gleichmäßig wächst. Man kann aber den funktionalen Zusammenhang zwischen der Höhe und dem Flächeninhalt des Trapezes auch direkt in einem Koordinatensystem darstellen lassen. Dazu konstruiert man einen Punkt, der die entsprechende Abhängigkeit in seinen Koordinaten wiederspiegelt. Einfacher und schneller erhält man einen solchen Punkt mit einem DGS, wenn man ihn mit vorgegebenen Koordinaten definiert. In unserem Fall also einen Punkt $P(h|A)$ mit der Länge der Höhe h als x- und dem Flächeninhalt A des Trapezes $ABCD$ als y-Koordinate. Variiert man nun die Höhe h des Trapezes, so bewegt sich der Punkt im Koordinatensystem. Zeichnet man dabei die Spur (bzw. in anderen DGS die Ortslinie) dieses Punktes ein, so kann man die Entstehung des Graphen des zugehörigen funktionalen Zusammenhangs erleben (vgl. Abb. 10). Es handelt sich offensichtlich um eine Ursprungsgerade (vgl. Abb. 11), die Länge der Höhe h und der Flächeninhalt A des Trapezes sind also proportional zueinander. Dies lässt sich geometrisch verstehen, wenn man sich erinnert, dass für h = 0 das Trapez zu einer Strecke entartet und sich jedes Trapez zu einem Rechteck gleicher Höhe umbauen lässt, also zerlegungsgleich zu ihm ist. Algebraisch lässt sich dieser Zusammenhang mit Hilfe der Flächeninhaltsformel für Trapeze einsehen, wenn man a und c konstant hält und die Formel wie folgt umformt:

$$\frac{A_{Trapez}}{h} = \frac{a+c}{2} = const.$$

Diese Proportionalität lässt sich auch an der zugehörigen, mit GeoGebra über ein Textfeld erzeugbaren dynamischen Tabelle erforschen (vgl. Abb. 11). Die Tabelleneinträge ändern sich dynamisch mit der Variation des Schiebereglers h, wobei der mittlere Tabellenwert jeweils dem aktuellen Wert entspricht. Mit dem Schieberegler Δx neben der Tabelle lässt sich die Schrittweite der x-Werte (hier der Werte von h) zwischen 0,1 und 1 in Stufen von 0,1 einstellen. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler auch numerische Erfahrungen zu dem funktionalen Zusammenhang zwischen der Höhe h und dem Flächeninhalt A des Trapezes sammeln. Hier erkennt man z. B., dass zur doppelten bzw. dreifachen Höhe (bei festgehaltenem a und c) auch der doppelte bzw. dreifache Flächeninhalt gehört.

Einsatzmöglichkeiten im Unterricht

Alle bisher beschriebenen Zugangsweisen können mit Hilfe des hier vorgestellten GeoGebra-Applets für alle Einflussgrößen gewählt werden. Auf diese Weise kann jede Klasse und auch jede Schülerin, jeder Schüler individuell und ganz flexibel einen eigenen Zugang zu diesem Themennetz finden, selbstständig Zusammenhänge erforschen und eigene Ideen überprüfen. Dieses Applet eignet sich folglich gut für eine forschende Einzel- oder Partnerarbeit am Computer. Darüber hinaus bietet es sich aber auch als Visualisierungs- und Demonstrationswerkzeug für ein wirklich offenes Unterrichtsgespräch an. Denn damit kann allen Vorschlägen und Anfragen von Schülerinnen und Schülern flexibel nachgegangen werden.

Weitere Erkundungen

Auf die bisher gewonnenen Erkenntnisse aufbauend kann es eine interessante Fragestellung sein, wie die Graphen der Funktionen $A(a)$ und $A(b)$ aussehen, die die Abhängigkeiten des Trapezflächeninhalts von der Länge der Seite a bzw. der Seite b ausdrücken. Ein möglicher Zugang könnte wieder geometrisch erfolgen. Er würde die systematische Variation der Einflussgrößen einschließlich einer bewussten Überprüfung von Extremfällen umfassen. Hier soll aber ein anderer Zugang gewählt werden. Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, den Verlauf der entsprechenden Graphen vorherzusagen und ihre Vorhersage zu notieren. Anschließend werden die beiden Graphen ausgegeben. Die evtl. auftretenden Diskrepanzen zu den Vorhersagen der Schülerinnen und Schüler bieten eine gute Grundlage, um über die Eigenschaften der Graphen zu reflektieren und diese nachträglich zu erklären. Viele Schülerinnen und Schüler vermuten nach der Erfahrung mit dem Graph $A(h)$, dass auch die Graphen A(a) und A(c) Ursprungsgeraden (bzw. Ursprungshalbgeraden) sind. Dies lässt sich anhand der zugehörigen geometrischen Konfiguration leicht widerlegen, weil ein Verkürzen der Strecke *a* oder der Strecke *c* des Trapezes im Grenzfall für *a* = 0 bzw. *c* = 0 zu einem Dreieck führt, dessen Flächeninhalt *A* natürlich ungleich Null ist (vgl. Abb. 8). Interessant ist auch, dass die beiden Funktionsgraphen *A*(*a*) und *A*(*c*) offensichtlich parallel verlaufen, ihre Steigung also gleich ist. Hier kann es sich lohnen, die Flächeninhaltsformel für Trapeze noch einmal genauer anzusehen.

$$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Betrachtet man diese Gleichung als Funktionsgleichung, so fällt zunächst auf, dass es eine Funktion dreier Veränderlicher ist:

$$A_{Trapez}(a,c,h) = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{h}{2} \cdot a + \frac{h}{2} \cdot c$$

Um den Term besser interpretieren zu können, bietet es sich an, zulässige Termumformungen durchzuführen. Im Sinne der heuristischen Strategie des Rückwärtsarbeitens versucht man dabei die an den Graphen bereits erkannten proportionalen bzw. linearen Zusammenhänge auch in der Termstruktur zu identifizieren. Dadurch kann sich der Bauplan für einen funktionalen Zusammenhang erschließen. Entsprechende Umformungen wurden oben bereits durchgeführt. In der Schule werden Erfahrungen mit funktionalen Zusammenhängen in der Regel mit Funktionen einer Variablen gewonnen. Will man sich auch hier nur mit derartigen Funktionen auseinandersetzen, dann handelt es sich hier um Parameterfunktionen mit jeweils zwei Parametern. Bezeichnet man die Funktionsvariable jeweils mit x, so kann man den Funktionsterm in die Eingabezeile des GeoGebra-Applets eintragen und den ausgegebenen Funktionsgraph direkt mit dem geometrisch-empirisch erhaltenen vergleichen (vgl. Abb. 13):

$$A_{a,c}(\boldsymbol{h}) = \frac{a+c}{2} \cdot \boldsymbol{h} \qquad A_{a,c}(\boldsymbol{x}) = \frac{a+c}{2} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$A_{c,h}(\boldsymbol{a}) = \frac{h}{2} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{h \cdot c}{2} \qquad A_{c,h}(\boldsymbol{x}) = \frac{h}{2} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{h \cdot c}{2}$$

$$A_{a,h}(\boldsymbol{c}) = \frac{h}{2} \cdot \boldsymbol{c} + \frac{h \cdot a}{2} \qquad A_{a,h}(\boldsymbol{x}) = \frac{h}{2} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{h \cdot a}{2}$$

Die Funktion $A_{a,c}(h)$ kann anhand ihres Terms als proportionale Funktion identifiziert werden. Ihre Steigung ist offensichtlich der Mittelwert aus *a* und *c*. Variiert man also *a* oder *c*, dann, so lässt sich voraussagen, wie sich die Steigung des Graphen von $A_{a,c}(h)$ verändert und diese Vorhersage mit dem GeoGebra-Applet (vgl. Abb. 12) überprüfen. Betrachtet man die beiden Funktionsterme $A_{c,h}(a)$ und $A_{a,h}(c)$, so erkennt man zwei lineare Funktionen, die mit $\frac{h}{2}$ denselben Steigungsfaktor besitzen und deshalb parallel zueinander verlaufen. Wird die Höhe *h* des Trapezes variiert, dann ändern sich auch die Steigungen der beiden zueinander parallelen Graphen entsprechend. Die Achsenabschnitte der beiden Funktionen sind von *h* und *c* bzw. von *h* und *a* abhängig und nur dann gleich, wenn *a* gleich *c* ist. Dies ist dann der Fall, wenn das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm ist. In diesem Fall sind die beiden Funktionen $A_{c,h}(a)$ und $A_{a,h}(c)$ natürlich gleich und die beiden Graphen fallen als Ursprungsgerade (!) zusammen. Es lohnt sich diesen Zusammenhang mit dem GeoGebra-Applet zu untersuchen.

Es gibt noch viele weitere interessante Fragestellungen im Umfeld des Trapezflächeninhalts, die mit Hilfe der systematischen Variation und unter Zuhilfenahme des GeoGebra-Applets oder einer selbst erstellten DGS-Datei untersucht werden können. Z. B. kann die Frage interessant sein, wo und warum sich die Graphen in Abb. 13 schneiden. Mit solchen Fragestellungen ist das Potential dieses Ansatzes noch lange nicht erschöpft. Eine auf geometrische Konfigurationen und deren systematische Variation gestützte Propädeutik der Infinitesimalrechnung findet sich etwa in Roth (2005).

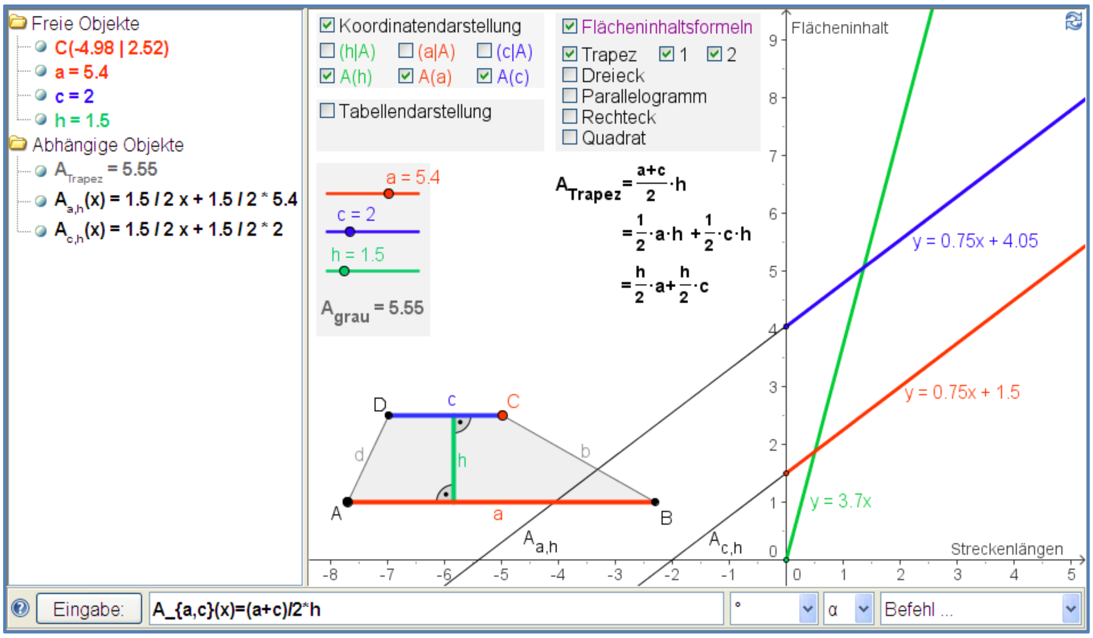

Abb. 13: Vergleich der empirisch und algebraisch erhaltenen Funktionsgraphen

Fazit

In diesem Artikel wurde an einem Beispiel aus dem Kerncurriculum der 8. Klasse aufgezeigt, wie es möglich ist, Ziele im Hinblick auf scheinbar weit voneinander entfernt liegende Inhalte des Mathematikunterrichts integriert zu erreichen. Die grundlegende Idee dabei ist die systematische Variation. Unter Zuhilfenahme eines geeigneten Werkzeugs, hier des dynamischen Mathematiksystems GeoGebra, ermöglicht sie, Aspekte von Geometrie und Algebra integriert zu unterrichten. Dabei bereichern sich die verschiedenen Bereiche wie Term bzw. Formel, Figur und Funktion gegenseitig und Geometrie und Algebra werden auch von Schülerinnen und Schülern nicht getrennt sondern als verschiedene Schwerpunktsetzungen im Bereich der Mathematik mit starken Wechselbeziehungen wahrgenommen. Am vorgestellten Beispiel konnte, auch aus Platzgründen, nicht auf alle wichtigen Aspekte der genannten Bereiche eingegangen und aufgezeigt werden, wie sie jeweils von diesen wechselseitigen Bezügen profitieren. Bei einer Umsetzung dieses Konzepts im Unterricht werden gerade auch durch die Auseinandersetzung mit Entdeckungen und Fragestellungen der Schülerinnen und Schüler fast alle der in Abb. 14 zusammengestellten Aspekt von diesem integrierten Zugang profitieren.

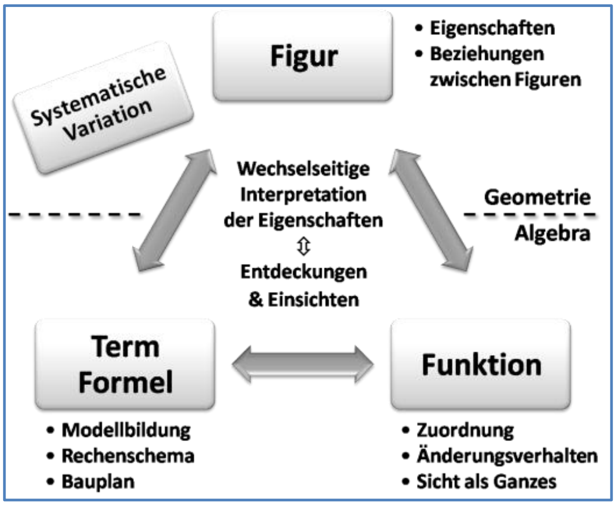

Abb. 14: Systematische Variation als Weg zur Verbindung von Geometrie und Algebra

Literaturverzeichnis

Bender, P., & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Hohenwarter, M. (2007). *GeoGebra*. Abgerufen am 25. Juli 2007 von http://www.geogebra.org

Roth, J. (2005). Kurven erzeugende Sehnen. *Mathematik lehren* (130), S. 8-10.

Steiner, H.-G. (1967). Zur Behandlung des Funktionsbegriffs. In H. Behnke, & H.-G. Steiner, *Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen* (S. 139-173). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Treutlein, P. (1911). *Der geometrische Anschauungsunterricht.* Leipzig und Berlin: B. G. Teubner.

Vollrath, H.-J. (1999). An geometrischen Formeln Zusammenhänge erkennen. *Mathematik in der Schule* (37), S. 70-75.